

Enunciados

Dado el triángulo de vértices $A = (-1, 2)$, $B = (11, -7)$ y $C = (23, 9)$, se pide:

- ① Averigua la ecuación implícita de «z», bisectriz del ángulo en A.
- ② Calcula el incentro, que llamaremos I.
- ③ Calcula el radio de la circunferencia inscrita.

Resoluciones

- ① Llamamos «r» a la recta que pasa por A y B.

$$\overrightarrow{AB} = (12, -9) \Rightarrow \vec{n}_r = (3, 4) \Rightarrow r \equiv 3x + 4y + k = 0; A \in r \Rightarrow k = -5; r \equiv 3x + 4y - 5 = 0$$

Llamamos «s» a la recta que pasa por A y C.

$$\overrightarrow{AC} = (24, 7) \Rightarrow \vec{n}_s = (7, -24) \Rightarrow s \equiv 7x - 24y + k = 0; A \in s \Rightarrow k = 55; s \equiv 7x - 24y + 55 = 0$$

Llamamos $P = (x, y)$ a un punto cualquiera de «z». Se verifica:

$$d(P, r) = d(P, s) \Rightarrow \frac{|3x + 4y - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|7x - 24y + 55|}{\sqrt{7^2 + (-24)^2}} \Rightarrow \frac{|3x + 4y - 5|}{5} = \frac{|7x - 24y + 55|}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |3x + 4y - 5| = \frac{|7x - 24y + 55|}{5} \Rightarrow 5|3x + 4y - 5| = |7x - 24y + 55| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(3x + 4y - 5) = 7x - 24y + 55 \\ 5(3x + 4y - 5) = -(7x - 24y + 55) \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} 2x + 11y - 20 = 0 \\ 11x - 2y + 15 = 0 \end{cases}$$

$(2x + 11y - 20)$ en B vale -75; $(2x + 11y - 20)$ en C vale 125

Solución: $z \equiv 2x + 11y - 20 = 0$

- ② El incentro de un triángulo dista lo mismo de los tres lados, luego se puede calcular como el punto de corte de las tres bisectrices de los ángulos.

Tenemos la ecuación implícita de una bisectriz, nos falta otra; llamamos «w» a la bisectriz del ángulo en B. Llamamos «t» a la recta que pasa por B y C.

$$\overrightarrow{BC} = (12, 16) \Rightarrow \vec{n}_t = (4, -3) \Rightarrow t \equiv 4x - 3y + k = 0; B \in t \Rightarrow k = -65; t \equiv 4x - 3y - 65 = 0$$

Llamamos $P = (x, y)$ a un punto cualquiera de «w». Se verifica:

$$d(P, t) = d(P, r) \Rightarrow \frac{|4x - 3y - 65|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|3x + 4y - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow \frac{|4x - 3y - 65|}{5} = \frac{|3x + 4y - 5|}{5} \Rightarrow$$

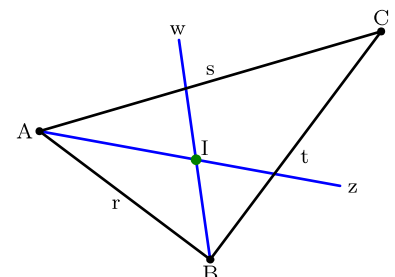
$$\Rightarrow |4x - 3y - 65| = |3x + 4y - 5| \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x - 7y - 60 = 0 \\ 7x + y - 70 = 0 \end{cases}$$

$(x - 7y - 60)$ en A vale -75; $(x - 7y - 60)$ en B vale -100;

luego, $w \equiv 7x + y - 70 = 0$

El incentro es el punto de corte de «z» y «w»:

$$\begin{cases} 2x + 11y = 20 \\ 7x + y = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 0 \end{cases}; \text{ Solución: } I = (10, 0)$$



- ③ El radio de la circunferencia inscrita es igual a la distancia entre el incentro y un lado cualquiera del triángulo. Radio = $d(I, r) = \dots = 5$. Solución: 5.