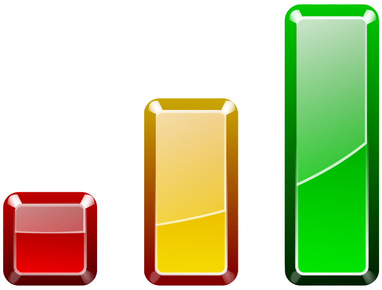
Curso de Matemáticas de Secundaria

Pedro Reina

http://pedroreina.net/cms



Versión abreviada
20250819

Presentación para el alumnado

Propósito

Este curso pretende ayudarte en las asignaturas de Matemáticas de tu enseñanza secundaria. Está pensado para que te dirija un profesor o profesora, pero puedes usarlo por ti mismo o por ti misma cuando creas que te puede servir.

Repetición de contenidos

Los libros de texto habitualmente repiten gran parte de su contenido en los distintos niveles; es lógico hacerlo así. Este curso, sin embargo, se presenta completo, con todos los niveles y por tanto permite no repetir: siempre puedes saltar a un nivel inferior o superior cuando sea necesario.

Cálculo mental

A lo largo del curso, pero muy especialmente en los dos primeros niveles, se hace hincapié en el cálculo mental, ya que considero que es una herramienta que, bien usada, te permitirá acelerar los desarrollos de niveles superiores.

Calculadora

El cálculo mental, el cálculo en papel, el uso de calculadoras científicas y de programas de ordenador son complementarios. Tienes que desarrollar la capacidad de distinguir cuándo es más apropiada una u otra herramienta.

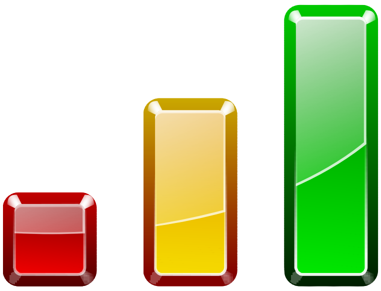
En los niveles 1 y 2 no debes usar la calculadora; en los demás sí, y el curso te explica cómo hacerlo. Además, te daré pistas sobre el uso de programas para mejorar tu capacidad matemática.

Ejercicios y problemas

Procuro distinguir claramente entre los ejercicios y los problemas. Los ejercicios apenas requieren más que repetir las técnicas explicadas y te sirven para afianzar su conocimiento y aplicación, pero en los problemas tienes que poner en acción algo más, algo tuyo. El curso te muestra técnicas específicas para mejorar en la resolución de problemas, que es una capacidad que se puede entrenar.

El icono del curso

Espero que interpretes el icono como el avance en tu capacitación matemática.



Presentación para el profesorado

Propósito

Este curso te puede servir de ayuda en tu tarea docente; para ello, ofrece distinto material con una licencia libre que te permite adaptarlo a tus necesidades.

Granularidad

El formato inusual del curso está diseñado para potenciar su granularidad: está dividido en pequeños archivos, cada uno de ellos con contenido muy limitado. Se pretende con eso que sea más sencilla la adaptación a cada caso particular.

Repetición de contenidos

Los libros de texto con licencia comercial repiten gran parte de su contenido en los distintos niveles; es lógico hacerlo así. La licencia libre de este curso, sin embargo, permite no repetir: siempre se puede saltar a un nivel inferior o superior cuando sea necesario, ya que se dispone en el curso completo de todos los niveles.

Cálculo mental

A lo largo del curso, pero muy especialmente en los dos primeros niveles, se hace hincapié en el cálculo mental, ya que se considera que es una herramienta que, bien usada, permite acelerar notablemente los desarrollos de niveles superiores.

Calculadora

El cálculo mental, el cálculo en papel, el uso de calculadoras científicas y de programas de ordenador son complementarios. Hay que desarrollar la capacidad de discernir cuándo es más apropiada una u otra herramienta.

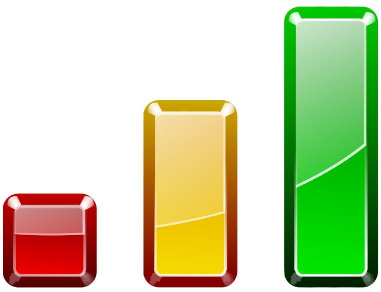
En los niveles 1 y 2 no se usará la calculadora y en los demás sí, explicando cómo hacerlo. Además, se darán pistas sobre el uso de programas para mejorar la capacidad matemática.

Ejercicios y problemas

Se procura distinguir claramente entre los ejercicios y los problemas. Los ejercicios apenas requieren más que repetir las técnicas explicadas y sirven para afianzar su conocimiento y aplicación, pero en los problemas hay que poner en acción algo más. Mejorar en la resolución de problemas requiere el conocimiento de técnicas específicas, que se pueden entrenar.

El icono del curso

Se ha elegido por su buena adaptación a tamaños pequeños y por su posible interpretación como el avance en la capacitación matemática.



Estructura del curso

Niveles

Existen seis niveles numerados del 1 al 6. El nivel 1 es el de contenido más sencillo y el 6 el de más avanzado.

Partes

Cada nivel incluye cinco partes:

- Aritmética
- Álgebra
- Análisis
- Geometría
- Estadística y probabilidad.

En total hay 29 partes, porque en el nivel 6 no hay contenidos de Aritmética.

Temas

Cada parte está distribuida en un número variable de temas. Cada tema se desarrolla en un único archivo `html`.

Secciones

Cada tema está distribuido en un número variable de secciones, que se distinguen visualmente en el archivo y tienen su propia URL.

Recursos

Cada sección se desarrolla con un número variable de recursos contenidos en archivos `pdf` externos, precedidos de un corto texto explicativo.

Formalmente pueden ser de dos tipos:

- Texto en papel de tamaño DIN A4, preparado para imprimir.
- Presentación en formato 4:3, preparada para ver en pantalla.

Respecto al contenido, puede ser:

- Teoría, con explicaciones o ejemplos.
- Ejercicios de cálculo mental, con las soluciones.
- Propuestas de ejercicios, con las soluciones.
- Propuestas de problemas, con las soluciones.

Nomenclatura

Para nombrar los archivos `html` y `pdf` se usan las siguientes convenciones:

- El nivel se designa con dos caracteres, desde `n1` hasta `n6`.
- La parte se designa con tres caracteres: `art`, `alg`, `ana`, `geo` y `est`.
- El tema se designa con tres caracteres.
- La sección se designa con cuatro caracteres.
- Los recursos de cálculo mental se designan `cm`.
- Los recursos de teoría se designan `tr`.
- Los recursos de ejercicios se designan `ej`.
- Los recursos de problemas se designan `pr`.

	A	B	C	D	E
1	8+7	9+2	3+7	8+4	5+10
2	12+7	11+4	13+9	22+5	33+8
3	9–5	8–3	10–7	8–1	13–2
4	15–9	18–9	2–1	22–8	33–17
5	4×3	5×9	3×8	1×7	2×12
6	9×9	7×6	11×3	15×2	12×3
7	16:2	27:9	25:5	42:7	24:3
8	24:2	15:3	18:6	50:10	32:8
9	12+19	13+101	42–38	100–2	13×3
10	15×5	120:6	45:9	2+8+3	2×3×5

	A	B	C	D	E
①	3+6	11+5	8+5	7+13	8+11
②	15+7	12+14	21+7	23+4	41+9
③	9–3	8–5	12–7	15–1	3–2
④	25–8	19–4	51–2	23–8	32–18
⑤	7×3	8×9	4×8	1×13	2×11
⑥	9×7	7×7	11×4	14×2	13×3
⑦	18:2	36:9	35:5	56:7	18:3
⑧	46:2	30:3	48:6	40:8	32:4
⑨	12+21	15+102	43–39	100–4	23×3
⑩	15×6	180:6	99:9	5+8+13	2×2×6

	A	B	C	D	E
①	3×6	81:9	13+8	40–8	3+17
②	25–7	22+4	13×2	56:8	90:9
③	15+15	104–2	4×7	8×8	15–12
④	25:5	35:7	98–94	101+102	7×8
⑤	12+24	64:8	7×8	153:1	22×2
⑥	22:2	22+27	16+14	35×2	60:3
⑦	8+18	45–39	45:9	30+55	27:3
⑧	9×4	21×4	36:6	10×10	42:42
⑨	2+202	102–99	31+19	32–4	3×33
⑩	20×10	250:5	77:11	8+3–2	3×3×10

	A	B	C	D	E
①	7×9	33:11	19+9	31–8	13+27
②	35–8	22–4	35×2	80:4	90–79
③	16+16	200–5	40×8	83:83	45+18
④	30:15	35–7	102–99	300+42	9×8
⑤	21+20	16:8	9×8	45–31	33×2
⑥	44+24	27–21	13+8	350×2	99:3
⑦	18–13	45+40	45:5	31–29	27+3
⑧	42:2	22×3	100:10	30×20	42+33
⑨	210+110	32–18	45+36	22–7	8×20
⑩	2×100	7×70	99:11	10+9–1	3×10×4

Conjuntos

Aunque la definición real matemática de conjunto es muy avanzada para la enseñanza secundaria, puedes quedarte con la idea de que un conjunto es una colección de elementos diferentes. Intuitivamente, es muy sencillo; la complicación viene cuando se avanza en su tratamiento.

Ejemplos: el conjunto de los alumnos y alumnas de tu clase; el conjunto formado por ti y tus hermanos; el conjunto de los equipos de fútbol de primera división.

Nomenclatura

Los conjuntos se suelen nombrar con letras mayúsculas de cualquier alfabeto. Para especificar todos los elementos de un conjunto se escriben entre llaves, separados por comas.

Ejemplos:

- Conjunto de vocales del español: V = {a, e, i, o, u}.
- Conjunto de figuras con menos de cinco lados: C = {triángulo, cuadrilátero}.

Conjunto de números naturales

- Los números naturales son infinitos. Eso lo expresaremos con unos puntos suspensivos en la relación de elementos.
- El número cero (0) se puede considerar un número natural o no; en algunos libros se considera que sí y en otros que no, pero el resultado para las matemáticas es el mismo. En este curso consideraremos que **el número cero no es un número natural**.
- Como letra para representar el conjunto de números naturales se ha elegido la letra N, la inicial de la palabra en muchos idiomas occidentales. Pero como el conjunto de los números naturales es muy especial, la N también es especial. Según el libro, la verás de distintas formas. En este curso, «ℕ».

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}}$$

Escritura en español

Los números naturales no se escriben igual en todos los idiomas, por desgracia. Quizá algún día se unifique la escritura, como se va consiguiendo en otras áreas de la ciencia.

El libro «El buen uso del español», editado en 2013 por la Real Academia Española, especifica en las páginas 296 y 297 cómo se escriben los números naturales: «No deben utilizarse ni el punto ni la coma para separar los grupos de tres dígitos (...). Para ello solo se admite hoy el uso de un pequeño espacio en blanco».

Ejemplos:

- Correcto: «32 124»; valdría también «32124».
- Incorrecto: «32,124»; así se escribe en inglés.
- Incorrecto: «32.124»; así significaría un número con tres cifras decimales.

Durante muchos años fue costumbre en España usar el punto como *separador de miles* (grupos de tres dígitos); la costumbre está tan arraigada que es muy común seguir viendo este error en los medios de comunicación. Evita tú el error acostumbrándote a escribir bien los números naturales.

Números grandes

El concepto de «grande» es un concepto relativo, no absoluto. ¿Tú eres grande? Comparado con una pulga, sí; comparado con una ballena, no.

Si crees que un número natural es grande, piensa que si lo multiplicas por tres lo haces el triple de grande. Como los números naturales son infinitos, dado cualquier número siempre puedes encontrar números mayores.

Números con nombre común

Conforme los números se van haciendo mayores, se van complicando sus nombres. Además, al traducir de un idioma a otro, los nombres se pueden ir confundiendo unos con otros si no nos fijamos con atención.

Vamos a comparar unos cuantos números nombrados y escritos en español y en inglés, por ser dos idiomas muy importantes:

Español	
Un millón	1 000 000
Mil millones (o un millardo)	1 000 000 000
Un billón	1 000 000 000 000
Mil billones	1 000 000 000 000 000

Inglés	
One million	1,000,000
One billion	1,000,000,000
One trillion	1,000,000,000,000
One cuatrillion	1,000,000,000,000,000

Cuando veamos las potencias de 10 aprenderemos un método mucho más claro para manejar estos números.

Las dos escalas

Como ves, en español y en inglés se nombran de manera muy distinta estos números, lo que es el origen de las confusiones en las traducciones. Se dice que en español se usa la **escala larga** y en inglés la **escala corta**.

Números con nombre propio

Desde hace mucho tiempo ha sido un entretenimiento de muchos matemáticos imaginar y nombrar números muy grandes.

Un número que te sonará por el nombre que tiene es el **gúgol**. (¿Qué empresa tecnológica te recuerda?). Un gúgol se escribe con un uno seguido de cien ceros.

Un gúgol = 10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

Pero un número mucho mayor es el **gúgolplex**, que se escribe con un uno seguido de un gúgol de ceros. ¿Te imaginas? Pues sigue habiendo muchos más números mayores.

Dos propiedades de los números naturales

Hay dos propiedades que te parecerán muy sencillas, pero que son muy importantes en el conjunto de los números naturales:

* Hay un **primer** elemento, que es el número 1.
* Cualquier número natural tiene un número **siguiente**.

Estas dos propiedades fueron fundamentales en el trabajo sobre números naturales del matemático italiano **Giuseppe Peano**.

Ejemplos

El siguiente del número 8 es el 9.

El siguiente del número 100 es el 101.

El siguiente del número 12 999 es el 13 000.

El siguiente del número gúgol es
10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 001

Números consecutivos

Decimos que dos números son consecutivos cuando uno es el siguiente del otro.

Ejemplo: los números 12 y 13 son consecutivos.

También podemos considerar varios números consecutivos: lo son cuando se puede formar una cadena de siguientes.

Ejemplo: los números 31, 32, 33 y 34 son consecutivos.

Número anterior

Todo número es el **anterior** de su siguiente. (¿Suena raro?, piénsalo antes de ver el ejemplo).

Ejemplo: como 27 es el siguiente de 26, 26 es el anterior de 27.

Orden de los números naturales

Decimos que los números naturales están ordenados: dados dos números naturales siempre podemos decir cuál es mayor y cuál es menor. Para indicarlo usamos los signos «<» (se lee «menor que») y «>» (se lee «mayor que»).

Ejemplos

* 5 es menor que 7: $5<7$.
* 29 es mayor que 4: $29>4$.

Propiedades

* Todo número es menor que su siguiente.
* Todo número es mayor que su anterior.

Ejemplos

* El siguiente de 21 es 22 y se verifica que $21<22$.
* El anterior de 45 es 44 se verifica que $34>44$.

Conjuntos

① Llama M al conjunto de números naturales menores que 6 y escríbelo.

② Llama P al conjunto de números naturales pares de una cifra y escríbelo.

③ Llama I al conjunto de números naturales impares de una cifra y escríbelo.

④ Llama R al conjunto de números naturales que tienen exactamente dos cifras que son iguales y escríbelo.

⑤ Llama C al conjunto de números naturales que tienen exactamente dos cifras y acaban en 0 y escríbelo.

Números grandes

⑥ ¿Cuántas cifras tiene el número un millón?

⑦ ¿Cuántas cifras tiene el número un millardo?

⑧ ¿Cuántas cifras tiene el número un billón?

⑨ ¿Cuántas cifras tiene el número *one billion*?

⑩ ¿Cuántos ceros tiene el número un trillón?

⑪ ¿Cuántas cifras tiene el número un gúgol?

Siguientes, anteriores y consecutivos

⑫ ¿Cuál es el número siguiente al 427?

⑬ ¿Cuál es el número siguiente al 999?

⑭ ¿Cuál es el número anterior al 883?

⑮ ¿Cuál es el número anterior al 22?

⑯ ¿Cuál es el número anterior al un millón?

⑰ ¿Son consecutivos los números 1, 10 y 100?

⑱ ¿Son consecutivos los números 99, 100 y 101?

⑲ ¿Son consecutivos los números 13, 15 y 14?

Comparaciones

⑳ ¿Cuál de estas expresiones es cierta? (a) $7<9$ (b) $7>9$

㉑ ¿Cuál de estas expresiones es cierta? (a) $10<4$ (b) $10>4$

㉒ ¿Cuál de estas expresiones es cierta? (a) $22<20$ (b) $22>20$

㉓ ¿Cuál de estas expresiones es cierta? (a) $15<15$ (b) $15=15$ (c) $15>15$

㉔ ¿Cuál es el menor número natural?

Enunciados

① ¿Qué conjunto tiene más elementos: el de los números naturales de tres cifras o el de los números naturales de cuatro cifras?

② Di el menor de todos los números naturales.

③ Di el mayor de todos los números naturales.

④ ¿Cuál es el mayor de los números naturales de cinco cifras?

⑤ ¿Cuál es el menor de los números naturales de siete cifras?

⑥ ¿Cuántos millones hay en un trillón?

⑦ Averigua un número natural que sea la mitad que su siguiente.

⑧ Averigua dos números naturales consecutivos que sumen 15.

⑨ Averigua dos números naturales consecutivos que sumen 16.

⑩ ¿Qué número es mayor: el anterior de 8 o el siguiente de 6?

⑪ Averigua dos números naturales consecutivos que sumen 401.

⑫ Averigua dos números naturales consecutivos que sumen 1 000 000.

⑬ ¿Cuánto da la resta del siguiente de un número menos su anterior?

⑭ ¿Cuál es el número natural que no tiene anterior?

⑮ ¿Cuál es el número natural que no tiene siguiente?

⑯ Averigua un número natural que sea la mitad que la suma de su siguiente y su anterior.

⑰ Averigua tres números naturales consecutivos que sumen 30.

⑱ Averigua un número natural sabiendo que el doble de su siguiente es 44.

⑲ Averigua un número natural sabiendo que el triple de su anterior es 21.

⑳ Averigua si la suma de cuatro números naturales consecutivos cualesquiera da como resultado un número par o impar.

㉑ Averigua dos números naturales consecutivos sabiendo que la suma de sus siguientes es 29.

㉒ Averigua un número natural sabiendo que el siguiente de su doble es 31.

㉓ Averigua un número natural sabiendo que el anterior de su triple es 29.

㉔ Averigua un número natural sabiendo que el siguiente de su siguiente y el anterior de su anterior suman 14.

Suma o adición

- La operación de sumar también se llama adición.
- La suma de dos números naturales siempre da otro número natural.
- La suma se representa con el signo «+».
- La suma es conmutativa: el orden en que se haga la suma no influye en el resultado. Simbólicamente se expresa así: a+b = b+a

Resta o diferencia

- La operación de restar también se llama diferencia.
- La diferencia de dos números naturales no siempre da otro número natural.
- La resta se representa con el signo «–».

Ejemplos

- 10–7 = 3 sí da como resultado un número natural.
- 7–10 no da un número natural, porque a 7 no se le pueden restar 10. Para poder hacerlo en los casos en que sí se le puede dar sentido hacen falta los números enteros.
  - Si tenemos 7 caramelos no podemos regalar 10.

Multiplicación o producto

- La operación de multiplicar también se llama producto.
- El producto de dos números naturales siempre da otro número natural.
- El producto se representa con el signo «·» (se llama «punto elevado»). Atención a esto, porque en educación primaria se usa el signo «×». El signo «×» se usa en educación secundaria con otro significado, que se estudia en el nivel 6.
- El producto es conmutativo: el orden en que se haga el producto no influye en el resultado. Simbólicamente se expresa así: a·b = b·a.
- El punto elevado que usamos en matemáticas tiene la importante característica de que se puede suprimir, si eso no lleva a cambiar el significado de la expresión.

Ejemplos

- La expresión 2·(5+4) se puede escribir 2(5+4).
- La expresión 2·9 no se puede escribir 29 (obviamente).

División o cociente

- La operación de dividir también se llama cociente.
- El cociente de dos números naturales no siempre da otro número natural.
- La división se representa con el signo «:».

Ejemplos

- 10:5 = 2 sí da como resultado un número natural.
  - Podemos repartir equitativamente 10 personas en 5 habitaciones.
- 5:10 no da un número natural, porque no podemos repartir 5 unidades en 10 partes enteras. Para poder llevarlo a cabo en los casos en que sí se le puede dar sentido hacen falta los números fraccionarios.
  - No podemos repartir equitativamente 5 personas en 10 habitaciones.
  - Sí podemos repartir 5 kilogramos de arroz en 10 cuencos.

	A	B	C	D	E
①	8+43	19–11	7·11	45:9	44+51
②	33–3	12·8	100:2	67+23	67–23
③	7·16	33:3	48+77	55–29	27·8
④	93:3	19+38	71–25	13·8	26:2
⑤	25+33	42–28	101·8	444:4	38+49
⑥	23–8	36·5	80:5	29+55	55–29
⑦	25·6	84:4	77+19	77–19	77·9
⑧	252:6	17+78	78–17	222·3	306:3
⑨	45+28	45–28	35·8	568:8	65+56
⑩	33–19	43·7	105:7	23+31+5	2·3·8

	A	B	C	D	E
①	108:6	43·7	18+39	76–19	89+91
②	84:7	56·4	91–38	85+97	125:5
③	93+28	58·7	184:8	175:7	45+89
④	89–45	73·6	102–85	31–19	312:6
⑤	144:9	77+15	52–37	118:2	354:3
⑥	83·4	93–17	25–19	29+38	39:3
⑦	39:13	57·3	81–17	19·7	38·9
⑧	14+88	56–29	91–19	91·9	19·9
⑨	17+19	77–18	76·4	99:11	283:1
⑩	15+58	58–23	232·3	480:6	99·9

	A	B	C	D	E
①	99+87	135–49	138·4	644:7	66:22
②	100+4+50	120–73	448:8	73·7	657+421
③	898+746	5505:5	618:3	543·4	211–78
④	104·8	709+94	709–94	3018:6	87·2
⑤	308–79	76·6	1091–405	294:7	1091+405
⑥	288:8	405:5	405·5	405+15	405–15
⑦	7+200+4	1543:1	1·1·1·1·1	1543·1	1543–10
⑧	1·2·1·3·1	288:3	160:16	659+48	648–59
⑨	148:4	111:3	259:7	37·8	37–8
⑩	337+733	744–477	744·7	245·8	2582·3

	A	B	C	D	E
①	32–8	45+129	12·7	90:9	800:8
②	884–231	88·6	64:8	15·3	6·178
③	900–123	812+98	2·778	778:2	456:3
④	67+76	76–67	48·3	48:3	10·2·10
⑤	11+11+1	888+331	112:7	354:6	7·276
⑥	87–42	112+38	112·8	792:8	15·3
⑦	60+87	21–11	300·12	90–35	23+89
⑧	35:35	809:1	18:3	18:18	18:6
⑨	28·3	918:9	2628:6	37–27	48+84
⑩	109·7	777:7	7104:8	3996:6	1·2·3·4

①	489+2362+587	②	321+789+4329	③	51+2067+892
④	854+105+2089	⑤	790+543+211	⑥	890+3320+589
⑦	12986–3224	⑧	8740–7829	⑨	1276–986
⑩	8900–1287	⑪	2837–1475	⑫	3298–1278
⑬	234·17	⑭	368·23	⑮	974·86
⑯	863·43	⑰	999·78	⑱	1027·31
⑲	540:12	⑳	3315:17	㉑	1334:23
㉒	3276:42	㉓	2002:77	㉔	1722:41
㉕	4548:6	㉖	5523:7	㉗	4544:8
㉘	5073:89	㉙	3363:57	㉚	9828:78
㉛	1845+3829+7745	㉜	8855+189+2285	㉝	2298+6577+1299
㉞	872+349+278	㉟	563+896+923	㊱	818+723+1026
㊲	8872+9090+1255	㊳	2658+2287+1287	㊴	3378+3398+2238
㊵	8923–2336	㊶	8756–129	㊷	8862–4284
㊸	12986–7892	㊹	3476–1201	㊺	77290–53629
㊻	783·37	㊼	892·83	㊽	3856·72
㊾	807·75	㊿	278·26	51	283·34
52	955·18	53	739·37	54	442·19
55	1424:16	56	2047:89	57	3795:55
58	4872:87	59	1360:85	60	1484:14
61	8923+7593+2278	62	4873–4782	63	145·23
64	189·45	65	3481:59	66	999:27
67	9034+2689+335	68	5937–2394	69	845·51
70	1003:17	71	5096:98	72	189·37
73	3894+9274+5544	74	737·33	75	101·77

Enunciados

Los siguientes problemas requieren **una sola** operación (suma, diferencia, producto o división) entre números naturales para ser resueltos.

① En un bolsillo tienes 59 euros y en otro tienes 48 euros. ¿Cuánto dinero tienes en total?

② Tienes ahorrados 367 euros y te compras un objeto que cuesta 129 euros. ¿Cuánto dinero te queda?

③ Si compras 12 bolsas de chuches y cada una cuesta 3 euros, ¿cuánto tienes que pagar en total?

④ El tablero de un juego de mesa está dividido en 84 casillas dispuestas en filas y columnas. Sabiendo que tiene 7 filas, calcula cuántas columnas tiene.

⑤ Un país tiene en una reserva natural 23 493 nutrias y en otra tiene 14 800; ¿cuántas nutrias tiene el país en total?

⑥ Un coche cuesta 25 386 euros, pero tu familia consigue que se lo rebajen 4129 euros. ¿Cuánto pagaréis por el coche?

⑦ Un camión tiene 235 cajas de refrescos y en cada caja hay 24 botellas de refresco. ¿Cuántas botellas hay en total en el camión?

⑧ He ganado 6750 euros vendiendo 54 copias de un producto. ¿Cuál era el precio por unidad?

Enunciados

Los siguientes problemas requieren **exactamente dos operaciones** (suma, diferencia, producto o división) entre números naturales para poder ser resueltos.

⑨ Un tren comienza su recorrido con 480 pasajeros. En la primera parada se bajan 45 personas; en la segunda se bajan 91 y el tren termina su recorrido más adelante. ¿Cuántas personas han hecho el recorrido completo?

⑩ Mi amigo va a aportar 45 euros para un regalo y yo voy a poner 67 euros. Pero el regalo que queremos comprar cuesta 135 euros. ¿Cuánto dinero nos hace falta todavía?

⑪ Si compro 58 objetos a 17 euros cada uno y los vendo por 30 euros cada uno, ¿cuánto dinero gano?

⑫ Tengo una colección de objetos guardada en 14 cajas con 15 objetos cada una, pero al limpiar los objetos se me han roto 23 y los he tenido que tirar. ¿Cuántos objetos me quedan?

⑬ Tengo en el armario una camiseta roja, una verde, una blanca y una negra; también tengo un pantalón azul, uno negro y uno rojo. ¿De cuantas maneras voy a poder combinar la ropa de modo que la camiseta y el pantalón no sean del mismo color?

Enunciados

Los siguientes problemas requieren **una sola** operación (suma, diferencia, producto o división) entre números naturales para ser resueltos.

① Tengo 235 euros en una cuenta corriente y 178 euros en casa. ¿Cuánto dinero tengo en total?

② El dependiente de una tienda me dice que tiene 132 objetos y que si le quisiera comprar todos, tendría que pagar 2244 euros. Suponiendo que pagara lo mismo por cada objeto, ¿cuánto pagaría por cada uno?

③ Comienzo un viaje con 1823 euros y vuelvo a casa con 719. ¿Cuánto dinero me he gastado en el viaje?

④ Quiero decorar el suelo de un patio con baldosas distribuidas en 18 filas y 33 columnas. ¿Cuántas baldosas necesito?

⑤ Para guardar 560 canicas en bolsas de 16 canicas, ¿cuántas bolsas necesito?

Enunciados

Los siguientes problemas requieren **exactamente dos operaciones** (suma, diferencia, producto o división) entre números naturales para poder ser resueltos.

⑥ En una biblioteca hay 19 armarios; en cada armario hay 13 baldas y en cada balda hay 23 libros. ¿Cuántos libros hay en la biblioteca?

⑦ En una tienda compramos mi hermano y yo unos objetos que cuestan cada uno 18 euros. Él compra 14 y yo compro 25. ¿Cuánto pagamos en total?

⑧ Me he gastado 1260 euros en decorar el suelo con baldosas que he distribuido en 12 filas y 15 columnas. ¿Cuánto me ha costado cada baldosa?

⑨ Le debo 380 euros a mi hermana y 265 a mi hermano. Por hacer un trabajo cobro 895 euros. Después de pagar mis deudas, ¿cuánto dinero me queda?

⑩ Me como dos bollos que tienen 125 kilocalorías cada uno y un batido que tiene 225 kilocalorías. En total, ¿cuánta energía he ingerido?

⑪ Si me compro tres pantalones a 45 euros cada uno y tres camisetas a 26 euros cada una, ¿cuánto tengo que pagar?

⑫ Cada día de la semana me gasto ocho euros en desayunar; esta semana, además, me he gastado doce euros en la cena del domingo. ¿Cuánto he gastado esta semana?

⑬ Me quiero comprar un coche que cuesta 26 700 euros. Si ahorro durante un año 1560 euros al mes, ¿cuánto dinero me faltaría para pagar el coche?

⑭ Tengo 24 bolsas con 15 canicas en cada una. Si las pusiera en bolsas de 20 canicas, ¿cuántas bolsas necesitaría?

⑮ Cada mes cobro 1350 euros y me gasto 975 euros. ¿Cuánto dinero ahorro en un año?

Operación combinada

Una operación combinada es la que tiene dos o más operaciones simples.

Ejemplos

Ejemplo 1	$4 + 5 \cdot 6$	Hay una suma y un producto
Ejemplo 2	$(8 - 2) : 3$	Hay una resta y un cociente
Ejemplo 3	$10 : 5 + 4$	Hay un cociente y una suma
Ejemplo 4	$20 - 4 \cdot 2$	Hay una resta y un producto
Ejemplo 5	$2 + 3\,(7 - 1)$	Hay una suma, un producto y una resta
Ejemplo 6	$5 - (2 \cdot 6 + 3) : 5$	Hay una resta, un producto, una suma y un cociente

Orden de cálculo o jerarquía de operaciones

Llamamos de cualquiera de estas dos maneras a las reglas que permiten decidir en qué orden hay que realizar las operaciones. Es este:

1. Paréntesis.
2. Productos y cocientes.
3. Sumas y restas.

Cálculo paso a paso

Para aprender a hacer las operaciones combinadas con soltura es imprescindible empezar a hacerlas paso a paso, para entender la jerarquía; cuando se maneje bien, se pueden saltar pasos e incluso hacer toda la operación mentalmente.

Ejemplo 1

$4 + 5 \cdot 6 = 4 + 30 = 34$ [Primero el producto y luego la suma]

Ejemplo 2

$(8 - 2) : 3 = 6 : 3 = 2$ [Primero el paréntesis y luego el cociente]

Ejemplo 3

$10 : 5 + 4 = 2 + 6 = 8$ [Primero el cociente y luego la suma]

Ejemplo 4

$20 - 4 \cdot 2 = 20 - 8 = 12$ [Primero el producto y luego la resta]

Ejemplo 5

$2 + 3\,(7 - 1) = 2 + 3 \cdot 6 = 2 + 18 = 20$

[Primero el paréntesis, luego el producto y al final la suma]

Ejemplo 6

$5 - (2 \cdot 6 + 3) : 5 = 5 - (12 + 3) : 5 = 5 - 15 : 5 = 5 - 3 = 2$

[Primero el paréntesis, en el que primero se hace el producto y luego la suma, luego el cociente y por último la resta]

Consejo

Acostúmbrate a escribir correctamente el desarrollo de las operaciones:

- ✱ Escribe de izquierda a derecha (nunca de arriba a abajo).
- ✱ No te olvides el signo igual entre cada expresión.
- ✱ Lo que no calcules, debes copiarlo.

①	$8 + 3 \cdot 5$	②	$4 - (8 - 5)$	③	$18 : 2 - 7$
④	$4 + 12 : 3$	⑤	$3\,(12 - 8) + 5$	⑥	$10 \cdot 8 + 4$
⑦	$17 - (2 \cdot 3 + 1)$	⑧	$8 + 5 : 1$	⑨	$7\,(20 - 14)$
⑩	$(3 + 5) \cdot 2 - 4$	⑪	$12 - (4 : 2 + 1)$	⑫	$4 \cdot (12 : 6) + 3$
⑬	$6 + 3\,(2 + 18 : 2)$	⑭	$2 \cdot 8 - 13$	⑮	$6\,(12 - 2) + 13$
⑯	$34 - (3 + 4 \cdot 5)$	⑰	$27 + 41 \cdot 3$	⑱	$(56 - 19) \cdot 5 - 12$
⑲	$(12 + 5 \cdot 6) : 2$	⑳	$(1056 + 589) : 7$	㉑	$135 + 23 \cdot 4$
㉒	$348 : 6 - 35$	㉓	$70 : (9 - 4)$	㉔	$123 - 12 \cdot 3$
㉕	$(64 : 8 + 2) : 5$	㉖	$4 + 6\,(15 : 3 - 2)$	㉗	$15 - 14 : 7$
㉘	$(14 + 21) : 7 + 7$	㉙	$8 + 2\,(8 + 16 : 4)$	㉚	$100 - 2\,(13 - 8)$
㉛	$36 - 4\,(13 - 11)$	㉜	$(12 + 48) : 10$	㉝	$20 + 50 : 10$
㉞	$35 - (2 + 18) : 4$	㉟	$2\,(2 + 5 \cdot 3) - 4$	㊱	$37 + 37 : 37$
㊲	$(37 + 37) : 2$	㊳	$15 - (20 - 4 \cdot 4) : 2$	㊴	$100 : (3 \cdot 4 - 2)$
㊵	$9 + (45 - 35) : 5$	㊶	$19 - (55 + 45) : 10$	㊷	$8 + 16 : 4$
㊸	$(24 - 4) : 4 + 7$	㊹	$(8 + 15 : 5) \cdot 3 - 9$	㊺	$(5 \cdot 8 - 12) : 2 + 6$
㊻	$88 : (10 - 2) + 7$	㊼	$15 + 12 \cdot 7$	㊽	$(41 - 37) : 4 + 50$
㊾	$9 + (18 : 6 - 1) \cdot 3$	㊿	$(38 + 52) : 10 - 2$	51	$86 \cdot 3 + 128$
52	$789 - 72 \cdot 5$	53	$98 + (2 \cdot 78 - 45)$	54	$75 - 5\,(22 : 2 + 1)$
55	$579 - (34 \cdot 2 + 3)$	56	$(77 + 99) : 2 - 2$	57	$301 - (78 + 42 : 6)$
58	$88 + 22 : 11$	59	$5\,(7 + 1) + 4$	60	$4 + (1 + 7)\,5$
61	$1 + (8 + 35 : 7)\,2$	62	$37 - 42 : 2$	63	$1 + 5\,(96 : 4 - 3)$
64	$41 + 41\,(17 - 9)$	65	$55 + 55 : 5$	66	$77 : 11 + 7$
67	$(3772 + 2500) : 7$	68	$8932 + 413 : 7$	69	$4 + 7\,(55 : 5 - 2)$
70	$(18 + 36) : 3 - 8$	71	$48 - 40 : (25 - 15)$	72	$45 + 8\,(2 \cdot 5 - 3)$
73	$9\,(45 : 5 - 2) + 1$	74	$16 + 3 \cdot 122$	75	$(19 - 15) \cdot 7 - 13$

	A	B	C	D	E
①	4+2·3	15–3·4	2(5–3)	3+10:5	(8–3)6
②	81:9–5	8:(6–2)	18–7·2	(19–9):2	20–8:2
③	2+4:2	(2+4):2	18:3–2	6:(3–2)	(20–8):2
④	8–4:4	(8–4):4	5(12–8)	15–1:1	(15–1):1
⑤	8+9:3	9–4:2	16:(8–4)	10+4·3	12–4·2
⑥	1+2(8–1)	2(2·5+1)	9–8:(3–1)	3(7–4)–2	8:(2·5–6)
⑦	(5·6–2):2	(1+4·5):3	3(7·3–18)	5(9:3+4)	7+2(7–5)
⑧	(19–10)·3	(19–10):3	4+80:8	(8+80):11	77:11–4
⑨	1+2·3	6·8–3	2+16:4	4+16:2	(4+16):2
⑩	5(8·2–14)	35:(9–2)	21–9:3	(21–9):3	2+3(6–1)

	A	B	C	D	E
①	19–3·6	20:4–4	20:(5–3)	7+4·8	36–10:2
②	(36–10):2	8+32:8	(8+32):8	(20–8):4	5(19–15)
③	15+5·2	25–3·5	2(11–8)	2·11–8	13·2+2
④	10(9+11)	14:(9–7)	(8+7):5	10+10:5	10–10:5
⑤	(21–7):2	18:2–8	12–2·4	(12–2)·4	(10–2)4
⑥	2(18:9+3)	21:(14–7)	70–4·5	81–9·8	16–5·3
⑦	8:(3·2–2)	8·(3·2–2)	8·(3·2+2)	7(18:2+1)	8·3–4
⑧	18+3·4	18–3·4	(18–3)4	12:(3·5–3)	8+14:2
⑨	(18–2):4	9+9:(4–1)	16+8:2	12–16:8	15:(3·4–7)
⑩	(18+2):4	(18+4):2	18+4:2	18–4:2	(18–6):6

Expresiones con más de un paréntesis

Cuando una expresión tiene más de un paréntesis, estos pueden estar situados de diferentes maneras y por tanto se calculan de modos diferentes.

Ejemplos

Ejemplo 1	2(8+3(5+6))	Un paréntesis está dentro de otro: paréntesis anidados
Ejemplo 2	(4+5)(9–2)	Los dos paréntesis están separados, son independientes
Ejemplo 3	(1+7(8–6)):3	Paréntesis anidados
Ejemplo 4	(2+3·4)(8–5)	Paréntesis independientes

Paréntesis anidados

Se comienza por calcular el paréntesis más interno y se calcula el último el más externo.

Ejemplo 1

2(8+3(5+6)) = 2(8+3·11) = 2(8+33) = 2 · 41 = 82

Ejemplo 3

(1+7(8–6)):3 = (1+7·2):3 = (1+14):3 = 15:3 = 5

Paréntesis independientes

En este caso se pueden calcular los dos paréntesis en el mismo paso, incluso aunque el enunciado pida explícitamente hacer el desarrollo paso a paso. Si cada paréntesis contiene varias operaciones, se pueden comenzar a calcular en cada paréntesis independientemente.

Ejemplo 2

(4+5)(9–2) = 9·7 = 63

Ejemplo 4

(2+3·4)(8–5) = (2+12)·3 = 14·3 = 42

Más ejemplos

Calcula paso a paso el resultado de estas operaciones:

Ejemplo 5

2(27–3(7–5)) = 2(27–3·2) = 2(27–6) = 2·19 = 38

Ejemplo 6

48:(2+1) + 36:(8–2) = 48:3 + 36:6 = 16 + 6 = 22

Ejemplo 7

3(4+5(8–2)) – (6+3(11–3)):2 = 3(4+5·6) – (6+3·8):2 = 3(4+30) – (6+24):2 =
= 3·34 – 30:2 = 102 – 15 = 87

Observación sobre la notación

Verás en muchos textos de matemáticas de este nivel que para escribir paréntesis anidados se utilizan corchetes y llaves en lugar de los paréntesis exteriores. En este curso no se hará así, por considerarlo una mala idea: tanto en calculadoras como en programas de ordenador, los corchetes y las llaves tienen otro significado.

En vez de **8+4·{3+5·[4+8·(9+2)]}** escribimos **8+4·(3+5·(4+8·(9+2)))**

Los programas actuales de ordenador ayudan a comprobar que todos los paréntesis están correctamente cerrados.

Expresiones con más de un producto o cociente

Cuando una expresión tiene más de un producto o cociente, la norma es que hay que calcularlos de izquierda a derecha, aunque veremos que en algunos casos es indiferente hacerlo en el otro sentido.

Ejemplos

Ejemplo 1	$24 : 3 \cdot 2$	Primero el cociente (izquierda) y luego el producto (derecha)
Ejemplo 2	$24 : 6 : 2$	Primero el cociente de la izquierda
Ejemplo 3	$2 \cdot 3 \cdot 5$	En este caso es indiferente por dónde empezar

Resolución de los ejemplos

Ejemplo 1

$24 : 3 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16$

Ejemplo 2

$24 : 6 : 2 = 4 : 2 = 2$

Ejemplo 3

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$

Comparación: con el orden cambiado

Vamos a añadir unos paréntesis en los tres ejemplos para ver qué ocurre en cada caso si cambiamos el orden de cálculo:

Ejemplo 1a

$24 : (3 \cdot 2) = 24 : 6 = 4$

Ejemplo 2a

$24 : (6 : 2) = 24 : 3 = 8$

Ejemplo 3a

$2 \cdot (3 \cdot 5) = 2 \cdot 15 = 30$

Observamos que en los ejemplos (1) y (2), en los que la operación de la izquierda es un cociente, el orden de cálculo cambia el resultado, por lo que es especialmente importante que respetes el orden correcto.

Sin embargo, en el ejemplo (3), en el que las dos operaciones son productos, es indiferente el orden, así que podrás reorganizar las operaciones si te interesa.

Propiedad asociativa

El producto de números naturales tiene la propiedad asociativa, que es el nombre que se da en matemáticas al hecho de que el orden de las operaciones no influya en el resultado. Simbólicamente se expresa así:

$$\boxed{(ab)c = a(bc)}$$

En la expresión anterior, las letras a, b y c representan números naturales cualesquiera.

Más ejemplos

Ejemplo 4 → $48 \cdot 5 : 4 : 3 = 240 : 4 : 3 = 60 : 3 = 10$

Ejemplo 5 → $26 : (70 : 7 : 5) \cdot 3 = 26 : (10 : 5) \cdot 3 = 26 : 2 \cdot 3 = 13 \cdot 3 = 39$

Ejemplo 6 → $5 \cdot 7871 \cdot 2 = 10 \cdot 7871 = 78\,710$ [Hemos reorganizado]

Expresiones con más de una suma o resta

Cuando una expresión tiene más de una suma o resta, la norma es que hay que calcularlas de izquierda a derecha, aunque veremos que en algún caso es indiferente hacerlo en el otro sentido.

Ejemplos

Ejemplo 1	8 + 3 – 2	Primero la suma (izquierda) y luego la resta (derecha)
Ejemplo 2	9 – 6 + 2	Primero la resta (izquierda) y luego la suma (derecha)
Ejemplo 3	7 + 4 + 5	En este caso es indiferente por dónde empezar

Resolución de los ejemplos

Ejemplo 1

8 + 3 – 2 = 11 – 2 = 9

Ejemplo 2

9 – 6 + 2 = 3 + 2 = 5

Ejemplo 3

7 + 4 + 5 = 11 + 5 = 16

Comparación: con el orden cambiado

Vamos a añadir unos paréntesis en el ejemplo (3) para ver qué ocurre si cambiamos el orden de cálculo:

Ejemplo 3a

7 + (4 + 5) = 7 + 9 = 16

Observamos que en este ejemplo, en el que las dos operaciones son sumas, es indiferente el orden, así que podrás reorganizar las operaciones si te interesa.

Propiedad asociativa

La suma de números naturales tiene la propiedad asociativa, que es el nombre que se da en matemáticas al hecho de que el orden de las operaciones no influya en el resultado. Simbólicamente se expresa así:

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

En la expresión anterior, las letras a, b y c representan números naturales cualesquiera.

Más ejemplos

Ejemplo 4 → 7 + 8 – 6 + 2 = 15 – 6 + 2 = 9 + 2 = 11

Ejemplo 5 → 19 – 3 – 6 + 4 = 16 – 6 + 4 = 10 + 4 = 14

Ejemplo 6 → 51 + 875 + 49 = 100 + 875 = 975 [Hemos reorganizado]

Sumas y restas en operaciones combinadas

Como las sumas y las restas son siempre las últimas operaciones que hay que hacer en una operación combinada, nos sirven como «separación» entre las distintas partes de una operación.

Ejemplo 7 → 2(9–3) + 16:(14–6) = 2·6 + 16:8 = 12 + 2 = 14

Ejemplo 8 → 45:(4+5) – 3·(17–16) = 45:9 – 3·1 = 5 – 3 = 2

Ejemplo 9 → 13·3 + 22:2 – (3+4)(5–4) = 39 + 11 – 12·1 = 50 – 12 = 38

Operación combinada

Una operación combinada es la que tiene dos o más operaciones simples.

Orden de cálculo o jerarquía de operaciones

Llamamos de cualquiera de estas dos maneras a las reglas que permiten decidir en qué orden hay que realizar las operaciones. Es este:

1. Paréntesis, comenzando por los interiores.
2. Productos y cocientes, comenzando por la izquierda.
3. Sumas y restas, comenzando por la izquierda.

Cálculo paso a paso

Para aprender a hacer las operaciones combinadas con soltura es imprescindible empezar a hacerlas paso a paso, para entender la jerarquía; cuando se maneje bien, se pueden saltar pasos e incluso hacer toda la operación mentalmente.

Ejemplos

Calcula paso a paso el resultado de las siguientes expresiones:

① $19·7 – 3(18 – 20:5 + 4(5+2)) + 18:2$

② $(2 + 3·6)(16 – 15:3) + 4(12 – 8)(17 – 12)$

③ $2·(17 – 30:(6 – 1)) – (3(13 – 2) + 1):4$

④ $2(1 + (5(4(12:4 – 1) + 2) + 1):3)$

Consejo

Acostúmbrate a escribir correctamente el desarrollo de las operaciones:

✱ Escribe de izquierda a derecha; si acabas la línea, repite el último signo en la línea siguiente.

✱ No te olvides el signo igual entre cada expresión.

✱ Lo que no calcules, debes copiarlo.

Resolución de los ejemplos

① $19·7 – 3(18 – 20:5 + 4(5+2)) + 18:2 = 133 – 3(18 – 4 + 4·7) + 36 =$
$= 133 – 3(14 + 28) + 36 = 133 – 3·42 + 36 = 133 – 126 + 36 = 7 + 36 = 43$

② $(2 + 3·6)(16 – 15:3) + 4(12 – 8)(17 – 12) = (2 + 18)(16 – 5) + 4·4·5 =$
$= 20·11 + 20·4 = 220 + 80 = 300$

③ $2·(17 – 30:(6 – 1)) – (3(13 – 4) + 1):4 = 2(17 – 30:5) – (3·9 + 1):4 =$
$= 2(17 – 6) – (27 + 1):4 = 2·11 – 28:4 = 22 – 7 = 15$

④ $2(1 + (5(4(12:4 – 1) + 2) + 1):3) = 2(1 + (5(4(3 – 1) + 2) + 1):3) =$
$= 2(1 + (5(4·2 + 2) + 1):3) = 2(1 + (5(8 + 2) + 1):3) = 2(1 + (5·10 + 1):3) =$
$= 2(1 + (50 + 1):3) = 2(1 + 51:3) = 2(1 + 17) = 2·18 = 36$

Nivel 1 • Aritmética • Números naturales • Ejercicios (04)

1	12:2:3+2(2·3+1)	2	5·13·2–(9:3–1)	3	(6·3–10)(8:2+1)
4	6·7+4·2–4·5	5	2(17–3(28:14+1))+1	6	(6·7+2):(3·4–1)·(7–4)
7	90:3:10+90:10:3	8	2·15·3–10:2·5	9	(4·3+1):(2·8–3)
10	3(4+5(7–5))–(18–3):5	11	8·15+78·2–12·3	12	(25+75):4–17:(15+2)
13	19·7+6(12·4–7)	14	(22+4·(5+8)):2	15	100:(4·6+1)
16	1000–3·4+5·3(9–2)	17	88:8–88:11+8·11	18	(19–9):2+(1+7·2):5
19	(24:6–1):(8:4+1)	20	2(3(4(5·6+1)+2)+3)	21	3600:(3·5+1):(4·6+1)
22	2·33·5–5·23·2	23	80:8·3+2(5·7–2)	24	18:2:1:1+18·2·1·1
25	3·3+2·2·2	26	3·(3+2)·2·2	27	(3·3)(3·3)
28	(3·3+2)(3·3–2)	29	6(5(3(81:3–1)–2)–3)	30	199+18·7+1
31	19(6·7–39)–9(5·4–18)	32	(7·8+1):3:(4·5–19)	33	19·7:19
34	3·(14–8+13)	35	3·14–3·8+3·13	36	(8:4+13)(28:4–1)
37	(9·9+9):(2·6–2)·(2+9)	38	15(19–17):3	39	8·7·2+8·2·7+7·2·8
40	3·8·7·2	41	7(18:2+1)–3(56:8–2)	42	4(2+35:7)+5(1+49:7)
43	8(17·2–16)–(3·9–1):2	44	21·8:21	45	(4·3+7·6–4):10
46	70·9+7(8:2+1)	47	(9·8–2):(15·4–53)	48	33–2(56:7+1)
49	44:2+66:(22:2)–2·3	50	((55+22):11+8):(7–2)	51	200:(20:10):(10:2):4
52	(105:5:3)(7·7+1)	53	(19–8·2)(18:2+1):3	54	5(1+(5·8+2):(3·5–1))
55	256–495:5:9+23·3	56	40:(20:(10:(5–3)))	57	128:(2:2)–256:2:2:2
58	2(19–11)+(7·7+1):5	59	4(18–15:5)–3(1+8:4)	60	3(18–(1+14:2))
61	(16:2:2–1)5–2(18:2–3)	62	(8:2:2–1)(5–2)(8:2–3)	63	19+2(13–3(6:3+1))
64	7(18–3)+15(54:9+2)	65	100:(10:5)–100:10:5	66	100:(12:(10:5+1))
67	4(1+5(7+8))–(95–4):7	68	3(48:6–1)+5(3+36:2)	69	99:(11·3)+99:11·3
70	88:11·4–88:(11·4)	71	500–3(28:4+11·3)	72	2(7+12:2)+3(24:6–1)
73	250–(3·16–88:4):2	74	(16–8):4+48:(6–2)	75	(16–8)·(2+48)(6–2)

	A	B	C	D	E
①	(2+3)(7–1)	3·4+2·6	100:10:10	100:(10:10)	2·3·8
②	2·13·5	24:2:(6–2)	17·19:17	17·19:19	89·(75:75)
③	16:8(7+2)	30·3–2·3	30·(3–2)·3	20–8:4	(20–8):4
④	20:4–8:4	5·3·4–3·3	25:5+30:5	(30–10):5	30–10:5
⑤	(8+4):(4–2)	2(1+3(2+2))	3(4(5–2)–1)	(3(8–1)–1):5	1+9:3+10:2
⑥	18:2–12:3	2(19–2)5	1+8(13–3)	(1+8)(13–3)	(23–3):(7–3)
⑦	24:3–3	48:6–3·2	48:(6–3)·2	3(1+4(1+5))	(5(8–4)+1):3
⑧	16:(2·2)–2	16:2·2–2	3+18:2:3	5+18:(2·3)	80–4·5·3
⑨	120:2:3:5	4(6(7–5)–1)	8·(2+8):5	3·3·3:(3·3)	(21:3+1):2
⑩	9·5:(9·5)	13·17:(13·17)	(12+8):2–3	(22–2):(2+3)	22–2:2+3

	A	B	C	D	E
①	16:4:2+1	16:(4:2)–1	(8–2)(10–3)	32:(14+2)5	9(1+2(8–3))
②	37·51:37	19(33+5):19	90–30:30+5	(90–30):30+5	(3(1+8:2)–1):7
③	4·9:3+21:7	66:2:(3·11)	(7·8–6):(4+6)	18–(12–3·2)	4(1+35:5)
④	(18–3·3):3	(4+5·2):(5–3)	25:5–5:5·2	2·7·8·5	11(17–11)–6
⑤	9·11–4(8–1)	(21–3·4):3	100–12:6:2	100–12:(6:2)	2·2·2·2·2·2
⑥	64:2:2:2	64:(2:2):2	23((19·7):7):23	57((37·7):7):57	3·3·3·3·3
⑦	2·5·2·5·13	2·5·31·2·5	2·2·19·5·5	2·2·2·2+2·2	1+2(3+5·6)
⑧	(1+2)(3+5·6)	2(7·7+1)–3·5	32–4:2:2	(32–4):2:2	(32–4):2·2
⑨	(32–4):(2·2)	99:(99:3:3)	(99:99):(3:3)	2·(17+6)·5	(8–2·2):4
⑩	33:3:(12–11)	12:3–12:4	80:2–40:2	(80–40):2	8:1·1:1·1–5

Elementos de una división

Cuando hacemos una división, consideramos dos números:

* El **dividendo** es el número que hay que dividir.
* El **divisor** es el número entre el que dividimos.

División exacta

Cuando el resultado de la división es un número natural, decimos que la división es exacta, y llamamos **cociente** al número obtenido.

Ejemplo: Dividendo 35, divisor 5; operación 35:5 = 7; cociente 7.

División entera

Cuando no existe ningún número natural que multiplicado por el divisor nos dé el dividendo, decimos que la división es **entera**; pero se obtiene como resultado dos números: el **cociente** y el **resto**.

Ejemplo: Dividendo 37, divisor 5; no hay ningún número natural que multiplicado por 5 dé 37; cociente 7, resto 2.

Colocación de la operación

Una manera de hacer la operación de la división es la que vemos a continuación con un ejemplo: «divide 88 entre 7»

Dividendo: 88; divisor: 7.

dividendo →	8 8	7	← divisor
	1 8	1 2	← cociente
resto →	4		

Solución: cociente: 12, resto 4.

Propiedades de la división

Siempre se verifica que

* El resto es menor que el divisor.
* El dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto.

Las dos propiedades se pueden escribir con símbolos, lo que a muchas personas les ayuda a recordarlas mejor. Es bueno que las estudies también así, porque el lenguaje simbólico se usa mucho en matemáticas.

Dividendo → D; divisor → d; cociente → C; resto → R.

$$\boxed{r<d \qquad D = d \cdot C + R}$$

Ejemplo

En la división que hemos hecho más arriba vemos:

Dividendo → 88; divisor → 7; cociente → 12; resto → 4.

Efectivamente, $4<7$ y $88 = 7 \cdot 12 + 4$

El resto determina el tipo de división

Cuando consideramos una división, no sabemos si va a ser exacta o entera. Pero cuando la hacemos podemos examinar el resto que hemos obtenido:

* Si el resto es 0, la división es exacta.
* Si el resto no es 0, la división es entera.

Enunciados

Realiza las siguientes divisiones contestando claramente cuáles son el cociente y el resto. Di la división es exacta o entera.

① Dividendo: 459; divisor: 8.

② Dividendo: 1421; divisor: 9.

③ Dividendo: 1450; divisor: 5.

④ Dividendo: 1169; divisor: 3.

⑤ Dividendo: 634; divisor: 4.

⑥ Dividendo: 2922; divisor: 6.

⑦ Dividendo: 3116; divisor: 7.

⑧ Dividendo: 1111; divisor: 2.

⑨ Dividendo: 1467; divisor: 10.

⑩ Dividendo: 575; divisor: 12.

⑪ Dividendo: 1125; divisor: 23.

⑫ Dividendo: 2509; divisor: 17.

⑬ Dividendo: 127; divisor: 11.

⑭ Dividendo: 1703; divisor: 13.

⑮ Dividendo: 389; divisor: 15.

⑯ Dividendo: 1377; divisor: 23.

⑰ Dividendo: 1662; divisor: 11.

⑱ Dividendo: 1369; divisor: 37.

⑲ Dividendo: 5252; divisor: 51.

⑳ Dividendo: 5289; divisor: 13.

㉑ Dividendo: 6224; divisor: 7.

㉒ Dividendo: 7729; divisor: 41.

㉓ Dividendo: 1349; divisor: 26.

㉔ Dividendo: 6876; divisor: 17.

㉕ Dividendo: 2378; divisor: 41.

㉖ Dividendo: 5147; divisor: 76.

Nivel 1 • Aritmética • Números naturales • Cálculo mental (13)

	A	B	C	D	E
1	5 : 2 Cociente Resto	17 : 4 Cociente Resto	21 : 7 Cociente Resto	33 : 8 Cociente Resto	123 : 10 Cociente Resto
2	56 : 8 Cociente Resto	82 : 9 Cociente Resto	33 : 5 Cociente Resto	41 : 8 Cociente Resto	99 : 10 Cociente Resto
3	42 : 5 Cociente Resto	24 : 5 Cociente Resto	33 : 3 Cociente Resto	23 : 1 Cociente Resto	45 : 4 Cociente Resto
4	44 : 6 Cociente Resto	65 : 8 Cociente Resto	19 : 2 Cociente Resto	19 : 3 Cociente Resto	19 : 4 Cociente Resto
5	37 : 7 Cociente Resto	27 : 9 Cociente Resto	27 : 5 Cociente Resto	50 : 6 Cociente Resto	44 : 5 Cociente Resto
6	37 : 10 Cociente Resto	46 : 8 Cociente Resto	53 : 8 Cociente Resto	31 : 4 Cociente Resto	38 : 9 Cociente Resto
7	51 : 7 Cociente Resto	49 : 5 Cociente Resto	48 : 7 Cociente Resto	4 : 7 Cociente Resto	134 : 134 Cociente Resto
8	41 : 4 Cociente Resto	56 : 5 Cociente Resto	68 : 6 Cociente Resto	44 : 3 Cociente Resto	90 : 8 Cociente Resto
9	22 : 11 Cociente Resto	24 : 11 Cociente Resto	40 : 11 Cociente Resto	25 : 12 Cociente Resto	30 : 13 Cociente Resto
10	156 : 7 Cociente Resto	457 : 5 Cociente Resto	46 : 15 Cociente Resto	239 : 200 Cociente Resto	1017 : 20 Cociente Resto

Explicación

Los problemas que se resuelven con divisiones presentan dos dificultades:

- ✱ Hay que distinguir en el enunciado cuáles son el dividendo y el divisor.
- ✱ Hay que saber qué significan en el problema el cociente y el resto.

Enunciados

Los siguientes problemas se resuelven usando **exclusivamente** una división.

① Guardamos 129 canicas en cajas de 3 canicas. ¿Cuántas cajas se llenan?

② Hay una fila de 107 personas en una atracción. Las personas se sientan en cabinas de 8 personas o menos. ¿Cuántas personas se sentarán en la última cabina si todas las anteriores van llenas?

③ Si repartimos 485 euros en partes iguales entre 5 personas, ¿cuánto dinero le corresponde a cada una?

④ Un animal da saltos de 75 centímetros o menos para desplazarse. Si diera todos los saltos al máximo de su capacidad para cubrir exactamente una distancia de 500 centímetros, ¿de cuántos centímetros será el último salto?

⑤ Tienes 43 caramelos para ir repartiendo a quienes te los pidan, hasta que se te acaben. Das 5 caramelos a cada persona, mientras puedas hacerlo. ¿Cuántos caramelos le darás a la última persona?

⑥ Dispones de unas huchas que tienen una capacidad máxima de 40 monedas. Intentas llenar las huchas con 527 monedas. ¿Cuántas huchas podrás llenar completamente?

Enunciados

Los siguientes problemas requieren utilizar **una o más** operaciones de suma, resta, multiplicación o división de números naturales.

⑦ Un grupo de 22 excursionistas va a pasar la noche en un complejo hotelero que dispone de apartamentos con una capacidad máxima de 4 personas por apartamento. ¿Cuál es el mínimo número de apartamentos que necesitarán alquilar los excursionistas?

⑧ Vendes 48 canicas en total; todas las que puedes, en bolsas de 5 canicas, a 7 euros la bolsa; las que te quedan sueltas las vendes a 2 euros cada una. ¿Cuánto dinero ganas en total?

⑨ En una atracción de un parque cobran 12 euros por cada grupo de 6 personas y 3 euros por cada persona que no entre en grupo. Si vais 64 personas, ¿cuánto tendréis que pagar?

⑩ Una persona aficionada a la jardinería quiere añadir a su pequeño jardín 88 plantas. Va a comprar macetas para 6 plantas, que cuestan 4 euros cada una y, para las que no quepan en las anteriores, macetas para 2 plantas que cuestan 3 euros cada una. ¿Cuánto dinero se gastará?

Definición de potencia

Una potencia es una multiplicación en la que todos los términos son iguales.

Ejemplos

Ejemplo 1	2·2·2·2·2·2·2	El factor 2 se repite 7 veces
Ejemplo 2	3·3·3·3	El factor 3 se repite 4 veces
Ejemplo 3	5	El factor 5 se repite 1 vez
Ejemplo 4	7·7	El factor 7 se repite 2 veces
Ejemplo 5	10·10·10	El factor 10 se repite 3 veces

Elementos de una potencia

- ✱ El factor que se repite se llama **base** de la potencia.
- ✱ El número de veces que se repite se llama **exponente** de la potencia.

Ejemplos

Ejemplo 1	2·2·2·2·2·2·2	La base es 2 y el exponente es 7	Se escribe 2^7
Ejemplo 2	3·3·3·3	La base es 3 y el exponente es 4	Se escribe 3^4
Ejemplo 3	5	La base es 5 y el exponente es 1	Se escribe 5^1
Ejemplo 4	7·7	La base es 7 y el exponente es 2	Se escribe 7^2
Ejemplo 5	10·10·10	La base es 10 y el exponente es 3	Se escribe 10^3

Notación de una potencia

Se escribe la base con letra normal y a continuación el exponente como **superíndice**. En el cuadro anterior se ve cómo se escriben algunos ejemplos. Se lee «base elevado a exponente».

Ejemplos

2^7 se lee «2 elevado a 7»; 7^2 se lee «7 elevado a 2»; 10^3 se lee «10 elevado a 3».

Nombres especiales

- ✱ Cuando un número se eleva a 2, también se puede decir «al cuadrado».
- ✱ Cuando un número se eleva a 3, también se puede decir «al cubo».

Ejemplos

7^2 se puede decir «7 elevado al cuadrado» o «7 al cuadrado».

10^3 se lee «10 elevado al cubo» o «10 al cubo».

Cálculo de una potencia

Para calcular el valor de una potencia hay que hacer todas las multiplicaciones.

Ejemplos

① $2^7 = 128$	② $3^4 = 81$	③ $5^1 = 5$	④ $7^2 = 49$	⑤ $10^3 = 1000$
⑥ $1^{245} = 1$	⑦ $245^1 = 245$	⑧ $10^6 = 1\,000\,000$	⑨ $11^2 = 121$	⑩ $13^3 = 2197$

Enunciado

Desarrolla la potencia 5^3 como un producto y calcula su valor.

Resolución: $5^3 = 5·5·5 = 125$.

Enunciados

Desarrolla las siguientes potencias como un producto y calcula su valor.

① 7^3

② 2^{10}

③ 3^5

④ 10^9

⑤ 5^4

⑥ 1^6

⑦ 4^3

⑧ 9^4

⑨ 11^3

⑩ 20^2

⑪ 307^2

⑫ 51^2

⑬ 12^3

⑭ 30^3

⑮ 8^2

Enunciados

Calcula el valor de las siguientes potencias.

⑯ 2^8

⑰ 1^{25}

⑱ 10^5

⑲ 5639^1

⑳ 17^3

㉑ 203^2

㉒ 45^2

㉓ 3^9

㉔ 5^5

㉕ 15^2

Jerarquía de operaciones cuando hay potencias

Cuando en una operación combinada aparecen potencias, el orden de cálculo es:

1. Paréntesis, comenzando por los interiores.
2. Potencias.
3. Productos y cocientes, comenzando por la izquierda.
4. Sumas y restas, comenzando por la izquierda.

Ejemplos

Ejemplo 1	$3 \cdot 2^4$	Primero la potencia y luego el producto
Ejemplo 2	$6^2 : 3$	Primero la potencia y luego el cociente
Ejemplo 3	$2^3 + 3^2$	Primero las potencias y luego la suma
Ejemplo 4	$2 + 5 \cdot 3^3$	Primero la potencia, luego el producto y luego la suma
Ejemplo 5	$(2 + 3)^2$	Primero el paréntesis y luego la potencia

Calculamos paso a paso los ejemplos:

① $3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$

② $6^2 : 3 = 36 : 3 = 12$

③ $2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$

④ $2 + 5 \cdot 3^3 = 2 + 5 \cdot 27 = 2 + 135 = 137$

⑤ $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$

Paréntesis implícitos

Los exponentes de las potencias están rodeados por un paréntesis que no se escribe, por eso se llama implícito.

Ejemplo 6	2^{3+4}	Primero la suma, que está entre paréntesis, y luego la potencia
Ejemplo 7	3^{7-2}	Primero la resta, que está entre paréntesis, y luego la potencia
Ejemplo 8	$2^{3\cdot 4}$	Primero el producto, entre paréntesis, y luego la potencia
Ejemplo 9	2^{2^2}	Primero el 2^2 del exponente y luego 2^4

Fíjate en el ejemplo 6: aunque pone 2^{3+4}, realmente debes mirarlo como $2^{(3+4)}$.

Calculamos paso a paso los ejemplos:

⑥ $2^{3+4}=2^7=128$ ⑦ $3^{7-2}=3^5=243$ ⑧ $2^{3\cdot 4}=2^{12}=4096$ ⑨ $2^{2^2}=2^4=16$

Comparación con el orden cambiado

Fíjate en que si hiciéramos los ejemplos 6 a 9 con el orden cambiado, escribiéndolos de otra manera, obtendríamos resultados distintos, así que es importante.

⑩ $2^3 + 4 = 8 + 4 = 12$

⑪ $3^7 - 2 = 2187 - 2 = 2185$

⑫ $2^3 \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$

⑬ $(2^2)^2 = 4^2 = 16$

1	$20-3^2+5^2$	2	8^2-7^2	3	$(9-4)^2+7$
4	$9^3:3+3^4:9$	5	$(100-25):5^2$	6	$(1+2^2)(3^2-4)$
7	$(8^2+6):10$	8	$(1+2)^4-2^4$	9	$(9-8)^{14}+14^1$
10	$2^4:2:2^2$	11	$4+3\cdot 2^{9-6}$	12	$2(7^2-3\cdot 6)+1$
13	$5(12-2\cdot 5)^2$	14	$5\cdot 10^3-4\cdot 10^2$	15	$(35-25)^2+(7-2)^2$
16	$(9-6)^3+2^{3+1}$	17	$2^5:2^2\cdot 2$	18	$2^5:(2^2\cdot 2)$
19	$(2\cdot 3)^2+2^2\cdot 3^2$	20	$3^{5-1}+3^5-1$	21	$2^{2(5-3)}$
22	$10^2+1^{10}+(10+1)^2$	23	$4^2+3^2+5^2$	24	$12^2+5^2+13^2$
25	$(52+48)^2$	26	$1^3+1^3+(1+1)^3$	27	$2^5-2^4-2^3$
28	$4^{5-2}-2$	29	$3^3-3^2+3^{3-2}$	30	$(6\cdot 7-38)^2:(3-1)^2$
31	$2^{3^2}-(2^3)^2$	32	$15-3^2+9^2$	33	$5^3-(7-2)^2$
34	$(12-8)^2:4:2$	35	$(12-8)^2:(4:2)$	36	2^5-5^2
37	2^6-6^2	38	$2^3\cdot 2^4+2^7$	39	$(7^2-6^2)^2$
40	$7(19-17)^2:2$	41	$2(2^3-5)^3$	42	$1^{14}+1^{93}\cdot 1^{51}$
43	$6^3+5(2^2+1)$	44	$3(6+5)^2-2(6^2+5^2)$	45	$3^4:3^3+3^1$
46	$7^2+(12-3)^2$	47	$100^2-10^2+(100-10)^2$	48	$110^2+(11\cdot 10)^2$
49	$(4+4)^2+2\cdot 4^2$	50	$(2\cdot 5)^2+4\cdot 25$	51	$(5\cdot 2)^3:(5^2\cdot 2^2)$
52	$(2+3)^{3+1}$	53	$(9-6)^{9-6}$	54	$2+(2+3)^3$
55	$5\cdot 2^3+2\cdot 5^3$	56	$(5\cdot 2)^3+(2\cdot 5)^3$	57	$5\cdot(2^3+2)\cdot 5^3$
58	$(3^3-7)^2:2^2$	59	$4(2^3+1)+3(5-1)^2$	60	$(3^2+6\cdot 5):3$
61	$(8^2+6^2):10^2$	62	$10^3:2:5$	63	$2(4^2-1)5$
64	$15^2+(10+5)^2$	65	$(32-2)^3+2^3$	66	$6^2:2:3\cdot 5$
67	$17^2+10^2+7^2$	68	$(31^2+13^2):10$	69	$(2^3+3^3):(4^2-3^2)$
70	$2^2+25^2:5+20$	71	$(9^3+1):10-3$	72	$(5^3-5^2):(2\cdot 5)$
73	$(3^2+4^2):5^2$	74	$(8^2+15^2):17^2$	75	$(9^2+40^2):41^2$

	A	B	C	D	E
1	$12-2^2$	$6\cdot3^2$	$5\cdot2^3$	$(8-2)^2$	1^3+3^3
2	$(4+1)^2$	4^2+1	5^2-10	$8+2^2$	$(8+2)^2$
3	$10-3^2$	$(10-3)^2$	$9^2:(4+5)$	10^3-10^2	$(3^3-2):5$
4	$(4^2-1):3$	$2\cdot5^2$	$3+(2\cdot5)^2$	$8(9^2-1)$	$2\cdot7^2\cdot5$
5	$13\cdot6^2:13$	$(13-3)^3$	$13+3^3$	$2^4:4:2$	$2^4:(4:2)$
6	$(2^5+8):10$	$18-4^2$	$1^{45}+45^1$	$(2^5-2)^2$	$(2^4+4):2$
7	$3(7^2+1)$	$(3^2+4^2):5$	8^{4-2}	$2^{1^{7}}+7$	$(3^2)^2+3^4$
8	$80:(5^2-5)$	$6(4-2)^3$	$6\cdot4-2^3$	$(1+3^2)\cdot2$	$(1+3)^2\cdot2$
9	2^3+3^2	$40-5^2$	$(27-7)^2$	$(2+8)^3$	$3(7^2-9)$
10	$10(9^2+9)$	$(2^3-5)^3+1$	$13(6^2-6)$	$5\cdot10^3+4\cdot10^2+3$	3^3+3^2

	A	B	C	D	E
①	$17-2^2$	$3\cdot5^2$	$(2\cdot4)^2$	$(9^2-1):2$	$8^2-4:2$
②	$(8^2-4):6$	2^{5-4}	2^5-4	$3^{5-2(4-3)}$	$3^3-2(4-3)$
③	2^5-5^2	$1+(5-2)^2$	$10^3:(2\cdot5)$	$36-5^2$	$2\cdot3^4+10$
④	$2(7^2+3)$	$(6^2-1):5$	$6^2-10:2$	7^2-4^2+1	$(7-4)^2+1$
⑤	3^3+1^3-1	$(18:3)^2:36$	$27:3^2\cdot9$	$2+2^2+2^4$	$8\cdot10^3-8$
⑥	$(90-20)^2$	$(13-9)^3$	10^2-9^2	$(8^2+6):5:2$	$2(1+5^2)$
⑦	19^1+1^{19}	$18+2^3$	$(18+2)^3$	$(2^4+4^2):2$	$(5^2+5^3):3$
⑧	$80:(5^2-5)$	80^2-400	50^2-10^2	$(50-10)^2$	$(3^3+6):11$
⑨	$(50:5^2)^3$	$3+2(2^3-1)$	$4+5\cdot3^2$	$(4+5)3^2$	$7+(7^2-1):2$
⑩	$(3^4-1):4:5$	$(8^2+1):5$	$2^4-8:2$	$(2^4-8):2$	$2^{8:2}:2$

Explicación

Los problemas de este nivel que se resuelven con una potencia parecen poco reales. Cuando estudies en el nivel 3 las progresiones geométricas, tomarán mucho más sentido.

Enunciados

Los siguientes problemas se resuelven usando **exclusivamente** una potencia.

① Una ciudad se compone de siete barrios, en cada barrio hay siete edificios, cada edificio tiene siete plantas y cada planta tiene siete apartamentos. ¿Cuántos apartamentos hay en la ciudad?

② Si tienes cuatro gorras, cuatro camisetas y cuatro pantalones, ¿de cuántas maneras distintas te puedes vestir?

③ Un organismo unicelular se reproduce dividéndose en dos individuos. Si partes de una sola célula, ¿cuántas habrá tras diez divisiones?

④ Vas a vender un producto con un precio de cinco euros la unidad. Agrupas las unidades en cajas de cinco, metes cinco cajas en un paquete y cinco paquetes en una furgoneta. Si vendes el contenido de cinco furgonetas, ¿cuánto dinero ingresas?

⑤ En una ciudad hay seis jardines, cada jardín tiene seis macizos, cada macizo tiene seis filas y cada fila tiene seis plantas. ¿Cuántas plantas hay en total entre todos los jardines?

⑥ Si cada día me gasto siete euros, ¿cuánto dinero me habré gastado en siete semanas?

⑦ Tengo ocho armarios, cada armario tiene ocho cajones, en cada cajón hay ocho cajitas y en cada cajita hay ocho canicas. ¿Cuántas canicas tengo?

⑧ Si cada mes veo doce películas, cuántas películas habré visto al cabo de doce años?

⑨ Un jardín tiene una sola entrada, que lleva a un sendero. Llega un momento en que el sendero se bifurca en dos senderos, que a su vez se vuelven a bifurcar, y así sucesivamente, hasta llegar al otro lado del jardín. Al final de cada sendero hay un banco. Sabemos que desde la entrada del jardín hasta cada banco hay que tomar cinco bifurcaciones. Calcula cuántos bancos hay en el jardín.

Enunciados

⑩ ¿Cuál es el número mínimo de multiplicaciones diferentes que necesitas para calcular 51^4?

⑪ ¿Cuál es el número mínimo de multiplicaciones diferentes que necesitas para calcular 37^8?

Inspiración

El enunciado número nueve se ha inspirado en el título del relato «El jardín de los senderos que se bifurcan», del escritor argentino Jorge Luis Borges (1899-1986).

Producto de potencias de la misma base

El producto de dos potencias de la misma base se puede escribir como una sola potencia con la misma base y que tiene como exponente la **suma** de los exponentes.

Ejemplo 1	$2^4 \cdot 2^5 = 2^9$	Se mantiene la base 2 y el exponente es 4+5 = 9
Ejemplo 2	$3^2 \cdot 3^4 = 3^6$	Se mantiene la base 3 y el exponente es 2+4 = 6
Ejemplo 3	$10^1 \cdot 10^2 = 10^3$	Se mantiene la base 10 y el exponente es 1+2 = 3

Comprobaciones

Comprobar una propiedad no es lo mismo que demostrarla, pero te puede ayudar a entenderla mejor. Para comprobar esta propiedad en los tres ejemplos, hay que calcular en cada uno los dos miembros de la igualdad y ver que sale lo mismo.

Ejemplo 1	$2^4 \cdot 2^5 = 16 \cdot 32 = 512$	$2^9 = 512$	Sí da el mismo resultado
Ejemplo 2	$3^2 \cdot 3^4 = 9 \cdot 81 = 729$	$3^6 = 729$	Sí da el mismo resultado
Ejemplo 3	$10^1 \cdot 10^2 = 10 \cdot 100 = 1000$	$10^3 = 1000$	Sí da el mismo resultado

Expresión general

En matemáticas no podemos usar constantemente ejemplos y comprobaciones, porque no sería una manera de proceder suficientemente general. Necesitamos escribir las propiedades de manera general.

Para hacerlo ahora e intentar comprender cómo hacerlo en el futuro, pensamos cómo generalizar los tres ejemplos:

- ✱ En el ejemplo (1) la base es 2, en el ejemplo (2) la base es 3 y en el ejemplo (3) la base es 10; para generalizar la propiedad, podemos usar una letra para representar cualquier base. Por ejemplo, elegimos la letra «a».
- ✱ En el ejemplo (1) los exponentes son 4 y 5, en el ejemplo (2) son 2 y 4 y en el ejemplo (3) son 1 y 2; para generalizar, podemos usar dos letras diferentes para representar los dos exponentes. Por ejemplo, elegimos las letras «n» y «m».
- ✱ Para indicar que hay que sumar los exponentes debemos conformarnos con escribir «n+m», sin hacer la operación, porque no sabremos cuáles son concretamente los números que representarán.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, la expresión general queda así:

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

Demostración

Las demostraciones son lo más difícil de las matemáticas, así que es normal que te cueste entenderlas, sobre todo al principio.

Para esta demostración, partimos del primer miembro y llegamos al segundo:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n+m factores}} = a^{n+m}$$

Para entender mejor la demostración, observa cómo aplicamos este razonamiento general en el ejemplo (1):

$$2^4 \cdot 2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{4 factores}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{5 factores}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{9 factores}} = 2^9$$

Cociente de potencias de la misma base

El cociente de dos potencias de la misma base se puede escribir como una sola potencia con la misma base y que tiene como exponente la **diferencia** de los exponentes.

Ejemplo 1	$2^7 : 2^4 = 2^3$	Se mantiene la base 2 y el exponente es 7–4 = 3
Ejemplo 2	$3^6 : 3^4 = 3^2$	Se mantiene la base 3 y el exponente es 6–4 = 2

Comprobaciones

Para comprobar la propiedad, calculamos en cada ejemplo los dos miembros de la igualdad y vemos que se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 1	$2^7 : 2^4 = 128 : 16 = 8$	$2^3 = 8$	Sí da el mismo resultado
Ejemplo 2	$3^6 : 3^4 = 729 : 81 = 9$	$3^2 = 9$	Sí da el mismo resultado

Observaciones

Si el exponente del dividendo es **menor** que el exponente del divisor, el cociente no es un número natural, de modo que la propiedad no se podría usar con números naturales.

Ejemplo 3	La división $7^2 : 7^5$ no da como resultado un número natural

Si el exponente del dividendo es **igual** que el exponente del divisor, el resultado del cociente es 1, de modo que no es necesario aplicar ninguna propiedad.

Ejemplo 4	La división $13^{11} : 13^{11}$ da como resultado 1

Expresión general

- ✱ Elegimos la letra «a» para representar la base.
- ✱ Elegimos las letras «n» y «m» para representar los exponentes.

La expresión general queda así:

$$\boxed{\text{Si } n>m, \text{ entonces } a^n : a^m = a^{n-m}}$$

Demostración

La idea de la demostración es emparejar cada factor del divisor con un factor del dividendo, que dará como resultado 1, y luego reunir en una potencia los factores del dividendo que no tienen pareja.

Partimos del primer miembro y llegamos al segundo:

$$a^n : a^m = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}) : (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ factores}}) = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m \text{ factores}} \cdot \underbrace{(a:a) \cdot (a:a) \cdot \ldots \cdot (a:a)}_{m \text{ factores}} = a^{n-m} \cdot 1 = a^{n-m}$$

Para entender mejor la demostración, observa cómo aplicamos este razonamiento general en el ejemplo (1):

$$2^7 : 2^4 = (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{7 \text{ factores}}) : (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ factores}}) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ factores}} \cdot \underbrace{(a:a) \cdot (a:a) \cdot (a:a) \cdot (a:a)}_{4 \text{ factores}} = 2^3 \cdot 1 = 2^3$$

Producto de potencias con el mismo exponente

El producto de dos potencias con el mismo exponente se puede escribir como una sola potencia con el mismo exponente y que tiene como base el **producto** de las bases.

Ejemplo 1	$2^3 \cdot 5^3 = 10^3$	Se mantiene el exponente 3 y la base es $2 \cdot 5 = 10$
Ejemplo 2	$3^4 \cdot 7^4 = 21^4$	Se mantiene el exponente 4 y la base es $3 \cdot 7 = 21$

Comprobaciones

Para comprobar la propiedad, calculamos en cada ejemplo los dos miembros de la igualdad y vemos que se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 1	$2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$	$10^3 = 1000$	Sí da el mismo resultado
Ejemplo 2	$3^4 \cdot 7^4 = 81 \cdot 2401 = 194\,481$	$21^4 = 194\,481$	Sí da el mismo resultado

Expresión general

- ✱ Elegimos las letras «a» y «b» para representar las bases.
- ✱ Elegimos la letra «n» para representar el exponente.

La expresión general queda así:

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$$

Demostración

La idea de la demostración es recolocar el producto para poner juntos todos los factores iguales.

Partimos del primer miembro y llegamos al segundo:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ factores}} = (ab)^n$$

Para entender mejor la demostración, observa cómo aplicamos este razonamiento general en el ejemplo (1):

$$2^3 \cdot 5^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ factores}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ factores}} = \underbrace{(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)}_{3 \text{ factores}} = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{3 \text{ factores}} = 10^3$$

Cociente de potencias con el mismo exponente

El cociente de dos potencias con el mismo exponente se puede escribir como una sola potencia con el mismo exponente y que tiene como base el **cociente** de las bases.

Ejemplo 1	$8^3 : 2^3 = 4^3$	Se mantiene el exponente 3 y la base es 8 : 2 = 4
Ejemplo 2	$30^4 : 3^4 = 10^4$	Se mantiene el exponente 4 y la base es 30 : 3 = 10

Comprobaciones

Para comprobar la propiedad, calculamos en cada ejemplo los dos miembros de la igualdad y vemos que se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 1	$8^3 : 2^3 = 512 : 8 = 64$	$4^3 = 64$	Sí da el mismo resultado
Ejemplo 2	$30^4 : 3^4 = 810\,000 : 81 = 10\,000$	$10^4 = 10\,000$	Sí da el mismo resultado

Expresión general

- ✱ Elegimos las letras «a» y «b» para representar las bases.
- ✱ Elegimos la letra «n» para representar el exponente.

La expresión general queda así:

$$\boxed{a^n : b^n = (a:b)^n}$$

Demostración

La idea de la demostración es recolocar el cociente para emparejar las bases diferentes.

Partimos del primer miembro y llegamos al segundo:

$$a^n : b^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}) : (\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ factores}}) = \underbrace{(a:b) \cdot (a:b) \cdot \ldots \cdot (a:b)}_{n \text{ factores}} = (a:b)^n$$

Para entender mejor la demostración, observa cómo aplicamos este razonamiento general en el ejemplo (1):

$$8^3 : 2^3 = (\underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8}_{3 \text{ factores}}) : (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ factores}}) = \underbrace{(8:2) \cdot (8:2) \cdot (8:2)}_{3 \text{ factores}} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ factores}} = 4^3$$

Potencia de una potencia

La potencia de una potencia se puede escribir como una potencia simple con la misma base y con nuevo exponente el **producto** de los exponentes.

Ejemplo 1	$(5^2)^3 = 5^6$	Se mantiene la base 5 y el exponente es $2 \cdot 3 = 6$
Ejemplo 2	$(2^3)^4 = 2^{12}$	Se mantiene la base 2 y el exponente es $3 \cdot 4 = 12$

Comprobaciones

Para comprobar la propiedad, calculamos en cada ejemplo los dos miembros de la igualdad y vemos que se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 1	$(5^2)^3 = 25^3 = 15\,625$	$5^6 = 15\,625$	Sí da el mismo resultado
Ejemplo 2	$(2^3)^4 = 8^4 = 4096$	$2^{12} = 4096$	Sí da el mismo resultado

Expresión general

✱ Elegimos la letra «a» para representar la base.

✱ Elegimos las letras «n» u «m» para representar los exponentes.

La expresión general queda así:

$$\boxed{(a^n)^m = a^{nm}}$$

Demostración

La idea de la demostración es utilizar dos veces la definición de potencia y contar cuántas veces se repite la base.

Partimos del primer miembro y llegamos al segundo:

$$(a^n)^m = (\underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m\ \text{factores}}) = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{factores}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{factores}}}_{m\ \text{grupos}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{nm\ \text{factores}} = a^{nm}$$

Para entender mejor la demostración, observa cómo aplicamos este razonamiento general en el ejemplo (1):

$$(5^2)^3 = (\underbrace{5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2}_{3\ \text{factores}}) = \underbrace{\underbrace{5 \cdot 5}_{2\ \text{factores}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{2\ \text{factores}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{2\ \text{factores}}}_{3\ \text{grupos}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6\ \text{factores}} = 5^6$$

Propiedades de las potencias

Tras explicar individualmente cinco propiedades de las potencias, conviene verlas juntas y hacer ejercicios. Las propiedades son muy importantes porque más adelante se repetirán con otros conjuntos de números y serán el origen de más operaciones y propiedades.

Propiedad 1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	Producto de potencias de la misma base
Propiedad 2	$a^n : a^m = a^{n-m}$	Cociente de potencias de la misma base
Propiedad 3	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	Producto de potencias con el mismo exponente
Propiedad 4	$a^n : b^n = (a:b)^n$	Cociente de potencias con el mismo exponente
Propiedad 5	$(a^n)^m = a^{nm}$	Potencia de potencia

Ejemplos

Escribe las siguientes expresiones como una sola potencia que tenga como base el número más pequeño que sea posible.

① $2^5 \cdot 2^8$ ② $3^{15} : 3^8$ ③ $7^4 \cdot 2^4$ ④ $9^7 : 3^7$ ⑤ $(2^8)^3$

Explicaciones

- ✱ El enunciado pide «que tenga como base el número más pequeño que sea posible» porque si no lo dijera, bastaría con hacer la operación y decir el resultado, ya que un número natural siempre se puede escribir como una potencia, poniendo exponente 1. Por ejemplo, podríamos hacer el ejemplo (1) así:
  $2^5 \cdot 2^8 = 32 \cdot 256 = 8192 = 8192^1$.
- ✱ El interés de estos ejercicios es que aprendas a manejar con soltura las propiedades, no que hagas el cálculo final.

Resolución de los ejemplos

① $2^5 \cdot 2^8 = 2^{13}$ ② $3^{15} : 3^8 = 3^7$ ③ $7^4 \cdot 2^4 = 14^4$ ④ $9^7 : 3^7 = 3^7$ ⑤ $(2^8)^3 = 2^{24}$

Ejemplos

Escribe las siguientes expresiones como una sola potencia que tenga como base el número más pequeño que sea posible.

⑥ $7^5 \cdot 7^8 : 7^4$ ⑦ $(2^5)^4 \cdot (2^3)^8$ ⑧ $(6^7 \cdot 35^7):(10^3 \cdot 21^3)$ ⑨ $3 \cdot 3^5 \cdot 3^8$

Explicaciones

- ✱ Cuando hay que aplicar las propiedades de las potencias en una operación combinada de potencias, también hay que aplicar las reglas generales de la jerarquía de operaciones.
- ✱ Observa en el ejemplo (9) cómo se puede convertir un número en una potencia.

Resolución de los ejemplos

⑥ $7^5 \cdot 7^8 : 7^4 = 7^{13} : 7^4 = 7^{11}$

⑦ $(2^5)^4 \cdot (2^3)^8 = 2^{20} \cdot 2^{24} = 2^{44}$

⑧ $(6^7 \cdot 35^7) : (10^3 \cdot 21^3) = 210^7 : 210^3 = 210^4$

⑨ $3 \cdot 3^5 \cdot 3^8 = 3^1 \cdot 3^{13} = 3^{14}$

Enunciados

Usando las propiedades de las potencias, escribe las siguientes expresiones como una sola potencia que tenga como base el número más pequeño que sea posible.

1	$5^8 \cdot 5^3 : 5^2$	2	$(7^2)^3 \cdot 7$	3	$2^9 : (2^2 \cdot 2^3)$	4	$3^4 \cdot 2^4$
5	$18^9 : 6^9$	6	$2 \cdot 2 \cdot (2^6)^3$	7	$7^5 \cdot 2^5$	8	$3^9 \cdot 4^9 : 2^9$
9	$(2^9)^2 : (2^3)^4$	10	$(3^8)^5 : 3$	11	$((5^2)^3)^4$	12	$11^4 \cdot 11^9 : 11$
13	$(2^4 \cdot 2^5)^3$	14	$16^3 : 4^3 : 2^3$	15	$143^5 : 143^5$	16	$(4 \cdot 5)^7 : 10^7$
17	$2^5 \cdot ((2^3)^4)^2$	18	$(7^4)^3 : 7 : 7$	19	$(7^4)^3 : (7 : 7)$	20	$2^3 : (4^3 : 2^3)$
21	$(8^2)^2 : (2^4 \cdot 4^4)$	22	$2^{10} \cdot (2^5)^5$	23	$7^{18} : (7 \cdot 7^2)$	24	$(2 + 3)^7 : 5$
25	$5^8 : (6 - 1)$	26	$11^{20} : (5 + 6)$	27	$3^7 : (2^2 - 1)^2$	28	$5^8 : 5^4 \cdot 5$
29	$(3^{10})^2 : (3^3 \cdot 3^4)$	30	$(7^1)^1 \cdot (7^2)^2$	31	$(10+3)^{15} : 13$	32	$2^3 \cdot 2^8 \cdot 5^5 \cdot 5^6$
33	$2^4 \cdot 3^7 \cdot 2^8 \cdot 3^5$	34	$7^5 \cdot (2^6 : 2)$	35	$3^8 \cdot (2^3)^2 \cdot 2^2$	36	$(4-1)^5 \cdot (2+1)^6$
37	$7(2+5)^{5+9}$	38	$3^{18} : (3^2 \cdot 3^9)$	39	$6^3 \cdot 6^6 : (2^5 \cdot 2^4)$	40	$5^2 \cdot 5^5 : (2^2+1)$
41	$23^2 : (23 \cdot 23)$	42	$2^8 : 2 : 2 : 2$	43	$7^3 \cdot (4+3)^5$	44	$19^{15} : 19$
45	$((3^3)^3)^3 : 3^{20}$	46	$3^{3+9} : 3^{2(1+2)}$	47	$10^7 : (2^2 \cdot 5^2)$	48	$6^9 \cdot 2^7 \cdot 3^7$
49	$15^{13} : (3^3 \cdot 5^3)$	50	$(7+8)^8 \cdot 15^5 : (3 \cdot 5)$	51	$7 \cdot 7^5 \cdot 7^2$	52	$(2^7)^8 : (2^2)^2$
53	$14^9 : (2^6 \cdot 7^6)$	54	$4^7 \cdot 9^7 : (2^7 \cdot 3^7)$	55	$(2^6)^7 \cdot (2^5)^2$	56	$(2^6)^7 : (2^5)^2$
57	$2^{3^2} \cdot (2^3)^2$	58	$3^{2^3} \cdot (3^2)^3$	59	$3 \cdot 3^{2(1+2)^2}$	60	$17^5 : (10+7)^2$
61	$5 \cdot 5^5 \cdot 5^{10}$	62	$7^9 : 7^6 : 7$	63	$7^9 : (7^6 : 7)$	64	$2^8 \cdot 3^8 : 6$
65	$(5+2)^9 : 7^2$	66	$5^{3^3} : 5^{2^3}$	67	$2^{35} : (2^5 \cdot 2^8)^2$	68	$(15-2)^9 : (8+5)^6$
69	$91^{15} \cdot 91 : 91^2$	70	$(7^4)^3 \cdot (7^3)^2$	71	$25^7 : 5^{2+5}$	72	$35^{15} : (7^4 \cdot 5^4)$
73	$15^3 \cdot 4^3 : 20^3$	74	$((2^7)^3)^2 : 2^8$	75	$3^8 \cdot 5^8 : 15$	76	$7^3 \cdot (7^3)^3 \cdot 7^{3^3}$
77	$5^7 \cdot 5^9 : (5^2)^2$	78	$2^{7+2(3+1)} : 2^{10}$	79	$3^8 \cdot 3^{18} : (3^5)^3$	80	$(2^8 \cdot 2^9) : (2^3 \cdot 2^4)$
81	$2^4 \cdot (2^5)^{10} : (2^4)^6$	82	$3^{17} : 3^4 \cdot (3^2)^5$	83	$(7^3)^8 : 7^{2^3}$	84	$(2 \cdot 2^2 \cdot 2^3)^5$
85	$7^{17} \cdot (7^5 : 7^2)^4$	86	$3((3^5 \cdot 3^6)^2 \cdot 3)^3$	87	$(5 \cdot 5^2)^3 : (5^3)^2$	88	$2^{7^2} : (2^7)^2$
89	$(3 \cdot (3 \cdot 3^4)^3)^2 : 3$	90	$7^7 \cdot 7^{12} : (7^2)^3$	91	$2 \cdot 5^3 : 2$	92	$10^5 : (2^3 \cdot 5^3)$

Potencias de 10

Como usamos un sistema de numeración de base 10, las potencias de 10 son las más naturales, fáciles de usar y útiles.

Son especialmente adecuadas para representar números grandes; escribiéndolos como potencias se evitan las ambigüedades que se producen a veces en algunas traducciones.

Comparamos unos cuantos números escritos en español, como una potencia de 10 y en inglés. Se aprecia la universalidad que se puede conseguir gracias a las matemáticas.

Español		Potencia	Inglés	
Un millón	1 000 000	10^6	One million	1,000,000
Mil millones (o un millardo)	1 000 000 000	10^9	One billion	1,000,000,000
Un billón	1 000 000 000 000	10^{12}	One trillion	1,000,000,000,000

Ejemplo de potencia con exponente en el exponente

- Ahora sabemos que un gúgol se puede escribir fácilmente: 10^{100}.
- Y el gúgolplex se puede representar con números, en vez de necesitar una descripción con palabras: $10^{10^{100}}$.
- ¿Crees que podrías continuar escribiendo números aún mayores?

Descomposición polinómica de un número natural

Los polinomios son una construcción matemática que se estudia en niveles superiores de educación secundaria. Pero ya en este nivel puedes ver una idea preliminar, que te resultará sencilla.

Se trata de escribir un número como una operación combinada usando sus cifras y las potencias de 10 que correspondan a la posición de las cifras.

Ejemplo 1

Escribe la descomposición polinómica del número 65 834.

$$65\,834 = 60\,000 + 5000 + 800 + 30 + 4 = 6\cdot 10\,000 + 5\cdot 1000 + 8\cdot 100 + 3\cdot 10 + 4 =$$
$$= 6\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 4$$

Ejemplo 2

Escribe la descomposición polinómica del número 70 328.

$$70\,328 = 7\cdot 10^4 + 3\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 8$$

Ejemplo 3

Escribe la descomposición polinómica del número siguiente al gúgol.

Solución: $10^{100} + 1$

¿Y el polinomio?

No hace falta esperar tanto para ver un polinomio: simplemente, cambia en la descomposición polinómica del número 65 834 el 10 por la letra «x»:

$$6x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 3x + 4$$

¡Ya lo tienes, eso es un polinomio!

Explicación

Hay muchas posibilidades a la hora de desarrollar la resolución de un problema, desde explicar mucho hasta no explicar nada. Lo vemos con un ejemplo.

Enunciado

Elia tiene tres bolsas con 59 canicas en cada una y Alberto tiene cinco bolsas con 31 canicas en cada una. Unen todas sus canicas y las reparten equitativamente entre cuatro cajas. ¿Cuántas canicas tendrá cada caja?

Resolución 1

Elia tiene $3 \cdot 59 = 177$ canicas.

Alberto tiene $5 \cdot 31 = 155$ canicas.

Entre los dos tienen $177 + 155 = 332$ canicas.

En cada caja habrá $332 : 4 = 83$ canicas.

Solución: 83.

Resolución 2

En cada caja habrá $(3 \cdot 59 + 5 \cdot 31) : 4 = (177 + 155) : 4 = 332 : 4 = 83$ canicas.

Solución: 83.

Comparación entre las dos resoluciones

- En la resolución (1) se explican todos los pasos, en la (2) no se explica nada.
- La resolución (2) es más corta que la (1), pero se entiende peor.
- En la resolución (2) se podría hacer toda la operación completa con una calculadora o con un ordenador, en la (1) habría que hacerla paso a paso.
- Cuando se entiende la resolución (1), es posible entender la (2).

Tu resolución

- Elegir el estilo de la resolución (1), el de la (2) o algo intermedio es una cuestión personal, tendrás que decidirlo tú.
- Conforme vayas subiendo de nivel en matemáticas, irás prefiriendo la resolución (2) porque la (1) será muy obvia para ti.
- En general, debes explicar los pasos que correspondan al nivel que estás estudiando. Por ejemplo, en la resolución (1) no explicamos cómo hacer las operaciones, sino lo que significan.
- Escribe la resolución de manera que tus compañeros y tus compañeras la puedan entender (si ya han estudiado).
- Piensa en si la entenderás tú mismo cuando la vuelvas a leer meses después de redactarla.

Cómo escribir la resolución

- Es normal equivocarse cuando se escribe la resolución de un problema.
- Si te equivocas, tacha de modo que se pueda leer lo que has tachado. Podría ser que estuviera bien y tuvieras que recuperarlo.
- Escribe con orden, no uses un resultado antes de calcularlo, no vayas dando saltos hacia atrás y hacia delante.
- Si ves que te ha quedado mal la resolución y tienes tiempo, vuelve a escribirla: ahora te quedará mucho mejor.

Enunciados

① Un granjero recoge 3500 huevos, los envasa en recipientes de dos docenas y empaqueta quince recipientes en cada caja. ¿Cuántos huevos más debería recoger para completar la última caja?

② En un supermercado hay una oferta «3 × 2» en un producto que se vende por cajas. Cada caja cuesta veinte euros. Si compras 36 cajas, ¿cuánto tienes que pagar?

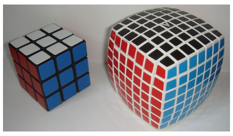
③ En un bar hay 23 mesas, con cuatro patas cada una; 82 sillas, con cuatro patas cada una y 35 taburetes, con tres patas cada uno. ¿Cuántas patas hay en total?

④ Un intermediario compra 256 sacos de plátanos, con 50 kilogramos cada uno, por un total de 44 800 euros. Cuando está envasando el contenido de los sacos en bolsas más pequeñas, de cinco kilogramos, se da cuenta de que debe tirar 540 kilogramos, que se encuentran en mal estado. Si vende cada bolsa por 24 euros, ¿cuánto dinero obtiene de beneficio?

⑤ Para un estudio en una reserva africana nos hemos fijado en sus ñus, avestruces y jirafas. Hemos contado 27 534 patas, 837 picos y 2084 cuernos. Calcula cuántos ñus hay en esa reserva.

⑥ Si escribieras todos los números naturales del 1 al 100, ¿en cuántos números aparecería alguna cifra «5»?

⑦ Para ayudarse a pagar un viaje, los amigos Alicia y Anás venden puerta a puerta unos paquetes de dulces: los pequeños cuestan cuatro euros y los grandes, siete euros. Alicia vende 17 paquetes pequeños y 25 grandes. Anás vende ocho grandes, pero no recuerda cuántos pequeños. Sabiendo que entre los dos han recogido 439 euros, calcula cuántos paquetes pequeños ha vendido Anás.



⑧ ¿Cuántas pegatinas de colores tiene un cubo de Rubik?

⑨ ¿Cuántas pegatinas de colores tiene un cubo v7?

⑩ Apilando piezas cúbicas de una cantera creas un cubo grande que tiene seis piezas de lado. Pintas toda la parte visible de la figura con una pintura que cuesta tres euros el litro. Necesitas un litro para pintar dos caras de las piezas. ¿Cuánto dinero te costará toda la pintura?

⑪ Partimos de un tablero infinito. Elegimos una casilla cualquiera y la marcamos con el número 1. A continuación vamos repitiendo este proceso: elegir dos casillas contiguas (arriba, abajo, derecha o izquierda) a las recién marcadas y señalarlas con el siguiente número. A la derecha se ve un ejemplo en el que se ha llegado hasta el 4. Calcula cuántas casillas se habrán marcado cuando se escriban todos los 7 necesarios.

○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	4	3	4	○	○	○
○	4	3	2	○	○	○	○
○	○	4	1	2	3	4	○
○	○	○	4	3	4	○	○
○	○	○	○	4	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○

Enunciados

① En un camión hay 400 bultos que van a descargar entre Yaser y Ana. Cada viaje que hacen, Yaser descarga siete bultos y Ana tres. ¿Cuántos viajes hacen falta para descargar todos los bultos?

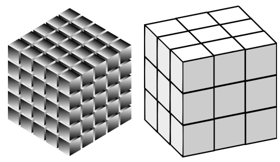
② Cristian y Michelle viven en dos poblaciones que distan 400 kilómetros. Para verse en el camino, salen a la vez. Cristian viaja a una velocidad de 55 kilómetros cada hora y Michelle a 45 kilómetros cada hora. ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

③ En una atracción hay una piscina con 400 bolas. Cada día se pierden 12 bolas y se añaden 8. Si no se hiciera nada más, la piscina se vaciaría; ¿cuánto tiempo haría falta para que se quedara sin bolas?

④ Madlen conduce en un circuito de carreras un vehículo a 90 kilómetros cada hora. Cuando lleva recorridos 400 kilómetros, sale Gabriel en su bólido a 170 kilómetros cada hora. ¿Cuánto tiempo tardará Gabriel en alcanzar a Madlen?

⑤ Sergio necesita ahorrar 400 euros; para ello, compra una hucha y deposita en ella diez euros cada semana; pero su hemana pequeña saca de la hucha dos euros cada semana. ¿Cuánto tiempo tardará Sergio en reunir los 400 euros?

⑥ Disponemos de varios cubos de tres piezas cúbicas idénticas en cada lado y queremos usarlos para montar un cubo mayor, con cinco piezas en cada lado. ¿Cuántos cubos de tres piezas tendremos que desmontar?



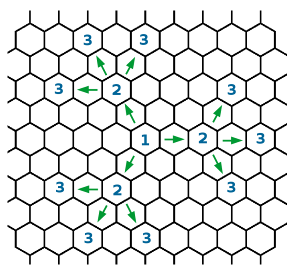
⑦ Hemos montado un cubo con siete piezas cúbicas idénticas en cada lado y queremos cubrirlo completamente con una capa más de piezas iguales. ¿Cuántas necesitamos?

⑧ Hemos montado un cubo con nueve piezas cúbicas idénticas en cada lado y queremos cubrirlo completamente con dos capas más de piezas iguales. ¿Cuántas necesitamos?

⑨ El suelo de un salón consiste en losetas cuadradas. Con una cuerda que mide lo mismo que 36 lados de loseta formamos un cuadrado. ¿Cuántas losetas quedarán dentro de la cuerda?

⑩ Partimos de un cuadrado de papel suficientemente grande. En la primera fase, cortamos el cuadrado en cuatro cuadrados iguales; en la segunda fase, cortamos cada uno de los cuadrados anteriores en cuatro cuadrados iguales. Calcula cuántos cuadrados habrá al final de la séptima fase.

⑪ Partimos de un tablero hexagonal infinito. Elegimos una casilla cualquiera y la marcamos con el número 1. A continuación vamos repitiendo este proceso: desde tres casillas contiguas elegimos una contigua a ella y la señalamos con el siguiente número. A la derecha se ve un ejemplo en el que se ha llegado hasta el 3. Calcula cuántas casillas se habrán marcado cuando se escriban todos los 7 necesarios.



	A	B	C	D	E
1	$3+\boxdot=9$	$19-\boxdot=11$	$3\cdot\boxdot=18$	$24:\boxdot=4$	$2^{\boxdot}=8$
2	$\boxdot+\boxdot=14$	$\boxdot-3=10$	$\boxdot\cdot\boxdot=81$	$\boxdot:5=6$	$\boxdot^{4}=81$
3	$\boxdot+12=20$	$21-\boxdot=6$	$\boxdot\cdot12=24$	$39:\boxdot=13$	$\boxdot^{\boxdot}=27$
4	$89+\boxdot=100$	$25-\boxdot=16$	$7\cdot\boxdot=42$	$37:\boxdot=1$	$15^{\boxdot}=15$
5	$\boxdot+\boxdot+\boxdot=12$	$\boxdot-10=10$	$\boxdot\cdot15=45$	$\boxdot:2=51$	$\boxdot^{1}=17$
6	$2\cdot\boxdot+1=7$	$\boxdot:2+1=7$	$2^{\boxdot}+1=17$	$3^{\boxdot-1}=9$	$5\cdot2^{\boxdot}=20$
7	$4(1+\boxdot)=8$	$(\boxdot-1):5=8$	$(3+\boxdot)^{2}=49$	$(\boxdot-3)^{2}=64$	$(5\cdot\boxdot)^{2}=100$
8	$8-\boxdot=\boxdot+4$	$\boxdot\cdot\boxdot^{2}=125$	$\boxdot\cdot7:31=7$	$15+\boxdot=31$	$18:\boxdot+2=4$
9	$\boxdot:4:5=1$	$2\cdot\boxdot\cdot5=170$	$58-\boxdot=50$	$\boxdot:7=101$	$2\cdot3^{\boxdot}=18$
10	$(2\cdot3)^{\boxdot}=36$	$2:\boxdot+\boxdot:2=2$	$2\cdot\boxdot=\boxdot+8$	$\boxdot+\boxdot^{2}=6$	$\boxdot:9=11$

Explicación

Ya has visto que las cinco propiedades de las potencias relacionan potencias, productos y cocientes. Pero no hay ninguna propiedad que mencione la suma de potencias. Eso es porque **no la hay**.

Ejemplos

Ejemplo 1	$2^5 + 2^7$	Tienen la misma base, pero no se pueden unir en una potencia
Ejemplo 2	$2^5 + 3^5$	El mismo exponente, pero no se pueden unir en una potencia
Ejemplo 3	$5^3 + 5^3$	Tampoco se pueden unir en una potencia

- ✱ Con el ejemplo (1) se ve que no puede haber una propiedad $a^n + a^m = ???$
- ✱ Con el ejemplo (2) se ve que no puede haber una propiedad $a^n + b^n = ???$
- ✱ Con el ejemplo (3) se ve que no puede haber una propiedad $a^n + a^n = ???$

Cálculo de los ejemplos

La única posibilidad es hacer las operaciones hasta llegar al resultado final:

Ejemplo 1	$2^5 + 2^7 = 32 + 128 = 160$	160 no es una potencia de 2
Ejemplo 2	$2^5 + 3^5 = 32 + 243 = 275$	275 no es una potencia de 2 ni de 3
Ejemplo 3	$5^3 + 5^3 = 125 + 125 = 250$	250 no es una potencia de 5

Casos particulares

Que no exista una fórmula general no significa que no pueda haber algún caso particular en que sí se pueda expresar una suma de potencias como una sola potencia. Pero habrá que encontrar cómo, lo que es un auténtico problema, que dejo para ti.

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones como una sola potencia que tenga como base el número más pequeño que sea posible.

① $2^4 + 2^4$

② $3^8 + 3^8 + 3^8$

③ $5^{20} + 5^{20} + 5^{20} + 5^{20} + 5^{20}$

④ $8 + 2^3$

⑤ $1^3 + 1^5 + 1^7 + 1^9$

⑥ $6^7 : 2 + 3 \cdot 6^6$

⑦ $8 \cdot 13^{20} + 5 \cdot 13^{20}$

⑧ $8 \cdot 7^6 - 7^6$

⑨ $2^5 - 2^4$

⑩ $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

Estructura 1-2-5

Casi todos los sistemas monetarios utilizan la estructura 1-2-5 para sus monedas y billetes. Vemos las monedas y billetes disponibles para el sistema del **euro**:

Es fácil apreciar que, salvo potencias de 10, se repite el esquema 1-2-5.

El motivo es que, con este sistema, el número de monedas o billetes necesario para alcanzar una determinada cantidad siempre es el mínimo posible cuando se sigue este sencillo método: utilizar la moneda o billete del mayor valor posible y continuar así hasta completar la cantidad.

Ejemplo

Alcanza la cantidad 83 euros con el menor número posible de monedas o billetes.

Resolución

Paso 1: un billete de 50 euros; faltan 33 euros.

Paso 2: un billete de 20 euros; faltan 13 euros.

Paso 3: un billete de 10 euros; faltan 3 euros.

Paso 4: una moneda de 2 euros; falta 1 euro.

Paso 5: una moneda de 1 euro. Hemos terminado.

Solución: 83 = 50 + 20 + 10 + 2 +1

Comentario

El número de monedas o billetes necesario en el ejemplo ha sido 5. Con cualquier otra manera de alcanzar 83 euros, serán necesarios más monedas o billetes.

Enunciados

Alcanza las siguientes cantidades con el menor número posible de monedas o billetes.

① 44 euros

② 152 euros

③ 211 euros

④ 309 euros

⑤ 557 euros

⑥ 889 euros

⑦ 956 euros

⑧ 988 euros

⑨ 1219 euros

Método de fuerza bruta

En las clases de Matemáticas te enseñamos métodos para resolver problemas; la humanidad conoce muchos métodos, algunos excelentes. Por eso tienes mucho que aprender en esta etapa de tu vida. Pero hay muchos problemas, los que llamamos «difíciles», para los que no se conoce un buen método.

Para resolver ese tipo de problemas se puede intentar el llamado «método de fuerza bruta», que consiste en buscar la solución del problema entre todas las posibilidades. A veces, ni siquiera eso funciona, pero al menos se intenta.

Ejemplo

Examinamos el siguiente problema: «calcula la suma de todos los números naturales del 1 al 100».

El método de fuerza bruta actua así: Suma = 1 + 2 + ... + 100 y hace todas las operaciones. Funciona, pero nos parece largo. El resultado es 5050.

Cuando nos encontramos en estas situaciones, parece lógico hacerse la pregunta «¿y no habrá un método mejor?». Y esa es una buena parte de la diversión y la utilidad de la matemática, buscar ese método mejor.

Cuenta la leyenda que este problema se lo propusieron al matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) cuando era un niño. Se dio cuenta de que 1+100 da el mismo resultado que 2+99 y cualquier otra pareja así formada. Con esta idea, hizo la operación así:

Suma = 100 : 2 · (1 + 100) = 50 · 101 = 5050 (hay 50 parejas de números y cada una suma 101). Efectivamente, había un método mejor.

Este modo de trabajo lo generalizaremos en el nivel 3 del curso.

Uso de ordenadores

Los ordenadores son de gran ayuda para aplicar el método de fuerza bruta, porque podemos programarlos para que hagan ellos las operaciones y tardan mucho menos tiempo que nosotros.

Como ejemplo, vamos a resolver este problema: «averigua un número natural que sumado con su cubo dé 50 690». Para un problema como este es suficiente usar un programa llamado «hoja de cálculo» (por ejemplo, *LibreOffice Calc*):

Número	33	34	35	36	**37**	38	39	40	41
Cubo	35937	39304	42875	46656	50653	54872	59319	64000	68921
Suma	35970	39338	42910	46692	**50690**	54910	59358	64040	68962

Solución: 37.

Hay métodos mejores, pero no son tan sencillos como la idea de Gauss para el problema anterior. No los verás hasta los niveles 3 y 6 de este curso.

Valor del método

Aunque este método de resolución de problemas te pueda parecer malo y sepas que recibe algún nombre despectivo, hay que valorarlo porque es la base de muchos métodos usados con ordenadores. De hecho, la famosa inteligencia artificial tiene su origen en este método (aunque ha recorrido mucho desde él).

Enunciados

Los siguientes ejercicios están pensados para que los resuelvas por el método de fuerza bruta, pero si encuentras un método mejor... ¡adelante! 😊

① Calcula $113^2 : (15^2 + 112^2)$

② Calcula la suma de los cubos de todos los números naturales de una cifra.

③ Averigua un número natural que sumado con su cuadrado dé 182.

④ Averigua un número natural que sumado con su cuadrado y con su cubo dé 1884.

⑤ Calcula la suma de los cuadrados de todos los números impares que hay entre 20 y 30.

⑥ a) Calcula la suma de los cuadrados de los veinte primeros números naturales.

b) Calcula $20 \cdot (20+1) \cdot (2 \cdot 20 + 1) : 6$

⑦ Averigua cinco números consecutivos que sumen 185.

⑧ Calcula el número de Hardy-Ramanujan: $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

⑨ Calcula $(35^5 : 7^5) \cdot (2^8 : 8)$

⑩ a) Calcula $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$

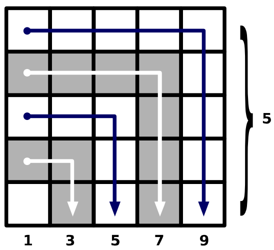
b) Calcula $2^9 - 1$

⑪ a) Calcula 1+3+5+7+9

b) Calcula 5^2

c) Estudia la figura de la derecha. Observa que (9+1):2=5.

d) Calcula la suma de todos los números impares menores que 1000.



Explicación

El número de Hardy-Ramanujan es el menor número natural que se puede expresar como suma de dos cubos de dos maneras diferentes. Procede de una anécdota entre el matemático indio ஸ்ரீனிவாஸ ஐயங்கார் ராமானுஜன் (Srinivasa Ramanujan, 1887-1920) y el matemático británico Godfrey Harold Hardy (1877-1947). Película recomendada sobre estos dos matemáticos: *The Man Who Knew Infinity*.

Sucesiones de números naturales

Aunque el concepto de sucesión no se trabaja hasta los niveles 3 y 5, es una buena idea que te vayas acostumbrando a ver series de números. Cada serie puede tener distintas propiedades, se pueden usar en muchos ejemplos y te van sirviendo para familiarizarte sin darte cuenta con conceptos más profundos de la matemática.

Ejemplos

- La sucesión de los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5,...
- La sucesión de los números pares: 2, 4, 6, 8, 10,...
- La sucesión de los números impares: 1, 3, 5, 7, 9,...
- La sucesión de las potencias de 2: 2, 4, 8, 16, 32,...
- La sucesión de las potencias de 3: 3, 9, 27, 81, 243,...
- La sucesión de los cuadrados: 1, 4, 9, 16, 25, 36,...
- La sucesión de los cubos: 1, 8, 27, 64, 125,...

Definiciones recursivas

Hay, como irás viendo, muchas maneras de obtener los números de una sucesión, pero hay un método particularmente interesante llamado definición recursiva: para calcular un elemento de la sucesión hay que hacer operaciones con alguno de los elementos anteriores.

Ejemplos

① Empezando por el número 1, vas multiplicando por 2 y sumando 1 para obtener los siguientes números: 1, 3, 7, 15, 31, 63,...

② Empezando por el número 4, vas multiplicando por 3 y restando 2 para obtener los siguientes números: 4, 10, 28, 82, 244,...

③ Empezando por el número 5, vas restando 1 y multiplicando por 3 para obtener los siguientes números: 5, 12, 33, 96, 285,...

Sucesión de Fibonacci

Aunque esta sucesión era conocida con anterioridad, ha recibido su nombre a partir del apodo del matemático italiano Leonardo de Pisa (1170?-1240). Se utiliza en muchas ramas de la ciencia y de las artes. Y sin embargo se puede presentar de un modo muy sencillo como el número de parejas de conejos según se va reproduciendo una pareja inicial.

Desde el punto de vista matemático, se puede definir así: los dos primeros números son 1 y para calcular cualquier otro, hay que sumar los dos anteriores:

$$\boxed{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots}$$

Definiciones condicionales

Una manera más complicada de definir una sucesión recursivamente es hacerlo de manera distinta según se cumpla o no alguna condición.

Ejemplo

Se empieza por el 1; si el término anterior es impar, se le suma uno; si es par, se le suma 3: 1, 2, 5, 6, 9, 10, 11, 14,...

Enunciados

Continúa las siguientes sucesiones de números naturales del modo que te parezca más lógico:

①	7	14	21	28	35				
②	103	105	107	109	111				
③	16	25	36	49	64				
④	3	6	12	24	48				
⑤	5	10	15	20	25				
⑥	209	212	215	218	221				
⑦	51	61	71	81	91				
⑧	10	100	1000	10^4	10^5				
⑨	15	23	31	39	47				
⑩	77	88	99	110	121				
⑪	2	6	18	54	162				
⑫	5	5	5	5	5				
⑬	33	37	41	45	49				
⑭	13	26	39	52	65				
⑮	10	10^4	10^7	10^{11}	10^{14}				
⑯	7	14	28	56	112				
⑰	1	5	25	125	625				
⑱	1	6	21	66	201				
⑲	1	2	1	2	1				
⑳	1	2	3	5	8	13			
㉑	1	1	1	3	5	9	17		
㉒	1	4	5	8	9				
㉓	1	2	3	6	7	14	15		

Unas sucesiones con reglas particulares

Consideremos las siguientes sucesiones de números naturales:

- Pueden empezar por cualquier número.
- Cada término se calcula según cómo sea el anterior:
  - Si acaba en 0 o 5, se divide entre 5.
  - Si acaba en 1 o 6, se suma 4; si acaba en 2 o 7, se suma 3; si acaba en 3 u 8, se suma 2; si acaba en 4 o 9, se suma 1.

Ejemplo: 7843, 7845, 1569, 1570, 314, 315, 63, 65, 13, 15, 3, 5, 1.

Observamos que si se llega a 1, los números entran en un bucle, porque después del 1 vendría el 5, que lleva otra vez al 1. Por tanto, si se llega al 1, paramos.

Enunciados

Completa las siguientes sucesiones comenzando por el número dado, usando las reglas explicadas más arriba.

① 34 ② 102 ③ 78 ④ 278 ⑤ 891 ⑥ 3509

Las sucesiones enigmáticas

Consideramos ahora las siguientes sucesiones:

- Pueden empezar por cualquier número.
- Cada término se calcula según cómo sea el anterior:
  - Si es par, se divide entre 2.
  - Si es impar, se multiplica por 3 y se suma 1.

Ejemplo: 112, 56, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Observamos que si se llega a 1, los números entran en un bucle, porque después del 1 vendría el 4, que lleva al 2, del que se vuelve al 1. Por tanto, si se llega al 1, paramos.

Enunciados

Completa las siguientes sucesiones comenzando por el número dado, usando las reglas explicadas más arriba.

⑦ 6 ⑧ 42 ⑨ 96 ⑩ 51 ⑪ 100 ⑫ 57

La conjetura de Collatz

Es sencillo demostrar que **todas** las sucesiones de la primera familia, que son infinitas, acaban en 1: siempre que se dan dos pasos, se llega a un número menor del que se parte, con la excepción de salir del 1, que lleva al bucle.

Pero nadie sabe si **todas** las sucesiones de la segunda familia acaban en 1. Se han usado ordenadores para comprobar muchísimos números de partida y siempre se ha acabado en 1. Pero por muchos que se comprueben, siguen quedando infinitos. Por eso necesitamos algún razonamiento general si queremos afirmar que la propiedad es cierta para todos los números de partida.

La comunidad matemática cree que la propiedad es cierta, pero como no se sabe con seguridad, se le llama «conjetura». Demostrala o refutarla es un **problema abierto** en la actualidad (noviembre de 2020). Se cree que resolverlo es extremadamente difícil con los conocimientos matemáticos actuales. El prestigioso matemático Paul Erdös dijo: «Mathematics may not be ready for such problems».

Buen momento para pensar

Comenzamos el curso diciendo que no íbamos a considerar el cero como un número natural, aunque en otros cursos sí se haga. Tras ver cinco operaciones con números naturales, es un buen momento para reflexionar sobre esta cuestión.

Argumentos a favor de que el cero sea un número natural

- Tiene sentido que el resultado de 4−4 sea 0; por ejemplo: si tengo cuatro caramelos y los regalo, me quedo sin caramelos.
- Tiene sentido que al dividir 3 entre 7 quepa a 0, ya que el resto será 3.
- Tiene sentido decir que en una división exacta el resto es 0; por ejemplo: si reparto equitativamente ocho caramelos a dos niños, no me sobra ninguno.

Argumentos en contra de que el cero sea un número natural

- Su uso apareció en la humanidad mucho más tarde que los demás números naturales, lo que indica que tiene un significado algo diferente.
- No tiene sentido real sumar 4 y 0; por ejemplo: si tengo cuatro caramelos y no me regalan ninguno.
- No tiene sentido real restar 4 y 0; por ejemplo: si tengo cuatro caramelos y no regalo ninguno.
- No tiene sentido real multiplicar por 0; por ejemplo: coloca unas piedras formando un rectángulo con 4 filas y 0 columnas.
- No tiene sentido real dividir entre 0; por ejemplo: reparte cuatro caramelos entre 0 personas.
- No tiene sentido el 0 como exponente de una potencia; por ejemplo, 4^0 querría decir un producto con 0 factores 4.

Contar elementos

Cuando hay que empezar a contar elementos de una colección solemos empezar por el 1. Sin embargo, en muchos lenguajes de programación el primer elemento de una serie es el que ocupa el lugar 0.

El cero es un número entero

Cuando se acaba la discrepancia es al considerar el siguiente conjunto de números que debemos estudiar, el de los enteros. El 0 es un número entero para todo el mundo. Por tanto, habrá que dar un sentido a las operaciones en las que esté involucrado el número 0, si es que se puede.

La identidad de Euler

El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) es uno de los más importantes de la historia. En este curso aparecerá su nombre varias veces. Es el autor de una igualdad que, desafortunadamente, es demasiado avanzada para estudiarla en este curso, pero que se considera de una gran belleza:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

- Los números *e* e *i* se estudian en el nivel 5.
- El número π se usa en todos los niveles y se estudia con más detalle en el 2.

Múltiplos y divisores

Cada vez que vemos una multiplicación, podemos interpretarla usando las palabras «múltiplo» y «divisor».

Ejemplo

A partir de la multiplicación $5 \cdot 6 = 30$, podemos decir:

- ✱ 5 es divisor de 30 (o 5 divide a 30).
- ✱ 6 es divisor de 30 (o 6 divide a 30).
- ✱ 30 es múltiplo de 5 (o 30 es divisible entre 5).
- ✱ 30 es múltiplo de 6 (o 30 divisible entre 6).

Definiciones

Si a, b y c son números naturales y $ab = c$, entonces decimos que

- ✱ a es divisor de c (o a divide a c).
- ✱ b es divisor de c (o b divide a c).
- ✱ c es múltiplo de a (o c es divisible entre a).
- ✱ c es múltiplo de b (o c es divisible entre b).

Múltiplos de un número

- ✱ Cualquier número natural tiene infinitos múltiplos.
- ✱ El menor múltiplo de un número es el mismo número.

Ejemplo

Múltiplos de 7: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84,...

Método

Para encontrar ordenadamente los múltiplos de un número basta ir multiplicándolo por 1, 2, 3, etc.

Divisores de un número

- ✱ Cualquier número tiene una cantidad finita de divisores.
- ✱ El mayor divisor de un número es él mismo.

Ejemplo

Divisores de 6: 1, 2, 3 y 6.

Método

Para encontrar ordenadamente los divisores de un número hay que ir probando desde el 1 en adelante si son o no divisores. Llegará un momento en que aparecerá un divisor ya obtenido anteriormente; en ese momento, se acaba la búsqueda. Observa que los divisores aparecen por parejas, salvo en un caso.

Ejemplo

Divisores del 36: $1 \cdot 36 = 36$; $2 \cdot 18 = 36$; $3 \cdot 12 = 36$; $4 \cdot 9 = 36$; 5 no es divisor; $6 \cdot 6 = 36$.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.

Propiedades

- ✱ El número 1 es divisor de cualquier número.
- ✱ Cualquier número es múltiplo del 1.

Demostración

Si a es un número natural, se verifica que $1 \cdot a = a$.

Múltiplos

① Escribe los primeros trece múltiplos de 2.

② Escribe los primeros doce múltiplos de 3.

③ Escribe los primeros once múltiplos de 11.

④ Escribe los primeros cuatro múltiplos de 13.

⑤ Escribe todos los múltiplos de 2 que hay entre 51 y 63.

⑥ Escribe todos los múltiplos de 5 que hay entre 53 y 67.

⑦ Calcula el decimocuarto múltiplo de 17.

⑧ Calcula el cociente entre el tercer múltiplo de 7 y el séptimo múltiplo de 3.

⑨ Averigua el menor número que es múltiplo a la vez de 3 y de 5.

⑩ Calcula la suma de todos los múltiplos de 4 menores que 23.

Divisores

⑪ Averigua todos los divisores de 12.

⑫ Averigua todos los divisores de 25.

⑬ Averigua todos los divisores de 48.

⑭ Averigua todos los divisores de 26.

⑮ Averigua todos los divisores de 17.

⑯ Averigua dos números que sean a la vez divisores de 14 y de 18.

Cuestiones

Juzga con las palabras «verdadero» o «falso» las siguientes afirmaciones. Asegúrate de tener pensado un motivo para tomar la decisión.

⑰ Hay algún número que no tiene infinitos múltiplos.

⑱ Hay algún número que no tiene infinitos divisores.

⑲ El único número que tiene exactamente tres divisores es el 25.

⑳ Hay un número que solo tiene un divisor.

㉑ Todo número divide a su cuadrado.

㉒ El triple de un número siempre es múltiplo de 3.

㉓ Todos los múltiplos de 100 son mayores que 100.

㉔ Hay un número que es divisor y múltiplo de 37.

Múltiplos

Calcula el mayor múltiplo posible del número propuesto, pero que sea menor que 100. Ejemplo: si se propone el 2, hay que contestar el 98.

	A	B	C	D	E
①	22	30	44	5	73
②	25	35	20	4	10
③	40	51	15	8	12
④	3	11	9	33	7

Divisores

Calcula el mayor divisor posible del número propuesto, pero que sea menor que el propio número. Ejemplo: si se propone el 4, hay que contestar el 2.

	A	B	C	D	E
⑤	10	3	55	15	9
⑥	7	33	81	64	77
⑦	21	49	39	5	14
⑧	11	35	13	26	25

Investigación

Tenemos cierto número de cuadraditos y nos preguntamos de cuántas maneras podemos disponerlos formando un rectángulo, sin que importe su posición concreta.

Si tenemos 5 cuadraditos, solo podremos hacerlo de una manera; pero si tenemos 6 cuadraditos, podremos hacerlo de dos:

⊡⊡⊡⊡⊡	⊡⊡⊡⊡⊡⊡	⊡⊡⊡ ⊡⊡⊡

Dicho de otra forma: el 5 solo se puede escribir como producto de una manera y el 6 se puede escribir de dos (siempre considerando que el orden de los factores no influye):

$$5 = 1 \cdot 5 \qquad 6 = 1 \cdot 6 \qquad 6 = 2 \cdot 3$$

Esto nos lleva a pensar que hay dos clases de números: los que solo se pueden descomponer como producto de una manera (que tendrán exactamente dos divisores) y los que se pueden descomponer como producto de más de una manera (que tendrán más de dos divisores).

Número primo

Un número primo es el que tiene exactamente dos divisores.

Ejemplo

El número 5 es un número primo porque solo tiene dos divisores: el 1 y el 5.

Número compuesto

Un número compuesto es el que tiene más de dos divisores.

Ejemplo

El número 6 es un número compuesto porque tiene más de dos divisores: 1, 2, 3 y 6.

El número 1

El número 1 tiene exactamente un divisor, el 1. Por tanto, ni cumple la definición de ser número primo ni la de ser número compuesto. Es el único número que no es ni primo ni compuesto.

Los teoremas

En matemáticas llamamos teorema a una afirmación que:

- Sabemos que es verdadera, porque tiene demostración.
- Tiene mucha importancia, normalmente porque de ella se deducen muchas más afirmaciones y se le saca mucho partido.

Teorema fundamental de la aritmética

Cualquier número natural mayor que 1 puede escribirse de manera única, salvo el orden, como producto de números primos.

Estudio de los números primos

El teorema fundamental de la aritmética nos sugiere que los números primos son como los «ladrillos» que permiten «construir» los demás números mediante productos. El estudio de los números primos tiene una gran importancia en la historia de las matemáticas. A los matemáticos clásicos griegos Euclides y Eratóstenes debemos los primeros descubrimientos: Euclides demostró que hay infinitos números primos y Eratóstenes desarrolló un método para averiguar los primeros.

Enunciados

Escribe los números propuestos de una o dos maneras, según lo admita cada número, teniendo en cuenta que el orden de los factores es indiferente. A continuación, di si el número es primo o compuesto.

① 35

② 13

③ 77

④ 3

⑤ 25

⑥ 2

⑦ 21

⑧ 4

⑨ 26

⑩ 33

⑪ 19

⑫ 49

⑬ 10

⑭ 9

⑮ 39

⑯ 15

⑰ 55

⑱ 23

⑲ 38

⑳ 5

㉑ 22

㉒ 34

㉓ 7

㉔ 39

㉕ 17

Números primos menores que 100

Es fácil obtener una lista con los números primos menores que 100. Es esta:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Memorizar números primos

Para avanzar en matemáticas te será necesario reconocer algunos números primos: los menores de 20 debes recordarlos sin vacilación. A partir de ahí, saber algunos más no te vendrá mal.

Números primos menores que 1000

Para que te vayas familiarizando con los números primos, puedes ver la lista de los números primos menores que 1000 (son 168):

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Demostración por reducción al absurdo

Es un método de demostración que consiste en suponer que lo que se quiere demostrar es falso y realizar algunos pasos lógicos que lleguen a una contradicción, algo que no puede ocurrir. Esto demuestra que lo que se quería demostrar no puede ser falso, luego es verdadero.

Demostración de que hay infinitos números primos

Lo hacemos por reducción al absurdo. Suponemos que hay una cantidad finita de números primos. Multiplicamos todos entre sí y llamamos N al resultado. Consideramos el número $q = N + 1$. Como $q > 1$, pueden ocurrir dos cosas: que q sea un número primo o que sea compuesto.

- Si q es un número primo, deducimos que hay al menos un número primo más que los que supusimos al principio.
- Si q es un número compuesto, tiene que ser divisible por alguno de los números primos, uno que llamamos p. Como p divide a q (= N+1) y a N, debe dividir también a 1, cosa que es imposible porque ningún número es divisor del 1.

En cualquier caso, llegamos a una contradicción, luego el conjunto de números primos es infinito.

Enunciados

Usando una lista de los números primos menores de 1000, contesta a las siguientes preguntas.

① Calcula el producto de los cuatro primeros números primos, súmale 1 y comprueba que el número resultante es un número primo. Los números primos así obtenidos se llaman números primos de Euclides.

② Averigua todos los números primos capicúas que sean menores de 200.

③ Averigua el mayor número primo capicúa de tres cifras.

④ Averigua todas las parejas de números primos (diferentes entre sí) que estén entre 10 y 99 formados por las mismas dos cifras; es decir, que entre ellos solo cambia el orden de las dos cifras. Se llaman números *somirp*.

⑤ Calcula $2^{2^1}+1$, $2^{2^2}+1$ y $2^{2^3}+1$; compueba que son números primos. Se llaman números primos de Fermat.

⑥ Calcula 2^2-1, 2^3-1, 2^5-1 y 2^7-1; compueba que son números primos. Se llaman números primos de Mersenne.

⑦ Averigua todas las parejas de números primos que haya entre 600 y 700 de modo que se diferencien en dos unidades. Los números primos que se diferencian en dos unidades se llaman números primos gemelos. Se cree que hay infinitas parejas, pero no se sabe con seguridad.

⑧ Averigua todos los cuartetos de números primos que haya entre 100 y 200 de modo que los cuatro números solo se diferencien en la cifra de las unidades. No se sabe si hay infinitos cuartetos así.

⑨ Averigua cuántos números primos hay entre 29^2 y 30^2. La conjetura de Legendre afirma que siempre hay algún número primo entre los cuadrados de dos números consecutivos, pero no se sabe si es cierta.

⑩ Escribe los siguientes números como la suma de dos números primos de modo que uno de los dos sea menor que 15:

a) 130 b) 136 c) 146 d) 124 e) 122 f) 132 g) 148 h) 126

La hipótesis de Goldbach afirma que cualquier número par mayor que 3 se puede escribir como la suma de dos números primos, pero no se sabe si es cierta.

Personajes

✱ Euclides: matemático griego, nacido hacia 135 a. e. c., quizá en Tiro; muerto hacia 265 a. e. c.
✱ Pierre de Fermat: matemático francés (1601-1665).
✱ Marin Mersenne: matemático francés (1588-1648).
✱ Adrien-Marie Legendre: matemático francés (1752-1833).
✱ Cristian Goldbach: matemático prusiano (1690-1764).

Descomposición en factores primos

Uno de los problemas más importantes que vamos a resolver en este tema es descomponer un número en factores primos. Consiste en escribir un número natural como un producto en el que todos los factores sean números primos. Es costumbre escribir la factorización en orden ascendente de factores primos para facilitar tareas posteriores.

Solo es fácil de conseguir cuando los números primos son pequeños. Si no, el problema puede requerir expertos en matemáticas y computación. Algunas calculadoras de bolsillo pueden resolver estos problemas cuando el número tiene menos de diez dígitos.

Ejemplos

Ejemplo 1	$990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$	Será muy fácil de hacer en este nivel, verás.
Ejemplo 2	$1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$	Será fácil de hacer en este nivel.
Ejemplo 3	$988\,027 = 991 \cdot 997$	No se podrá hacer en este nivel. ¡Calculadora!
Ejemplo 4	$18\,446\,744\,073\,709\,551\,617 = 274\,177 \cdot 67\,280\,421\,310\,721$	**¡Uf!**

El método más simple

Descomponer el número en factores (siempre mayores que 1) y seguir descomponiendo sucesivamente los factores obtenidos hasta que todos sean primos. Se puede hacer en cualquier orden, porque sabemos que el resultado es único.

Ejemplo 1	$990 = 99 \cdot 10 = 9 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
Ejemplo 5	$48 = 6 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \cdot 3$
Ejemplo 6	$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^3$
Ejemplo 7	$98 = 2 \cdot 49 = 2 \cdot 7 \cdot 7 = 2 \cdot 7^2$

Es un método adecuado con números muy pequeños.

Averiguar si un número es divisible entre un primo

La clave para poder factorizar un número en factores primos es averiguar si el número es divisible entre un número primo en concreto. Aunque siempre se puede hacer la división para saber si es exacta o no, es conveniente encontrar métodos que permitan tomar la decisión en menos tiempo.

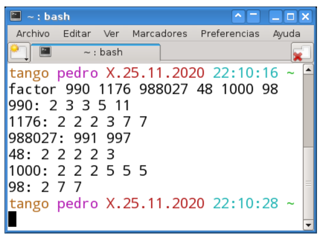
Criterios de divisibilidad

Son métodos que permiten decidir con cierta rapidez si un número es divisible entre un número primo en concreto. Algunos son muy rápidos, otros no lo son tanto.

Existen criterios para muchos números primos e incluso para algunos números compuestos, pero lo fundamental es que te manejes muy bien en los criterios de divisibilidad de los cinco primeros números primos, 2, 3, 5, 7 y 11, ya que son los que más aparecen, no solo en educación secundaria.

Programas de ordenador

Hay multitud de programas de ordenador que ayudan en la tarea de factorizar números. Señalamos el programa *factor*, de Paul Rubin, disponible en todas las instalaciones de Linux.



Enunciados

Descompón los siguentes números en factores primos mediante el método de escribirlos como producto y seguir descomponiendo sucesivamente los factores obtenidos hasta que todos sean primos. Asegúrate de escribir la factorización final en orden ascendente de factores primos.

① 36

② 50

③ 12

④ 35

⑤ 44

⑥ 54

⑦ 15

⑧ 88

⑨ 56

⑩ 30

⑪ 96

⑫ 72

⑬ 13

⑭ 77

⑮ 39

⑯ 34

⑰ 45

⑱ 900

⑲ 160

⑳ 42

㉑ 81

㉒ 280

㉓ 63

㉔ 132

㉕ 126

Criterio de divisibilidad entre 2

Un número es divisible entre 2 cuando acaba en cifra par. Dicho de otra manera, un número es divisible entre 2 cuando su cifra de las unidades es 0, 2, 4, 6 u 8.

Ejemplos

Ejemplo 1	576 es divisible entre 2	Porque acaba en 6
Ejemplo 2	375 no es divisible entre 2	Porque acaba en 5
Ejemplo 3	390 es divisible entre 2	Porque acaba en 0
Ejemplo 4	751 no es divisible entre 2	Porque acaba en 1

Criterio de divisibilidad entre 3

Un número es divisible entre 3 cuando la suma de sus cifras es divisible entre 3.

Ejemplos

Ejemplo 5	4572 es divisible entre 3	Porque $4 + 5 + 7 + 2 = 18 = 3 \cdot 6$
Ejemplo 6	373 no es divisible entre 3	Porque $3 + 7 + 3 = 13 = 3 \cdot 4 + 1$
Ejemplo 7	381 es divisible entre 3	Porque $3 + 8 + 1 = 12 = 3 \cdot 4$
Ejemplo 8	754 no es divisible entre 3	Porque $7 + 5 + 4 = 16 = 3 \cdot 5 + 1$

Si el número tiene muchas cifras y la suma de las cifras es demasiado grande como para saber fácilmente si es o no divisible entre 3, se le puede volver a aplicar el criterio a la suma para saberlo.

Ejemplo 9 → ¿es 278122595 divisible entre 3? La suma de sus cifras es 41. La suma de las cifras del número 41 es 5, que no es divisible entre 3, luego el número 278122595 no es divisible entre 3.

Criterio de divisibilidad entre 3 ampliado

Existe una alternativa para aplicar el criterio más rápidamente. Consiste en eliminar de la suma aquellas sumas parciales que vayan siendo divisibles entre 3. Si el resultado final es 0 o divisible entre 3, el número propuesto es divisible entre 3.

Ejemplo 10 → ¿es 4449216355514 divisible entre 3? Eliminamos los treses, seises y nueves, porque son múltiplos de 3: 4442155514. Eliminamos el trío de cuatros y el de cincos: 2114. Eliminamos el 2 y un 1, porque suman 3: 14. El número final (14) no es 0 ni divisible entre 3, luego 4449216355514 no es divisible entre 3.

Criterio de divisibilidad entre 5

Un número es divisible entre 5 cuando acaba en 0 o 5. Dicho de otra manera, un número es divisible entre 5 cuando su cifra de las unidades es 0 o 5.

Ejemplos

Ejemplo 11	570 es divisible entre 5	Porque acaba en 0
Ejemplo 12	373 no es divisible entre 5	Porque acaba en 3
Ejemplo 13	395 es divisible entre 5	Porque acaba en 5
Ejemplo 14	751 no es divisible entre 5	Porque acaba en 1

Importancia del 7

El 7 es el cuarto número primo; uno de cada siete números naturales es múltiplo de 7. Por tanto, será bastante habitual encontrarnos con múltiplos de 7.

Sin embargo, el criterio de divisibilidad entre 7 ha resultado extraño a lo largo de los últimos años y no se ha estudiado tanto como los demás. Hay criterios de divisibilidad de otros números primos que son muy similares al del 7, así que puedes aprovechar mucho si lo aprendes y lo aplicas bien.

Criterio de divisibilidad entre 7

Un número es divisible entre 7 cuando la diferencia entre sus decenas y el doble de sus unidades es 0 o divisible entre 7.

Ejemplos

Ejemplo 1	91 → sí	Decenas: 9, doble de las unidades: 2, diferencia: 9−2=7
Ejemplo 2	119 → sí	Decenas: 11, doble de las unidades: 18, diferencia: 18−11=7
Ejemplo 3	126 → sí	Decenas: 12, doble de las unidades: 12, diferencia: 12−12=0
Ejemplo 4	86 → no	Decenas: 8, doble de las unidades: 12, diferencia: 12−8=4
Ejemplo 5	131 → no	Decenas: 13, doble de las unidades: 2, diferencia: 13−2=11

Repetición del criterio

Si el número tiene muchas cifras y la diferencia obtenida es demasiado grande como para saber fácilmente si es o no divisible entre 7, se le puede volver a aplicar el criterio a la diferencia para saberlo.

Ejemplo 6 → ¿es 1001 divisible entre 7? Decenas: 100, doble de las unidades: 2, diferencia: 100−2=98. Para saber si 98 es divisible entre 7, le aplicamos el criterio. Decenas: 9, doble de las unidades: 16, diferencia: 16−9=7. Resultado: 1001 sí es divisible entre 7.

Ejemplo 7 → ¿es 1779 divisible entre 7? Decenas: 177, doble de las unidades: 18, diferencia: 177−18=159. Para saber si 159 es divisible entre 7, le aplicamos el criterio. Decenas: 15, doble de las unidades: 18, diferencia: 18−15=3. Resultado: 1779 no es divisible entre 7.

El proceso se puede aplicar tantas veces como sea necesario. Vemos dos ejemplos aún más largos, solo con las operaciones necesarias:

Ejemplo 8 → ¿es 35 581 divisible entre 7? 3558−2=3556; 355−12=343; 34−6=28. Resultado: 35 581 sí es divisible entre 7.

Ejemplo 9 → ¿es 60 703 divisible entre 7? 6070−6=6064; 606−8=598; 59−16=43. Resultado: 60 703 no es divisible entre 7.

Atajo

Para aplicar el criterio, si la cifra de las unidades es 0 o 7, se puede eliminar y aplicar el criterio al número que quede.

Ejemplo 10 → ¿es 17 017 divisible entre 7? Como la cifra de las unidades es 7, la eliminamos: ¿es 1701 divisible entre 7? 170−2=168; 16−16=0. Resultado: 17 017 sí es divisible entre 7.

Ejemplo 11 → ¿es 45 284 divisible entre 7? 4528−8=4520; como la cifra de las unidades es 0, la eliminamos: ¿es 452 divisible entre 7? 45−4=41. Resultado: 45 284 no es divisible entre 7.

Criterio de divisibilidad entre 11

Un número es divisible entre 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par es 0 o divisible entre 11.

Ejemplo 1

¿Es 31 603 divisible entre 11?

Las cifras que ocupan impar son 3, 6 y 3. Suman 3 + 6 + 3 = 12.

Las cifras que ocupan par son 1 y 0. Suman 1 + 0 = 1.

La diferencia de las sumas es 12 – 1 = 11.

Resultado: 31 603 sí es divisible entre 11.

Ejemplo 2

¿Es 34 978 divisible entre 11?

Las cifras que ocupan impar son 3, 9 y 8. Suman 3 + 9 + 8 = 20.

Las cifras que ocupan par son 4 y 7. Suman 4 + 7 = 11.

La diferencia de las sumas es 20 – 11 = 9.

Resultado: 76 118 no es divisible entre 11.

Ejemplo 3

¿Es 15 059 divisible entre 11?

Las cifras que ocupan impar son 1, 0 y 9. Suman 1 + 0 + 9 = 10.

Las cifras que ocupan par son 5 y 5. Suman 5 + 5 = 10.

La diferencia de las sumas es 10 – 10 = 0.

Resultado: 15 059 sí es divisible entre 11.

Para distinguir cuáles son las cifras que ocupan lugar par o impar, es indiferente empezar a contar por la derecha o por la izquierda, porque lo importante es la diferencia entre las dos sumas, que siempre se hace restando la mayor de las sumas menos la menor.

Ejemplo 4

¿Es 5819 divisible entre 11?

Una de las sumas es 5 + 1 = 6.

La otra suma es 8 + 9 = 17.

La diferencia de las sumas es 17 – 6 = 11.

Resultado: 5819 sí es divisible entre 11.

Ejemplo 5

¿Es 1579 divisible entre 11?

Una de las sumas es 1 + 7 = 8.

La otra suma es 5 + 9 = 14.

La diferencia de las sumas es 14 – 8 = 6.

Resultado: 1579 no es divisible entre 11.

Criterio de divisibilidad entre 2

Un número es divisible entre 2 cuando acaba en cifra par. Dicho de otra manera, un número es divisible entre 2 cuando su cifra de las unidades es 0, 2, 4, 6 u 8.

Criterio de divisibilidad entre 3

Un número es divisible entre 3 cuando la suma de sus cifras es divisible entre 3.

Criterio de divisibilidad entre 5

Un número es divisible entre 5 cuando acaba en 0 o 5. Dicho de otra manera, un número es divisible entre 5 cuando su cifra de las unidades es 0 o 5.

Criterio de divisibilidad entre 7

Un número es divisible entre 7 cuando la diferencia entre sus decenas y el doble de sus unidades es 0 o divisible entre 7.

Criterio de divisibilidad entre 11

Un número es divisible entre 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par es 0 o divisible entre 11.

Ejemplos

Usando los criterios de divisibilidad, averigua si los siguientes números son o no son divisibles entre 2, 3, 5, 7 y 11.

	Número	Div. entre 2	Div. entre 3	Div. entre 5	Div. entre 7	Div. entre 11
①	2310	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
		Última cifra: 0	Suma de las cifras: 6	Última cifra: 0	2310 → 231 23–2=21	2+1=3; 3+0=3 3–3=0
②	2002	Sí	No	No	Sí	Sí
		Última cifra: 2	Suma de las cifras: 4	Última cifra: 2	200–4=196 19–12=7	2+0=2; 0+2=2 2–2=0
③	714	Sí	Sí	No	Sí	No
		Última cifra: 4	Suma de las cifras: 12	Última cifra: 4	71–8=63	7+4=11; 1=1 11–1=10
④	2145	No	Sí	Sí	No	Sí
		Última cifra: 5	Suma de las cifras: 12	Última cifra: 5	214–10=204 20–8=16	2+4=6; 1+5=6 6–6=0
⑤	7735	No	No	Sí	No	No
		Última cifra: 5	Suma de las cifras: 22	Última cifra: 5	773–10=673 67–6=61	7+3=10; 7+5=12 12–10=2
⑥	10010	Sí	No	Sí	Sí	Sí
		Última cifra: 0	Suma de las cifras: 2	Última cifra: 0	100–2=98 16–9=7	1+0+0=1; 0+1=1 1–1=0
⑦	5083	No	No	No	No	No
		Última cifra: 3	Suma de las cifras: 16	Última cifra: 3	508–6=502 50–4=46	5+8=13; 0+3=3 13–3=10

Enunciados

Usando las tablas de multiplicar y los criterios de divisibilidad, averigua si los siguientes números son o no son divisibles entre 2, 3, 5, 7 y 11. Contesta «Sí» o «No». En ningún caso debes hacer la división.

	Número	Div. entre 2	Div. entre 3	Div. entre 5	Div. entre 7	Div. entre 11
①	35					
②	42					
③	25					
④	17					
⑤	81					
⑥	49					
⑦	121					
⑧	66					
⑨	1002					
⑩	405					
⑪	539					
⑫	1694					
⑬	1125					
⑭	1331					
⑮	2401					
⑯	576					
⑰	1089					
⑱	41					
⑲	1875					
⑳	3773					
㉑	9317					
㉒	1232					
㉓	5929					
㉔	352					

Método general para factorizar un número

Dado un número natural, hay que escribirlo como producto de números primos. Para facilitar algunas aplicaciones, el producto se escribirá con factores de valor creciente.

- Hay que ir probando por orden creciente si los números primos dividen al número.
- Si un número primo divide al número, se hace la división y se sustituye el número por el cociente de la división.
- Cuando un número primo divide al número, en el siguiente paso hay que volver a probar si también divide al cociente.
- Si un número primo no divide al número, en el siguiente paso hay que probar con el número primo inmediatamente mayor.
- El proceso acaba cuando la división da 1.

924	2
462	2
231	3
77	7
11	11
1	

$924=2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11$

Siempre hay que terminar escribiendo la factorización.

Atajos en el método

Si tienes claro el método y, sobre todo, que el objetivo final es obtener la descomposición del número en factores primos crecientes, puedes aplicar algunos atajos.

Si el número acaba en algún cero

- Si un número acaba en 0, es que es divisible entre 10.
- 10 se descompone como producto de factores primos como 2·5.
- Por cada cero al final del número podemos obtener un 2 y un 5.
- Recuerda unir en una potencia todos los factores iguales que obtengas, que ahora quizá no aparezcan por orden.

1400	$2^2\cdot 5^2$
14	2
7	7
1	

$1400=2^3\cdot 5^2\cdot 7$

Cambia el orden de los números primos

- Si te parece que la división puede resultar más fácil escribiendo los números primos en un orden distinto al del método, puedes hacerlo.
- Recuerda escribir en la solución los números primos en orden creciente.

195	5
39	3
13	13
1	

$195=3\cdot 5\cdot 13$

Si reconoces alguna potencia o producto

Puedes dividir directamente por una potencia de un número primo o bien por un producto de números primos. El cálculo mental te ayuda a reconocer estas potencias o productos; así ganas tiempo al resolver estos ejercicios.

1125	3
375	3
125	5^3
1	

$1125=3^2\cdot 5^3$

693	3
231	3
77	$7\cdot 11$
1	

$693=3^2\cdot 7\cdot 11$

Enunciados

Descompón los siguentes números en factores primos mediante el método general, comprobando los números primos en orden creciente. Asegúrate de escribir la factorización final.

① 504

② 702

③ 2625

④ 1300

⑤ 686

⑥ 1296

⑦ 575

⑧ 616

⑨ 288

⑩ 1029

⑪ 425

⑫ 572

⑬ 1836

⑭ 2695

⑮ 1323

⑯ 4998

⑰ 1496

⑱ 3267

⑲ 1365

⑳ 1012

㉑ 1573

㉒ 966

㉓ 51 975

㉔ 11 375

㉕ 33 075

	A	B	C	D	E
1	6	15	8	25	49
2	33	100	13	9	26
3	35	12	18	55	50
4	21	16	42	27	75
5	300	490	5000	22	17
6	77	14	440	99	28
7	21	36	1100	20	45
8	34	39	400	70	65
9	32	250	81	56	60
10	46	66	90	125	98

Relación entre factores primos, divisores y múltiplos

Si un número divide a otro y es menor que él, todos los divisores primos del número menor son también divisores del número mayor.

Ejemplo 1

Comparamos el 12 y el 168.

Sus descomposiciones en factores primos son $12 = 2^2 \cdot 3$, $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

Para compararlos mejor, los escribimos sin usar potencias:

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.

Visualizamos en color verde los divisores de 12 y en color azul los divisores de 168 que no corresponden con divisores de 12:

$12 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3}$, $168 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{7}$.

Se observa que todos los divisores primos de 12 son también divisores de 168.

Comprobación de divisibilidad

Cuando dos números están factorizados, es muy sencillo saber si uno es divisor del otro: todos los factores de uno deben ser factores del otro.

Ejemplo 2

Averigua si $a = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$ es divisor de $b = 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11^3$.

Respuesta: sí, porque todos los divisores primos de a lo son de b.

Para entenderlo mejor, usamos la codificación por colores del ejemplo 1:

$a = \mathbf{5} \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{11}$, $b = \mathbf{5} \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{11} \cdot \mathbf{11} \cdot \mathbf{11}$

Observa que no es necesario saber el valor concreto de los números a y b. Esta manera de trabajar en matemáticas es muy potente: hacer razonamientos generales que nos liberen de operaciones particulares.

División cuando los números están factorizados

Cuando un número divide a otro y es menor que él, si se dispone de la factorización de los dos, hacer la división se puede reducir a una multiplicación (a veces, ni siquiera eso).

Ejemplo 3

Divide 168 entre 12 sabiendo que $12 = 2^2 \cdot 3$ y $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

Para entender mejor cómo hacer la división, escribimos las factorizaciones sin potencias y con los colores del ejemplo 1:

$12 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3}$, $168 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{7}$.

Ahora la división se puede hacer así:

$168 : 12 = (\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{7}) : (\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3}) = \mathbf{2} \cdot \mathbf{7} = 14$.

Ejemplo 4

Divide 3465 entre 315 sabiendo que $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ y $3465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Para entender mejor cómo hacer la división, escribimos las factorizaciones con los colores de la explicación anterior:

$315 = \mathbf{3^2} \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{7}$, $3465 = \mathbf{3^2} \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{11}$.

La división:

$3465 : 315 = (\mathbf{3^2} \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{11}) : (\mathbf{3^2} \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{7}) = 11$.

Enunciados

Dadas las siguientes parejas de números, se pide:

a) Descomponer cada uno en factores primos usando el método más apropiado.

b) Dividir el mayor entre el menor usando las descomposiciones factoriales.

① 12 y 84

② 72 y 432

③ 75 y 825

④ 28 y 924

⑤ 77 y 11 011

Enunciados

Utiliza las siguientes descomposiciones para responder esta tanda de preguntas.

$12 = 2^2 \cdot 3$	$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$	$132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$	$204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$
$18 = 2 \cdot 3^2$	$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$	$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$	$234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$

⑥ ¿12 divide a 84?

⑦ ¿84 divide a 204?

⑧ ¿Es 198 múltiplo de 18?

⑨ ¿Es 234 múltiplo de 126?

⑩ ¿132 divide a 198?

⑪ ¿Es 126 múltiplo de 12?

⑫ Calcula 84 : 12

⑬ Calcula 132 : 12

⑭ Calcula 234 : 18

Cuestiones

Juzga con las palabras «verdadero» o «falso» las siguientes afirmaciones. Asegúrate de tener pensado un motivo para tomar la decisión.

⑮ Si a y b son números primos, a^2b divide a ab^2.

⑯ Si aumentas en una unidad todos los exponentes de la descomposición factorial de un número, se obtiene un múltiplo del número.

⑰ Si en la descomposición factorial de un número aparecen tres números primos, al suprimir uno de ellos se obtiene un divisor del número.

⑱ Si a y b son números primos, a^3b^2 es múltiplo de a^2b^3.

Obtención de los divisores a partir de la descomposición

La descomposición de un número en factores primos permite averiguar todos los divisores del número de una manera diferente de la primera que vimos.

En vez de ir probando si un número es o no divisor del número dado, calcularemos los divisores directamente. Es un buen método, pero puede presentarse la dificultad de olvidar alguna combinación y perder algún divisor.

Ejemplo 1

Calcula todos los divisores de 84.

Empezamos por establecer que el número 84 tiene dos divisores que dicen inmediatamente, el 1 y el 84. Por tanto, el método se va a utilizar para averiguar los demás divisores, que son los difíciles de obtener.

La descomposición en factores primos es $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Aunque solo hay tres factores primos, debemos tener en cuenta que el 2 aparece al cuadrado, así que consideramos el 84 como el producto de cuatro factores: $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.

Para obtener divisores de 84 habrá que elegir todas las combinaciones posibles de esos cuatro factores que den distintos resultados. Por tanto, será imprescindible seguir un buen método para ir haciendo las elecciones.

Si elegimos uno solo de los cuatro factores obtenemos tres divisores: 2, 3 y 7.

Si elegimos dos de los factores obtenemos otros cuatro divisores: $2·2=4$, $2·3=6$, $2·7=14$ y $3·7=21$. Observa el orden en que hemos ido eligiendo los dos factores.

Si elegimos tres de los factores obtenemos otros tres divisores: $2·2·3=12$, $2·2·7=28$ y $2·3·7=42$.

Si eligiéramos los cuatro factores, obtendríamos el número original, el 84.

Para dar la solución escribimos por orden creciente todos los divisores obtenidos, incluyendo los dos tan sencillos que comentamos al principio.

Solución: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 y 84.

Ejemplo 2

Calcula todos los divisores de 3861.

Descomposición factorial: $3861 = 3^3 \cdot 11 \cdot 13$.

Tomando un factor: 3, 11, 13.

Tomando dos factores: $3·3=9$, $3·11=33$, $3·13=39$, $11·13=143$.

Tomando tres factores: $3·3·3=27$, $3·3·11=99$, $3·3·13=117$, $3·11·13=429$.

Tomando cuatro factores: $3·3·3·11=297$, $3·3·3·13=351$, $3·3·11·13=1287$.

Solución: 1, 3, 9, 11, 13, 27, 33, 39, 99, 117, 143, 297, 351, 429, 1287 y 3861.

Propiedad

La cantidad de divisores de un número es igual al producto de los siguientes de los exponentes de cada factor primo en su descomposición factorial.

Ejemplo 1. $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Los exponentes son 2, 1 y 1; los siguientes de los exponentes son 3, 2 y 2; el producto es $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Por tanto, 84 tiene 12 divisores.

Ejemplo 2. $3861 = 3^3 \cdot 11 \cdot 13$. Los exponentes son 3, 1 y 1; los siguientes de los exponentes son 4, 2 y 2; el producto es $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Así, 3861 tiene 16 divisores.

Definiciones

Presentaremos las definiciones de mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Realmente, no son más que decir con más palabras lo que ya dice el nombre. Si dominas el español, lo entenderás enseguida.

Las definiciones son importantes para que comprendas **el concepto**, pero no son métodos de cálculo. Más adelante verás y aprenderás uno.

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes de los números. Se puede escribir como mcm(*números*), pero existen otras formas, como mín.c.m. o m. c. m.

Ejemplo. El mínimo común múltiplo de 6, 14 y 21 se escribe mcm(6, 14, 21).

Máximo común divisor

El máximo común divisor de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de los números. Se puede escribir como MCD(*números*), pero existen otras formas, como máx.c.d. o M. C. D.

Ejemplo. El máximo común divisor de 30, 42 y 66 se escribe MCD(30, 42, 66).

Ejemplo de mínimo común múltiplo

Para entender la definición, vamos a utilizarla para deducir el mcm(6, 14, 21).

Los múltiplos de 6 son 6, 12, 18, 24, 30, 36, **42**, 48, 54, 60, 66, 72, 78, **84**, 90,...

Los múltiplos de 14 son 14, 28, **42**, 56, 70, **84**, 98, 112, **126**,...

Los múltiplos de 21 son 21, **42**, 63, **84**, 105, **126**, 147, 168,...

Los múltiplos comunes de 6, 14 y 21 (en negrita más arriba) son 42, 84, 126,...

El menor de los múltiplos comunes de 6, 14 y 21 es 42.

Por tanto, mcm(6, 14, 21) = 42.

Ejemplo de máximo común divisor

Para entender la definición, vamos a utilizarla para deducir el MCD(30, 42, 66).

Los divisores de 30 son **1**, **2**, **3**, 5, **6**, 10, 15 y 30.

Los divisores de 42 son **1**, **2**, **3**, **6**, 7, 14, 21 y 42.

Los divisores de 66 son **1**, **2**, **3**, **6**, 11, 22, 33 y 66.

Los divisores comunes de 30, 42 y 66 (en negrita más arriba) son 1, 2, 3 y 6.

El mayor de los divisores comunes de 30, 42 y 66 es 6.

Por tanto, MCD(30, 42, 66) = 6.

Métodos de cálculo

Existen varias maneras de calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor. Es costumbre de cada territorio del mundo calcularlo de una manera diferente. Cuantos más métodos comprendas, mejor para ti, porque así podrás usar el que te parezca más cómodo en cada situación.

En este curso usaremos un método que tiene la ventaja de que permite con el mismo esfuerzo calcular a la vez el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

Cálculo del mcm y del MCD

Vemos un método que permite calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de varios números usando su descomposición en factores primos.

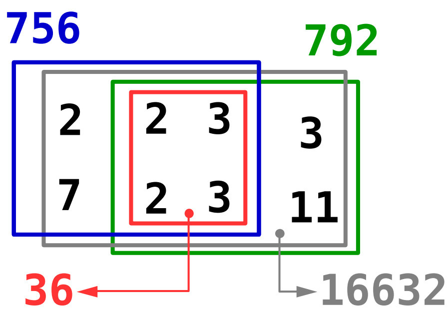
Ejemplo

Para entender el método, empezamos con un ejemplo. Vamos a calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de 756 y 792.

Averiguamos la descomposición factorial de los dos números:

$756 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, $792 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$

Visualizamos las dos descomposiciones conjuntamente y de ahí vamos a deducir tanto el mínimo común múltiplo como el máximo común divisor. Rodeamos con un cuadro azul todos los factores primos de 756 y con un cuadro verde los de 792.



El mínimo común múltiplo de 756 y 729 debe ser múltiplo de todos los factores primos que haya conjuntamente en las dos descomposiciones, pero de ninguno más; en el dibujo están rodeados por un cuadro gris. Por tanto,

$$\text{mcm}(756, 729) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 = 16\,632$$

El máximo común divisor de 756 y 729 debe ser múltiplo de todos los factores primos que haya comunes en las dos descomposiciones, sin faltar ninguno; en el dibujo están rodeados por un cuadro rojo. Por tanto,

$$\text{MCD}(756, 729) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

Método

Para calcular el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor de varios números se sigue este método:

Paso 1: se obtiene la descomposición en factores primos de los números.

Paso 2a: para calcular el mínimo común múltiplo se multiplican todos los factores primos obtenidos en el paso (1), cada uno de ellos elevado al mayor exponente que aparezca.

Paso 2b: para calcular el máximo común divisor se multiplican todos los factores primos obtenidos en el paso (1) que estén repetidos en todas las descomposiciones, cada uno de ellos elevado al menor exponente que aparezca. Si no hay ningún factor primo común, el máximo común divisor es 1.

Explicación del método con el ejemplo

- Para el mínimo común múltiplo: los factores primos que aparecen conjuntamente en las dos descomposiciones son 2, 3, 7 y 11; el 2 y el 3 aparecen con mayor exponente 3.
- Para el máximo común divisor: los factores primos que están repetidos en las dos descomposiciones son 2 y 3, que aparecen con menor exponente 2.

Enunciados

Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de las siguientes parejas de números.

① 24 y 54

② 28 y 20

③ 63 y 135

④ 140 y 350

⑤ 147 y 245

⑥ 66 y 78

⑦ 56 y 99

⑧ 308 y 1274

⑨ 288 y 432

⑩ 112 y 189

⑪ 96 y 125

⑫ 135 y 378

⑬ 68 y 104

⑭ 875 y 1375

⑮ 1573 y 2057

⑯ 272 y 408

⑰ 891 y 1485

⑱ 468 y 1260

⑲ 1152 y 864

⑳ 275 y 525

Enunciados

Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de las siguientes ternas de números.

㉑ 14, 21 y 35

㉒ 60, 90 y 150

㉓ 4, 9 y 11

㉔ 60, 180 y 300

Si un número es múltiplo de los demás

Si queremos calcular el mínimo común múltiplo de varios números y uno de ellos es múltiplo de todos los demás, ese es el mínimo común múltiplo.

Ejemplo 1: mcm(15, 30, 60) = 60, porque 60 es múltiplo de 15 y de 30.

Ejemplo 2: mcm(7, 14) = 14, porque 14 es múltiplo de 7.

Si un número divide a los demás

Si queremos calcular el máximo común divisor de varios números y uno de ellos divide a todos los demás, ese es el máximo común divisor.

Ejemplo 3: MCD(15, 30, 45) = 15, porque 15 divide a 30 y a 45.

Ejemplo 4: MCD(7, 14) = 7, porque 7 divide a 14.

Dos números, uno múltiplo del otro

Si consideramos dos números distintos que verifiquen que uno es múltiplo del otro, el mínimo común múltiplo será el mayor de los números y el máximo común divisor será el menor.

Ejemplo 5: mcm(5, 15) = 15, MCD(5, 15) = 5.

Ejemplo 6: mcm(6, 18) = 18, MCD(6, 18) = 6.

Números coprimos

Se dice que dos o más números son coprimos, o primos entre sí, cuando no tienen ningún divisor primo común.

Ejemplo 7: los números 4, 5 y 21 son coprimos.

Ejemplo 8: los números 2, 9 y 77 son coprimos.

Ejemplo 9: los números 10 y 33 son coprimos.

- ✱ Cuando dos o más números son coprimos, el mínimo común múltiplo de todos ellos es su producto.
- ✱ Cuando dos o más números son coprimos, el máximo común divisor de todos ellos es 1.

Ejemplo 10: mcm(2, 3) = 6, MCD(2, 3) = 1.

Ejemplo 11: mcm(10, 21) = 210, MCD(10, 21) = 1.

Cálculos sencillos

Cuando hay que calcular el mínimo común múltiplo de varios números y son sencillos, puede ser más rápido calcularlo mentalmente recordando la definición de mínimo común múltiplo que aplicando el método general. Tendrás que decidirlo tú.

Ejemplo 12: mcm(6, 9) = 18. Empezamos pensando que 9 podría ser el mcm buscado; no lo es, porque 9 no es múltiplo de 9; el siguiente múltiplo de 9 es 18, que sí es múltiplo de 6, así que esa es la solución.

Ejemplo 13: mcm(10, 15) = 30. Empezamos pensando que 15 podría ser el mcm buscado; no lo es, porque 15 no es múltiplo de 10; el siguiente múltiplo de 15 es 30, que sí es múltiplo de 10, así que esa es la solución.

Ejemplo 14: mcm(9, 15) = 45. Empezamos pensando que 15 podría ser el mcm buscado; no lo es, porque 15 no es múltiplo de 9; el siguiente múltiplo de 15 es 30, que no es múltiplo de 9; el siguiente múltiplo de 15 es 45, que sí es múltiplo de 9, así que esa es la solución.

Mínimo común múltiplo

Calcula mentalmente el mínimo común múltiplo de los números propuestos.

	A	B	C	D	E
1	3 ¦ 7	2 ¦ 10	5 ¦ 11	5 ¦ 25	2 ¦ 9
2	6 ¦ 42	4 ¦ 9	3 ¦ 25	9 ¦ 18	10 ¦ 25
3	2 ¦ 15	3 ¦ 15	6 ¦ 7	12 ¦ 24	3 ¦ 13
4	2 ¦ 3 ¦ 5	2 ¦ 4 ¦ 8	3 ¦ 5 ¦ 15	2 ¦ 3 ¦ 11	3 ¦ 9 ¦ 18

Máximo común divisor

Calcula mentalmente el máximo común divisor de los números propuestos.

	A	B	C	D	E
5	3 ¦ 7	2 ¦ 10	5 ¦ 11	5 ¦ 25	2 ¦ 9
6	6 ¦ 42	4 ¦ 9	3 ¦ 25	9 ¦ 18	10 ¦ 25
7	2 ¦ 15	3 ¦ 15	6 ¦ 7	12 ¦ 24	3 ¦ 13
8	2 ¦ 3 ¦ 5	2 ¦ 4 ¦ 8	3 ¦ 5 ¦ 15	2 ¦ 3 ¦ 11	3 ¦ 9 ¦ 18

Ejemplo 1

Tenemos 2160 litros de un líquido en un recipiente y queremos distribuirlo en recipientes más pequeños, idénticos entre sí, de un número exacto de litros y que sean mayores que un litro. ¿De cuántas maneras podremos hacerlo?

Resolución

La capacidad de cada recipiente debe ser un divisor de 2160. Hay que averiguar cuántos divisores tiene 2160 y excluir el 1 y el 2160 para cumplir las condiciones del enunciado.

Factorizamos: $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$.

La cantidad de divisores es $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$.

Sustraemos los dos divisores que no se admiten: $40 - 2 = 38$.

Solución: lo podremos hacer de 38 maneras.

Ejemplo 2

Carlos, Ana y Marcos corren en un circuito en el campo. Carlos tarda cuatro minutos en dar una vuelta, Ana tarda seis y Marcos tarda nueve. Salen al mismo tiempo.

(a) ¿Cuánto tiempo pasará hasta que vuelvan a pasar juntos por el punto de salida?

(b) ¿Cuántas vueltas habrá dado Ana?

Resolución

El tiempo que tarda cada persona en volver a pasar por el punto de salida es múltiplo del tiempo que tarda en dar una vuelta. Por tanto, hay que encontrar un múltiplo común a 4, 6 y 9. Como preguntan por la primera vez que coincidirán, hay que encontrar el mínimo común múltiplo de 4, 6 y 9.

$4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $9 = 3^2 \Rightarrow \text{mcm}(4, 6, 9) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

Ana habrá dado $36 : 6 = 6$ vueltas.

Solución: (a) 36 minutos; (b) 6.

Ejemplo 3

Unos amigos hemos comprado para merendar 24 croquetas, 36 tapas de jamón y 60 taquitos de queso. Queremos distribuir todos los aperitivos en bandejas individuales idénticas.

(a) ¿Cúal es el mayor número de bandejas que podremos preparar?

(b) ¿Cuántas croquetas habrá en cada bandeja?

Resolución

El número de bandejas debe ser divisor de 24, 36 y 60. Por tanto, hay que encontrar un divisor común de 24, 36 y 60. Como se pide el mayor número posible de bandejas, habrá que calcular el máximo común divisor de 24, 36 y 60.

$24 = 2^3 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow \text{MCD}(24, 36, 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

En cada bandeja habrá $24 : 12 = 2$ croquetas.

Solución: (a) 12; (b) 2.

Enunciados

① En una serrería tienen un tablón que mide 18 metros y lo quieren dividir en trozos iguales que midan una cantidad exacta en metros. ¿De cuántas maneras lo pueden hacer?

② En un bonito lago hay dos barcos para turistas. El barco de recorrido corto tarda 24 minutos y el de recorrido largo tarda 36 minutos. Si salen a la vez ahora, calcula

(a) Dentro de cuánto tiempo volverán a salir a la vez.

(b) Cuántos recorridos habrá hecho el barco de recorrido corto.

③ Tienes 24 canicas rojas y 36 canicas azules. Las quieres guardar en bolsas en las que quepa la mayor cantidad posible de canicas, pero que sean del mismo color. Calcula

(a) Cuántas canicas habrá en cada bolsa.

(b) Cuántas bolsas tendrán canicas azules.

④ Tienes una gran colección de cromos, sabes que anda entre 1000 o 2000 cromos. Si los guardas en bolsas de 20 cromos, ni sobra ni falta ninguno. Lo mismo te pasa si los guardas en paquetes de 54 cromos o en cuadernos de 75. ¿Cuántos cromos tienes?

⑤ Clara visita a su abuela cada ocho días y su hermano Pedro cada catorce días. Hoy han coincidido en la visita, ¿cuándo volverán a coincidir?

⑥ Una hoja de papel mide 15 centímetros por 21 centímetros. Queremos dibujar en ella cuadrados iguales del mayor tamaño que sea posible.

(a) ¿Cuál será el lado de cada cuadrado?

(b) ¿Cuántos cuadrados dibujaremos?

⑦ Asisten a un congreso 6048 personas. ¿De cuántas maneras se pueden reunir de modo que haya el mismo número de personas en cada reunión?

⑧ Un agricultor tiene dos clases de patatas: de una tiene 120 kilogramos y de la otra 75 kilogramos. Si quiere envasarlas en sacos de la misma capacidad, sin mezclar, y lo más grandes posibles, calcula

(a) Cuál debe ser el tamaño del saco.

(b) Cuántos sacos necesitará en total.

⑨ Tres barcos de pesca salen a faenar del mismo puerto. Uno de ellos sale cada ocho días, otro cada tres y el tercero cada seis. Si salen hoy a la vez, ¿dentro de cuantos días volverán a salir los tres juntos por primera vez?

⑩ Se quiere dividir un enorme bloque de mármol que mide 40 metros de largo, 20 metros de anchura y 12 metros de altura en bloques cúbicos iguales del mayor tamaño posible. ¿Cuántos bloques se obtendrán?

Enunciados

① En una pastelería preparan unos dulces de 24 gramos y otros de 30 gramos usando la misma masa. Quieren preparar la masa en bandejas que les permitan hacer una tanda de cualquiera de los dos tipos de dulce.

(a) ¿Cuál es la cantidad mínima de masa que debe tener cada bandeja?

(b) ¿Cuántos dulces de 24 gramos se prepararán con una bandeja?

② Calcula cuántos divisores impares tiene el número 55 566.

③ Dos pueblos están comunicados por un camino; en uno de los lados se plantan acacias con una separación de 45 metros y en el otro lado se plantan pinos con una separación de 50 metros. Se comienzan a plantar haciendo coincidir un árbol de cada lado. ¿Cada cuántos metros volverán a coincidir?

④ En un almacén disponen de 300 latas de mejillones, 160 bolsas de mazapán y 120 bolsas de jamón en lonchas. Quieren almacenar el material en cajas de modo que en todas haya el mismo número de objetos de cada clase.

(a) ¿Cuál es la cantidad máxima de cajas que necesitarán?

(b) ¿Cuántos objetos habría en cada una de esas cajas?

⑤ Un juego de construcción tiene piezas rojas de 12 centímetros de altura y piezas azules de 18 centímetros de altura. ¿Cuál es la mínima altura que se puede alzanzar igual usando solo piezas rojas o solo piezas azules?

⑥ Amaranta tiene una colección de objetos valorados cada uno en 98 euros; Aureliano tiene una colección de objetos valorados en 77 euros cada uno. Quieren hacer un intercambio de objetos lo más pequeño posible y que sea justo.

(a) ¿Cuántos objetos le dará Amaranta a Aureliano?

(b) ¿Cuántos objetos le dará Aureliano a Amaranta?

⑦ Usando piezas rectangulares de 432 milímetros por 648 milímetros se desea rellenar un cuadrado que sea lo más pequeño posible. ¿Cuántas piezas habrá que usar?

⑧ Un patio mide 5184 centímetros por 3888 centímetros y se desea ponerle un suelo formado por baldosas cuadradas que tengan un número exacto de centímetros de lado.

(a) ¿Cuál es el mayor lado que podría tener la baldosa?

(b) ¿Cuántas opciones hay para elegir el tamaño de las baldosas?

⑨ En una obra musical suena el triángulo cada 35 segundos y el cencerro cada 40 segundos. La obra comienza y acaba con un toque simultáneo del triángulo y el cencerro; además, coinciden otras seis veces. Calcula cuántos segundos dura la obra.

⑩ (a) Calcula cuántos divisores del número 98 010 acaban en cero.

(b) Calcula cuántos divisores del número 98 010 no acaban en cero.

Criterio de divisibilidad entre 13

Un número es divisible entre 13 cuando la suma de sus decenas y el cuádruple de sus unidades es divisible entre 13.

Ejemplo 1	221 es divisible entre 13	Porque $22 + 4 \cdot 1 = 26 = 13 \cdot 2$

Criterio de divisibilidad entre 17

Un número es divisible entre 17 cuando la diferencia de sus decenas y el quíntuple de sus unidades cifras es cero o divisible entre 17.

Ejemplo 2	323 es divisible entre 17	Porque $32 - 5 \cdot 3 = 17$
Ejemplo 3	459 es divisible entre 17	Porque $45 - 5 \cdot 9 = 0$

Criterio de divisibilidad entre 19

Un número es divisible entre 19 cuando la suma de sus decenas y el doble de sus unidades es divisible entre 19.

Ejemplo 4	437 es divisible entre 19	Porque $43 + 2 \cdot 7 = 57 = 19 \cdot 3$

Criterio de divisibilidad entre 23

Un número es divisible entre 23 cuando la suma de sus decenas y el séptuple de sus unidades es divisible entre 23.

Ejemplo 5	713 es divisible entre 23	Porque $71 + 7 \cdot 3 = 92 = 23 \cdot 4$

Criterio de divisibilidad entre 31

Un número es divisible entre 31 cuando la diferencia de sus decenas y el triple de sus unidades es cero o divisible entre 31.

Ejemplo 6	1147 es divisible entre 31	Porque $114 - 3 \cdot 7 = 93 = 31 \cdot 3$
Ejemplo 7	248 es divisible entre 31	Porque $24 - 3 \cdot 8 = 0$

Repetición de los criterios

Igual que con otros criterios vistos anteriormente, estos pueden repetirse para saber si el número propuesto es o no divisible entre alguno de los primos.

Ejemplo 8

¿Es 5681 divisible entre 13?

Lo será si lo es $568 + 4 \cdot 1 = 572$.

572 será divisible entre 13 si lo es $57 + 4 \cdot 2 = 65$.

65 será divisible entre 13 si lo es $6 + 4 \cdot 5 = 26$.

Respuesta: 5681 es divisible entre 13.

Enunciados

Se dice que un número natural es **perfecto** cuando es igual a la suma de sus divisores menores que él. Se dice que un número natural es **defectivo** cuando es mayor que la suma de sus divisores menores que él. Se dice que un número natural es **abundante** cuando es menor que la suma de sus divisores menores que él.

Averigua si cada uno de los siguientes números es perfecto, defectivo o abundante.

① 6 ② 49 ③ 30 ④ 8 ⑤ 42 ⑥ 28

Enunciados

Se sabe que dos números naturales a y b son **coprimos** solo cuando también lo son 2^a-1 y 2^b-1.

Comprueba la propiedad usando las siguientes parejas de números:

⑦ $a=3$ y $b=4$

⑧ $a=5$ y $b=4$

⑨ $a=5$ y $b=6$

Enunciados

⑩ Se sabe que los números 31, 331, 3331, 33 331, 333 331, 3 333 331 y 33 333 331 son números primos. Compueba que el número 333 333 331 es divisible entre 17.

⑪ Recuerda la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,… Se sabe que dos términos consecutivos son primos entre sí. Comprueba esta propiedad para los dos siguientes números de la lista.

Enunciados

En la película *Cube* (Vincenzo Natali, 1997), un grupo de personas se encuentra encerrado en un laberinto de habitáculos cúbicos comunicados por trampillas. En cada trampilla hay grabados tres números de tres cifras (pueden empezar por cero) que indican si el habitáculo es **seguro** o esconde una **trampa mortal**: si alguno de los tres números es primo o potencia de primo, el habitáculo contiene una trampa mortal.

Averigua si las siguientes ternas de números corresponden a un habitáculo seguro o a uno con trampa mortal (todos los números aparecen en la película, aunque una terna es inventada).

⑫ 645 372 649

⑬ 149 419 568

⑭ 582 434 865

⑮ 517 478 565

⑯ 666 897 466

⑰ 083 137 149

Enunciado

Tenemos una mesa de billar con forma rectangular de lados a y b números ~~enteros~~ naturales. Golpeamos una bola desde una esquina con ángulo de 45°. ¿Cuántas veces rebotará en las bandas antes de entrar en otra esquina? Se supone que la bola no toma efecto y que puede rodar indefinidamente.

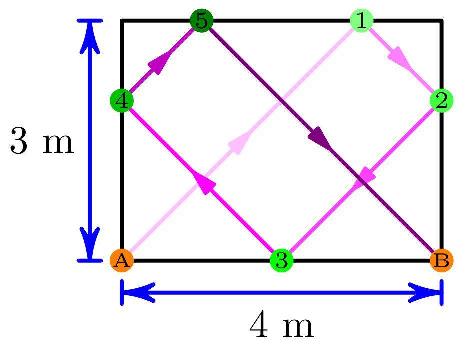
Procedencia

Este problema se propuso en la Olimpiada Matemática Nacional de 1998 de la FESPM. El enunciado ha sido modificado ligeramente para adaptarlo a este curso.

Técnica de resolución de problemas

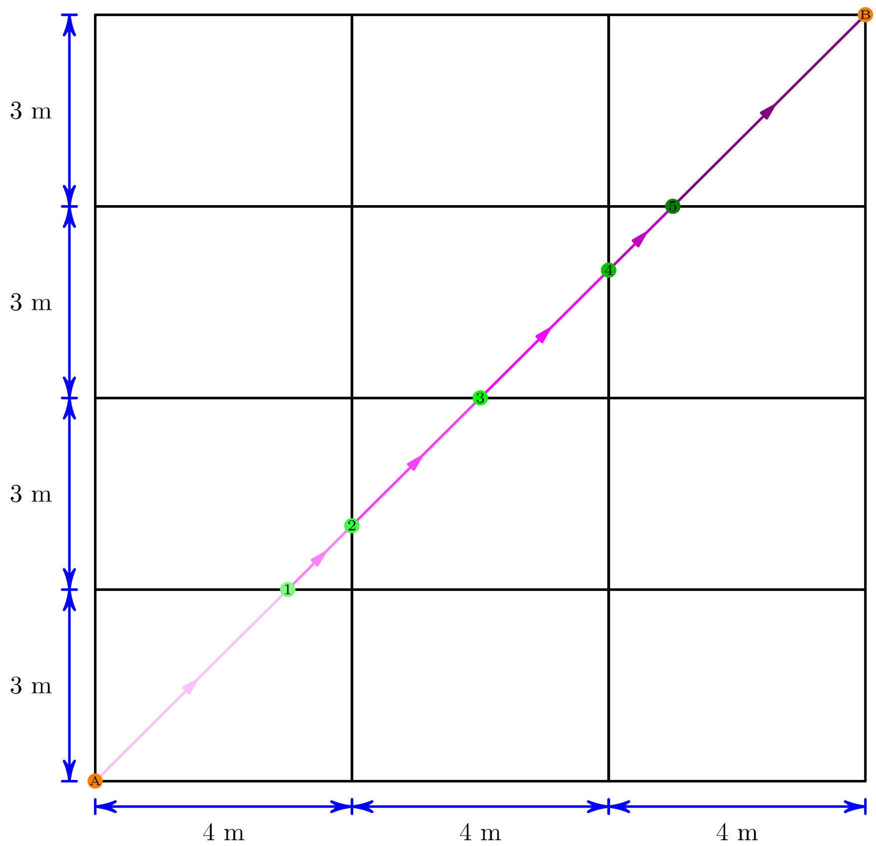
En este problema se puede utilizar la técnica de resolución de problemas que consiste en ponerse como meta provisional unos problemas más sencillos para intentar entender cómo encajan entre sí las distintas piezas del enunciado.

Indicaciones



Comenzamos con una mesa de dimensiones 4 metros y 3 metros. Golpeamos desde la esquina de abajo a la izquierda (A) y describimos la trayectoria de la bola hasta que entre en otra esquina (B).

Ahora viene un punto importante: transformamos el problema de la mesa de billar en un problema parecido, de modo que la trayectoria se convierta en una línea recta. Para ello, repetimos la mesa de billar tantas veces como haga falta (véase más abajo).



Cada rebote en una banda del problema original se convierte en un paso de una mesa a otra en el nuevo problema. Vemos que hay que avanzar 3 mesas hacia la derecha y 4 hacia arriba, 7 avances en total. Pero hay que restar el punto inicial y el final, que no cuentan: 7 – 2 = 5.

Observamos que si las dimensiones de la mesa se multiplicaran por cualquier número, la solución sería la misma.

Tu turno

¿Qué pasaría si las dimensiones fueran 8 metros y 6 metros?, ¿y si la mesa fuera cuadrada (caso a=b)? Ahora te toca continuar pensando a ti. Puedes probar con otras dimensiones de ejemplo antes de pasar a pensar en la solución general.

Situaciones reales con números negativos

Existen multitud de situaciones en la vida real en las que tiene sentido usar números positivos y negativos, lo que lleva a usar también el número cero.

Las plantas de un edificio

Si le asignamos a la primera planta de un edificio el número 1, a la segunda el 2 y así sucesivamente, tiene sentido usar el número 0 para la planta baja (la que está a la altura de la calle), el número –1 para el primer sótano, el –2 para el segundo y así sucesivamente.

La temperatura

El físico sueco Anders Celsius (1701-1744) inventó la escala centígrada para medir la temperatura, asignando el número 0 a la temperatura de congelación del agua y el número 100 a la de ebullición. Pero como hay temperaturas más frías que la de congelación del agua, tiene sentido usar números negativos para representarlas.

Además de decir «hace 9 grados bajo cero», podemos decir «la temperatura es –9 grados centígrados».

El dinero

Es posible tanto tener dinero como deberlo o, incluso, ni tener ni deber. Tiene sentido usar números positivos para indicar que tenemos dinero, negativos para indicar que lo debemos y usar el cero para indicar que ni tenemos ni debemos.

Otras situaciones

* El nivel del mar al que te encuentres: puede ser sobre el nivel del mar o por debajo (cuando buceas).
* Si sales a la acera de tu casa puedes dar pasos hacia la derecha o hacia la izquierda.
* En algunas puertas puedes tirar hacia dentro o hacia fuera.
* Cuando giras puedes hacerlo en sentido horario (como las agujas de un reloj) o en sentido antihorario (al revés que las agujas de un reloj).

Escritura de los números

En las situaciones, como las que se han visto, en las que hay que distinguir claramente los números positivos de los negativos y del cero, se usa el signo «+» (más) delante de los números positivos, el signo «–» (menos) delante de los negativos y el 0 no lleva ningún signo, ya que no es ni positivo ni negativo.

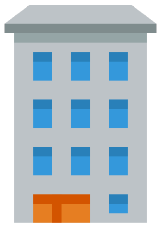
	Frase	Número
Ejemplo 1	Tengo el coche en el tercer sótano	–3
Ejemplo 2	Hace 20 grados centígrados	+20
Ejemplo 3	Debo 15 euros	–15
Ejemplo 4	Estoy al nivel del mar	0
Ejemplo 5	He dado siete pasos a la derecha	+7

Ya te imaginas que escribir el signo «+» delante de los números positivos recarga las expresiones. Por tanto, no se suele hacer casi nunca. En este curso se hará solo en las primeras explicaciones y ejercicios, para dejar claro el concepto; más adelante, en vez de escribir, por ejemplo, «+8», escribiremos simplemente «8».

Enunciados

Asigna un número positivo, negativo o cero a cada una de las siguientes frases.

Plantas de un edificio



① Mi oficina está en la tercera planta.

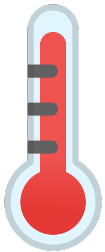
② La sección de deportes está en la quinta planta.

③ En el cuarto sótano hay plazas de aparcamiento libres.

④ La drogería está en la planta de calle.

⑤ El supermercado está en el primer sótano.

Temperatura



⑥ Hoy estamos en París a 15 grados.

⑦ Ayer en Siberia llegaron a 40 grados bajo cero.

⑧ La temperatura media en el Caribe es de unos 24 grados.

⑨ En el lado oscuro de la luna se llega a los 153 grados bajo cero.

⑩ El agua se congela a cero grados.

Dinero

⑪ Ayer me regalaron 55 euros.

⑫ Le debo 40 euros a mi amiga.

⑬ El patinete que me gusta cuesta 2300 euros.

⑭ Me faltan por pagar 1450 euros del patinete.

⑮ Mi hermano no tiene dinero, pero tampoco tiene deudas.

Nivel del mar

⑯ El Everest mide unos 8849 metros.

⑰ Me gusta ir a la orilla de la playa porque no hay ni montañas ni fosas marinas.

⑱ Algunos peces viven a 4500 metros de profundidad en el océano.

⑲ Mateusz Malina se sumergió en apnea hasta los 226 metros.

⑳ Los clavadistas se lanzan al mar desde 27 metros de altura.

El conjunto de los números enteros

- El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, que son los positivos, los números negativos y el cero.
- Para representar el conjunto se ha elegido la letra zeta escrita de un modo especial («ℤ» en este curso), por ser la letra inicial de la palabra alemana *zahl*, que significa «número» en español.
- Como hay infinitos números positivos e infinitos números negativos y además es costumbre escribir los números enteros en orden creciente, necesitamos usar dos veces los puntos suspensivos.
- Por tanto, el conjunto queda así:

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}}$$

Pertenencia de elementos a un conjunto

Como ya conoces el conjunto de los números naturales (ℕ) y el conjunto de los números enteros (ℤ), es un buen momento para que aprendas cómo decimos en matemáticas si un elemento pertenece o no a un conjunto.

- Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto utilizamos el signo «∈».
- Para indicar que un elemento no pertenece a un conjunto utilizamos el signo «∉».

Ejemplos

Llamamos V al conjunto de vocales del español: V = {a, e, i, o, u}.

Ejemplo 1	a ∈ V	El elemento a pertenece al conjunto V
Ejemplo 2	e ∈ V	El elemento e pertenece al conjunto V
Ejemplo 3	b ∉ V	El elemento b no pertenece al conjunto V
Ejemplo 4	α ∉ V	El elemento α no pertenece al conjunto V

Ejemplos con naturales y enteros

Estos ejemplos te ayudarán a entender cómo usamos los signos de pertenencia de elementos junto con los conjuntos ℕ y ℤ.

Ejemplo 5	5 ∈ ℕ	El número 5 es un número natural	5 pertenece a ℕ
Ejemplo 6	5 ∈ ℤ	El número 5 es un número entero	5 pertenece a ℤ
Ejemplo 7	–3 ∉ ℕ	El número –3 no es un número natural	–3 no pertenece a ℕ
Ejemplo 8	–3 ∈ ℤ	El número –3 es un número entero	–3 pertenece a ℤ
Ejemplo 9	0 ∈ ℤ	El número 0 es un número entero	0 pertenece a ℤ

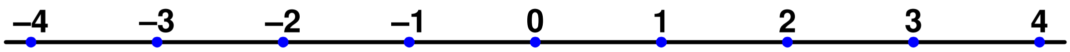
ℕ es subconjunto de ℤ

Como todos los números naturales son también números enteros, decimos que ℕ es un subconjunto de ℤ. El símbolo para indicar «subconjunto» se parece mucho al de pertenencia, así que no los confundas. Observa que se puede usar al revés.

ℕ ⊂ ℤ	ℕ es un **subconjunto** de ℤ	ℕ **está contenido** en ℤ
ℤ ⊃ ℕ	ℤ es un **superconjunto** de ℕ	ℤ **contiene** a ℕ

Representación gráfica

- Los números enteros se representan en una recta.
- Se marca el número 0 en algún punto de la recta, el que nos venga mejor.
- Los números positivos se marcan hacia la derecha.
- Los números negativos se marcan hacia la izquierda.
- Siempre hay la misma distancia entre los puntos de números consecutivos.
- La marca puede ser un punto o una pequeña línea.



- La representación gráfica se usa para ayudarnos a pensar.
- No tiene por qué ser exacta.
- No hace falta usar una regla para hacerla.
- Se señalan los puntos que se considere necesario.

Ordenación

- Los números enteros están ordenados, igual que lo están los naturales.
- Dados dos números enteros, el que esté representado más a la izquierda es menor que el que esté representado más a la derecha.

Ejemplos

Ejemplo 1	$2 < 4$	2 es menor que 4, igual que con los naturales
Ejemplo 2	$4 > 2$	4 es mayor que 2. Como el ejemplo anterior, pero al revés
Ejemplo 3	$0 < 3$	0 es menor que 3
Ejemplo 4	$3 > 0$	3 es mayor que 0. Como el ejemplo anterior, pero al revés
Ejemplo 5	$-4 < -2$	–4 es menor que –2, ¡fíjate bien en este ejemplo!
Ejemplo 6	$-2 > -4$	–2 es mayor que –4. Como el ejemplo anterior, pero al revés
Ejemplo 7	$-3 < 0$	–3 es menor que 0
Ejemplo 8	$0 > -3$	0 es mayor que –3. Como el ejemplo anterior, pero al revés
Ejemplo 9	$-1 < 1$	–1 es menor que 1
Ejemplo 10	$1 > -1$	1 es mayor que –1. Como el ejemplo anterior, pero al revés

Propiedades

- El 0 es menor que cualquier número positivo.
- El 0 es mayor que cualquier número negativo.
- Cualquier número negativo es menor que cualquier número positivo.

Ejemplo 11	$0 < 345$	0 es menor que 345, no hace falta verlo dibujado
Ejemplo 12	$0 > -21$	0 es mayor que –21, no hace falta verlo dibujado
Ejemplo 13	$-21 < 0$	–21 es menor que 0. Como el ejemplo anterior, pero al revés
Ejemplo 14	$-7 < 15$	–7 es menor que 15, no hace falta verlo dibujado
Ejemplo 15	$15 > -7$	15 es mayor que –7. Como el ejemplo anterior, pero al revés

Enunciados

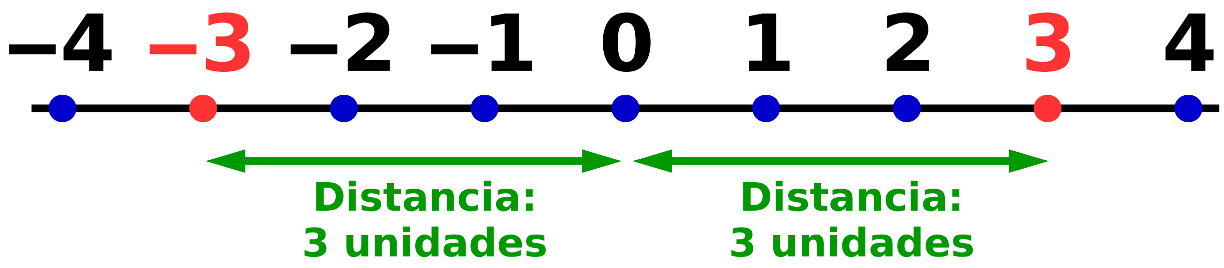
De cada una de las siguientes expresiones di si es verdadera o falsa.

1	$5 \in \mathbb{N}$	2	$7 \in \mathbb{Z}$	3	$-2 \notin \mathbb{Z}$	4	$4 \notin \mathbb{N}$
5	$234 \notin \mathbb{Z}$	6	$0 \notin \mathbb{Z}$	7	$300 \in \mathbb{N}$	8	$-17 \in \mathbb{Z}$
9	$-13 \in \mathbb{N}$	10	$16 \in \mathbb{Z}$	11	$31 \notin \mathbb{N}$	12	$10^{34} \in \mathbb{N}$
13	$-1 \in \mathbb{Z}$	14	$10^{34} \notin \mathbb{Z}$	15	$41 \notin \mathbb{N}$	16	$0 \in \mathbb{Z}$
17	$-19 \notin \mathbb{Z}$	18	$19 \in \mathbb{N}$	19	$-98 \in \mathbb{Z}$	20	$38 \notin \mathbb{Z}$
21	$1003 \in \mathbb{Z}$	22	$5858 \notin \mathbb{Z}$	23	$-1010 \in \mathbb{Z}$	24	$13 \in \mathbb{N}$
25	$-33 \in \mathbb{Z}$	26	$-289 \in \mathbb{N}$	27	$3303 \notin \mathbb{Z}$	28	$-51 \notin \mathbb{Z}$
29	$893 \notin \mathbb{N}$	30	$-98 \notin \mathbb{Z}$	31	$16 \notin \mathbb{Z}$	32	$31 \in \mathbb{N}$
33	$-1 \notin \mathbb{Z}$	34	$-109 \in \mathbb{N}$	35	$-903 \notin \mathbb{N}$	36	$99 \notin \mathbb{N}$
37	$909 \in \mathbb{N}$	38	$-33 \in \mathbb{Z}$	39	$-33 \in \mathbb{N}$	40	$909 \notin \mathbb{N}$
41	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	42	$\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$	43	$\mathbb{N} \supset \mathbb{Z}$	44	$\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$
45	$7 < 23$	46	$8 > 14$	47	$0 > 3$	48	$15 < 0$
49	$0 > -6$	50	$-14 < 0$	51	$0 > 0$	52	$0 < -89$
53	$-15 > 8$	54	$17 > -17$	55	$-13 < 24$	56	$-12 > -2$
57	$13 > 17$	58	$-8 < -1$	59	$13 > 131$	60	$-13 > -131$
61	$-15 > -14$	62	$15 < -15$	63	$0 > 45$	64	$-1 < -1$
65	$19 > -9$	66	$-2 < -7$	67	$10^{12} > 10^{11}$	68	$-13 < -2$
69	$10^{24} > 10^{161}$	70	$-2 < 9$	71	$-15 < -9$	72	$-18 > -9$
73	$33 > 31$	74	$-9 < 0$	75	$38 > 0$	76	$-41 < 0$
77	$-92 > -87$	78	$33 > -8$	79	$44 > -35$	80	$1 > 1$
81	$31 < 10^{46}$	82	$-72 > -73$	83	$517 < -67$	84	$88 > -98$
85	$103 < 106$	86	$-87 > -89$	87	$19 > -8$	88	$78 < -98$
89	$129 > -5$	90	$-17 > -3$	91	$-9 < -19$	92	$33 > 33$

	A	B	C	D	E
1	$34 \boxdot \mathbb{N}$	$-16 \boxdot \mathbb{Z}$	$-33 \boxdot \mathbb{N}$	$0 \boxdot \mathbb{Z}$	$77 \boxdot \mathbb{Z}$
2	$20 \boxdot \mathbb{Z}$	$-14 \boxdot \mathbb{N}$	$10^{34} \boxdot \mathbb{Z}$	$-41 \boxdot \mathbb{Z}$	$789 \boxdot \mathbb{N}$
3	$-19 \boxdot \mathbb{Z}$	$76 \boxdot \mathbb{N}$	$-99 \boxdot \mathbb{N}$	$10^{100} \boxdot \mathbb{N}$	$-33 \boxdot \mathbb{Z}$
4	$58 \boxdot \mathbb{Z}$	$-58 \boxdot \mathbb{N}$	$-95 \in \boxdot$	$-90 \notin \boxdot$	$17 \boxdot \mathbb{Z}$
5	$31 \boxdot \mathbb{Z}$	$-18 \boxdot \mathbb{N}$	$-73 \boxdot \mathbb{Z}$	$55 \boxdot \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \boxdot \mathbb{N}$
6	$\mathbb{N} \boxdot \mathbb{Z}$	$13 \boxdot 31$	$-4 \boxdot 0$	$-8 \boxdot -9$	$-15 \boxdot -6$
7	$0 \boxdot -33$	$-78 \boxdot -87$	$0 \boxdot 56$	$10^{45} \boxdot 10^{6}$	$37 \boxdot -91$
8	$45 \boxdot 59$	$-20 \boxdot -18$	$101 \boxdot 104$	$-17 \boxdot 7$	$19 \boxdot -3$
9	$-8 \boxdot -10$	$-76 \boxdot -67$	$101 \boxdot 11$	$-22 \boxdot -20$	$73 \boxdot -9$
10	$0 \boxdot -88$	$89 \boxdot 0$	$-99 \boxdot -98$	$10 \boxdot -10$	$-12 \boxdot 12$

Números enteros opuestos

Dos números enteros son opuesto uno del otro cuando están a la misma distancia del cero en la representación de los números enteros.



Ejemplo

Los números 3 y –3 son uno el opuesto del otro porque ambos distan 3 unidades del 0.

Uso de paréntesis para separar signos

- En matemáticas no se puede escribir dos signos seguidos.
- **Ejemplo 1**: esto está mal escrito: +6:+3.
- Para evitar que haya dos signos seguidos, se pueden añadir paréntesis donde sea conveniente.
- **Ejemplo 2**: esto está bien escrito: +6:(+3).
- Estos paréntesis no tienen el significado que ya conoces (prioridad de operación), puesto que no hay nada que calcular, sino que tienen un valor «estético».
- Observa que en español (y otros idiomas), es habitual que algunas palabras tengan más de un significado (este fenómeno se llama «polisemia»).

Notación de número opuesto

Aquí viene otro ejemplo de polisemia en matemáticas:

Para indicar «opuesto de» se usa el mismo signo que para la resta y que para indicar los números negativos: «–». Esto te puede resultar confuso al principio, pero irás viendo que es muy conveniente.

- **Ejemplo 3**: para decir «el opuesto de –3» tenemos que escribir «–(–3)». El primer signo «–» significa «opuesto», el segundo es el del número negativo y el paréntesis es necesario para que no haya dos signos seguidos.

Propiedades

- El opuesto de un número negativo es un número positivo.
- El opuesto de un número positivo es un número negativo.
- El opuesto de 0 es 0.
- El opuesto del opuesto de un número es el mismo número.

Ejemplos

Ejemplo 4	–(–3) = 3	El opuesto de –3 es 3.
Ejemplo 5	–(+3) = –3	El opuesto de 3 es –3.
Ejemplo 6	–0 = 0	El opuesto de 0 es 0.
Ejemplo 7	–(–(–7)) = –7	El opuesto del opuesto de –7 es –7

Valor absoluto de un número entero

- ✱ El valor absoluto de un número entero es otro número entero.
- ✱ El valor absoluto de un número se expresa con dos barras verticales que rodean al número.

Si ves unos cuantos ejemplos, tú mismo te vas a dar cuenta de cómo se calcula el valor absoluto:

Ejemplo 1	$\lvert -3 \rvert = 3$	El valor absoluto de –3 es 3.
Ejemplo 2	$\lvert 3 \rvert = 3$	El valor absoluto de –3 es 3.
Ejemplo 3	$\lvert 0 \rvert = 0$	El valor absoluto de 0 es 0.
Ejemplo 4	$\lvert -7 \rvert = 7$	El valor absoluto de –7 es 7.
Ejemplo 5	$\lvert 7 \rvert = 7$	El valor absoluto de 7 es 7.

Definición

Como ves, la idea del valor absoluto es sencilla. Lo que es un poco más difícil es definirlo. Se define de manera distinta según sea el número:

- ✱ Si un número es positivo o nulo, su valor absoluto es el mismo número.

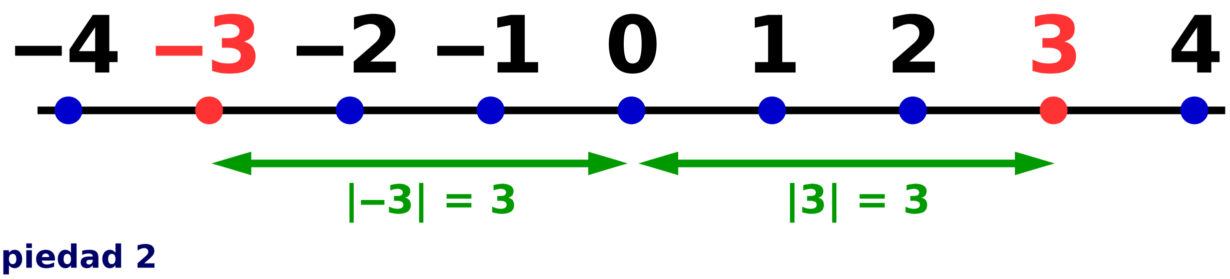
Ejemplo 6	$\lvert 57 \rvert = 57$	El valor absoluto de 57 es 57.
Ejemplo 7	$\lvert 305 \rvert = 305$	El valor absoluto de 305 es 305.
Ejemplo 8	$\lvert 0 \rvert = 0$	El valor absoluto de 0 es 0.

- ✱ Si un número es negativo, su valor absoluto es el opuesto del número, por lo que el resultado es un número positivo.

Ejemplo 9	$\lvert -38 \rvert = 38$	El valor absoluto de –38 es 38.
Ejemplo 10	$\lvert -981 \rvert = 981$	El valor absoluto de –981 es 981.

Propiedad 1

El valor absoluto de un número mide la distancia entre el número y 0 en la recta en la que se representan los números enteros.



Propiedad 2

Si dos números son opuestos, tienen el mismo valor absoluto.

Ejemplo 11	$\lvert -3 \rvert = \lvert 3 \rvert = 3$	El valor absoluto de 3 y de –3 es 3.
Ejemplo 12	$\lvert -51 \rvert = \lvert 51 \rvert = 51$	El valor absoluto de 51 y de –51 es 51.

	A	B	C	D	E
①	–(+8)	–(–19)	–0	–(–123)	–(+34)
②	–(–54)	–(–96)	–(+12)	–(–0)	–(+18)
③	–(–102)	–(+104)	–(–1)	–(–16)	–(+83)
④	–(–(–9))	–(+17)	–(+62)	–(–31)	–(–19)
⑤	–(–583)	–(+837)	–(–(+4))	–(+55)	–(–37)
⑥	|–19|	|–13|	|0|	|19|	|+89|
⑦	|+11|	|–82|	|–90|	|120|	|–111|
⑧	|–14|	|77|	|–33|	|–91|	|–23|
⑨	|+903|	|832|	|–836|	|76|	|–15|
⑩	|–312|	|+753|	|67|	|–732|	|66|

Suma de números enteros

Esta es la pregunta más importante del curso hasta el momento. También es la más importante de tus primeros niveles en educación secundaria.

La suma de números enteros es muy diferente en su concepto a la suma de números naturales, así que es normal que al principio te cueste un poco.

Tendrás que entender el porqué del método y necesitas hacerlas con rapidez.

Suma de dos números enteros

Caso 1a: suma de dos números positivos. Ejemplo 1a: si tienes 13 euros en un bolsillo y 8 euros en otro, en total tienes (+13)+(+8) = +21 euros.

Caso 1b: suma de dos números negativos. Ejemplo 1b: si debes 13 euros a un amigo y 8 euros a una amiga, su situación financiera es (–13)+(–8) = –21, es decir, que debes 21 euros.

Caso 2a: suma de un positivo y un negativo. Ejemplo 2a: si tienes 13 euros y le debes 8 euros a un amigo, cuando pagues te quedarán (+13)+(–8) = +5 euros.

Caso 2b: la otra suma de un positivo y un negativo. Ejemplo 2b: si tienes 8 euros y le debes 13 euros a un amigo, cuando pagues lo que puedas te quedarán (+8)+(–13) = –5, es decir, aún debes 5 euros.

Caso 3: la suma que da 0. Ejemplo 3: si tienes 13 euros y le debes 13 euros a un amigo, cuando pagues tu situación será (+13)+(–13) = 0 euros, es decir, que ya no tienes ni dinero ni deudas.

Escritura sin paréntesis

Como es tan incómodo escribir tantos paréntesis, se ha llegado al convenio de no escribirlos, así que los ejemplos anteriores se pueden escribir más cómodamente:

Ejemplo 1a	(+13)+(+8) = +21	13 + 8 = 21
Ejemplo 1b	(–13)+(–8) = –21	–13 –8 = –21
Ejemplo 2a	(+13)+(–8) = +5	13 –8 = 5
Ejemplo 2b	(+8)+(–13) = –5	8 –13 = –5
Ejemplo 3	(+13)+(–13) = 0	13 –13 = 0

La regla para sumar dos números enteros

✱ Si se suman dos números enteros opuestos, el resultado es 0.

✱ Si se suman dos números enteros del mismo signo, el resultado tiene el mismo signo que los sumandos y el valor absoluto del resultado es la suma de los valores absolutos de los sumandos.

✱ Si se suman dos números enteros de distinto signo que no sean opuestos, el resultado tiene el signo del sumando de mayor valor absoluto y el valor absoluto del resultado es la diferencia entre los valores absolutos de los sumandos, el mayor menos el menor.

La suma es conmutativa

Ejemplo 4a	(+13)+(–8) = (–8)+(+13) = +5	13–8 = –8+13 = 5
Ejemplo 4b	(+8)+(–13) = (–13)+(+8) = –5	8–13 = –13+8 = –5

Regla para sumar dos números enteros

- ✱ Si se suman dos números enteros opuestos, el resultado es 0.
- ✱ Si se suman dos números enteros del mismo signo, el resultado tiene el mismo signo que los sumandos y el valor absoluto del resultado es la suma de los valores absolutos de los sumandos.
- ✱ Si se suman dos números enteros de distinto signo que no sean opuestos, el resultado tiene el signo del sumando de mayor valor absoluto y el valor absoluto del resultado es la diferencia entre los valores absolutos de los sumandos, el mayor menos el menor.

Ejemplos detallados

Ejemplo 1a	Primer sumando	Signo: positivo	Datos del resultado	
	+13	Valor absoluto: 13		Resultado
Operación:	Segundo sumando	Signo: positivo	Signo: positivo	+21
(+13)+(+8)	+8	Valor absoluto: 8	Valor absoluto: 13+8=21	

Ejemplo 1b	Primer sumando	Signo: negativo	Datos del resultado	
	–13	Valor absoluto: 13		Resultado
Operación:	Segundo sumando	Signo: negativo	Signo: negativo	–21
(–13)+(–8)	–8	Valor absoluto: 8	Valor absoluto: 13+8=21	

Ejemplo 2a	Primer sumando	Signo: positivo	Datos del resultado	
	+13	Valor absoluto: 13		Resultado
Operación:	Segundo sumando	Signo: negativo	Signo: positivo	+5
(+13)+(–8)	–8	Valor absoluto: 8	Valor absoluto: 13–8=5	

Ejemplo 2b	Primer sumando	Signo: negativo	Datos del resultado	
	–13	Valor absoluto: 13		Resultado
Operación:	Segundo sumando	Signo: positivo	Signo: negativo	–5
(–13)+(+8)	+8	Valor absoluto: 8	Valor absoluto: 13–8=5	

Ejemplo 3	Primer sumando	Signo: negativo	Datos del resultado	
	–8	Valor absoluto: 8		Resultado
Operación:	Segundo sumando	Signo: positivo	Signo: ninguno	0
(–8)+(+8)	+8	Valor absoluto: 8	Valor absoluto: 8–8=0	

Consejo

Las reglas existen para no tener dudas sobre cómo se calcula la suma de dos números enteros, pero son muy incómodas para el cálculo rápido.

Busca un medio de entender las reglas que te permita aplicarlas con rapidez: por ejemplo, andar a la derecha o a la izquierda, subir o bajar pisos, tener o deber dinero,… lo que sea con tal de que lo hagas con rapidez.

	A	B	C	D	E
1	8+9	–8–9	–8+9	–9+8	–9+9
2	12+7	–12–7	12–7	–12+7	12–12
3	3+6	–3–6	6–3	–6+3	–3+6
4	1+18	–1+18	1–18	–1–18	–18+18
5	13+7	–13–7	–13+7	–7+13	7–7
6	8–14	–7–9	12+15	–15+5	–9–9
7	–8+23	–23+23	–18+8	20–35	–8–2
8	5+6	17–19	–12–3	–8+8	4–14
9	13–20	11–11	–12+12	–23–13	41+35
10	–35+41	–41–35	35–41	34+0	–15–0

	A	B	C	D	E
1	–10+7	8–12	–6–4	–12+12	–4–5
2	17–21	4–9	–7+2	12–6	–12–6
3	0–19	15+13	–15+12	13–19	–23+23
4	16–13	–17+22	23–27	17+3	89–90
5	15–15	–7–9	–16+0	–8–0	18+20
6	–20+18	–17–20	67–70	100–112	37–23
7	–26+14	–19+14	37–40	12–21	–5–12
8	–19+19	100–900	44–65	–20+23	–15–17
9	–72+74	75–100	–25–35	19–31	14+54
10	33–99	–33–23	–17+17	32+8	–32+14

Nivel 1 • Aritmética • Números enteros • Cálculo mental (05)

	A	B	C	D	E
1	6–18	–4–8	23–2	2–23	45+6
2	35–40	–12–13	0+45	0–33	41–12
3	13–16	44–66	–3–67	120–150	31–28
4	–31–62	63–3	–3–60	5–19	–3–7
5	–8+13	67–67	21–19	–19–2	–15+15
6	0–13	190–90	80–180	–30–120	–100–5
7	45+68	68–45	–68–45	45–68	56–78
8	–15–16	31–80	42–24	–24–56	–100+7
9	38–44	–3–6	–5+7	–18+4	44+7
10	–51–8	–23+23	45–0	–13+0	–7–9

Suma de tres números enteros

Aunque la suma de tres números enteros es una operación combinada y tenemos que trabajarlas más adelante, vamos a dedicarle ahora un tiempo debido a su enorme importancia: te va a ayudar a tomar soltura con la operación. Debes entender que la suma de enteros no es una resta, aunque te lo parezca dada su similitud con la resta de números naturales.

Propiedad asociativa

La suma de números enteros tiene la propiedad asociativa, que es el nombre que se da en matemáticas al hecho de que el orden de las operaciones no influya en el resultado. Simbólicamente se expresa así:

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

En la expresión anterior, las letras a, b y c representan números enteros cualesquiera; es decir, pueden ser positivos, negativos o cero, aunque el signo que hemos puesto entre ellos en la expresión es siempre el de sumar, puesto que estamos sumando.

Eliminación de paréntesis

Cuando se dispone de la propiedad asociativa, ya no es necesario indicar con paréntesis qué operación hay que hacer primero, porque el resultado será siempre el mismo. En la expresión anterior, escribiremos simplemente «a + b + c».

Libertad para elegir el orden

Como la suma de enteros tiene además de la propiedad asociativa también la conmutativa, para sumar tres números enteros tenemos la libertad de hacerlo en el orden que mejor nos convenga, buscando el modo más sencillo.

Ejemplos

Ejemplo 1 → –9 +4 –1

Empezando por los dos de la izquierda → –9 +4 –1 = –5 –1 = –6
Empezando por los dos de la derecha → –9 +4 –1 = –9 +3 = –6
Empezando por los dos de los extremos → –9 +4 –1 = –10 +4 = –6

Ejemplo 2 → –8 +5 +3

Empezando por los dos de la izquierda → –8 +5 +3 = –3 +3 = 0
Empezando por los dos de la derecha → –8 +5 +3 = –8 +8 = 0
Empezando por los dos de los extremos → –8 +5 +3 = –5 +5 = 0

Ejemplo 3 → –105 +40 +5

Empezando por los dos de la izquierda → –105 +40 +5 = –65 +5 = –60
Empezando por los dos de la derecha → –105 +40 +5 = –105 +45 = –60
Empezando por los dos de los extremos → –105 +40 +5 = –100 +40 = –60

Ejemplo 4 → 37 –20 –10

Empezando por los dos de la izquierda → 37 –20 –10 = 17 –10 = 7
Empezando por los dos de la derecha → 37 –20 –10 = 37 –30 = 7
Empezando por los dos de los extremos → 37 –20 –10 = 27 –20 = 7

Nivel 1 • Aritmética • Números enteros • Cálculo mental (06)

	A	B	C	D	E
1	3+4–12	–2+6–1	–2–8–9	3+6+1	–4+8–4
2	10–6–7	–2+20–8	–100+4+5	17+4–17	–33+8–7
3	40–13–17	8+4–11	–7–11+18	–12–20+5	8+12–4
4	13–16–9	78–10–20	14–30+16	17+4–31	56–4–6
5	–5+65–5	47–12–13	8–12–10	17–21–7	99–9+17
6	17+54–18	33–41+1	18–8–35	4+9+3	–2–6–5
7	12+3–15	–19+33–1	14–7+21	77–3–4	18+31–5
8	40–3–7	5+17–5	–13–7+10	–2–56–8	19–9+10
9	21–7+9	55+17–16	24–13–17	4–33+6	17+7–4
10	20–13–13	15–16–17	31+45–1	17–32+13	45–6–5

Nivel 1 • Aritmética • Números enteros • Cálculo mental (07)

	A	B	C	D	E
1	31+47–7	13+53–16	–16–4+47	34+18–22	–2–6–9
2	18+34–18	77+13–10	–2–15+27	19–36+1	11+57–21
3	33+17–8	–9+12–1	3–17+14	33–7–8	9–12–45
4	18+43–8	5–67–5	–9–10–3	13+8–4	–1+32–7
5	–29+2+5	16+89–17	23–45–22	12+12–34	70–12–28
6	41–1–50	33+33–61	–12+6–12	7+14–22	17–4–13
7	19+3–26	81–1–79	48–8–12	–33+3–16	21–77+2
8	55–44–31	20–17–33	19–1+18	–2–8–12	9–8–7
9	–17–3+5	31–78–11	67+13–12	19+3–25	–7+4–8
10	12–16–7	–19+4+7	–9+14–31	28–32–4	17–7–25

Nuevo concepto de resta

La frase fundamental para hacer la resta, desde ahora hasta que termines la educación secundaria, es:

Para restar se suma el opuesto

La única situación en la que se resta como aprendiste en educación primaria es en la resta de números naturales, que ya hemos trabajado. A partir de ahora, se resta de otra manera.

Regla para restar dos números enteros

Para restar dos números enteros se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplos

Ejemplo 1	Minuendo: –5	Conversión de la operación:	Resultado:
Operación:	Sustraendo: +8		
(–5) – (+8)	Opuesto del sustraendo: –8	(–5) + (–8)	–13
Resumen	(–5) – (+8) = (–5) + (–8) = –13		

Ejemplo 2	Minuendo: +7	Conversión de la operación:	Resultado:
Operación:	Sustraendo: –4		
(+7) – (–4)	Opuesto del sustraendo: +4	(+7) + (+4)	+11
Resumen	(+7) – (–4) = (+7) + (+4) = +11		

Ejemplo 3	Minuendo: +9	Conversión de la operación:	Resultado:
Operación:	Sustraendo: –3		
–(–3) + (+9)	Opuesto del sustraendo: +3	(+3) + (+9)	+12
Resumen	–(–3) + (+9) = (+3) + (+9) = +12		

Observa en el último ejemplo que puede ocurrir que el sustraendo esté escrito antes del minuendo, pero que se distingue porque tiene delante el signo «menos».

Escritura simplificada

Cuando no escribimos tantos signos ni paréntesis se ve que el único caso importante que hay que considerar es que el sustraendo sea negativo.

Los ejemplos anteriores, simplificados, quedan así:

Ejemplo 1	–5 –8 = –13
Ejemplo 2	7 –(–4) = 7 +4 = 11
Ejemplo 3	–(–3) +9 = 3 +9 = 12

Es decir, que lo fundamental es saber que el opuesto de un número negativo es un número positivo del mismo valor absoluto:

$$\boxed{-(-3) = 3}$$

Nivel 1 • Aritmética • Números enteros • Cálculo mental (08)

	A	B	C	D	E
①	–7+12	–8–(–16)	13–15	–(–1)+4	12–9
②	19–(+4)	–13–4	–5–(–8)	–(+4)–6	80–72
③	14–(–4)	–8–3	–19–(–3)	4–(+9)	+3–7
④	–(–8)+14	13–(+5)	–(+8)–16	15–(+8)	–2–(–6)
⑤	7–(–9)	–(–5)–12	–7–3	–8–(–8)	4+15
⑥	19–23	3–(–13)	–19+4	89–(+9)	–13–(–9)
⑦	12+(–8)	15–(–8)	67+(–7)	–12–5	45–(–5)
⑧	–13–8	–(–8)–15	51–(–10)	–13–2	–34+34
⑨	–7+12	9–(–3)	–2–8	–7–(–19)	34+4
⑩	–6–7	–41+1	19–(–9)	–4–(+6)	13+12

Nivel 1 • Aritmética • Números enteros • Cálculo mental (09)

	A	B	C	D	E
①	–1–7	9–(–1)	14+7	–14+10	–(–2)+6
②	–9–(–7)	12–17	–4–5	12–(+4)	–7–(–2)
③	10–35	–(–2)–9	12–18	–(–9)+(–9)	19–8
④	–3–9	15–(–9)	34–38	–12+(–19)	9–(–31)
⑤	23–25	33+(–35)	–1–(–12)	25+(–75)	–18–(–3)
⑥	12–(–30)	–2+(–12)	–(–3)–7	19–9	–12+34
⑦	20–(–27)	–12–81	33–(+33)	–5–23	12–(–1)
⑧	15+(–19)	–13–35	–21–18	–15–(–9)	33–83
⑨	15–(–9)	24–(+4)	–5–(–3)	17–(–8)	19+(–32)
⑩	–13–(+4)	15–32	–9–12	13–(–1)	19–2

Producto y cociente de números enteros

Los dos son muy parecidos al producto y cociente de números naturales. Solo tendrás que añadir la llamada regla de los signos, que ahora veremos.

Producto de dos números enteros

Caso 1a: producto de dos números positivos. Ejemplo 1a: si tienes 3 bolsillos y en cada uno tienes 4 euros, en total tienes (+3)·(+4) = +12 euros.

Caso 1b: producto de dos números negativos. Ejemplo 1b: si te perdonan 3 deudas de 4 euros cada una, es igual que si te regalaran (–3)(–4) = +12 euros.

Caso 2a: producto de un positivo y un negativo. Ejemplo 2a: si tienes 3 deudas de 4 euros cada una tu situación es (+3)·(–4) = –12 euros, es decir, en total debes 12 euros.

Caso 2b: producto de un negativo y un positivo. Ejemplo 2b: si pierdes 3 veces 4 euros tu situación es (–3)(+4) = –12, es decir, en total has perdido 12 euros.

Caso 3: producto de 0 por otro número. Ejemplo 3: por muchas veces que tengas o debas 0 euros, seguirás sin tener ni dinero ni deudas.

Escritura sin paréntesis

En un producto se puede eliminar el paréntesis que rodea a los números positivos, si también se quita el signo «más». También se puede quitar el paréntesis alrededor de los números negativos si son el primero de la operación.

Ejemplo 1a	(+3)(+4) = +12	3 · 4 = 12
Ejemplo 1b	(–3)·(–4) = –12	–3(–4) = –12
Ejemplo 2a	(+3)(–4) = –12	3·(–4) = –12
Ejemplo 2b	(–3)·(+4) = –12	–3·4 = –12
Ejemplo 3a	0·(+3) = 0	0·3 = 0
Ejemplo 3b	(–3)0 = 0	–3·0 = 0

Regla de los signos

- Si se multiplica el 0 por cualquier número entero, el resultado es 0.
- Si se multiplican dos números enteros del **mismo signo**, positivos o negativos, el resultado es **positivo** y el valor absoluto del resultado es el producto de los valores absolutos de los factores.
- Si se multiplican dos números enteros de **distinto signo** (uno positivo y otro negativo), el resultado es **negativo** y el valor absoluto del resultado es el producto de los valores absolutos de los factores.

El producto es conmutativo

Ejemplo 4	(+3)·(–4) = (–4)·(+3)= –12	3·(–4) = (–4)·3 = –12

Curiosidad

En la serie *Los Simpson* (de Matt Groening) el personaje Bart dice a menudo en el idioma original (inglés) la frase «Eat my shorts!» («cómeme los pantalones»), una idea de la actriz que le da la voz, Nancy Cartwright. En español se tradujo por «multiplícate por cero»; acabas de ver por qué.

Cociente de números enteros

Ya hemos visto que la suma de números enteros resuelve el problema de la resta de números naturales. Por ejemplo, ahora 4−6 tiene sentido, ya que da −2.

Sin embargo, los números enteros no resuelven el problema de las divisiones entre números naturales. Sigue sin ser posible hacer algunas divisiones y que den resultados exactos.

Para los casos en que sí se puede hacer la división exacta, hay que considerar dos dificultades: los signos de dividendo y divisor y el caso en que el divisor sea 0.

Idea de la división

Para entender estas dos dificultades, hay que recordar cuál es la idea de la división: buscar un número que multiplicado por el divisor dé el dividendo. Cuando escribimos $a{:}b$, estamos buscando un número c que verifique $c \cdot b = a$.

Los signos del dividendo y el divisor

Si tomamos como ejemplo (+12):(–4), vemos que el resultado debe ser –3, ya que se cumple que (–3)·(–4) = +12.

Por tanto, la división de números enteros sigue el mismo esquema para los signos que el producto:

Mismo signo ⇒ resultado positivo; distinto signo ⇒ resultado negativo

Si el divisor es 0

Hay que considerar dos casos: que el dividendo no sea 0 o que sí lo sea.

* Si el dividendo no es cero, la división no puede dar ningún número. Por ejemplo, al escribir 1:0 estamos buscando un número que multiplicado por 0 dé 1; pero no hay ninguno, puesto que cualquier número multiplicado por 0 da 0.
* Si el dividendo es cero, la división podría ser cualquier número, ya que cuando escribimos 0:0 estamos buscando un número que multiplicado por 0 dé 0, y eso lo hacen todos.

Regla de los signos

* No se puede dividir entre 0.
* Si se dividen dos números enteros del **mismo signo**, positivos o negativos, el resultado es **positivo** y el valor absoluto del resultado es el cociente de los valores absolutos de los números.
* Si se dividen dos números enteros de **distinto signo** (uno positivo y otro negativo), el resultado es **negativo** y el valor absoluto del resultado es el cociente de los valores absolutos de los números.

Escritura sin paréntesis

En el cociente se puede eliminar el paréntesis que rodea a los números positivos, si también se quita el signo «más». También se puede quitar el paréntesis alrededor de un número negativo que sea el dividendo.

Ejemplo 1	(+12):(+4) = +3	12 : 4 = 3
Ejemplo 2	(–12):(–4) = +3	–12:(–4) = 3
Ejemplo 3	(–12):(+4) = –3	–12 : 4 = –3

Nivel 1 • Aritmética • Números enteros • Cálculo mental (10)

	A	B	C	D	E
①	18·(–1)	(–3)·5	16:(–4)	(–2)(–5)	(–8):(–2)
②	6·(–7)	25:(–5)	(–1)(–1)	56:(–56)	(+7)(–2)
③	–24:2	(–19):19	3·(–7)	5(–8)	(–4)(–2)
④	35:(–5)	38:2	–1:1	–36:(–2)	15:5
⑤	20:(–4)	(–6)8	33:(–11)	(–45):(–9)	(–2)(–34)
⑥	46:(–2)	(–9):3	24:(+6)	(+2)·(–12)	(–2)(–27)
⑦	55:(–5)	35:(–7)	36:(–3)	(–5)(–5)	4(–17)
⑧	7·(+21)	69:(–3)	(–8)3	–15:3	81:(–9)
⑨	14(–2)	–88:8	41:(–1)	32:(–8)	90:(–10)
⑩	(–7):(–7)	(–7)(–7)	48:(–4)	–36:(–6)	75:25

	A	B	C	D	E
①	6·(–5)	(–3)(–6)	12:(–6)	–33:11	25:(–5)
②	(–4):(–2)	4·(+7)	(–18):(–2)	–44:11	(–13)(+3)
③	–19:(–19)	45:(–9)	(–39):(–3)	(–8)(–8)	56:(–7)
④	15(–5)	(–38):(–2)	77:7	(+12):(+4)	–66:(–33)
⑤	17(–4)	(–21):(–21)	8·(–3)	(–24):(–8)	(–12):6
⑥	93:(–3)	5·(–25)	(–34):2	(–6)(–5)	45:(+5)
⑦	102:(–2)	(–49):(–7)	63:(+7)	7(–19)	333:(–3)
⑧	(–13)(–7)	48:(–24)	27:(–9)	(–10)(–10)	(+8)(+8)
⑨	(–15)(–2)	(–7)·(–10)	33(–3)	–55:(–11)	84:(–4)
⑩	–104:2	66:(–22)	–303:3	(–18)(–5)	8·9

Potencia de base entera y exponente natural

La definición de esta potencia es exactamente la misma que la definición de potencia de base natural y exponente natural que ya conoces.

Una potencia no es más que un producto repetido: se escribe como factor la base de la potencia tantas veces como indique el exponente, es decir:

$$\boxed{\text{Si a es un número entero y n es un número natural, } a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}}$$

Es lógico cuestionar que cuando el exponente es 1, la expresión no es realmente un producto, puesto que solo habrá un número: $a^1=a$. Lo consideramos, con flexibilidad, como un producto «especial».

Si la base es un número positivo

En este caso, la potencia es exactamente la misma que la potencia de base natural y exponente natural.

Ejemplo 1	$2^4 = 2·2·2·2 = 16$

Si la base es 0

En este caso, la potencia siempre da como resultado 0

Ejemplo 2	$0^3 = 0·0·0 = 0$
Ejemplo 3	$0^8 = 0·0·0·0·0·0·0·0 = 0$

Si la base es un número negativo

En este caso, el resultado será positivo o negativo, dependiendo de que el exponente sea par o impar.

Ejemplo 4	$(–2)^4 = (–2)·(–2)·(–2)·(–2) = 16$
Ejemplo 5	$(–2)^5 = (–2)·(–2)·(–2)·(–2)·(–2) = –32$
Ejemplo 6	$(–3)^3 = (–3)·(–3)·(–3) = –27$
Ejemplo 7	$(–3)^4 = (–3)·(–3)·(–3)·(–3) = 81$

El motivo es que cuando el exponente es par, cada dos factores el resultado será positivo, pero si es impar, siempre sobrará un signo «menos».

Regla para bases negativas

Si a es un número entero negativo y n es un número natural,

$$\boxed{\text{Si n es par, } a^n \text{ es positivo; si n es impar, } a^n \text{ es negativo}}$$

Potencia de base entera y exponente entero

Te preguntarás por qué no vemos el caso en que el exponente sea 0 o un número entero negativo. Hay dos motivos para no hacerlo ahora:

* La definición de «producto repetido» ya no tiene sentido, hay que buscar otra definición distinta.
* Cuando el exponente sea negativo, el resultado no será un número entero.

Así que hasta el nivel 2 no trataremos este caso.

Enunciados

Desarrolla las siguientes potencias como un producto y calcula su valor.

① $(-7)^3$

② 2^6

③ $(-2)^6$

④ 0^5

⑤ $(-5)^4$

⑥ $(-1)^6$

⑦ $(-1)^7$

⑧ 0^7

⑨ 11^3

⑩ $(-11)^3$

⑪ 302^2

⑫ $(-302)^2$

⑬ 13^3

⑭ $(-13)^3$

⑮ $(-13)^4$

Enunciados

Calcula el valor de las siguientes potencias.

⑯ $(-2)^8$

⑰ 0^{25}

⑱ $(-10)^5$

⑲ $(-5639)^1$

⑳ 17^2

㉑ $(-17)^4$

㉒ 55^2

㉓ $(-3)^9$

㉔ 5^5

㉕ $(-5)^4$

	A	B	C	D	E
①	$\|17\|$	$\|109\|$	$\|23\|$	$\|0\|$	$\|-5\|$
②	$\|-12\|$	$\|-107\|$	$-(+45)$	$-(+104)$	$-(+9)$
③	-0	$-(-12)$	$-(-67)$	$-(-865)$	$34+(+9)$
④	$43+(-4)$	$-8+12$	$67+0$	$23-31$	$(-2)+(-19)$
⑤	$-3-8$	$-5-(+5)$	$18-(+5)$	$-(-4)+7$	$12-(+12)$
⑥	$-(-9)-15$	$-16-(-5)$	$3-(-12)$	$(+3)\cdot(+8)$	$17\cdot 0$
⑦	$(-4)6$	$0(-23)$	$6\cdot(-10)$	$-8\cdot(-2)$	$(-7)(-9)$
⑧	$40:5$	$(-24):6$	$0:17$	$(+22):(-2)$	$45:(-9)$
⑨	$(-15):(+3)$	$-18:(-2)$	0^{17}	2^4	$(-3)^2$
⑩	$(-1)^7$	$(-7)^2$	$(-2)^3$	1^{555}	$(-5)^1$

	A	B	C	D	E
1	$\|-18\|$	$23-33$	$(-2)^2$	$(-8):(-4)$	$12-(-3)$
2	$-3(-6)$	$15-45$	$17:(-17)$	$(-3)^3$	$4\cdot(-7)$
3	$-(-4)-10$	1^5	$24:(-6)$	$(-5)^2$	$\|-34\|$
4	$-(-13)$	$(-1)^7$	$12\cdot(+4)$	$(-10)^3$	$36:(-12)$
5	7^2	$7-(-12)$	$\|+97\|$	$-14:(-2)$	$30:(+5)$
6	$(-4)^2$	$(+10)^2$	$(-8)(-5)$	8^2	$28:(-14)$
7	0^7	$(-2)^4$	$12\cdot(-5)$	$\|15\|$	$13-(-5)$
8	$18-30$	$\|-206\|$	$45(-2)$	$-90:(-45)$	$(-9)^2$
9	$-(+8)$	$(+4)+(-3)$	$(-12)(-3)$	$-12-3$	$\|-15\|$
10	$49:(+7)$	$-15+10$	4^3	$(-6)^2$	$(+7)\cdot(-4)$

Nivel 1 • Aritmética • Números enteros • Cálculo mental (14)

	A	B	C	D	E
①	$6(-7)$	$-40:(-5)$	$(-2)^5$	$(+8)^2$	$\|-17\|$
②	$-(-14)$	$45-50$	$-7-2$	$(-7)(-2)$	10^3
③	$(-10)^3$	$\|34\|$	$51-45$	$(-1)^{11}$	$(-22):(-2)$
④	$(-4)(+20)$	0^{33}	$23-13$	$-23-13$	$-20(10)$
⑤	$(-8)^2$	$-(-6)-6$	$49:(-7)$	$(-2)^4$	$(+8)(-8)$
⑥	$0:(-13)$	$\|-91\|$	$91-100$	$13\cdot(-2)$	$24:(-6)$
⑦	$(-6)^2$	$-(+12)$	$-32+40$	$\|0\|$	$16-18$
⑧	$-14+14$	$15(-3)$	$204:(-2)$	$(-3)^4$	$3(-406)$
⑨	$-147:(-7)$	$55-65$	$(-10)^2$	$\|32\|$	$-(-19)$
⑩	$(+8)(+9)$	$(-8)(-9)$	$120:(-10)$	$25-40$	$-(-(-5))$

	A	B	C	D	E
1	3+☐=–6	|☐|=0	$☐^3$=–27	7·☐=42	24:☐=–12
2	–☐=5	☐:(–8)=–1	$(–5)^{☐}$=25	18+☐=24	2–☐=8
3	–8+☐=–10	☐:(–5)=5	13·☐=26	☐–8=–1	9+☐=12
4	–4+☐=0	–13:☐=1	24:☐=–4	–☐=–10	$☐^7$=1
5	–8+☐=22	☐:(–2)=88	$☐^8$=0	7·☐=–49	☐:5=–7
6	☐:4=10	☐:(–3)=–3	13+☐=0	$10^{☐}$=100	8·☐=64
7	13·☐=–39	$☐^{57}$=–1	200:☐=–10	8+☐=–1	4–☐=5
8	8·☐=–24	75:☐=25	$(–3)^{☐}$=81	$(–2)^{☐}$=–32	14:☐=–7
9	5·☐=–25	–8+☐=2	☐+☐=–6	$☐^{☐}$=4	8·☐=–72
10	90:☐=10	77:☐=–11	$(–7)^{☐}$=49	–10+☐=2	–1+☐=–3

Operación combinada

Una operación combinada es la que tiene dos o más operaciones simples.

Jerarquía de operaciones

Como ya comentamos, la jerarquía de operaciones con números enteros es la misma que con números naturales.

Como de los naturales a los enteros cambian las propias reglas de las operaciones simples, surge la dificultad de recordar correctamente cada una. Por eso será muy importante que practiques bastante.

Recuerda el orden de cálculo:

1. Paréntesis, comenzando por los interiores.
2. Potencias.
3. Productos y cocientes, comenzando por la izquierda.
4. Sumas y restas, comenzando por la izquierda.

Ejemplos

Ejemplo 1	$-3 + 4\cdot(-5)$	Primero el producto y luego la suma
Ejemplo 2	$(-2)^3 + (-1)^5$	Primero las potencias y luego la suma
Ejemplo 3	$(-6 -14) : 2$	Primero el paréntesis y luego la división
Ejemplo 4	$(-10 +8)^5$	Primero el paréntesis y luego la potencia

Paréntesis implícitos en los valores absolutos

Los valores absolutos tienen un paréntesis interno que no se escribe, por eso se llama implícito. Cuando aparece |*operación*|, realmente significa |**(***operación***)**|, pero el paréntesis no lo vemos.

Ejemplos

Ejemplo 5	$\lvert -8 + 5\rvert$	Primero la suma y luego el valor absoluto
Ejemplo 6	$\lvert -8\rvert + \lvert 5\rvert$	Primero los valores absolutos y luego la suma
Ejemplo 7	$\lvert -3 \cdot 5\rvert$	Primero el producto y luego el valor absoluto

Cálculo paso a paso

Para aprender a hacer las operaciones combinadas con soltura es imprescindible empezar a hacerlas paso a paso, para entender la jerarquía; cuando se maneje bien, se pueden saltar pasos e incluso hacer toda la operación mentalmente.

Ejemplo 1	$-3 + 4\cdot(-5) = -3 -20 = -23$
Ejemplo 2	$(-2)^3 + (-1)^5 = -8 -1 = -9$
Ejemplo 3	$(-6 -14) : 2 = -20 : 2 = -10$
Ejemplo 4	$(-10 +8)^5 = (-2)^5 = -32$
Ejemplo 5	$\lvert -8 + 5\rvert = \lvert -3\rvert = 3$
Ejemplo 6	$\lvert -8\rvert + \lvert 5\rvert = 8 + 5 = 13$
Ejemplo 7	$\lvert -3 \cdot 5\rvert = \lvert -15\rvert = 15$

Significados del signo menos

Como estás viendo, en matemáticas usamos el signo menos («–») con tres significados distintos:

✱ Para indicar una resta entre dos números.
✱ Para indicar que un número es negativo.
✱ Para indicar el opuesto de un número.

Ejemplo 1	$8 - 3$	Resta de números naturales
Ejemplo 2	-3	El número entero negativo «menos tres»
Ejemplo 3	$-(+3)$	El opuesto del número entero positivo «tres»

El motivo es que realmente son significados intercambiables, da igual cómo lo veas, el resultado siempre es el mismo.

Otro significado del signo menos

También puedes cambiar el signo menos por el número –1 como factor (es decir, multiplicando).

Ejemplo 4	$8 - 3 = 8 + (-1)\cdot 3$

Calcula como mejor te parezca

Un ejemplo para que veas que da igual qué significado le quieras dar al signo.

Ejemplo 5	(a) $7 - (-4)\cdot 5 = 7 - (-20) = 7 + 20 = 27$
	(b) $7 - (-4)\cdot 5 = 7 + (-1)\cdot(-4)\cdot 5 = 7 + 4\cdot 5 = 7 + 20 = 27$

El signo menos y las potencias

Una duda muy común es cómo se hace una operación que tiene signos menos y una potencia. Veamos algunos casos comunes:

Ejemplo 6	$(-3)^2$	Operación sencilla: el número –3 al cuadrado
Ejemplo 7	-3^2	Operación combinada: primero la potencia, luego el signo
Ejemplo 8	$-(-3)^2$	Operación combinada: primero la potencia, luego el signo

Algunos resultados son diferentes:

Ejemplo 6	$(-3)^2 = 9$	Ejemplo 7	$-3^2 = -9$	Ejemplo 8	$-(-3)^2 = -9$
Ejemplo 9	$(-3)^3 = -27$	Ejemplo 10	$-3^3 = -27$	Ejemplo 11	$-(-3)^3 = 27$

Potencias, sumas y restas

Ejemplo 12	$12 + (-3)^2 = 12 + 9 = 21$
Ejemplo 13	$12 + (-3)^3 = 12 + (-27) = -15$
Ejemplo 14	$12 - (-3)^2 = 12 - 9 = 3$
Ejemplo 15	$12 - (-3)^3 = 12 - (-27) = 12 + 27 = 39$

①	$4+\vert-5\vert\cdot(-3)-\vert-9\vert$	②	$(2+\vert4\vert)^2-18:(-2)$	③	$15^{\vert7-8\vert}+5\cdot(-3)$
④	$9-\vert7-12\vert+(7-\vert-4\vert)^3$	⑤	$\vert7-\vert-7+4\vert\vert-(-5)$	⑥	$18:\vert-2\vert+\vert16:(-2)\vert$
⑦	$-\vert-8+12\vert^2+2$	⑧	$\vert(-3)^3\vert+27:(-9)$	⑨	$\vert18-18\vert^5+5^{4-\vert-3\vert}$
⑩	$-3+4\cdot(-5)-(-6)$	⑪	$(-2)^4+3^2-8$	⑫	$24:(-2)+5\cdot(-6)$
⑬	$30-10^2+(-2)^5$	⑭	$12\cdot(-3)+15\cdot(-4)$	⑮	$(-12+18+2^3):(-2)$
⑯	$(3^4-1):(-8)+(-8)^2$	⑰	$2^2-3^3\cdot(15-17)$	⑱	$(-7)^3+3^5-8:(-2)$
⑲	$(-8)^{7-5}+(5-7)^3$	⑳	$3+4\cdot(-5)^3$	㉑	$(20-32):(-4)+4\cdot(-8)$
㉒	$23-(-8)(-4)-(-15)$	㉓	$100:(30-80)-(-5)^2$	㉔	$-(-2)^3+(-3)^4$
㉕	$2\cdot(-3)-7^2+12:(-4)$	㉖	$-5^{5-2}+5-2\cdot4^2$	㉗	$-(12-17)+(8-12)\cdot4$
㉘	$-2-4\cdot(3-8)^2$	㉙	$12\cdot(-3)-(2-2(-6))$	㉚	$9:3+9:(-3)+0^3$
㉛	$16:(-2):2+4:(-2)$	㉜	$-3-((-56):8)^2$	㉝	$(-2)^2-(-2)^3-2^4$
㉞	$(18-2\cdot9)^{9+8}$	㉟	$-3(4-3(4-9))-7$	㊱	$30-(1+(2-5)^2)^2$
㊲	$3\cdot(-3)\cdot6-6:(6-12)$	㊳	$-12:6+14:(-7)-2$	㊴	$5\cdot(-2)^2+3-56(-1)$
㊵	$(31+62:(-2))^5-3(-5)^2$	㊶	$17-(2+4(-5))(-7)$	㊷	$(-3)(-2)(-5)-(-7)6$
㊸	$18:(-2\cdot3)+(-2)3$	㊹	$(-7)^2+(-5)^3-7\cdot2^3$	㊺	$\vert-8\vert:(-8)\cdot2+2\cdot\vert-6\vert$
㊻	$1-(3+2\vert8-2\cdot5\vert)$	㊼	$\vert1-4^2\vert^2:(25-10)$	㊽	$(8-12):(2^3-(-2)^2)$
㊾	$-\vert2^3\vert+5\cdot3^2-12:(-3)$	㊿	$\vert45:(-9)+2\vert^2+2^{\vert-3\vert}$	51	$-(8-4-15)+(2-9)^2$
52	$(-1)^4+(-1)^7-(-1)$	53	$8^2-(-9)^2-\vert12-19\vert$	54	$(12-5)^2-12^2-5^2$
55	$3-(5-\vert-7\vert\cdot2)+2^4$	56	$25:(-5)+35:\vert-7\vert$	57	$(1-4)^3-2^{2^3}$
58	$\vert2-3\cdot5\vert-5\cdot(7+\vert+7\vert)$	59	$(-1)^9+9^2-(-2)^3$	60	$55:(-11)+11^2$
61	$(36:(-6))^2+(-6)^2$	62	$(17-7)^3-(-1)\vert-10\vert$	63	$(-3+5-4)^2+(4-5)^3$
64	$90-5^2-7^2+(8-2)^2$	65	$(-3+\vert-3\vert)^9+15(-3)$	66	$33\cdot3^2-33\cdot4^2$
67	$17-5\cdot4^3-\vert15-19\vert$	68	$\vert1-(-1)^3\vert\cdot(-8+3)$	69	$(9-3\cdot4)^2+(-3)^3$
70	$14:(-2)-2^4+4^{9-7}$	71	$49:(+7)-15(-2)$	72	$10-10^2+(-8)^2$
73	$16^2-2^7+(-24):(-2)^2$	74	$(-6)^2:(-2^2):(-1)$	75	$(-2)^5+31^1-(2-5)^2$

	A	B	C	D	E
①	2·10–12	–7–2·5	8+|–7|	15–|18|	|–3–9|
②	3–7	–6–10+|1|	|21–21|	|15|–|19|	|15–19|
③	18–3·4	3·12–20	|–15|	|–7+7|	12–10·3
④	–10+15	4·|–3–4|	(–2)|8+10|	–8+4·2	36:6:6
⑤	10:(2·(–5))	4–3–3·2	–10+2+6	|7–2|–|–6|	–6–13
⑥	210–160	–210+160	3·|–7–5|	|–7|+|–2|	8–9·2
⑦	20–27	–20–27	|16–8|	|16|–|8|	|–16|–|8|
⑧	|–16|+|8|	–|5|–2·|–2|	40–2–3	–40–2–3	23+|3·4|
⑨	23–3	3–23	|3–23|	|15–15|–1	60–25
⑩	25–36	|15–12|	|12–15|	|12|–|15|	|–12|–|–15|

	A	B	C	D	E
1	$5\cdot\|6-9\|$	5^2-35	$835:5$	$248\cdot 7$	$\|-5\|\cdot(-8)$
2	$7^2+(3-5)^3$	$723-895$	$\|9-5-10\|$	$\|2-7\|^2$	$3+2\cdot 9$
3	$4+10:2$	$10-15:5$	$\|3^2-3\cdot 4\|$	$\|15\|-\|-18\|$	$2\cdot(7-9)^3$
4	$35:(-7)-2$	$4\cdot(-5)+8$	$(-1)^9+9^2$	$36:(-12)$	$-88:11-4$
5	$(4-10):(-3)$	10^3+10-1	$42:(-7)-5$	$(2+3)^2-5^2$	$120:(-30)$
6	$(7-3):(3-7)$	$5-48:(-6)$	$-19-21$	$\|5-7\|-5$	$3\cdot\|-15\|$
7	$\|4-5\cdot 3\|$	$(-6)^2-6$	$54\cdot 4-16$	$9+1\cdot 15$	$-8:2\cdot 6$
8	$180:30:3$	$180:(30:3)$	$7-\|-4-10\|$	$4\cdot 45\cdot 5$	$20\cdot 8:2$
9	$12:4\cdot 3$	$34:(2\cdot 17)$	$84\cdot 75\cdot 0$	$(-1)\|4-9\|$	$\|6-10-3\|$
10	$1-6\cdot 7-8$	$(9^2-80)^{15}$	$(-2)^3-18$	$10+20:10$	$8:4\cdot 2$

	A	B	C	D	E
1	$5\cdot\lvert 6\rvert\cdot\lvert -4\rvert$	$(-3)\cdot\lvert -3\rvert$	$8-8:4$	$-8-8:4$	$5-5^2$
2	$(5-5)^4$	$(7-17)^3$	$4\cdot 3^2$	$5\cdot 2^3$	$3-8\cdot 9$
3	$-3\cdot 4-5\cdot 6$	$10\cdot 7^2$	$8-5\cdot 3$	$(4+8):(-4)$	$80:(10-20)$
4	$(19+21)^2$	$44:11-10$	$90-9\cdot 5$	$48:(2-4)$	$7-\lvert 17-20\rvert$
5	$16\cdot(6:3)$	$1-10^2$	$(1-10)^2$	1^2-10^2	$4+3-1-9$
6	$25-5\cdot 6$	2^3-3^2	$4+\lvert -10\rvert$	$8\cdot 2+\lvert -10\rvert$	$8-16:2$
7	$5-8\cdot 7$	$(2+3):(1-6)$	$2+3:1-6$	$(7+2:2)^2$	$(5-7)^3+28$
8	$50:(-10)+2$	$-14+21:7$	$(8-12):2$	$6^2:3$	$(-27):3^2$
9	$17-\lvert 9-15\rvert$	$\lvert 5-8\rvert^2$	9^2-1^4	$(-5)^2+5$	$72:(-2)+6$
10	$18-2\cdot(-5)$	$-15+8:(-2)$	$\lvert 3-5\cdot\lvert -2\rvert\rvert$	$\lvert 5-15\rvert:2$	3^3+3^2-3

Propiedad distributiva

La propiedad distributiva relaciona la suma y el producto. Es válida para números naturales y para números enteros.

Ejemplo

Un grupo de siete trabajadores va a comer a un restaurante en el que el menú del día cuesta trece euros. En el restaurante se encuentran con otro grupo de cinco trabajadores. La jefa decide invitarlos a todos. ¿Cuánto le costará?

Primera resolución: en total hay $7+5 = 12$ trabajadores; a 13 euros cada menú, el total es $13\cdot12 = 156$ euros.

Segunda resolución: pagar lo del grupo de siete cuesta $13\cdot7 = 91$ euros; pagar lo del grupo de cinco cuesta $13\cdot5 = 65$ euros. En total, $91+65 = 156$ euros.

Las dos resoluciones dan el mismo resultado, luego $13\cdot(7+5) = 13\cdot7 + 13\cdot5$.

Expresión general

Si a, b y c son números enteros, $a(b+c) = ab + ac$

Comprobación

Comprueba que la propiedad es cierta usando a=15, b=47, c=–19.

Resolución

$a(b+c) = 15(47–19) = 15\cdot28 = 420$; $ab + ac = 15\cdot47 + 15(–19) = 705–285 = 420$.

Usos de la propiedad

La propiedad es una igualdad, luego se puede usar tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda.

Ejemplo de izquierda a derecha: $–15(8+4) = –15\cdot8 –15\cdot4$.

El uso de izquierda a derecha no está recomendado en este nivel del curso, ya que es más complicado hacer el cálculo usando la propiedad que calculando primero el paréntesis. La propiedad será, sin embargo, la única manera de resolver algunos problemas que aparecen más adelante (ecuaciones con paréntesis, nivel 2).

Ejemplo de derecha a izquierda: $31\cdot19 + 31\cdot11 = 31\cdot(19+11)$.

Este uso podría servir en algunas ocasiones para facilitar los cálculos. En el ejemplo anterior, la segunda operación es mucho más fácil que la primera. Este uso de la propiedad distributiva se llama extraer factor común.

Ejemplos de uso

Calcula las siguientes expresiones del modo más sencillo posible:

① $73\cdot19 – 73\cdot9 = 73\cdot(19–9) = 73\cdot10 = 730$

② $82\cdot23 + 82\cdot77 = 826\cdot(23+77) = 82\cdot100 = 8200$

③ $–71\cdot47 + 71\cdot7 = 71\cdot(–47+7) = 71\cdot(–40) = –2840$

④ $93\cdot103 = 93\cdot(100+3) = 93\cdot100 + 93\cdot3 = 9300 + 279 = 9579$

⑤ $73\cdot99 = 73\cdot(100–1) = 73\cdot100 – 73\cdot1 = 7300 – 73 = 7227$

⑥ $45\cdot19 + 45 = 45\cdot19 + 45\cdot1 = 45\cdot(19+1) = 45\cdot20 = 900$

⑦ $45\cdot21 – 45 = 45\cdot21 – 45\cdot1 = 45\cdot(21–1) = 45\cdot20 = 900$

Nivel 1 • Aritmética • Números enteros • Cálculo mental (19)

	A	B	C	D	E
1	$10^2-4\cdot5$	$(10-4)^2+6$	$18:(-2)-(-5)$	$17\cdot8+17\cdot2$	$5-\|-9\|+7$
2	$16:(-4)^2$	$16:(-4^2)$	$43\cdot21-43$	$(4+\|-5\|)^2$	$-\|5-7\|+5^2$
3	$-7+6\cdot(-7)$	$\|-6:2\|-\|48:6\|$	$10^3-(-4)^2$	$(-2)^3:(8-10)$	$25-3^3$
4	$11\cdot12+11\cdot8$	$8^2-2^2-(8-2)^2$	$1^3-(-1)^5+\|0\|$	$\|-4\|-\|4-6\|^3$	$12:(-18:9)$
5	$-(-4)^2-13$	$(-5)^{\|4-6\|}+5$	$567\cdot11-567$	$(-8)^2:(-2)^3$	$-\|1-\|7-9\|^2\|^2$
6	$4\cdot(9-2)$	$1+2\cdot3^2$	$2-3\cdot(-2)^4$	$(120:12:2)^2$	$-7+2^2\cdot3$
7	$(120:\|12:2\|)^2$	$-3-14+\|-7\|$	$(-3)^3+\|-3\|$	$-7^2:(-9+2)$	$-14:2+(-2)^3$
8	$33\cdot32-33\cdot2$	$(3+4)^2-3^2-4^2$	$17\cdot58+1-17\cdot58$	$(2^3+(-2)^3):17$	$\|21-21\|^4$
9	$8-(23-26)$	$(15-17)^3+(-3)^2$	$(-7)^2+\|-7^2\|$	$-10:10+5:(-5)$	$(-15:5)^3$
10	$36:\|2(-3)\|$	$(2^3-3^2)^3$	$10^2:(-5)$	$(10:(-5))^3$	$71\cdot5-71$

Números enteros para resolver problemas

El uso de números enteros simplifica mucho la resolución de algunos problemas que también se podrían resolver usando números naturales. Sobre todo, los números enteros permiten unificar varios casos distintos en uno solo.

Separación entre dos alturas

Una prueba de los saltos de trampolín consiste en el salto desde una plataforma que está a 10 metros del agua; la piscina (llamada «fosa») puede tener 5 metros de profundidad. ¿Cuál es la distancia entre la plataforma y el fondo de la piscina?

Número entero que asignamos a la altura de la plataforma: +10.

Número entero que asignamos al fondo de la piscina: −5.

Diferencia entre ambas: 10 − (−5) = 10 + 5 = 15 metros.

Diferencia de temperaturas

Una familia tiene configurado su refrigerador de modo que la temperatura en la zona general es 6 ℃ y la temperatura del congelador es −22 ℃. ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre las dos zonas?

Número entero que asignamos a la temperatura de la zona general: +6.

Número entero que asignamos a la temperatura del congelador: −22.

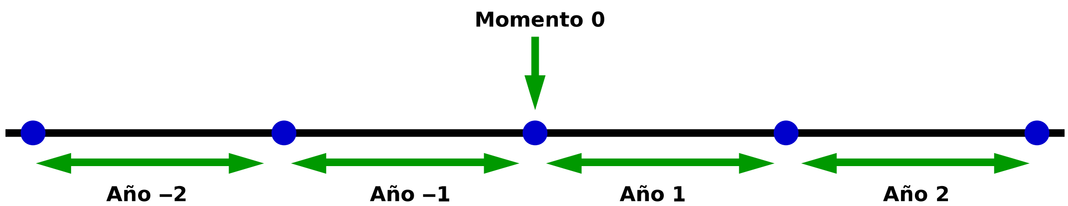
Diferencia entre ambas: 6 − (−22) = 6 + 22 = 28 grados centígrados.

Tiempo entre dos fechas

La humanidad a lo largo de su historia ha usado distintos modos de definir las fechas. Además del problema de definir correctamente «año», existe el problema de definir a partir de qué momento se empiezan a contar los años.

El calendario romano empezaba a contar en la fundación de Roma; el budista, en el nacimiento de Buda; el musulmán, a partir de la huida de Mahoma de la ciudad de La Meca; y el calendario gregoriano empieza a contar en la fecha atribuida al nacimiento de Jesús de Nazaret. En todos ellos hay que usar números de año negativos para referirnos a sucesos anteriores al momento cero elegido.

Todos los calendarios comparten un problema que dificulta el cálculo del tiempo que transcurre entre dos fechas separadas por el momento cero. El problema es que no existe el año cero, sino que el cero es solamente un punto de referencia.



Si una persona hubiera nacido el año −1 y hubiera muerto el año 1, la operación 1−(−1) nos daría una duración errónea de 2 años de vida. Por tanto, en estos casos hay que restar un año a la diferencia de los años de nacimiento y muerte.

Ejemplo

¿Cuánto tiempo vivió una persona que nació el año 23 a. e. c. (antes de la era común) y murió el año 41 e. c. (era común)?

Número entero asignado al año de nacimiento: −23.

Número entero asignado al año de fallecimiento: +41.

Diferencia entre ambos: 41 − (−23) = 41+23 = 64. Corrección: 64−1 = 63 años.

Enunciados

① Averigua tres números enteros consecutivos que sumen 0.

② Un pez arquero (*Toxotes* spp.) está nadando a 85 centímetros de profundidad y detecta un insecto a 225 centímetros sobre el nivel del agua. ¿Qué distancia separa al pez arquero de su presa?

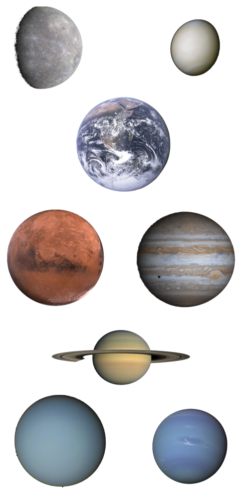
③ Esta es una lista de las temperaturas máximas y mínimas promedio en varias ciudades, medidas en grados centígrados:

Ciudad	*País*	*Máxima*	*Mínima*
Honolulu	Estados Unidos	28	20
Novosibirsk	Rusia	7	–3
Ilulissat	Dinamarca	–2	–8

Calcula la variación de temperatura en cada ciudad.

④ Esta es una lista de las temperaturas máximas y mínimas promedio en la superficie de los planetas del Sistema Solar, medidas en grados centígrados:

Planeta	*Máxima*	*Mínima*
Mercurio	430	–180
Venus	465	465
Tierra	58	–88
Marte	20	–140
Júpiter	121	–163
Saturno	–130	–191
Neptuno	–200	–218
Urano	–153	–218



Se pide:

(a) ¿En qué planeta es mayor la variación de temperatura?

(b) ¿En qué planeta es menor la variación de temperatura?

(c) ¿En qué planetas la variación de temperatura está entre 100 ℃ y 200 ℃?

⑤ Esta es una lista de los años de nacimiento y muerte de varios personajes.

Personaje	*Nacimiento*	*Muerte*
Hipatia de Alejandría	360 e. c.	415 e. c.
Séneca el Joven	4 a. e. c.	65 e. c.
Euclides	325 a. e. c.	265 a. e. c.

Calcula cuántos años vivió cada personaje.

Enunciados

① Una sustancia líquida se convierte en sólida a la temperatura del llamado *punto de congelación* y en gaseosa a la temperatura del *punto de ebullición*. La siguiente tabla da esos dos puntos en grados centígrados para algunas sustancias, sometidas a una presión de una atmósfera:

Sustancia	*Fórmula*	*Punto de congelación*	*Punto de ebullición*
Agua	H_20	0	100
Formamida	CH_3NO	3	210
Amoniaco	NH_3	–78	–33
Nitrógeno	N_2	–210	–196
Metano	CH_4	–182	–162
Etano	C_2H_6	–183	–89
Mercurio	Hg	–39	357
Bromo	Br	–7	59

a) Calcula durante cuántos grados centígrados está líquida cada una.

b) ¿Cuáles están líquidas a temperatura ambiente (20 ℃)?

c) ¿Cuáles están líquidas a –200 ℃?

d) ¿Cuáles están líquidas a 200 ℃?

② Un edificio tiene 17 plantas de oficinas sobre el nivel del suelo y 8 plantas subterráneas de aparcamientos. Todas las plantas tienen 3 metros de altura. Rosario está trabajando en la planta 14 y su coche está a 57 metros. ¿En qué planta está aparcado el coche de Rosario?

③ En el llamado billar americano se juega con 15 bolas numeradas del 1 al 15, además de una bola blanca sin número. Calcula la suma de los valores de las bolas de número impar y los opuestos de las bolas de número par.

④ Inspirándonos en el problema anterior, imagínate una enorme mesa de billar americano en la que hubiera 150 bolas. Calcula la suma de los valores de las bolas de número impar y los opuestos de las bolas de número par.

⑤ Un caracol quiere llegar al punto más alto de un árbol que mide 30 metros. Cuando es de día, el caracol sube tres metros, pero durante la noche se desliza hacia abajo dos metros. Si empieza a subir hoy, ¿qué día llegará arriba?

⑥ Haces un examen tipo test de cien preguntas. Cada pregunta correcta te suma un punto y cada pregunta incorrecta te resta dos. Hay que contestar todas las preguntas del examen. Si tienes bien 35 preguntas, ¿qué puntuación obtienes?

⑦ Juegas a los dardos con una diana con zonas numeradas del 1 al 10. Si das en un número par, te sumas la mitad; si das en un impar, te restas el triple. Lanzas cinco veces, con este resultado: 3, 7, 8, 4 y 1. ¿Cuál es tu puntuación?

Relación entre ℕ y ℤ

Ya hemos visto que ℕ es un subconjunto de ℤ: todos los números naturales son también números enteros; pero también hay infinitos números enteros que no son naturales. Esto haría pensar que en ℤ hay más elementos que en ℕ; sin embargo, no es así. La intuición que tenemos los humanos sobre las cantidades nos funciona bastante bien con cantidades finitas, pero no con las infinitas.

Conjuntos con la misma cantidad de elementos

Cuando queremos averiguar si dos conjuntos finitos tienen la misma cantidad de elementos, nos basta con contarlos. Es uno de los usos de los números naturales, quizá el primero.

Esto no sirve con los conjuntos infinitos, hay que usar otra técnica. Para saber si dos conjuntos infinitos tienen la misma cantidad de elementos, buscamos alguna manera de hacer corresponder los elementos de un conjunto con los del otro, de modo que ni sobre ni falte ningún elemento de ninguno de los dos conjuntos.

Una correspondencia entre elementos de ℕ y de ℤ

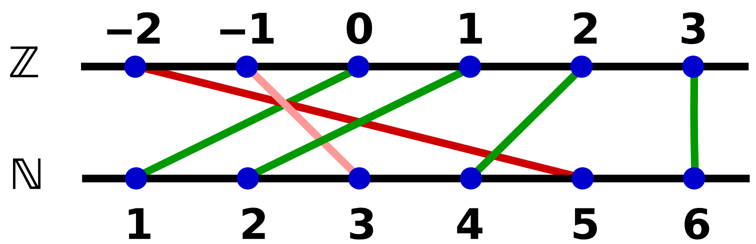
Partimos de los números enteros para hacer corresponder cada uno de ellos con un número natural, de esta manera:

- Si el número es positivo, lo hacemos corresponder con su doble.
- Si el número no es positivo, lo hacemos corresponder con el siguiente del doble de su opuesto.

Vemos unos ejemplos:

- Número entero 1: es positivo, lo hacemos corresponder con su doble: 2.
- Número entero 2: es positivo, lo hacemos corresponder con su doble: 4.
- Número entero 3: es positivo, lo hacemos corresponder con su doble: 6.
- Número entero 0: no es positivo; su opuesto es 0, el doble de 0 es 0, el siguiente de 0 es 1, así que hacemos corresponder el 0 con el 1.
- Número entero −1: no es positivo; su opuesto es 1, el doble de 1 es 2, el siguiente de 2 es 3, así que hacemos corresponder el −1 con el 3.
- Número entero −2: no es positivo; su opuesto es 2, el doble de 2 es 4, el siguiente de 4 es 5, así que hacemos corresponder el −2 con el 5.

Podemos visualizar las correspondencias:



Además, dado un número natural, sabemos con qué entero lo hemos hecho corresponder:

- Si el número es par, se corresponde con su mitad.
- Si el número es impar, se corresponde con el opuesto de la mitad de su anterior.

Conclusión

Como hemos hecho corresponder entre sí los números enteros y los naturales, la cantidad de cada uno de ellos es exactamente la misma.

Enunciado original del problema

El problema que vamos a resolver en esta hoja fue propuesto originalmente en la VI Olimpiada Matemática Nacional de España con el número 4. Para este curso hemos modificado el enunciado manteniendo su espíritu matemático.

Enunciado

Averigua siete números naturales que verifiquen todas estas condiciones:

- Son todos diferentes entre sí.
- Suman 2879.
- Si se dividen dos cualesquiera, la división es exacta.

Resolución

Imaginamos los números pedidos ordenados de menor a mayor.

Como la división del segundo entre el primero es exacta, el segundo es múltiplo del primero. Igualmente, cada número de esta serie debe ser múltiplo del anterior. Por tanto, la suma debe ser múltiplo del primero.

El número 2879 es primo porque $54^2 > 2879$ y 2879 no es divisible entre ningún número primo menor que 54.

De las dos frases anteriores se deduce que el primer número es 1.

La suma de los seis últimos números es: $2879 - 1 = 2878$.

La descomposición en factores primos de 2878 es $2878 = 2 \cdot 1439$.

Llegamos a la igualdad $2879 = 1 + 2 \cdot 1439$.

El número 1439 también es primo, así que seguimos aplicando la técnica de la descomposición de números en sumas y productos, a ver hasta dónde nos lleva:

$$\begin{aligned}
2879 &= 1 + 2 \cdot 1439 = 1 + 2 \cdot (1 + 1438) = 1 + 2 + 2 \cdot 1438 = \\
&= 1 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 719 = 1 + 2 + 4 \cdot 719 = 1 + 2 + 4 \cdot (1 + 718) = \\
&= 1 + 2 + 4 + 4 \cdot 718 = 1 + 2 + 4 + 4 \cdot 2 \cdot 359 = 1 + 2 + 4 + 8 \cdot 359 = \\
&= 1 + 2 + 4 + 8 \cdot (1 + 358) = 1 + 2 + 4 + 8 + 8 \cdot 358 = \\
&= 1 + 2 + 4 + 8 + 8 \cdot 2 \cdot 179 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \cdot 179 = \\
&= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \cdot (1 + 178) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 16 \cdot 178 = \\
&= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 16 \cdot 2 \cdot 89 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 \cdot 89 = \\
&= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 \cdot (1 + 88) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 32 \cdot 88 = \\
&= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 2816.
\end{aligned}$$

Hemos usado la propiedad distributiva en todos los pasos en los que eliminamos los paréntesis. Siempre hemos ido obteniendo nuevos números que son múltiplos de los anteriores.

El método utilizado no solo llega a la solución, sino que demuestra que es única.

Solución

1, 2, 4, 8, 16, 32 y 2816

Necesidad de los números decimales

Hay muchas situaciones que no podemos trabajar con los números enteros. Por ejemplo, repartir un kilogramo de carne entre cinco personas, ya que la división 1:5 no se corresponde con ningún número un número entero.

Definición de números decimales

Si dividimos la unidad en varias partes iguales, nos aparecen los números decimales. Como trabajamos en un sistema de base 10, lo lógico es dividir la unidad en 10 partes iguales. Cada una se llama **décima**.

La idea de dividir en 10 partes se puede volver a aplicar repetidas veces. Si dividimos una décima en 10 partes iguales, cada una se llama **centésima**. A continuación vienen las milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, etc.

Un número decimal se compone de una **parte entera** (unidades, decenas, etc.) y una **parte decimal** (décimas, centésimas, etc.).

Escritura de números decimales

En todos los idiomas se escribe primero (de izquierda a derecha) la parte entera, luego un **carácter separador** y por fin la parte decimal. Lo que varía de un idioma a otro es el separador.

Inglés

En el idioma inglés el separador es el punto («.»). Ejemplo: 19.32.

Español

En el idioma español se admite como separador tanto el punto como la coma («,»). Ejemplo: **19.32 y 19,32 son válidos**.

En el idioma español ya no se admite el uso del apóstrofo o coma volada («'») como separador, de manera que **escribir 19'32 es incorrecto**. Antiguamente sí se admitía, por eso es común ver este error en los medios de comunicación.

En este curso utilizaremos exclusivamente la coma.

Programación de ordenadores

En todos los lenguajes de programación de ordenadores el separador es el punto.

Calculadoras

El separador por defecto en las calculadoras es el punto, pero algunas permiten cambiarlo por la coma.

El futuro

El mundo de la ciencia camina hacia una mayor homogeneidad para facilitar el intercambio de información. Por eso, es posible que todos los idiomas vayan convergiendo en el uso exclusivo del punto como separador.

Lectura de números decimales

Se nombra primero la parte entera (si no es cero) y luego se dice la parte decimal usando el nombre de la parte más pequeña.

Ejemplo 1	–13,8	Menos trece y ocho décimas
Ejemplo 2	14,45	Catorce y 45 centésimas
Ejemplo 3	0,012	Doce milésimas
Ejemplo 4	–1,236 912	Menos uno y 236 912 millonésimas

Enunciados

Escribe con cifras los siguientes números decimales:

① Trece y 42 milésimas.

② Menos uno y cuatro décimas.

③ Seiscientas veintitrés milésimas.

④ Menos 44 centésimas.

⑤ Trescientos y trescientas cuatro milésimas.

⑥ Cuarenta y 1827 diezmilésimas.

⑦ Veinticinco y 78 diezmilésimas.

⑧ Menos dos y 89 centésimas.

⑨ Quince y quince milésimas.

⑩ Menos cuatro y 36 873 cienmilésimas.

⑪ Noventa y nueve y nueve décimas.

⑫ Diecinueve y dieciocho centésimas.

⑬ Siete décimas.

Enunciados

Escribe con letras los siguientes números decimales:

⑭ –34,1

⑮ 303,019

⑯ 0,010 011

⑰ –1,08

⑱ 100,102

⑲ 1,0002

⑳ –3,1292

㉑ 8,02288

㉒ 0,1212

㉓ –4,000 004

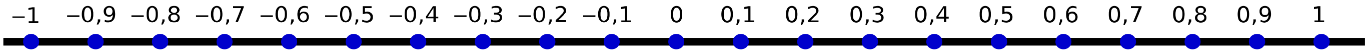
㉔ 8,089

㉕ –1,2391

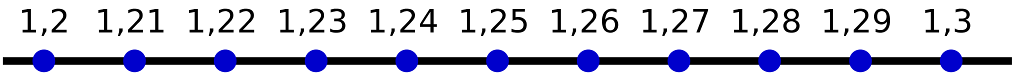
Representación gráfica de los números decimales

- Los números decimales se representan en la misma recta que los números enteros, en los huecos que dejan estos.
- Se representa la parte de la recta que sea necesaria y solo aquellos números que sean de interés.
- Es importante distinguir la diferencia de posición entre los números decimales positivos y los negativos.
- No suele ser necesario hacer la representación con mucha exactitud.

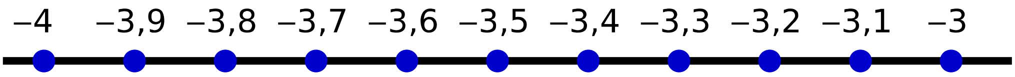
Ejemplo 1: todas las décimas desde –1 a 1:



Ejemplo 2: todas las centésimas entre 1,2 y 1,3:



Ejemplo 3: todas las décimas desde –3 a –4:



Posición de un número decimal

Uno de los usos más comunes de la representación de números decimales es ubicar uno de ellos entre otros dos que tengan exactamente una cifra menos.

Ejemplo 4: representa de modo aproximado el número 8,24 entre las décimas anterior y posterior.

El número 8,64 tiene centésimas; su décima anterior es 8,6 (porque está a su izquierda) y su décima posterior es 8,7 (porque está a su derecha). La posición aproximada es:

Ejemplo 5: representa de modo aproximado el número –9,174 entre las centésimas anterior y posterior.

El número –9,174 tiene milésimas; su centésima anterior es –9,18 (porque está a su izquierda) y su centésima posterior es –9,17 (porque está a su derecha). La posición aproximada es:

Ejemplo 6: representa de modo aproximado el número 12,7 entre los números enteros anterior y posterior.

El número 12,7 tiene décimas; su entero anterior es 12 (porque está a su izquierda) y su entero posterior es 13 (porque está a su derecha). Posición aproximada:

Enunciados

① Representa gráficamente de modo aproximado todas las centésimas entre 4,7 y 4,8.

② Representa gráficamente de modo aproximado todas las décimas entre los números enteros −5 y −6.

③ Representa gráficamente de modo aproximado el número 5,273 entre las centésimas anterior y posterior.

④ Representa gráficamente de modo aproximado el número 9,48 entre las décimas anterior y posterior.

⑤ Representa gráficamente de modo aproximado el número −8,47 entre las décimas anterior y posterior.

⑥ Representa gráficamente de modo aproximado el número 9,5 entre los números enteros anterior y posterior.

⑦ Representa gráficamente de modo aproximado el número −9,3 entre los números enteros anterior y posterior.

⑧ Representa gráficamente de modo aproximado el número 0,7495 entre las milésimas anterior y posterior.

⑨ Representa gráficamente de modo aproximado el número 4,01 entre las décimas anterior y posterior.

⑩ Representa gráficamente de modo aproximado los números −7,22 y −7,27 entre las décimas anterior y posterior.

Ordenación de los números decimales

- Como ocurre con los números enteros, los números decimales también están ordenados.
- Dados dos números decimales, siempre se puede saber cuál es menor y cuál es mayor.
- El número decimal que esté más a la izquierda en la representación gráfica es el menor, el que esté más a la derecha es el mayor.
- En los casos en que la expresión decimal sea parecida, el primer dígito que sea diferente decidirá el orden, sin que importen los siguientes.
- Si un número tiene menos decimales que otro, se puede rellenar con ceros por la derecha para hacer la comparación.

Ejemplo 1	5,84 < 5,91	5,84 es menor que 5,91 porque 8<9
Ejemplo 2	–5,91 < –5,84	Porque son negativos y 9>8
Ejemplo 3	4,257 > 4,231	4,257 es mayor que 4,231 porque 5>3
Ejemplo 4	–4,231 > –4,257	Porque son negativos y 3<5
Ejemplo 5	7,3 < 7,34	7,3 es menor que 7,34 porque 0<4
Ejemplo 6	–7,34 < –7,3	Porque son negativos y 4>0
Ejemplo 7	8,274 > 8,2	8,274 es mayor que 8,2 porque 7>0
Ejemplo 8	4,1 < 4,189	4,1 es menor que 4,189 porque 0<8

Propiedades

- El 0 es menor que cualquier número decimal positivo.
- El 0 es mayor que cualquier número decimal negativo.
- Cualquier número decimal negativo es menor que cualquier número decimal positivo.
- Cualquier número decimal positivo es mayor que cualquier número decimal negativo.

Ejemplo 9	0 < 3,5	0 es menor que 3,5, no hace falta verlo dibujado
Ejemplo 10	0 > –2,1	0 es mayor que –2,1, no hace falta verlo dibujado
Ejemplo 11	–7,8 < 15,2	–7,8 es menor que 15,2, no hace falta verlo dibujado
Ejemplo 12	15,2 > –7,8	Como el ejemplo anterior, pero al revés

Ceros por la derecha en un número decimal

Si se añaden o eliminan ceros que estén situados al final de un número decimal, el valor del número no cambia.

Ejemplo 13 → 7,3 = 7,30

Ejemplo 14 → 4,1 = 4,10

Ejemplo 15 → 0,24 = 0,2400

Ejemplo 16 → 0,5000 = 0,5

Aunque esto se hace muy a menudo, en el nivel 3 del curso verás que no es tan trivial como parece, ya que se utiliza para indicar la precisión de una medida.

	A	B	C	D	E
1	3,41 ⊡ 3,58	−1,2 ⊡ −1,6	0,1 ⊡ 0,01	−2,1 ⊡ −2,07	10,2 ⊡ 10,200
2	0 ⊡ −0,001	8,2 ⊡ 0	−1,2 ⊡ 2,1	4 ⊡ 4,000	−1,23 ⊡ −1,2
3	3,44 ⊡ 4,33	−8,02 ⊡ −8,1	4,2 ⊡ −0,3	4,333 ⊡ 4,33	−0,777 ⊡ −0,77
4	9,0 ⊡ 9,00	−3,1 ⊡ −3,4	−8,3 ⊡ 8,2	7,71 ⊡ 7,7	−4,51 ⊡ −4,5
5	0,99 ⊡ 1	−0,999 ⊡ −1	−8,01 ⊡ −8,010	1,2 ⊡ −4,5	0 ⊡ −0,14
6	7,9 ⊡ 7,900	9,02 ⊡ 8,99	−12,3 ⊡ −13,2	−1,4 ⊡ −1,400	4,9 ⊡ 3,9
7	−8,5 ⊡ −8,6	2,04 ⊡ 2,44	−3,69 ⊡ −3,7	2,99 ⊡ 3,01	−9,99 ⊡ −10
8	8,07 ⊡ −7,8	−5,6 ⊡ 1,11	−0,9 ⊡ −0,89	1,001 ⊡ −1,1	−0,9 ⊡ −0,900
9	12,01 ⊡ 12,12	2,876 ⊡ 2,911	7,3 ⊡ 7,32	−1,9 ⊡ −1,92	2 ⊡ 2,005
10	10 ⊡ 10,003	−1,3 ⊡ −1,33	8,89 ⊡ 8,089	−4,04 ⊡ −4	13,1 ⊡ 13,10

Aproximaciones

- ✱ Aproximar un número decimal es sustituirlo por otro que tenga menos cifras decimales.
- ✱ Al hacerlo se pierde precisión, pero se gana en simplicidad.
- ✱ Es importante realizarlo con el resultado de operaciones que dan una cantidad de cifras decimales demasiado grande para que sea útil en la realidad.
- ✱ Si el número se sustituye por otro mayor, la aproximación es **por exceso**.
- ✱ Si el número se sustituye por otro menor, la aproximación es **por defecto**.

Ejemplo 1

(a) Aproxima por exceso el número 7,14 a las décimas.

(b) Aproxima por defecto el número 7,14 a las décimas.

El número 7,14 está situado entre las décimas 7,1 y 7,2.

Se verifica $7{,}1 < 7{,}14 < 7{,}2$. Por tanto: (a) 7,2 (b) 7,1

Ejemplo 2

(a) Aproxima por exceso el número –3,68 a las décimas.

(b) Aproxima por defecto el número –3,68 a las décimas.

El número –3,68 está situado entre las décimas –3,6 y –3,7.

Se verifica $-3{,}7 < -3{,}68 < -3{,}6$. Por tanto: (a) –3,6 (b) –3,7

Observa la diferencia entre los números negativos y los positivos.

Ejemplo 3

(a) Aproxima por exceso el número 2,6 a las unidades.

(b) Aproxima por defecto el número 2,6 a las unidades.

El número 2,6 está situado entre las unidades 2 y 3.

Se verifica $2 < 2{,}6 < 3$. Por tanto: (a) 3 (b) 2

Ejemplo 4

(a) Aproxima por exceso el número 1,2378 a las centésimas.

(b) Aproxima por defecto el número 1,2378 a las centésimas.

El número 1,2378 está situado entre las centésimas 1,23 y 1,24.

Se verifica $1{,}23 < 1{,}2378 < 1{,}24$. Por tanto: (a) 1,24 (b) 1,23

Observa que la cifra de las diezmilésimas (el 8) no ha tenido ninguna importancia.

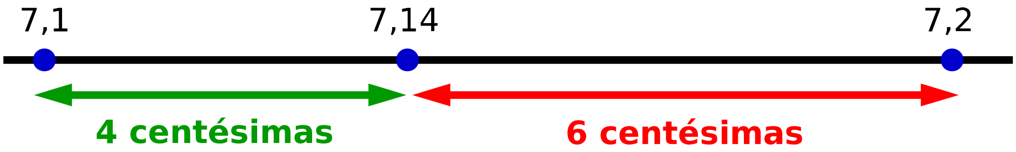
Redondeos

- ✱ Redondear un número decimal es aproximarlo por otro que tenga menos cifras decimales de modo que el error sea el menor posible.
- ✱ Al hacerlo se pierde algo de precisión, pero se gana en simplicidad.
- ✱ Es importante realizarlo con el resultado de operaciones que dan una cantidad de cifras decimales demasiado grande para que sea útil en la realidad.
- ✱ A veces se redondea usando la aproximación por exceso y a veces la aproximación por defecto, dependiendo de cómo se obtenga un error menor.

Ejemplo 1

Redondea el número 7,14 a las décimas.

El número 7,14 está situado entre las décimas 7,1 y 7,2, pero más cerca de 7,1.



Si eligiéramos para redondear la décima 7,1 el error sería de 4 centésimas.

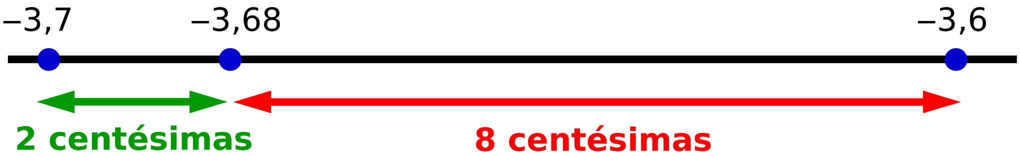
Si eligiéramos para redondear la décima 7,2 el error sería de 6 centésimas.

Por tanto el redondeo es 7,1.

Ejemplo 2

Redondea el número –3,68 a las décimas.

El número –3,68 está situado entre las décimas –3,6 y –3,7, más cerca de –3,7.



Si eligiéramos para redondear la décima –3,7 el error sería de 2 centésimas.

Si eligiéramos para redondear la décima –3,6 el error sería de 8 centésimas.

Por tanto el redondeo es –3,7.

Ejemplo 3

Redondea el número 1,2378 a las centésimas.

El número 1,2378 está situado entre las centésimas 1,23 y 1,24, más cerca de 1,24.

Por tanto el redondeo es 1,24.

Observa que la cifra de las diezmilésimas (el 8) no ha tenido ninguna importancia, podría haber sido otra cualquiera y el redondeo hubiera sido el mismo.

Ejemplo 4

Redondea el número 12,35 a las décimas.

El número 12,35 está situado entre las décimas 12,3 y 12,4, a la misma distancia de las dos. El error cometido sería el mismo eligiendo cualquiera de las dos. La comunidad matemática se ha puesto de acuerdo en elegir 12,4.

Regla para redondear números decimales

Para redondear un número decimal a un orden determinado se siguen estas instrucciones:

1. Se suprimen todas las cifras decimales que tengan un orden menor del pedido.
2. Si la cifra eliminada de mayor orden es 5 o más, se suma 1 a la cifra del orden pedido.
3. Si al sumar 1 se llega a 10, hay que seguir sumando 1 hacia la izquierda (se llama **el acarreo**).
4. Si quedan ceros en la derecha del número, es mejor dejarlos, porque si se eliminan parece que el número original tenía menos precisión.

Ejemplos detallados

Ejemplo 1. Redondea 7,27496 a las centésimas

Primer paso: eliminamos todo lo que no sea centésimas: 7,27.

Segundo paso: la cifra de mayor orden que hemos eliminado es 4, hemos terminado.

Resultado: 7,27.

Ejemplo 2. Redondea 8,59723 a las centésimas

Primer paso: eliminamos todo lo que no sea centésimas: 8,59.

Segundo paso: como la cifra de mayor orden que hemos eliminado es 7, añadimos 1 a la última cifra: 8,50.

Tercer paso: como la suma 9+1 ha dado 10, sumamos 1 a la penúltima: 8,60.

Cuarto paso: es mejor dejar 8,60 que 8,6.

Resultado: 8,60.

Ejemplos

Ejemplo 3	Redondea 78,35 a las décimas	78,4	
Ejemplo 4	Redondea –7,5 a las unidades	–8	
Ejemplo 5	Redondea 7,248112 a las centésimas	7,25	
Ejemplo 6	Redondea 8,99961 a las milésimas	9,000	(mejor que 9)

Ejemplos

Redondea los siguientes números de modo que tengan una cifra decimal menos:

	Número	Redondeo
⑦	3,1357	3,136

	Número	Redondeo
⑧	12,823	12,82

Redondea los siguientes números de modo que queden con una cifra decimal:

	Número	Redondeo
⑨	6,7299	6,7
⑪	–4,65	–4,7
⑬	3,0034	3,0

	Número	Redondeo
⑩	6,7999	6,8
⑫	12,98	13,0
⑭	5,05	5,1

Enunciados

Aproxima por exceso los siguientes números a la décima:

①	5,21	②	7,84	③	2,97	④	–1,28

Enunciados

Aproxima por defecto los siguientes números a la décima:

⑤	8,69	⑥	10,82	⑦	0,15	⑧	–3,73

Enunciados

Redondea los siguientes números a la décima:

⑨	5,785	⑩	7,138	⑪	0,98	⑫	3,75
⑬	45,74109	⑭	–71,69	⑮	75,95	⑯	1,8182

Enunciados

Redondea los siguientes números a la centésima:

⑰	2,834	⑱	5,849	⑲	7,91503	⑳	–3,008
㉑	9,1193	㉒	1,0984	㉓	3,0278	㉔	3,995

Enunciados

Redondea los siguientes números a la milésima:

㉕	0,17841	㉖	1,33281	㉗	2,89003	㉘	–4,0005
㉙	78,2288	㉚	–105,1021	㉛	9,9997	㉜	4,0255

Enunciados

Redondea los siguientes números de modo que queden con dos cifras decimales:

㉝	1,78994	㉞	6,056	㉟	9,129	㊱	78,0971
㊲	–1,1109	㊳	–2,2455	㊴	1,0893	㊵	2,45789
㊶	8,9293	㊷	–2,1958	㊸	7,81468	㊹	8,9875

Enunciados

Redondea los siguientes números de modo que queden con dos cifras decimales menos que las que tienen:

㊺	1,289	㊻	2,00187	㊼	–1,119	㊽	4,56
㊾	3,09	㊿	2,2828	51	7,77777	52	11,9991
53	3,0038	54	6,0099	55	5,7373	56	–2,478478

Enunciados

Aproxima por exceso los siguientes números a la centésima:

①	1,8732	②	2,9296	③	0,9912	④	–1,237

Enunciados

Aproxima por defecto los siguientes números a la centésima:

⑤	7,897	⑥	4,0097	⑦	3,999	⑧	–7,2845

Enunciados

Redondea los siguientes números a la décima:

⑨	1,26	⑩	2,41	⑪	3,89	⑫	4,04
⑬	5,65	⑭	19,96	⑮	–3,46	⑯	–3,31

Enunciados

Redondea los siguientes números a la centésima:

⑰	0,18578	⑱	0,3821	⑲	0,3769	⑳	2,5775
㉑	2,7338	㉒	3,992	㉓	3,9982	㉔	–8,003

Enunciados

Redondea los siguientes números a la milésima:

㉕	8,83701	㉖	4,33174	㉗	–0,9355	㉘	1,2901
㉙	3,4848	㉚	5,8484	㉛	7,8995	㉜	1,1991

Enunciados

Redondea los siguientes números de modo que queden con una cifra decimal:

㉝	12,891	㉞	7,6666	㉟	–3,309	㊱	6,921
㊲	7,9711	㊳	3,04472	㊴	2,89001	㊵	3,0591
㊶	–8,2891	㊷	5,1284	㊸	18,0019	㊹	4,7801

Enunciados

Redondea los siguientes números de modo que queden con tres cifras decimales menos que las que tienen:

㊺	7,92847	㊻	2,002378	㊼	1,01194	㊽	3,999
㊾	4,001873	㊿	12,121212	51	86,868686	52	–4,8866
53	1,03976	54	2,33976	55	3,58856	56	1,999752

Enunciados

Redondea los siguientes números a la décima:

①	6,79	②	2,172	③	3,35	④	4,971
⑤	7,08	⑥	4,03	⑦	1,1994	⑧	2,3499
⑨	2,4858	⑩	–1,89	⑪	–2,032	⑫	4,199

Enunciados

Redondea los siguientes números a la centésima:

⑬	0,1295	⑭	3,235	⑮	4,03711	⑯	6,00189
⑰	7,995	⑱	–3,1221	⑲	3,0478	⑳	3,0094
㉑	2,2367	㉒	5,5523	㉓	–7,788	㉔	15,0386

Enunciados

Redondea los siguientes números a la milésima:

㉕	5,838383	㉖	5,383838	㉗	4,12033	㉘	3,11977
㉙	–0,73892	㉚	1,3827	㉛	3,0273	㉜	4,127801
㉝	8,00189	㉞	3,1065	㉟	–1,0997	㊱	3,9486

Enunciados

Redondea los siguientes números a la unidad:

㊲	3,7	㊳	2,4	㊴	8,5	㊵	5,111
㊶	6,777	㊷	32,99	㊸	–52,3	㊹	–33,8
㊺	15,05	㊻	3,51	㊼	3,49	㊽	–19,9

Enunciados

Redondea los siguientes números de modo que queden con una cifra decimal menos que las que tienen:

㊾	7,028	㊿	3,7	51	3,59	52	5,9275
53	2,9998	54	21,23	55	13,74	56	13,85
57	2,978	58	2,2429	59	13,786	60	15,220
61	23,837	62	2,200	63	39,9	64	83,29
65	–8,88	66	10,28	67	15,92	68	12,333

Enunciados

Redondea los siguientes números a la décima:

①	16,12	②	33,68	③	16,75	④	–9,33
⑤	–8,78	⑥	3,96	⑦	4,03	⑧	12,95
⑨	78,91	⑩	2,0711	⑪	3,1677	⑫	3,071

Enunciados

Redondea los siguientes números a la centésima:

⑬	3,572	⑭	5,287	⑮	–5,297	⑯	4,055
⑰	7,9012	⑱	4,104	⑲	–2,397	⑳	7,0137
㉑	4,9977	㉒	2,037	㉓	1,0529	㉔	3,388

Enunciados

Redondea los siguientes números a la milésima:

㉕	1,0483	㉖	2,1878	㉗	–2,3399	㉘	5,00011
㉙	–13,9996	㉚	3,03377	㉛	3,07733	㉜	1,0882
㉝	2,4795	㉞	6,2382	㉟	–1,3728	㊱	34,12033

Enunciados

Redondea los siguientes números a la unidad:

㊲	6,23	㊳	5,933	㊴	–2,5	㊵	3,09
㊶	5,82	㊷	–3,199	㊸	29,9101	㊹	–13,82
㊺	3,68	㊻	7,5	㊼	2,003	㊽	3,81

Enunciados

Redondea los siguientes números de modo que queden con una cifra decimal menos que las que tienen:

㊾	2,38	㊿	2,83	51	2,8	52	2,3
53	3,3939	54	9,9393	55	–1,11	56	3,88
57	5,99	58	3,002	59	–1,262	60	32,12
61	41,05	62	–3,89	63	–3,98	64	1,004
65	3,0834	66	1,2	67	3,76	68	1,008

El conjunto de los números decimales

El conjunto de los números decimales es mucho más complicado que el conjunto de los números enteros. En el nivel 4 de este curso le pondremos nombre y trabajaremos con él. Hasta entonces, será suficiente con ir aprendiendo diversos aspectos de los propios números decimales.

Conjuntos densos

Si un conjunto tiene establecido un orden (es decir, dados dos elementos cualquiera siempre se puede saber cuál es menor), es posible plantearse esta pregunta: dados dos elementos cualquiera del conjunto ¿siempre hay un elemento entre ellos?

Vamos a expresarlo con símbolos, que es como se trabaja habitualmente en matemáticas: si M es un conjunto ordenado (es decir, tiene establecido un orden) y a y b son dos elementos cualesquiera de M de modo que $a < b$, ¿existe un elemento c de M que verifique $a < c < b$?

Si la respuesta es «sí», decimos que el conjunto es denso.

El conjunto de los números enteros no es denso

Si nos dan dos números enteros, a veces podemos encontrar otro situado entre ellos; por ejemplo, a partir de $5 < 7$, encontramos $5 < 6 < 7$.

Pero no siempre se puede: si dos números enteros son consecutivos, entre ellos no hay ningún otro entero; por ejemplo, $8 < 9$ pero no hay ningún número entero entre 8 y 9.

Como no siempre se puede encontrar un número intermedio, el conjunto de los números enteros no es denso.

El conjunto de los números decimales sí es denso

Dados dos números decimales, siempre podemos encontrar otro que esté entre ellos. Por ejemplo, entre 2,4 y 2,5 encontramos 2,41, 2,42, 2,43 y muchos más.

Observa que los números decimales pueden tener cualquier cantidad de cifras decimales. Esa es la clave para saber que el conjunto es denso.

Piensa un número que esté entre 1,2984726 y 1,2984727. Ya ves que es fácil.

Como siempre se puede encontrar un número intermedio, el conjunto de los números decimales es denso.

Propiedad

Si un conjunto es denso, entre cada dos elementos hay infinitos.

Demostración

Entre los elementos a y b podemos encontrar un elemento intermedio, que podemos llamar c_1. (Usamos un subíndice para nombrar el número porque vamos a seguir obteniendo más números y nos quedaríamos sin letras.)

Entre el elemento a y el elemento c_1 debe haber otro elemento, que podemos llamar c_2. (También podíamos haberlo encontrado entre b y c_1.)

Entre el elemento a y el elemento c_2 debe haber otro elemento, que podemos llamar c_3. (También podíamos haberlo encontrado entre b y c_2, o entre c_1 y c_2.)

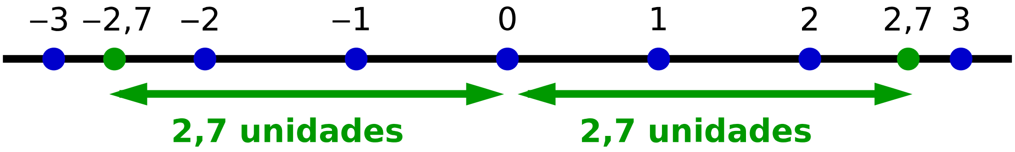
El procedimiento puede continuar indefinidamente, encontrando c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, etc., luego hay infinitos números entre a y b.

Números decimales opuestos

Igual que definimos con los números enteros, dos números decimales son opuesto uno del otro cuando están a la misma distancia del cero en la representación de los números decimales.

Ejemplo

Los números 2,7 y –2,7 son uno el opuesto del otro porque ambos distan 2,7 unidades del 0.



Propiedades de los números decimales opuestos

Los números decimales opuestos tienen las mismas propiedades que ya tenían los números enteros opuestos.

- El opuesto de un número negativo es un número positivo.
- El opuesto de un número positivo es un número negativo.
- El opuesto del opuesto de un número es el mismo número.

Notación de número decimal opuesto

Igual que hicimos con los números enteros, se usa el signo menos («–») para indicar «opuesto de».

Ejemplo: para decir «el opuesto de –2,7» tenemos que escribir «–(–2,7)». El primer signo «–» significa «opuesto», el segundo es el del número negativo y el paréntesis es necesario para que no haya dos signos seguidos.

Valor absoluto de un número decimal

La definición y la notación de valor absoluto de un número decimal son las mismas que las de valor absoluto de un número entero:

- Si un número es positivo, su valor absoluto es el mismo número.
- Si un número es negativo, su valor absoluto es el opuesto del número, por lo que el resultado es un número positivo.

Ejemplo 1	$\lvert 5{,}7\rvert = 5{,}7$	El valor absoluto de 5,7 es 5,7.
Ejemplo 2	$\lvert -3{,}8\rvert = 3{,}8$	El valor absoluto de –3,8 es 3,8.

Propiedades del valor absoluto de los números decimales

El valor absoluto de los números decimales tiene las mismas propiedades que ya tenía el valor absoluto de los números enteros:

- El valor absoluto de un número decimal mide la distancia entre el número y 0 en la recta en la que se representan los números decimales.
- Si dos números decimales son opuestos, tienen el mismo valor absoluto.

La regla para sumar dos números decimales

Como los números decimales pueden ser positivos o negativos, la regla para sumarlos es igual que la regla para los números enteros.

- Si se suman dos números decimales opuestos, el resultado es 0.
- Si se suman dos números decimales del mismo signo, el resultado tiene el mismo signo que los sumandos y el valor absoluto del resultado es la suma de los valores absolutos de los sumandos.
- Si se suman dos números decimales de distinto signo que no sean opuestos, el resultado tiene el signo del sumando de mayor valor absoluto y el valor absoluto del resultado es la diferencia entre los valores absolutos de los sumandos, el mayor menos el menor.

El resultado de sumar dos números decimales puede ser un número entero.

Colocación de los sumandos

Para sumar en la práctica números decimales es imprescindible recordar que deben estar alineadas las comas de los sumandos, porque así se consigue alinear unidades con unidades, décimas con décimas y así sucesivamente.

Ejemplo 1. Calcula 12,82 + 4,568

Como los dos números son positivos, el resultado es positivo. Hay que sumar los valores absolutos de los dos números:

$$\begin{array}{r@{,}l} 12 & 82 \\ +\ 4 & 568 \\ \hline 17 & 388 \end{array}$$

Solución: 17,388

Ejemplo 2. Calcula –12,82 – 4,568

Como los dos números son negativos, el resultado es negativo. Hay que sumar los valores absolutos de los dos números:

$$\begin{array}{r@{,}l} 12 & 82 \\ +\ 4 & 568 \\ \hline 17 & 388 \end{array}$$

Solución: –17,388

Ejemplo 3. Calcula 12,82 – 4,568

El resultado es positivo porque el número con mayor valor absoluto es positivo. Hay que restar los valores absolutos de los dos números:

$$\begin{array}{r@{,}l} 12 & 82 \\ -\ 4 & 568 \\ \hline 8 & 252 \end{array}$$

Solución: 8,252

Ejemplo 4. Calcula –12,82 + 4,568

El resultado es negativo porque el número con mayor valor absoluto es negativo. Hay que restar los valores absolutos de los dos números:

$$\begin{array}{r@{,}l} 12 & 82 \\ -\ 4 & 568 \\ \hline 8 & 252 \end{array}$$

Solución: –8,252

①	34,1+8,93	②	122,456+16,78	③	0,456+1,34
④	–2,8905–94,53	⑤	–18,23–15,75	⑥	–34,8–19,72
⑦	23,45–18,53	⑧	34,19–1,438	⑨	108,2–93,194
⑩	26,7–93,82	⑪	31,238–57,4	⑫	41,19–48,6
⑬	13,82+6,18	⑭	–34,19–0,81	⑮	34,67–15,67
⑯	–19,13+7,82	⑰	12,589–13,83	⑱	19,21+23,083
⑲	–79,23+41,2	⑳	15,8–32,912	㉑	24,19+8,338
㉒	–13,083–2,93	㉓	–13,45+29,45	㉔	78,902–51,38
㉕	9,25+13,29	㉖	38,902–156,3	㉗	34,038+91,34
㉘	8,8893–12,397	㉙	41,038+5,8704	㉚	89,23–102,9
㉛	29,749+11,291	㉜	82,3–103,93	㉝	0,33+0,834
㉞	–0,938+5,78	㉟	19,36+8,204	㊱	44,19–45,74
㊲	1,09–3,03	㊳	31,038+34,118	㊴	29,34–51,09
㊵	102,19–119,87	㊶	20,04+42,38	㊷	–12,91–93,18
㊸	405,1–789,02	㊹	–31,39–39,31	㊺	29,18+18,29
㊻	33,19–85,62	㊼	2,198–6,198	㊽	1,283+17,32
㊾	33,97+87,19	㊿	29,047–28,177	51	–19,33+19,33
52	33,109+91,28	53	–18,0023+10,37	54	–12,094–13,18
55	1,89–12,3	56	35,92–59,2	57	44,83–54,19
58	–18,02+3,073	59	28,19+3,983	60	51,2–67,1
61	58,3+19,82	62	12,47–11,25	63	13,94+19,83
64	–31,19+22,22	65	56,19+41,92	66	33,19–19,33
67	81,03–108,38	68	92,03+104,6	69	33,98+12,72
70	33,503+50,19	71	–12,93+5,93	72	–1,0963+1,36
73	33,89+41,76	74	35,82–51,03	75	32,49–31,492

Nivel 1 • Aritmética • Números decimales • Cálculo mental (02)

	A	B	C	D	E
1	0,3+0,8	–1,2–2,1	–1,3+1,3	0,8–0,3	1,4–1,8
2	1,2+0,56	–3,5–0,4	2,3–1,3	–6,7+4,4	0,1+0,09
3	–3,7+0,7	–1,34+1,34	1,2–0,8	–0,3–0,9	0,23–0,21
4	18,9–8,9	–2,5–3,5	9,1–8,9	5,1–5,4	0,23+0,77
5	–1,5–3,2	0,1–0,04	0,03–0,2	1,8+2,2	–1,9+0,6
6	–0,56+0,56	1,2+0,04	1,2–0,08	0,1–0,83	0,24+4,2
7	1,9–3,4	–0,1–1,06	3,2–1,6	–2,3–1,7	0,08+8,8
8	–1,3–7,9	5,3+4,05	7,02–6,98	–4,03–5,12	3,6–4,6
9	0,18+1,1	5,6–6,2	4,9+1,8	–3,6–10,02	3,9+10,1
10	–0,09–0,21	1,8–0,8	3,2–3,23	3,9–4,5	3,01–0,23

Método para sumar más de dos números decimales

En unos pocos casos esta suma se podrá hacer mediante algún atajo, pero no es habitual. Normalmente es mejor seguir estos pasos:

1. Sumar todos los números positivos entre sí; se obtiene un número positivo.
2. Sumar todos los números negativos entre sí; se obtiene un número negativo.
3. Sumar los resultados de los dos pasos anteriores.

Es recomendable escribir las operaciones debajo del desarrollo, lo más ordenadas que sea posible. Si las operaciones se hacen aparte, «en sucio», luego es más difícil repasarlas.

Observa que cada vez que hacemos una resta estamos restando dos valores absolutos, de modo que siempre hacemos la resta que aprendimos en primaria; pero todas las operaciones de esta hoja son sumas.

Ejemplos

Ejemplo 1. Calcula 3,895 – 5,36 + 41,26 – 73,1

3,895 – 5,36 + 41,26 – 73,1 = 45,155 – 78,46 = –33,305

$$\begin{array}{r} 3,895 \\ +\ 41,26 \\ \hline 45,155 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5,36 \\ +\ 73,1 \\ \hline 78,46 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 78,46 \\ -\ 45,155 \\ \hline 33,305 \end{array}$$

Ejemplo 2. Calcula 12,904 – 15,28 + 104,7 – 34,02 + 0,27 – 18,3

12,904 – 15,28 + 104,7 – 34,02 + 0,27 – 18,3 = 117,874 – 67,6 = 50,274

$$\begin{array}{r} 12,904 \\ 104,7 \\ +\ 0,27 \\ \hline 117,874 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15,28 \\ 34,02 \\ +\ 18,3 \\ \hline 67,60 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 117,874 \\ 67,6 \\ \hline -\ 50,274 \end{array}$$

Ejemplo 3. Calcula –12,89 + 15,9 – 75,8 – 19,3 – 8,62

–12,89 + 15,9 – 75,8 – 19,3 = –116,61 + 15,9 = –100,71

$$\begin{array}{r} 12,89 \\ 75,8 \\ 19,3 \\ +\ 8,62 \\ \hline 116,61 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 116,61 \\ -\ 15,9 \\ \hline 100,71 \end{array}$$

Ejemplo 4. Calcula 8,098 – 123,2 – 34,387 + 41,25 – 3,45 + 17,8 + 21,83 – 8

8,098 – 123,2 – 34,387 + 41,25 – 3,45 + 17,8 + 21,83 – 3 = 88,978 – 169,037 =
= –80,059

$$\begin{array}{r} 8,098 \\ 41,25 \\ 17,8 \\ +\ 21,83 \\ \hline 88,978 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 123,2 \\ 34,387 \\ 3,45 \\ +\ 8 \\ \hline 169,037 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 169,037 \\ -\ 88,978 \\ \hline 80,059 \end{array}$$

Enunciados

Realiza las siguientes sumas:

① 2,3 – 7,8 + 5,02 – 9,23

② –4,06 – 5,91 + 12,2 + 0,458

③ –19,2 + 3,28 + 215,4 – 113,5

④ 89,23 + 12,6 – 115,383

⑤ –12,02 + 89,563 + 1,4 + 38,2 – 8,3

⑥ 5,91 – 7,02 + 15,2 – 8,5 + 6,12 – 0,34

⑦ 5,056 + 7,11 – 3,38 – 5,991 – 2,67 + 8,33

⑧ –3,78 + 0,449 – 6,117 + 1,2 – 7,9 + 2,26

⑨ 15,9 – 12,48 – 1,036 + 3,02 – 3,22

⑩ 12,67 + 15,68 + 3,58 – 12,67 – 89,16 – 2,8

⑪ 2,3 – 0,3 + 1,8 – 0,8 + 7,1 – 5,1

⑫ –8,1287 + 3,58 + 4,01 + 3,8 – 18,39 + 8,1287

⑬ –17,3 – 1,093 + 3,98 – 12,98 + 0,023 + 4,7

⑭ –18,02 – 3,993 – 6,7 + 5,4 +0,992 + 2,23 – 15,9

⑮ 8,99 – 8,99 + 12,034 – 12,034 + 15,89 – 3,89

⑯ –1,25 – 3,902 + 6,77 + 3,05 + 0,804 – 6,92

⑰ 6,709 + 4,7 + 13,34 – 15,8 – 1,046 – 4,86

⑱ –1,076 – 3,883 – 23,217 + 4,448

⑲ –2,456 – 2,86 + 3,883 + 4,012 + 12,7 – 17,9

⑳ 19,023 + 21,083 – 26,893 – 12,338

㉑ –8,9 – 6,7 + 12,56 + 13,89 – 15,8

㉒ 2,5 + 7,9 + 3,2 – 5,6 – 8,9 – 2,4 + 7,6

㉓ –0,956 – 0,228 – 1,004 + 3,4 + 8,01

㉔ 18,1 – 20,1 + 0,56 – 0,56 + 8,0003 – 9,0003

㉕ 12,98 + 3,71 – 2,44 – 5,23 – 3,08

㉖ 45,89 + 18,02 – 2,856 – 1,083 – 3,883 + 10,03

Regla para restar dos números decimales

Para restar dos números enteros se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplos

<table>
<tr><td>Ejemplo 1</td><td>Minuendo: –5,4</td><td rowspan="2">Conversión de la operación:</td><td rowspan="2">Resultado:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operación:
(–5,4) – (+8,2)</td><td>Sustraendo: +8,2</td></tr>
<tr><td>Opuesto del sustraendo: –8,2</td><td>(–5,4) + (–8,2)</td><td>–13,6</td></tr>
<tr><td>Resumen</td><td colspan="3">(–5,4) – (+8,2) = (–5,4) + (–8,2) = –13,6</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Ejemplo 2</td><td>Minuendo: +7,5</td><td rowspan="2">Conversión de la operación:</td><td rowspan="2">Resultado:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operación:
(+7,5) – (–4,1)</td><td>Sustraendo: –4,1</td></tr>
<tr><td>Opuesto del sustraendo: +4,1</td><td>(+7,5) + (+4,1)</td><td>+11,6</td></tr>
<tr><td>Resumen</td><td colspan="3">(+7,5) – (–4,1) = (+7,5) + (+4,1) = +11,6</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Ejemplo 3</td><td>Minuendo: –4,5</td><td rowspan="2">Conversión de la operación:</td><td rowspan="2">Resultado:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operación:
(–4,5) – (–1,3)</td><td>Sustraendo: –1,3</td></tr>
<tr><td>Opuesto del sustraendo: +1,3</td><td>(–4,5) + (+1,3)</td><td>–3,2</td></tr>
<tr><td>Resumen</td><td colspan="3">(–4,5) – (–1,3) = (–4,5) + (+1,3) = –3,2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Ejemplo 4</td><td>Minuendo: +9,2</td><td rowspan="2">Conversión de la operación:</td><td rowspan="2">Resultado:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operación:
–(–3,7) + (+9,2)</td><td>Sustraendo: –3,7</td></tr>
<tr><td>Opuesto del sustraendo: +3,7</td><td>(+3,7) + (+9,2)</td><td>+12,9</td></tr>
<tr><td>Resumen</td><td colspan="3">–(–3,7) + (+9,2) = (+3,7) + (+9,2) = +12,9</td></tr>
</table>

Observa en el último ejemplo que puede ocurrir que el sustraendo esté escrito antes del minuendo, pero que se distingue porque tiene delante el signo «menos».

Escritura simplificada

Cuando no escribimos tantos signos ni paréntesis se ve que el único caso importante que hay que considerar es que el sustraendo sea negativo.

Los ejemplos anteriores, simplificados, quedan así:

Ejemplo 1	–5,4 –8,2 = –13,6
Ejemplo 2	7,5 –(–4,1) = 7,5 +4,1 = 11,6
Ejemplo 3	–4,5 – (–1,3) = –4,5 + 1,3 = –3,2
Ejemplo 4	–(–3,7) +9,2 = 3,7 +9,2 = 12,9

Es decir, que lo fundamental es saber que el opuesto de un número negativo es un número positivo del mismo valor absoluto:

$$\boxed{-(-3{,}7) = 3{,}7}$$

Signo del producto de dos números decimales

Se pueden multiplicar números decimales entre sí o números enteros con números decimales. Las reglas son las mismas, hay que aplicar la regla de los signos:

- El producto de 0 por cualquier número da 0.
- El producto de dos números no nulos del mismo signo da resultado positivo.
- El producto de dos números no nulos de distinto signo da resultado negativo.

Colocación de los números decimales para multiplicarlos

Para multiplicar dos números decimales primero se decide el signo y luego se multiplican los valores absolutos.

Para multiplicar los valores absolutos, se coloca uno sobre otro; habitualmente se prefiere colocar debajo el que tenga menos dígitos no nulos, pero no es obligatorio, porque si se hace al revés se obtiene el mismo resultado.

Cantidad de decimales del resultado

Los números decimales se multiplican como si fueran números enteros y al final se coloca el separador decimal, con esta condición:

La cantidad de decimales del producto es la suma de las cantidades de decimales de los factores. Por ejemplo, si se multiplica un número con dos cifras decimales por uno que tenga tres, el producto tendrá cinco.

Si hay que escribir más cifras decimales de las que se han obtenido al multiplicar, se añaden por la izquierda los ceros que sean necesarios; por ejemplo: si obtenemos al multiplicar 983 y hay que escribir cuatro cifras decimales, el resultado será 0,0983.

Consejo con los ceros

- No multipliques los ceros por la derecha o por la izquierda.
- Si hay algún cero intermedio, simplemente sáltate la línea correspondiente.

Ejemplo

Calcula 0,8093 · (−365,1).

El signo del resultado es negativo.

El resultado tiene cinco cifras decimales (cuatro más una).

Multiplicamos los valores absolutos como números enteros:

- Ponemos debajo 0,8093 porque tiene menos cifras no nulas que −3,651.
- No escribimos el cero por la izquierda de 0,8093.
- Cuando llegamos al cero intermedio de 0,8093, avanzamos una columna hacia la izquierda.

```
        3 6 5 1
      × 8 0 9 3
      ---------
      1 0 9 5 3
    3 2 8 5 9
2 9 2 0 8
---------------
2 9 5 4 7 5 4 3
```

Resultado: −295,47543

①	1,2 · 3,8	②	–4 · 5,67	③	0,45 · (–103)
④	8,3 · 9,12	⑤	3,57 · 7	⑥	–2 · (–0,893)
⑦	(–8) · 5,92	⑧	–1,1 · 8,82	⑨	3,512 · 9
⑩	5,03 · 1,002	⑪	(–1,2)(–3,67)	⑫	0,239 · 0,23
⑬	7,1 · (–7,2)	⑭	2,5 · 2,5	⑮	17,3 · 0,037
⑯	–0,56 · 33	⑰	4,51 · (–1,3)	⑱	4,2 · 2,41
⑲	9,92 · 0,3	⑳	2,23 · (–8,1)	㉑	–3,2 · 5,78
㉒	(–0,28) · 5,9	㉓	0,03 · 82	㉔	(–5) · 7,59
㉕	347 · 0,72	㉖	523 · 0,02	㉗	31,17 · 1,6
㉘	4,93 · (–3,4)	㉙	8,82 · 5,21	㉚	24,8 · (–5,3)
㉛	(–0,4)(–1,298)	㉜	19,23 · (–51)	㉝	3,3 · 8,8
㉞	51,09 · 3,02	㉟	13,8 · 6,3	㊱	0,24 · (–9,2)
㊲	5,21 · 2,8	㊳	6,07 · 1,03	㊴	3,57 · 2,93
㊵	–9,4 · 5,82	㊶	13,72 · 6,92	㊷	2,89 · (–2,56)
㊸	3,2 · 5,93	㊹	(–1,57)(–3,7)	㊺	3,834 · 2,6
㊻	1,23 · 6,3	㊼	12,7 · (–1,84)	㊽	5,57 · 2,23
㊾	18,9 · 3,2	㊿	3,68 · 1,13	51	2,23 · 57,9
52	(–1,7) · 6,31	53	8,2 · 5,04	54	3,21 · (–1,7)
55	92,35 · 0,43	56	3,81 · 2,92	57	(–9,02) · 5,8
58	9,94 · 5,21	59	33,8 · 6	60	8,2 · (–3,74)
61	83,1 · 15,2	62	0,487 · 23	63	8,23 · 2,91
64	8,02 · 5,92	65	21,21 · (–0,75)	66	35,8 · 2,3
67	–1,82 · 3,97	68	4,82 · 7,3	69	102 · 0,837
70	21,9 · 33,8	71	–21 · 0,735	72	33,92 · 15,3
73	21,19 · 8,37	74	(–9,93) · (–2,62)	75	0,9823 · 51

Nivel 1 • Aritmética • Números decimales • Cálculo mental (03)

	A	B	C	D	E
1	2 · 0,4	–1 · 3,8	1,2 · 3	(–2,1) · (–3)	0,3 · 0,3
2	4 · 0,6	5 · (–3,1)	0,5 · 0,5	12 · 0,2	–4 · 0,3
3	1,6 · 2	0,9 · (–0,9)	4,1 · 2	7,2 · 3	8 · 0,11
4	–7 · 0,8	1,4 · 8	3,6 · (–2)	4 · 0,4	(–0,7)·(–0,7)
5	7,3 · 4	–0,03 · 4	6 · 0,07	0,2 · 0,04	9 · (–1,1)
6	13 · 0,2	1,7 · (–0,4)	3 · 0,5	0,9 · 1,4	11 · 0,3
7	–8,1 · 4	12 · (–0,8)	3,3 · (–3)	5,4 · 8	(–0,3)·(–1,1)
8	0,12 · 4	4,4 · 3	–1,2 · 7	0,03 · 0,03	8 · 0,002
9	0,07 · 0,06	5 · 0,05	–8 · (–0,2)	0,33 · 0,4	1,9 · (–2)
10	3,8 · (–7)	0,04 · (–1)	0,007 · 11	132 · 0,4	–3 · 3,06

División con decimales

La posibilidad de realizar divisiones con decimales surge en dos situaciones:

✱ Hay que dividir dos números enteros y la división no es exacta.
Ejemplo 1 → Dividendo 21; divisor 4.

✱ El dividendo es un número decimal y el divisor es un número entero.
Ejemplo 2 → Dividendo 9,7; divisor 5.

El resultado solo es el cociente

En estas divisiones solo hay un resultado, el cociente, que será un número decimal. El resto o bien es cero o bien no se usa.

Ejemplo 1 → 29 : 4 = 7,25 Ejemplo 2 → 9,7 : 5 = 1,94

Método para dividir

✱ Cuando no quedan cifras en el dividendo, pero el resto no es cero, se añade un cero a la derecha del dividendo (que se *baja*) y se sigue dividiendo.

✱ En el cociente se coloca el carácter separador de la parte entera y la parte decimal cuando se dividen las décimas del dividendo.

Ejemplos

Ejemplo 1

```
2 9       |4_____
  1 0      7, 2 5
    2 0
     |0|
```

Ejemplo2

```
9, 7      |5_____
 4 7       1, 9 4
   2 0
    |0|
```

Resultado exacto o periódico

Cuando se realiza la división, pueden ocurrir solo dos cosas, que se estudiarán con detalle en el nivel 2 de este curso:

✱ En algún paso de la división se llega a resto cero. Decimos que el resultado es un número decimal exacto. Ejemplos: el (1) y el (2) anteriores.

✱ En ningún paso de la división se llega a resto cero. Decimos que el resultado es un número decimal periódico. Ejemplo 3 → 125 : 33 = 3,7878787878787...

Resultado redondeado

Hay dos casos en los que será muy conveniente dar el resultado redondeado:

✱ El resultado es un número decimal periódico.
Ejemplo 3 → 125 : 33 = 3,7878787878787...

✱ El resultado es un número decimal exacto, pero con muchas cifras decimales.
Ejemplo 4 → 391 : 128 = 3,0546875

Método

Solo calculamos una cifra decimal más de las que se pidan, para poder redondear correctamente.

Ejemplo 3 → Calcula 125 : 33 redondeando a la centésima. Llegamos en la división hasta el 7 de las milésimas y damos el resultado: 125 : 33 = 3,79.

Ejemplo 4 → Calcula 391 : 128 redondeando a la centésima. Llegamos en la división hasta el 4 de las milésimas y damos el resultado: 391 : 128 = 3,05.

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes divisiones, sabiendo que es un número decimal exacto.

①	7 : 5	②	9,7 : 2	③	17,5 : 4
④	17 : 8	⑤	5,7 : 8	⑥	21 : 25
⑦	31,5 : 28	⑧	5,5 : 22	⑨	2,1 : 14
⑩	113,4 : 75	⑪	41,18 : 4	⑫	50,4 : 35
⑬	36,3 : 15	⑭	6,23 : 5	⑮	0,75 : 4
⑯	19,11 : 21	⑰	44,2 : 13	⑱	707 : 28
⑲	126,1 : 26	⑳	39,1 : 8	㉑	35,75 : 25
㉒	91,2 : 32	㉓	38,5 : 16	㉔	895,6 : 125

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes divisiones redondeado a la décima.

㉕	22 : 3	㉖	9 : 7	㉗	13 : 11
㉘	15,2 : 6	㉙	30 : 17	㉚	8,5 : 2
㉛	41 : 32	㉜	19 : 15	㉝	34 : 7
㉞	17 : 16	㉟	57 : 23	㊱	12,5 : 7
㊲	12,8 : 9	㊳	25 : 6	㊴	18,6 : 11
㊵	30,55 : 13	㊶	29,15 : 11	㊷	211 : 125

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes divisiones redondeado a la centésima.

㊸	2 : 3	㊹	4 : 7	㊺	1,2 : 11
㊻	9 : 32	㊼	31 : 9	㊽	16 : 7
㊾	15,26 : 3	㊿	51 : 13	51	19 : 6
52	19 : 3	53	19 : 8	54	5,1 : 23
55	12,51 : 6	56	16,555 : 7	57	22,385 : 11

Producto de un número decimal por una potencia de diez

- ✱ Para multiplicar un número decimal por una potencia de diez hay que desplazar el separador decimal hacia la derecha tantas posiciones como ceros tenga la potencia de diez.
- ✱ El resultado puede ser un número decimal o un número entero.
- ✱ Puede ser necesario eliminar ceros por la izquierda.
- ✱ Si el resultado es un número entero, puede ser necesario añadir ceros por la derecha.

Ejemplo 1	$12{,}528 \cdot 100 = 1252{,}28$	Dos posiciones a la derecha
Ejemplo 2	$23{,}89 \cdot 10 = 238{,}9$	Una posición a la derecha
Ejemplo 3	$28{,}3 \cdot 10 = 283$	El resultado es un número entero
Ejemplo 4	$0{,}028\,309 \cdot 1000 = 28{,}309$	Se eliminan los ceros de la izquierda
Ejemplo 5	$19{,}34 \cdot 10\,000 = 193\,400$	Se añaden ceros a la derecha

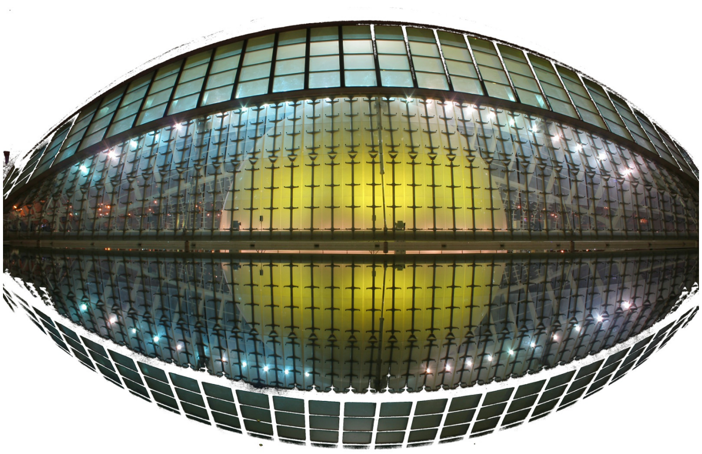
Cociente de un número entero o decimal entre una potencia de diez

- ✱ Para dividir un número entero o decimal entre una potencia de diez hay que desplazar el separador decimal hacia la izquierda tantas posiciones como ceros tenga la potencia de diez.
- ✱ Puede ser necesario añadir ceros por la izquierda.

Ejemplo 6	$124{,}987 : 100 = 1{,}24\,987$	Dos posiciones a la izquierda
Ejemplo 7	$89{,}34 : 10 = 8{,}934$	Una posición a la izquierda
Ejemplo 8	$28\,783 : 1000 = 28{,}783$	Tres posiciones a la izquierda
Ejemplo 9	$34{,}5 : 100 = 0{,}345$	Se añade un cero a la izquierda
Ejemplo 10	$8{,}89 : 1000 = 0{,}0089$	Se añaden tres ceros a la izquierda

Importancia de estas operaciones

Estas dos operaciones son la base de las conversiones entre múltiplos y divisores de las nuidades del Sistema Internacional. Por tanto, son imprescindibles para trabajar en matemáticas y, muy especialmente, en física, química e ingeniería.



	A	B	C	D	E
①	13:10	3,45·10	45,6:10	3,457·100	2,1:10
②	0,454·100	0,45 : 10	4,05 · 10	988,7:100	38,5:10
③	12:100	1258:1000	4,689·100	6,7·1000	5,78:10
④	3,9023·100	2,4·100	0,457·10	34:1000	0,004·100
⑤	3,18·1000	48:100	10:100	0,0238·100	92:10 000
⑥	100·3,2	1000·0,03	89:100	1,268·100	0,493·100
⑦	332:10	793:100	0,3·10	0,38·1000	45,92:10
⑧	83,18·100	0,7:100	12,94·10	33,19:100	0,045·10
⑨	31,002·100	0,56:10	1000·2,78	3393,1:100	0,12·1000
⑩	5,89·100	0,392·1000	0,03:100	15,93·10	0,98:10

Propiedades de la división

- Si se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no varía.
- Si se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número, el resto queda multiplicado por el mismo número.

Ejemplo

- Si dividimos 38 entre 5, obtenemos 7 de cociente y 3 de resto.
- Multiplicamos 38 y 5 por 2 y tenemos 76 y 10.
- Si dividimos 76 entre 10, obtenemos 7 de cociente y 6 de resto.
- Se observa que el cociente es el mismo y el resto se ha multiplicado por 2.

División con divisor decimal

- Para realizar una división cuando el divisor es un número decimal, se convierte el divisor en un número entero multiplicándolo por la potencia de diez que tiene tantos ceros como cifras decimales haya en el divisor.
- Para que el cociente no varíe, se multiplica el dividendo por la misma potencia que el divisor.
- Se realiza la división con los nuevos dividendo y divisor. La nueva división puede ser una división entre números enteros o bien una división entre un número decimal y un entero.
- El cociente obtenido con la nueva división es el mismo que el de la división original, luego es la solución pedida.
- No suele ser necesario el resto de la división original.

Ejemplo 1

Divide 37,16 entre 0,2.

Como 0,2 tiene una cifra decimal, multiplicamos dividendo y divisor por 10.

Hay que dividir 371,6 entre 2, que da cociente 185,8.

Resumen: 37,16 : 0,2 = 371,6 : 2 = 185,8.

Ejemplo 2

Divide 3,8 entre 1,52.

Como 1,25 tiene dos cifras decimales, multiplicamos dividendo y divisor por 100.

Hay que dividir 380 entre 152, que da cociente 2,5.

Resumen: 3,8 : 1,52 = 380 : 152 = 2,5.

Ejemplo 3

Divide 1,435 entre 0,005.

Como 0,005 tiene tres cifras decimales, multiplicamos dividendo y divisor por 1000.

Hay que dividir 1435 entre 5, que da cociente 287.

Resumen: 1,435 : 0,005 = 1435 : 5 = 287.

Ejemplo 4

Divide 38,2 entre 1,7 redondeando a la décima.

38,2 : 1,7 = 382 : 17 = 22,47...

(Al dividir solo hay que llegar a calcular el 7 de las centésimas, para redondear.)
Solución: 22,5.

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes divisiones, sabiendo que es o bien un número entero o bien un número decimal exacto.

①	1,3 : 0,5	②	0,29 : 0,04	③	3,77 : 1,3
④	25 : 0,2	⑤	0,391 : 1,7	⑥	6,355 : 3,1
⑦	6,3 : 0,015	⑧	9 : 3,6	⑨	8,88 : 0,06
⑩	66 : 1,2	⑪	27,73 : 5,9	⑫	96,2 : 0,2
⑬	2,464 : 0,56	⑭	0,04386 : 0,0051	⑮	0,728 : 0,14
⑯	10,24 : 3,2	⑰	1,075 : 0,125	⑱	40,02 : 8,7
⑲	0,529 : 2,3	⑳	1,512 : 12,6	㉑	1,5129 : 1,23
㉒	1,0962 : 8,7	㉓	10,116 : 1,8	㉔	578,34 : 45,9

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes divisiones redondeado a la décima.

㉕	2,3 : 0,7	㉖	4 : 0,3	㉗	0,85 : 0,6
㉘	15,4 : 1,7	㉙	0,56 : 0,19	㉚	1,2 : 0,23
㉛	8,6 : 0,57	㉜	0,13 : 0,07	㉝	2,7 : 2,3
㉞	1,3 : 0,09	㉟	8,9 : 5,7	㊱	0,12 : 0,013
㊲	8,7 : 1,9	㊳	0,17 : 0,13	㊴	1,7 : 0,29
㊵	2,3 : 0,13	㊶	8,8 : 1,7	㊷	0,026 : 0,0017

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes divisiones redondeado a la centésima.

㊸	0,5 : 0,3	㊹	0,2 : 0,7	㊺	0,15894 : 0,1
㊻	0,019 : 0,17	㊼	0,008 : 0,013	㊽	5 : 0,9
㊾	3 : 0,7	㊿	2 : 1,01	51	0,18 : 0,19
52	2,1 : 1,9	53	0,023 : 0,09	54	0,025 : 0,04
55	3 : 2,02	56	2,56 : 1,3	57	0,51 : 0,11

Potencia de un número decimal con exponente natural

Las potencias de los números decimales siguen las mismas reglas que las potencias de los números enteros. Solo cambia el modo de cálculo.

Ejemplo 1

Calcula $8{,}35^2$

Cualquier potencia de un número positivo da resultado positivo.

Solo hay que hacer la multiplicación de números decimales.

$8{,}35^2 = 8{,}35 \cdot 8{,}35 = 69{,}7225$

Solución: $8{,}35^2 = 69{,}7225$

Ejemplo 2

Calcula $0{,}7^3$

Cualquier potencia de un número positivo da resultado positivo.

Solo hay que hacer las multiplicaciones de números decimales.

$0{,}7^3 = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49 \cdot 0{,}7 = 0{,}343$

Solución: $0{,}7^3 = 0{,}343$

Ejemplo 3

Calcula $(-2{,}6)^3$

Una potencia de exponente impar de un número negativo da resultado negativo.

Hay que hacer las multiplicaciones de números decimales y luego añadir el signo.

$2{,}6^3 = 2{,}6 \cdot 2{,}6 \cdot 2{,}6 = 6{,}76 \cdot 2{,}6 = 17{,}567$

Solución: $(-2{,}6)^3 = -17{,}567$

Ejemplo 4

Calcula $(-1{,}8)^4$

Una potencia de exponente par de un número negativo da resultado positivo.

Hay que hacer las multiplicaciones de números decimales y luego añadir el signo.

$1{,}8^4 = 1{,}8 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}8 = 3{,}24 \cdot 3{,}24 = 10{,}4976$

Solución: $(-1{,}8)^4 = 10{,}4976$

Ejemplo 5

Calcula $(-0{,}3)^5$

Una potencia de exponente impar de un número negativo da resultado negativo.

Hay que hacer las multiplicaciones de números decimales y luego añadir el signo.

$0{,}3^5 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}3 = 0{,}0081 \cdot 0{,}3 = 0{,}00243$

Solución: $(-0{,}3)^5 = -0{,}00243$

Ejemplo 6

Calcula $2{,}45^3$ redondeando a la centésima.

Cualquier potencia de un número positivo da resultado positivo.

Hay que hacer las multiplicaciones de números decimales y redondear **al final**.

$2{,}45^3 = 2{,}45 \cdot 2{,}45 \cdot 2{,}45 = 6{,}0025 \cdot 2{,}45 = 14{,}706125.$

Solución: $2{,}45^3 = 14{,}71$

(Si hubiéramos redondeado antes, el error sería inaceptable: $6{,}00 \cdot 2{,}45 = 14{,}40$.)

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones, sabiendo que todas las divisiones dan como resultado un número entero o bien un número decimal exacto.

①	$-(-9{,}34)$	②	$\lvert 0{,}34\rvert$	③	$2{,}56 + 13{,}894$
④	$2{,}4 - (-0{,}83)$	⑤	$2{,}1 \cdot (-0{,}9)$	⑥	$4{,}2 : (-2)$
⑦	$5{,}85 : 1{,}3$	⑧	$-(+9{,}87)$	⑨	$\lvert -2{,}67\rvert$
⑩	$0{,}34 - 12{,}7$	⑪	$-(-8{,}7) + 9{,}47$	⑫	$(-0{,}45) \cdot (-1{,}9)$
⑬	$11 : 8$	⑭	$3{,}45 : 2{,}3$	⑮	$-(-2{,}04)$
⑯	$\lvert 3{,}67\rvert$	⑰	$-24{,}8 + 3{,}84$	⑱	$6{,}67 - (+8{,}9)$
⑲	$-2{,}3 \cdot 0{,}65$	⑳	$-7{,}2 : 5$	㉑	$-3{,}56 : 0{,}01$
㉒	$-(+19{,}3)$	㉓	$\lvert 8{,}1902\rvert$	㉔	$604{,}89 + 102{,}65$
㉕	$-12{,}6 - (-8{,}23)$	㉖	$2{,}03 \cdot (-4{,}4)$	㉗	$13{,}8 : (-5)$
㉘	$8{,}2 : 0{,}4$	㉙	$-(-0{,}98)$	㉚	$\lvert -12{,}33\rvert$
㉛	$89{,}91 - 232{,}023$	㉜	$23 - (-1{,}67)$	㉝	$-7{,}1 \cdot 2{,}02$
㉞	$(-2{,}8) : (-7)$	㉟	$0{,}013 : 0{,}05$	㊱	$-(-1{,}23)$
㊲	$\lvert 91{,}03\rvert$	㊳	$-3{,}45 -7{,}872$	㊴	$12{,}41 - (-82{,}83)$
㊵	$2{,}31 \cdot (-7{,}03)$	㊶	$396 : 15$	㊷	$(-7{,}2) : (-0{,}25)$
㊸	$-(4{,}7)$	㊹	$\lvert -0{,}93\rvert$	㊺	$45{,}29 - 82{,}104$
㊻	$-(-3{,}2) + 0{,}298$	㊼	$-3{,}4 \cdot 5{,}1$	㊽	$17 : (-8)$
㊾	$10 : (-3{,}2)$	㊿	$-(-82{,}69)$	51	$\lvert -1{,}23\rvert$
52	$-23{,}89 + 1{,}028$	53	$-18{,}3 - (-4{,}87)$	54	$(-3{,}7) \cdot (-5{,}02)$
55	$0{,}89 : 5$	56	$1{,}7 : (-0{,}04)$	57	$-(-3{,}45)$
58	$\lvert 99{,}12\rvert$	59	$-2{,}09 -31{,}288$	60	$-(-1{,}98) + 0{,}362$
61	$8{,}9 \cdot (-1{,}12)$	62	$-2{,}1 : 7$	63	$4 : (-0{,}25)$
64	$5{,}2^2$	65	$(-3{,}7)^2$	66	$0{,}8^3$
67	$(-0{,}3)^3$	68	$0{,}1^4$	69	$2{,}3^3$

	A	B	C	D	E
1	|–0,92|	0,3+0,5	0,8–0,3	0,3·2	1,8:2
2	–0,5–0,6	0,5–1	7·(–0,2)	0,4:0,2	0,7+0,8
3	2–0,08	0,4·0,6	0,02·0,7	0,8+0,08	0,7–0,07
4	(–3)·0,4	7:2	1:(–2)	–9,2–0,9	9·0,9
5	9,4+1,2	0,89+0,12	3–0,5	1,2·(–3)	(–3,5):(–7)
6	5,3:0,1	|–1,89|	2–(–0,8)	–0,12–5,23	4:5
7	4,1–5,7	–3,5–7,2	–0,8:0,02	0,3·(–3,5)	$0,05^2$
8	(–0,7)·(–7)	5–8,4	1:4	$0,6^2$	$(–0,3)^2$
9	9:(–2)	0,5·(–3,7)	3,7–1,8	3,2·6	2,3:2
10	1:0,5	0,81:0,9	$(–0,5)^3$	–6,5–5,6	|0,38|

	A	B	C	D	E
1	$\|-1,45\|$	$2,7+3,8$	$-1-(-0,3)$	$0,9\cdot(-0,3)$	$6:4$
2	$2,3:0,01$	$-2,8-3,8$	$-(-1,5)+3,6$	$4\cdot(-3,7)$	$2,4:0,6$
3	$0,8^2$	$(-0,2)^3$	$-21:4$	$(-3,6)\cdot(-2)$	$0,83+0,09$
4	$4-6,7$	$100-0,1$	$0,34\cdot7$	$8:5$	$0,8:0,5$
5	$0,7:0,2$	$0,04^2$	$-1-0,08$	$4,7\cdot2$	$4,7:2$
6	$10,2:5$	$(-4,5):(-0,9)$	$2,8\cdot(-3)$	$-1,2\cdot8$	$3,6:(-0,6)$
7	$-3:2$	$6,89+2,03$	$-0,34-1,07$	$49:0,7$	$2,3:10$
8	$5,6\cdot(-0,1)$	$-0,7:0,5$	$(-7)\cdot(-1,3)$	$3,4\cdot0,2$	$0,7\cdot(-0,2)$
9	$\|6,89\|$	$-5-(-0,7)$	$3,2-3,8$	$2,8:(-7)$	$-12,3+4,7$
10	$-0,45\cdot3$	$0,67:2$	$1,8:0,9$	$2,3+3,2$	$-(-3,8)+1$

Operación combinada

Una operación combinada es la que tiene dos o más operaciones simples.

Jerarquía de operaciones

La jerarquía de operaciones con números decimales es la misma que con números enteros:

1. Paréntesis, comenzando por los interiores.
2. Potencias.
3. Productos y cocientes, comenzando por la izquierda.
4. Sumas y restas, comenzando por la izquierda.

Recuerda también que los valores absolutos tienen un paréntesis implícito.

Escritura de los ejercicios

- ✱ Hay que escribir las operaciones de izquierda a derecha.
- ✱ Cuando se acabe la línea, se pasa a la línea siguiente.
- ✱ Conviene acabar las líneas con el signo «igual» porque evita confusiones.
- ✱ Hay que comenzar la nueva línea con el último signo de la anterior.
- ✱ Será posible hacer mentalmente algunas operaciones, pero quizá no todas.
- ✱ Conviene escribir las operaciones auxiliares cerca del desarrollo del ejercicio; por ejemplo, debajo. Así es más fácil repasarlas.
- ✱ Las operaciones auxiliares deben estar también ordenadas.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula 0,17 · 3,22 + 5,8 : 2 – |2,87 – 3,51|

Resolución:

0,17 · 3,22 + 5,8 : 2 – |2,87 – 3,51| = 0,5474 + 2,9 – |–0,64| = 3,4474 – 0,64 =
= 2,8074

```
  3 2 2      5, 8 |2___         3 , 5 1          0 , 5 4 7 4          3 , 4 4 7 4
×   1 7      1 8  2, 9        – 2 , 8 7        + 2 , 9              – 0 , 6 4
2 2 5 4        |0|              0 , 6 4          3 , 4 4 7 4          2 , 8 0 7 4
3 2 2
5 4 7 4
```

Solución: 2,8074

Ejemplo 2

Enunciado: calcula (5,8 + 3,15) : (–2) + 3,2 · (1,7 – 3,9) + 2,8² + |–2,58|

Resolución:

(5,8 + 3,15) : (–2) + 3,2 · (1,7 – 3,9) + 2,8² + |–2,58| =
= 8,95 : (–2) + 3,2 · (–2,2) + 7,84 + 2,58 = – 4,475 –7,04 + 10,42 =
= –11,515 + 10,42 = –1,095

```
  2 8     8, 9 5   |2________       3 2        4 , 4 7 5        1 1 , 5 1 5
× 2 8     0 9       4, 4 7 5     × 2 2      + 7 , 0 4         – 1 0 , 4 2
2 2 4       1 5                    6 4      1 1 , 5 1 5         0 1 , 0 9 5
5 6           1 0                6 4
7 8 4          |0|               7 0 4
```

Solución: –1,095

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes operaciones teniendo en cuenta que el cociente de todas las divisiones que aparecen o bien es un número entero o bien es un número decimal exacto.

① $3{,}4 \cdot 5{,}3 + 2{,}7 \cdot 7{,}3$

② $(1{,}23 + 7{,}21) \cdot 0{,}52$

③ $4{,}3 \cdot 5{,}2 - 9 \cdot 3{,}18$

④ $8 : 5 + 1{,}2 : 4$

⑤ $7{,}2^2 + 0{,}35^2$

⑥ $3 \cdot |1{,}23 - 7{,}31| + 4 \cdot (6{,}8 - 7{,}21)$

⑦ $0{,}2^3 - 0{,}8^3$

⑧ $(2{,}3 - 5{,}8)^3$

⑨ $5{,}6 : 8 - 14{,}21 : 7$

⑩ $3{,}4^2 - 1{,}8 \cdot 2{,}4 - 8{,}2 \cdot 3{,}6$

⑪ $(3{,}4 - 8{,}2) \cdot (5{,}8 - 3{,}9)$

⑫ $2 - 8{,}9 + 1{,}3^2$

⑬ $(4{,}5 - 7)^2 + 2 \cdot |1{,}45 + 3{,}76|$

⑭ $(3{,}81 - 3{,}17)^2$

⑮ $6{,}7 \cdot 9{,}2 - 8{,}3^2$

⑯ $(-1{,}9)^2 + 9{,}1 \cdot 1{,}3$

⑰ $(5 : 2)^2 + (1{,}8 : 3)^2$

⑱ $3 - 2 : 5 + 5 : 8$

⑲ $5{,}9 \cdot 2{,}8 - 1{,}2 \cdot 3{,}6 + 2{,}4 \cdot 3{,}8 - 3{,}5 \cdot 8{,}3$

⑳ $(8{,}23 + 1{,}04)^2$

㉑ $0{,}26 : (0{,}8 + 0{,}5) + (3{,}5 - 9{,}4) : 4$

㉒ $|3 \cdot (1{,}4 - 9{,}8)| + 6 \cdot (2{,}7 - 6{,}44)$

㉓ $3 : 4 + 3{,}8 \cdot (-1{,}7)$

㉔ $-3{,}4 \cdot (-1{,}6) + 1{,}4 : 0{,}7$

㉕ $(3{,}2 - 5{,}3 \cdot 2{,}9) : 4$

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes operaciones teniendo en cuenta que el cociente de todas las divisiones que aparecen o bien es un número entero o bien es un número decimal exacto.

① $0{,}45 : 2 - 1{,}34 : 5$

② $3 \cdot 1{,}27 + 4 \cdot 6{,}8 - 3 \cdot 5{,}5 - 8 \cdot 1{,}7$

③ $(2{,}62 + 2{,}33) \cdot 0{,}6 - (1{,}56 + 3{,}88) \cdot 0{,}7$

④ $|4{,}5 - 5{,}8| \cdot |\, 2{,}8 + 1{,}6|$

⑤ $(2{,}89 + 3{,}09) : 4 - (1{,}23 - 7{,}8) : 2$

⑥ $1{,}3^3 - (-2{,}4)^3$

⑦ $7{,}82 \cdot 2{,}7 - 5{,}8 \cdot 4{,}6$

⑧ $1{,}24 : 5 - 1{,}05 : 7$

⑨ $7{,}6^2 - 2{,}4^2 - 1{,}7^2$

⑩ $(3{,}67 - 1{,}22) : 5 + (4{,}67 - 1{,}82) : 3$

⑪ $9{,}21 \cdot 3 - 15{,}12 : 6$

⑫ $(3{,}7 \cdot 1{,}6 + 2{,}93) : (6{,}3 - 6{,}8)$

⑬ $(8{,}9^2 - 9{,}3^2) : (1 : 4)$

⑭ $3{,}57 - |-5{,}8| - 7{,}9 \cdot 5{,}4$

⑮ $8{,}1 \cdot 2{,}8^2$

⑯ $(3{,}5 - 9{,}2)^2 - 4{,}7 \cdot 8{,}3$

⑰ $2 \cdot (3{,}8 - 4{,}7 \cdot 1{,}9)$

⑱ $(2{,}8 - 8{,}1) \cdot (5{,}6 - 7{,}3)$

⑲ $0{,}1^3 \cdot 12{,}7^2$

⑳ $2{,}56 \cdot 7{,}21 : 100$

㉑ $-1{,}67 \cdot 2{,}83 + 0{,}8 \cdot 12{,}6$

㉒ $19{,}21 + 34{,}28 - 9{,}2 \cdot 10{,}3$

㉓ $9 : (-8) + 6{,}09 : 6$

㉔ $5{,}02^2 - 7{,}08^2$

㉕ $34{,}6 : 2 : 5 + 10 \cdot 7{,}2^2$

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes operaciones teniendo en cuenta que el cociente de todas las divisiones que aparecen o bien es un número entero o bien es un número decimal exacto.

① $1{,}26^2 - 1{,}3^3$

② $4{,}8 \cdot 5{,}3 : 2 + 7{,}3 \cdot 4{,}9 : 5$

③ $8{,}2 : 2 \cdot 1{,}7 - 7 : 5 \cdot 4{,}9$

④ $1{,}035 : (0{,}3 - 0{,}07) + 1{,}513 : (0{,}03 - 0{,}2)$

⑤ $(8{,}9 - 11{,}3)^2 - 6{,}2^2 : 2$

⑥ $-2{,}6 \cdot 7{,}8 + 5{,}1 \cdot 2{,}7 - 1{,}9^2$

⑦ $(2{,}89 - 1{,}09)^2 - 0{,}7^3$

⑧ $36{,}4 : 7 \cdot 5{,}2 - 5{,}2^2$

⑨ $53{,}4 : 6 - 81{,}4 : 11 - 8{,}2 \cdot 7$

⑩ $2{,}1 \cdot 0{,}4^2 - 8{,}3 \cdot 0{,}6^2$

⑪ $(1{,}2^2 - 0{,}04) : 7 + 1{,}6 : 2$

⑫ $0{,}73 \cdot 22 - 0{,}91 \cdot 38 + 0{,}13^2$

⑬ $-1{,}8 \cdot (2{,}8 + 3{,}5) - 8{,}9 \cdot (-6{,}7)$

⑭ $993{,}3 : 3 : 7 - 2601{,}5 : 5 : 11$

⑮ $5{,}4^2 - 4{,}5^2 - (18{,}9 - 17{,}2)^2$

⑯ $(2{,}56 + 14{,}24 - 17{,}3)^2$

⑰ $37 \cdot 51 : 10^4$

⑱ $-4{,}41 + 2{,}1^2 + 5{,}8 \cdot (-0{,}3)$

⑲ $93 : 15 + 90{,}1 : 17$

⑳ $(8{,}56 + 7{,}3 \cdot 2{,}7) : 4$

㉑ $10^5 \cdot 0{,}562 \cdot 3{,}18$

㉒ $-3{,}7 + 4{,}7 \cdot 1{,}9 - 5{,}14 \cdot 0{,}8$

㉓ $4{,}91 \cdot 12{,}8 - 13{,}7^2$

㉔ $(0{,}23 + 17 : 2) \cdot 4$

㉕ $(2{,}21 + 1{,}8 \cdot 0{,}7)^2$

Enunciados

① En una carrera de 4 × 100 metros, los componentes de un equipo tardaron 12,34 segundos, 12,21 segundos, 11,99 segundos y 11,78 segundos. Calcula el tiempo total que tardó el equipo en completar la prueba.

② A fecha de 19 de enero de 2021, el record mundial de atletismo en 400 metros en categoría masculina es 43,03 segundos y en categoría femenina 47,60 segundos. Calcula en cuánto tiempo es mejor el record en categoría masculina.

③ Si compramos nueve raciones de calamares y cada una tiene 0,26 kilográmos, ¿qué masa total de calamares hemos comprado?

④ Si partimos un queso de 2,4 kilogramos en cinco partes iguales, ¿qué masa tiene cada parte?

⑤ ¿Cuánto cuestan siete barras de pan a 0,65 euros cada una?

⑥ Compramos una merluza de 2,7 kilogramos por 49,95 euros. ¿Cuánto cuesta un kilogramo de merluza?

⑦ En una tienda de telas compramos 13 metros de una tela que cuesta 2,35 euros el metro y 17 metros de otra que cuesta 1,96 euros el metro. ¿Cuánto dinero tendremos que pagar?

⑧ De un cable de 10 metros cortamos un trozo de 2,34 metros y otro de 6,5 metros. ¿Cuánto cable queda?

⑨ Una caña de pescar está formada por tres piezas que miden 1,34 metros, 1,12 metros y 0,98 metros. En cada unión de las piezas se pierden 0,09 metros. Calcula la longitud total de la caña.

⑩ En una ronda en una cafetería pedimos siete cafés, que cuestan 1,3 euros cada uno, y cinco tés, que cuestan 1,1 euros cada uno. Si pagamos con un billete de 20 euros, ¿cuánto dinero nos tienen que devolver?

⑪ Un camión vacío tiene una masa de 2,6 toneladas. Cuando se cargan 37 coches iguales, la masa total es 43,3 toneladas. ¿Cuál es la masa de cada coche?

⑫ Una caja tiene una masa de 0,6 kilogramos. La llenamos con 45 botes de miel y ahora tiene una masa total de 32,1 kilogramos. El vidrio de cada bote tiene una masa de 0,2 kilogramos. ¿Cuánta miel hay en cada bote?

⑬ Compramos 120 unidades de un producto por 54 euros. ¿A qué precio tendremos que poner cada unidad para recuperar el dinero invertido y además ganar 26,4 euros?

⑭ Disponemos de un depósito con 21 litros de agua que usamos para llenar cinco botellas de 1,5 litros. Con lo que queda, ¿cuántas botellas de 0,75 litros podremos llenar?

⑮ En una gasolinera ponemos 43 litros de combustible que tiene un precio de 1,119 euros el litro. ¿Cuánto dinero habrá que pagar?

Enunciados

① En un observatorio científico en la Antártida la temperatura interior se mantiene en 22,4 °C, mientras que en el exterior hay −27,8 °C. Calcula la diferencia de las dos temperaturas.

② Si un glaciar avanza 2,56 metros al día, ¿cuánto avanza en 28 días? Da el resultado en metros redondeando a la unidad.

③ Un determinado coche consume 6,2 litros de combustible cada 100 kilómetros. En un viaje de 540 kilómetros, ¿cuánto combustible consumirá? Da el resultado redondeado a la décima.

④ Un establecimiento compra un producto por docenas, a 18 euros la docena, y los vende por unidades, a 2,3 euros cada una. Si vendiera 13 docenas, ¿cuánto dinero obtendría de beneficio?

⑤ Tenemos que preparar un terreno de 262 hectáreas; cada día que vamos a trabajar podemos preparar 17 hectáreas. ¿Cuántos días habrá que ir a trabajar?

⑥ Cinco menores y siete adultos van a comprar un regalo que cuesta 212,25 euros a un amigo. Cada menor aporta 12,35 euros y cada adulto aporta otra cantidad distinta. ¿Cuánto ha aportado cada adulto?

⑦ Vamos a pagar un préstamo de 1538,4 euros en tres plazos: en el primer plazo pagaremos la tercera parte del préstamo y en el segundo la mitad de lo que quede. Calcula cuánto habrá que pagar en el tercer plazo.

⑧ Vamos a organizar un concierto en un pabellón que admite 2400 personas. Por cada entrada que vendamos ganaremos 3,52 euros y por cada asiento que quede libre perderemos 1,29 euros. Si asisten 1500 personas, ¿cuánto dinero ganaremos?

⑨ De una pieza de tela de 25 metros de longitud hay que obtener trozos que midan exactamente 1,8 metros. ¿Cuántos se pueden obtener?

⑩ En una repostería preparan tartas de nata con una masa de 1282 gramos que parten en 17 raciones y tartas de crema con una masa de 1433 gramos que parten en 19 raciones. ¿Qué raciones son mayores?

⑪ En una tienda de cambio de divisas nos informan de que un dolar estadounidense equivale a 0,8259 euros. Si cambiamos 120 dólares, ¿cuántos euros nos darán?

⑫ En un supermercado hay una oferta «3 × 2» en un producto que se vende por cajas. Cada caja cuesta 12,56 euros. Si compras 40 cajas, ¿cuánto tienes que pagar?

⑬ Tenemos que transportar 513 cajas con una masa cada una de 56,7 kilogramos de un sitio a otro. Vamos a alquilar un camión que nos cobra 45,8 euros por cada viaje. En cada viaje podemos cargar como máximo 2400 kilogramos. ¿Cuánto dinero nos costará todo el traslado?

Escritura de la raíz cuadrada

- ✱ Para designar «raíz cuadrada» se usa el símbolo «√», alargando la parte superior con una línea horizontal que abarque la expresión que corresponda.
- ✱ Ejemplo 1: «raíz cuadrada de 9» se escribe $\sqrt{9}$.
- ✱ Ejemplo 2: «raíz cuadrada de la suma de 11 y 5» se escribe $\sqrt{11+5}$.
- ✱ También se puede usar el símbolo $\sqrt[2]{\ }$, pero es mucho menos habitual.

Definición de raíz cuadrada

- ✱ La raíz cuadrada se define a partir del cuadrado.
- ✱ Si a es un número y b es un número positivo o cero, b es la raíz cuadrada de a cuando $b^2 = a$.
- ✱ Simbólicamente: $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^2=a$ (y b es positivo o cero). El símbolo «⇔» se lee «cuando» o bien «si y solo si»; se usa en matemáticas en las definiciones simbólicas, entre otros usos.
- ✱ Ejemplo 3: $\sqrt{49}=7$ porque $7^2 = 49$ (y 7 es positivo).
- ✱ Ejemplo 4: $\sqrt{2{,}25}=1{,}5$ porque $1{,}5^2 = 2{,}25$ (y 1,5 es positivo).

Raíz cuadrada de 0

- ✱ La raíz cuadrada de 0 es 0: $\sqrt{0}=0$; porque $0^2 = 0$ (y 0 es 0).
- ✱ Además, 0 es el único número que elevado al cuadrado da 0. Es decir, si sabemos que $a^2 = 0$, podemos asegurar que $a = 0$. Se escribe así: $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$.

Raíz cuadrada de un número positivo

Por la definición de raíz cuadrada, sabemos que la raíz cuadrada de un número positivo es también un número positivo. Lo hemos visto en los ejemplos 3 y 4.

Sin embargo, si nos dan un número positivo, podemos encontrar dos números distintos que elevados al cuadrado dan ese número. Los dos números son opuestos.

Ejemplo 5

Hay dos números que elevados al cuadrado dan 49: el 7 y el –7.

Observa que los números 7 y –7 son opuestos.

Ejemplo 6

Hay dos números que elevados al cuadrado dan 2,25: el 1,5 y el –1,5.

Manera correcta de escribirlo

Solo es correcto escribir $\sqrt{49}=7$.

Es incorrecto escribir $\sqrt{49}=-7$ y también es incorrecto $\sqrt{49}=\pm 7$.

Si queremos usar el número negativo, escribimos $-\sqrt{49}=-7$.

Raíz cuadrada de un número negativo

- ✱ Los números negativos no tienen raíz cuadrada.
- ✱ Por ejemplo, el número –1 no tiene raíz cuadrada porque ningún número (de los que hemos estudiado) elevado al cuadrado da un resultado negativo.
- ✱ Escribiremos: $\sqrt{-1}$ → no existe.
- ✱ Sin embargo, en el nivel 5 del curso estudiaremos que sí existen unos números que elevados al cuadrado dan –1. Pero hasta entonces, seguiremos escribiendo que $\sqrt{-1}$ no existe.

Enunciados

Calcula las siguientes raíces cuadradas:

① $\sqrt{16}$

② $\sqrt{25}$

③ $\sqrt{36}$

④ $\sqrt{100}$

⑤ $\sqrt{0{,}25}$

⑥ $\sqrt{0{,}36}$

⑦ $\sqrt{0{,}01}$

⑧ $\sqrt{64}$

⑨ $\sqrt{-4}$

⑩ $\sqrt{1}$

⑪ $\sqrt{0{,}49}$

⑫ $\sqrt{400}$

⑬ $\sqrt{-9}$

⑭ $\sqrt{10\,000}$

⑮ $\sqrt{0{,}04}$

Enunciados

Di todos los números que elevados al cuadrado dan como resultado el número propuesto:

⑯ 81

⑰ 0

⑱ –49

⑲ 9

⑳ 0,16

Raíz cuadrada exacta y entera

Dado un número natural, a veces es posible encontrar otro número natural que sea su cuadrado y a veces no.

- ✱ Ejemplo 1. Dado el número 9, podemos encontrar el 3, que verifica $3^2 = 9$.
- ✱ Ejemplo 2. Dado el número 45, no podemos encontrar ningún número natural que al cuadrado dé 45. Si probamos el 6, $6^2 = 36$ y nos quedamos cortos; si probamos el 7, $7^2 = 49$, nos pasamos.

Raíz cuadrada exacta

Cuando es posible encontrar el número, decimos que es la raíz cuadrada exacta.

- ✱ Ejemplo 1: la raíz cuadrada exacta de 9 es 3. Se escribe $\sqrt{9}=3$.

Raíz cuadrada entera

Cuando no se puede encontrar el número, llamamos raíz cuadrada entera al número cuyo cuadrado más se aproxime, sin pasarse, al número dado.

- ✱ Ejemplo 2: la raíz cuadrada entera de 45 es 6. Se escribe $\sqrt{45}\approx 6$.

En estos casos, lo mejor es **acotar la raíz**, que consiste en escribir una expresión con desigualdades entre los números enteros anterior y posterior y la raíz.

- ✱ Ejemplo 2: la raíz cuadrada entera de 45 es 6. Se escribe $6<\sqrt{45}<7$.

Llamamos **resto** de la raíz entera a la diferencia entre el número y el cuadrado de la raíz entera.

- ✱ Ejemplo 2: el resto de la raíz cuadrada entera de 45 es 9 porque $45 - 6^2 = 9$.

Ejemplos

Dados los siguientes números naturales, calcula su raíz cuadrada; di si es exacta o entera. Si es exacta, escribe una igualdad; si es entera, acota la raíz entre los enteros más cercanos y di cuál es el resto.

	Número	Resolución
③	3	Raíz entera. $1<\sqrt{3}<2$. Resto = $3 - 1^2 = 1$.
④	144	Raíz exacta. $\sqrt{144}=12$
⑤	90	Raíz entera. $9<\sqrt{90}<100$. Resto = $90 - 9^2 = 9$.
⑥	7569	Raíz exacta. $\sqrt{7569}=87$
⑦	18	Raíz entera. $4<\sqrt{18}<5$. Resto = $18 - 4^2 = 2$.
⑧	5329	Raíz exacta. $\sqrt{5329}=73$
⑨	24	Raíz entera. $4<\sqrt{24}<5$. Resto = $24 - 4^2 = 8$.
⑩	169	Raíz exacta. $\sqrt{169}=13$

Enunciados

Utiliza para los siguientes ejercicios esta tabla de cuadrados:

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrado	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Número	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Cuadrado	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
Número	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Cuadrado	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900
Número	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Cuadrado	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600

Dados los siguientes números naturales, calcula su raíz cuadrada; di si es exacta o entera. Si es exacta, escribe una igualdad; si es entera, acota la raíz entre los enteros más cercanos y calcula el resto.

① 600

② 1521

③ 1000

④ 361

⑤ 200

⑥ 529

⑦ 1050

⑧ 729

⑨ 324

⑩ 500

⑪ 950

⑫ 155

⑬ 701

⑭ 1089

⑮ 240

⑯ 1321

⑰ 1602

Cálculo de raíces cuadradas

- ✱ Existen varios métodos para calcular raíces cuadradas.
- ✱ A partir del nivel 3, incluido, utilizaremos una calculadora.
- ✱ En los niveles 1 y 2 utilizaremos un método manual.
- ✱ El método usado es aplicable a varias situaciones de cálculo.
- ✱ Como el objetivo de la matemática es aprender, sobre todo a resolver problemas, y no especialmente realizar cálculos laboriosos a mano, los ejercicios de los niveles 1 y 2 en los que sea necesario calcular raíces cuadradas serán más bien sencillos.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula la raíz cuadrada entera de 717912 y el resto.

Operaciones:

```
   7 1 7 9 1 2   |8 4 7
 – 6 4           |
   0 7 7 9       |1 6 4 · 4 = 6 5 6
   – 6 5 6       |
     1 2 3 1 2   |1 6 8 7 · 7 = 1 1 8 0 9
   – 1 1 8 0 9   |
     0 0 5 0 3   |
```

Solución: la raíz cuadrada entera es 847 y el resto es 503.

Nota: si el resto hubiera sido 0, la raíz sería exacta.

Ejemplo 2

Enunciado: calcula la raíz cuadrada de 38 redondeando a la décima.

Operaciones:

```
   3 8, 0 0 0 0  |6, 1 6
 – 3 6           |
     2 0 0       |1 2 1 · 1 = 1 2 1
   – 1 2 1       |
     0 7 9 0 0   |1 2 2 6 · 6 = 7 3 5 6
     – 7 3 5 6   |
       0 5 4 4   |
```

Solución: 6,2.

Nota 1: hemos calculado hasta la centésima para poder redondear a la décima.

Nota 2: el resto no se usa.

Ejemplo 3

Enunciado: calcula la raíz cuadrada de 5,7 redondeando a la décima.

Operaciones:

```
   5, 7 0 0 0  |2, 3 8
 – 4           |
   1 7 0       |4 3 · 3 = 1 2 9
 – 1 2 9       |
   0 4 1 0 0   |4 6 8 · 8 = 3 7 4 4
   – 3 7 4 4   |
     0 3 5 6   |
```

Solución: 2,4.

Enunciados

Calcula las raíces cuadradas de los siguientes números naturales. Especifica si la raíz es exacta o entera. Si la raíz es entera, di también el resto.

① 7921

② 3157

③ 8864

④ 4489

⑤ 4091

⑥ 7129

⑦ 2414

⑧ 3025

⑨ 8555

⑩ 1866

⑪ 3425

⑫ 3530

⑬ 5329

⑭ 64 642

⑮ 73 563

⑯ 94 864

⑰ 128 165

⑱ 769 979

⑲ 309 168

⑳ 491 606

㉑ 30 976

㉒ 15 976

㉓ 385 900

㉔ 15 882

㉕ 736 164

㉖ 211 933

Enunciados

Calcula las raíces cuadradas de los siguientes números; da el resultado redondeado a la décima.

① 72

② 46

③ 32

④ 41

⑤ 22

⑥ 57

⑦ 90

⑧ 76

⑨ 51

⑩ 39

⑪ 10,5

⑫ 18,2

⑬ 22,3

⑭ 29,1

⑮ 40,8

⑯ 54,6

⑰ 60,3

⑱ 71,2

⑲ 92,3

⑳ 80,1

Jerarquía de operaciones

Cuando aparecen raíces cuadradas en una operación combinada, su posición en la jerarquía es la misma que las potencias. El orden de cálculo queda así:

1. Paréntesis, comenzando por los interiores.
2. Potencias y raíces cuadradas.
3. Productos y cocientes, comenzando por la izquierda.
4. Sumas y restas, comenzando por la izquierda.

Ejemplos

Ejemplo 1	$3+\sqrt{4}$	Primero la raíz cuadrada y luego la suma
Ejemplo 2	$3\cdot\sqrt{4}$	Primero la raíz cuadrada y luego el producto
Ejemplo 3	$\sqrt{36}:\sqrt{4}$	Primero las raíces cuadradas y luego la división

Paréntesis implícitos en las raíces cuadradas

Las raíces cuadradas tienen un paréntesis interno que no se escribe, por eso se llama implícito. Cuando aparece $\sqrt{\text{operación}}$, realmente significa $\sqrt{(\text{operación})}$, pero el paréntesis no lo vemos.

Hay fijarse bien en qué punto acaba la línea horizontal de la raíz cuadrada, porque indica hasta dónde hay que calcular antes de hacer la raíz cuadrada.

Ejemplos

Ejemplo 4	$\sqrt{9+16}$	Primero la suma y luego la raíz cuadrada
Ejemplo 5	$\sqrt{9}+\sqrt{16}$	Primero las raíces cuadradas y luego la suma
Ejemplo 6	$\sqrt{2^4}$	Primero la potencia y luego la raíz cuadrada
Ejemplo 7	$\sqrt{144}+25$	La suma se hace después de la raíz cuadrada
Ejemplo 8	$\sqrt{144+25}$	La suma se hace antes de la raíz cuadrada

Cálculo paso a paso

Para aprender a hacer las operaciones combinadas con soltura es imprescindible empezar a hacerlas paso a paso, para entender la jerarquía; cuando se maneje bien, se pueden saltar pasos e incluso hacer toda la operación mentalmente.

Cuando no existe una raíz cuadrada, ya la operación completa no existe.

Ejemplo 1	$3+\sqrt{4} = 3 + 2 = 5$	Ejemplo 2	$3\cdot\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$
Ejemplo 3	$\sqrt{36}:\sqrt{4} = 6 : 2 = 3$	Ejemplo 4	$\sqrt{9+16}=\sqrt{25} = 5$
Ejemplo 5	$\sqrt{9}+\sqrt{16} = 3 + 4 = 7$	Ejemplo 6	$\sqrt{2^4}=\sqrt{16} = 4$
Ejemplo 7	$\sqrt{144}+25 = 12 + 25 = 37$	Ejemplo 8	$\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$
Ejemplo 9	$3^2+\sqrt{49} = 9 + 7 = 16$	Ejemplo 10	$\sqrt{\sqrt{100}+6}=\sqrt{10+6}=\sqrt{16}=4$
Ejemplo 11	$\sqrt{9}-\sqrt{49} = 3 - 7 = -4$	Ejemplo 12	$\sqrt{9-49}=\sqrt{-40}$ → no existe
Ejemplo 13	$17^3+\sqrt{-1}+37\cdot 5$ → no existe	Ejemplo 14	$\sqrt{1:4}=\sqrt{0{,}25}=0{,}5$

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes operaciones, teniendo en cuenta que puede ser un número entero, un número decimal exacto o no existir.

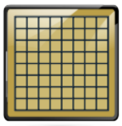
1	$5+\sqrt{36}-4\cdot 5$	2	$\sqrt{30+5:(-1)}$	3	$2(\sqrt{196}-\sqrt{100})$
4	$\sqrt{3\cdot 10^3+5^2}$	5	$\sqrt{\sqrt{12:3}+79}$	6	$\sqrt{2^4:100}$
7	$\sqrt{8+6\cdot(-2)}$	8	$18:(-3)+\sqrt{36}$	9	$\sqrt{-800:(-2)}$
10	$\sqrt{27^2}$	11	$\sqrt{3\cdot\lvert(-3)^3\rvert}$	12	$\sqrt{80+1}+\sqrt{-81}$
13	$\sqrt{\sqrt{0}+\sqrt{1}+3}$	14	$\sqrt{4\cdot 49}$	15	$\sqrt{1^{18}+(-1)^2}$
16	$\sqrt{\lvert 5\cdot(-125)\rvert}$	17	$2\cdot(-8)+\lvert -5\cdot\sqrt{64}\rvert$	18	$\sqrt{1+\lvert 4\cdot(-6)\rvert}$
19	$\sqrt{\sqrt{121}-\sqrt{100}}$	20	$0{,}4\cdot\sqrt{49}-\sqrt{9}:2$	21	$\sqrt{1{,}69+6:5}$
22	$\sqrt{5^2+12^2}$	23	$\sqrt{3-2\cdot(-11)}$	24	$(-\sqrt{225:5})^2$
25	$\sqrt{1{,}44}:0{,}6$	26	$\sqrt{100}+3\cdot 7$	27	$\sqrt{3^2-4\cdot(-40)}$
28	$\sqrt{-100-3\cdot 7}$	29	$\sqrt{(-17)^2+\lvert -17\rvert}$	30	$\sqrt{81}:(-4)+2{,}5^2$
31	$\sqrt{200-\sqrt{16}}$	32	$\sqrt{(-2)^2-4\cdot 8}$	33	$\sqrt{21^3-1340}$
34	$\sqrt{16{,}2:5}$	35	$\sqrt{5{,}3-1:100}$	36	$(\sqrt{144}+\sqrt{169}):(-5)$
37	$\sqrt{(\sqrt{324}-\sqrt{256}):0{,}5}$	38	$\sqrt{1:25}$	39	$\sqrt{3^2-5^2}$
40	$\sqrt{31^3:31}$	41	$(\sqrt{60{,}84})^2$	42	$(\sqrt{-5})^2$
43	$\sqrt{16\cdot 9}-\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}$	44	$\sqrt{8{,}7^2-378:5}$	45	$\sqrt{2{,}3\cdot 5{,}2-3{,}4\cdot 3{,}6}$
46	$\sqrt{3\cdot 5+0{,}3\cdot 0{,}7}$	47	$\sqrt{3844}:(-31)$	48	$\sqrt{1000:2+5\cdot 6-1}$
49	$\sqrt{89+10^3}$	50	$\sqrt{5\cdot 16+(-1)^4}$	51	$\sqrt{8+(-2)^3}$
52	$\sqrt{3^4+38:2}$	53	$\sqrt{3\cdot 0{,}25+0{,}5^2}$	54	$4{,}5-\sqrt{38{,}44}$
55	$(1+\sqrt{36})^2$	56	$\sqrt{5^2+2\cdot 5\cdot 4+4^2}$	57	$\sqrt{5^2-2\cdot 5\cdot 4+4^2}$
58	$\sqrt{8-(-2)^3}$	59	$((\sqrt{81}+\sqrt{100}):10)^2$	60	$3{,}4\cdot\sqrt{1{,}21}-5{,}8^2$
61	$\sqrt{65^2+72^2}$	62	$\sqrt{73^2-55^2}$	63	$\sqrt{13^2:2^2}-13:2$
64	$\sqrt{2^5-0{,}8^2}$	65	$7-\sqrt{49}\cdot\sqrt{36}$	66	$\sqrt{21\cdot 2+\sqrt{49}}$
67	$\sqrt{(-1)^5+(-1)^7}$	68	$\sqrt{12^2+16^2+21^2}$	69	$\sqrt{85^2-84^2-5^2}$

Nivel 1 • Aritmética • Raíz cuadrada • Cálculo mental (01)

	A	B	C	D	E
1	$\sqrt{36}+2^3$	$30:\sqrt{25}$	$\sqrt{25}+\sqrt{100}$	$\sqrt{100}-\sqrt{25}$	$4-\sqrt{81}$
2	$\sqrt{25-16}$	$\sqrt{25}-\sqrt{16}$	$\sqrt{16}+\sqrt{9}$	$\sqrt{16+9}$	$\sqrt{62+\sqrt{4}}$
3	$2\cdot\sqrt{100}$	$\sqrt{5^2+11}$	$\sqrt{5^2}+11$	$\sqrt{5^2}-11$	$\sqrt{7^2+51}$
4	$4^2+\sqrt{4}$	$5^2-\sqrt{25}$	$\sqrt{8+2^3}$	$\sqrt{8-2^3}$	$(2-\sqrt{9})^3$
5	$\sqrt{\lvert -49\rvert}$	$\sqrt{(-4)^2}$	$\sqrt{40-2^2}$	$(\sqrt{1}+\sqrt{0})^7$	$(\sqrt{0}-\sqrt{1})^3$
6	$\sqrt{3^2+4^2}$	$\sqrt{17\cdot 21\cdot 0}$	$\sqrt{0{,}01}$	$\sqrt{36}:2$	$42:(-\sqrt{49})$
7	$\sqrt{1}-1^3$	$\sqrt{(15:3)^2}$	$\sqrt{0{,}25}+0{,}5$	$\sqrt{100}-100$	$\sqrt{60+2^2}$
8	$\sqrt{\lvert(-1)\cdot 25\rvert}$	$9^2+\sqrt{9}$	$\sqrt{(-100):(-4)}$	$\sqrt{0{,}16}+0{,}06$	$\sqrt{4}-0{,}5$
9	$10\cdot\sqrt{0{,}0001}$	$\sqrt{10^6}$	$\sqrt{\sqrt{81}:100}$	$\sqrt{4\cdot 20+1^5}$	$\sqrt{16}-16$
10	$\sqrt{400:10+3^2}$	$(\sqrt{1}-\sqrt{4})^3$	$(2-\sqrt{25})\cdot 4$	$\sqrt{1+\sqrt{9}}$	$\sqrt{12^2}$

Enunciados

① El tablero que se usa para jugar a las damas y al ajedrez tiene 64 casillas con ocho filas y ocho columnas. Si te inventas un juego con un tablero cuadrado de 144 casillas, ¿Cuántas filas tendrá?



② Tienes una caja para guardar minerales con 225 cajitas pequeñas formando un cuadrado. ¿Cuántas filas de cajitas tiene la caja?

③ En una fiesta se van a repartir 729 bombones en cajas. Hay tantas cajas como bombones en cada caja. Calcula cuántos bombones lleva cada caja.

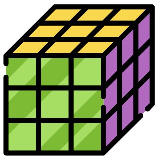
④ Para cubrir el suelo de un salón cuadrado hemos comprado 32 paquetes de cien baldosas cuadradas y nos han sobrado 64 baldosas. ¿Cuántas filas de baldosas hemos colocado?

⑤ La suma de los cuadrados de dos números naturales es 6266. Sabiendo que uno de los números es 35, calcula el otro.

⑥ Un tablero cuadrado de juego tiene 3844 casillas. Una de las piezas tiene prohibido situarse en las casillas del borde. ¿En cuántas casillas se puede situar?

⑦ La suma de los cuadrados de dos números enteros opuestos es 6498. ¿Cuáles son los números?

⑧ Sabemos que un cubo de Rubik estándar, de tres bloques de lado, tiene en total 54 pegatinas de colores. Si un cubo de Rubik gigante tiene 2166 pegatinas de colores, ¿cuántos bloques tiene en cada lado?



⑨ ¿Además del 20, cuántos números naturales tienen la misma raíz cuadrada entera que 20?

⑩ La suma de los cuadrados de dos números enteros de distinto signo es 11 773. Sabiendo que uno de los números es 102, calcula el otro.

⑪ ¿Cuál es el menor número natural que hay que sumar a 8900 para que el resultado sea el cuadrado de otro número natural?

⑫ ¿Cuál es el mayor número natural que tiene la misma raíz cuadrada entera que 2100?

⑬ Un teatro tiene una sala pequeña y una sala grande, las dos con las butacas dispuestas en cuadrados. En la sala grande caben cuatro veces más personas que en la pequeña y en total el teatro admite 4500 espectadores. ¿Cuántas filas de butacas tiene la sala grande?

⑭ Un tablero cuadrado de juego tiene las casillas de dos colores distintos, que se van alternando. Sabemos que el número de filas es un número impar y que hay 145 casillas del mismo color que el de las esquinas. Calcula cuántas filas tiene el tablero.

Magnitud

Una magnitud es una característica de un objeto que es posible medir numéricamente de una manera objetiva.

Ejemplos de magnitudes: la altura de una persona, el grosor de una tubería, el tiempo que tarda un atleta en correr una distancia, la superficie de una finca, la intensidad de corriente eléctrica que pasa por un cable.

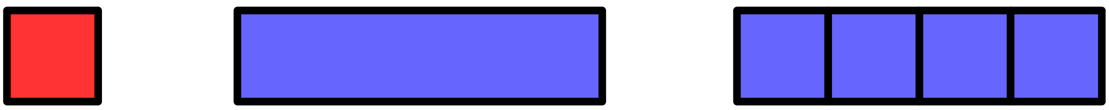
Ejemplos de características que no son magnitudes: la felicidad por aprobar un examen, la belleza de un cuadro, el miedo que te da una película.

- ✱ La palabra **objeto** se usa en sentido genérico: puede ser casi cualquier cosa: un animal, una estrella, una persona, un juguete...
- ✱ Para medir **numéricamente** se podrá usar el número que sea necesario: natural, entero, decimal... o incluso los que veremos en este curso más adelante.
- ✱ Medir de manera **objetiva** significa que cualquiera que realice la medida debería obtener el mismo resultado; en la práctica, podrá haber distintos resultados, pero se deberá a errores de precisión en los aparatos de medida o en su aplicación, no a diferencias personales de apreciación.

Unidad

Una unidad de una determinada magnitud es una porción de esa magnitud que se utiliza como referencia para realizar las mediciones.

- ✱ **Ejemplo 1**: podrías usar la longitud de una hoja de papel como unidad de medida para medir las longitudes de las mesas en las que trabajes. Podrías decir «esta mesa mide 6 hojas» o «esta mesa mide 7,2 hojas».
- ✱ **Ejemplo 2**: podrías usar la superficie del cuadrado rojo para medir la superficie del rectángulo azul. Dirías «el rectángulo azul mide 4 cuadrados rojos».

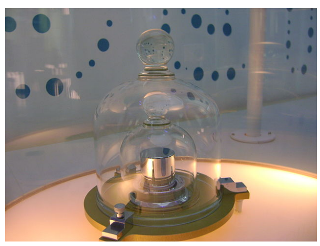


Definición de unidades

Definir las unidades para medir magnitudes es bastante complicado, porque hay que hacerlo de tal manera que la unidad sea lo más objetiva y universal posible. Una unidad no debe depender de una característica física concreta de una persona cualquiera o de la costumbre de un grupo de personas.

Antiguamente se usaban modelos de algunas unidades como referencia para que el público pudiera conocerlas y usarlas.

- ✱ **Ejemplo 3**: en la plaza Vendôme de París se conserva en una de las fachadas una réplica del metro. Abajo, a la izquierda, se ve una foto.
- ✱ **Ejemplo 4**: en una cripta de las instalaciones centrales de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, cerca de París, se conserva el prototipo internacional del kilogramo. Abajo, a la derecha, se ve una foto de una réplica.



Sistema Internacional de Unidades

- Es un conjunto de unidades reconocido en casi todo el mundo.
- El nombre se puede abreviar simplemente con las siglas «SI».
- Se creó en 1960; su antecedente es el Sistema Métrico Decimal.
- Se basa en siete unidades básicas, dos suplementarias y muchas derivadas.
- Incluye un conjunto de doce múltiplos y doce submúltiplos de cada unidad.

Unidades básicas

Aunque aún no las vas a usar todas, sí es conveniente que veas las siete:

Magnitud	Unidad	Símbolo
Tiempo	Segundo	s
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

Unidades derivadas

Vamos a usar mucho estas dos:

Magnitud	Unidad	Símbolo
Superficie	Metro cuadrado	m^2
Volumen	Metro cúbico	m^3

Escritura de los símbolos

- Los símbolos de las unidades no son abreviaturas, por lo que no deben escribirse con un punto detrás, salvo que la frase acabe con él, claro está.

  Incorrecto: tardó 5 s. en llegar; correcto: tardó 5 s en llegar.
- Los símbolos se utilizan igual para singular y para plural, nunca se añade una «s» al final.

  Incorrecto: comió 3 kgs en dos días; correcto: comió 3 kg en dos días.

Múltiplos y submúltiplos de las unidades

Aunque hay doce de cada tipo, de momento vamos a familiarizarnos y trabajar con los tres más sencillos de cada tipo. Estos símbolos se escriben antes del símbolo de la unidad a la que afecte, sin separación; ejemplo: tres decímetros se escribe 3 dm.

Múltiplo	Símbolo	Valor
deca	da	10
hecto	h	100
kilo	k	1000

Submúltiplo	Símbolo	Valor
deci	d	0,1
centi	c	0,01
mili	m	0,001

Enunciados

Escribe los símbolos de las siguientes unidades, múltiplos y submúltiplos de unidades. Ten en cuenta que hay que escribir las letras correctamente, ya que no se pueden cambiar las minúsculas por mayúsculas, ni viceversa; por ejemplo, la «k minúscula» («k») significa «kilo», y la «k mayúscula» («K») significa «kelvin». Solo hay una excepción a esta regla, pero no la hemos explicado todavía en el curso.

① decigramo	② metro	③ decamol
④ milisegundo	⑤ kilokelvin	⑥ metro cuadrado
⑦ candela	⑧ decaamperio	⑨ kilogramo
⑩ kilómetro	⑪ centimol	⑫ decakelvin
⑬ metro cúbico	⑭ centicandela	⑮ kilómetro cuadrado
⑯ gramo	⑰ segundo	⑱ hectoamperio
⑲ mol	⑳ kilocandela	㉑ hectómetro cuadrado
㉒ decímetro	㉓ miligramo	㉔ kilómetro cúbico
㉕ milicandela	㉖ kelvin	㉗ decasegundo
㉘ miliamperio	㉙ kilomol	㉚ milímetro cuadrado
㉛ decacandela	㉜ centímetro	㉝ centigramo
㉞ hectosegundo	㉟ decámetro cúbico	㊱ amperio
㊲ decámetro cuadrado	㊳ centikelvin	㊴ centisegundo
㊵ centiamperio	㊶ centímetro cúbico	㊷ milimol
㊸ decagramo	㊹ deciamperio	㊺ decicandela
㊻ decikelvin	㊼ decisegundo	㊽ decímetro cúbico
㊾ kiloamperio	㊿ milikelvin	51 hectómetro
52 hectomol	53 decímetro cuadrado	54 milímetro cúbico
55 kilosegundo	56 milímetro	57 hectogramo
58 hectocandela	59 hectómetro cúbico	60 hectokelvin
61 decámetro	62 centímetro cuadrado	63 decimol

Unidades de longitud del Sistema Internacional

La unidad de longitud del SI es el metro; su símbolo es «m». Se puede utilizar con cualquiera de sus múltiplos y submúltiplos. Este es el valor de los tres múltiplos y tres submúltiplos más importantes:

Unidad	kilómetro	hectómetro	decámetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
Símbolo	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Valor	1000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Cambio de unidad

Una misma medida se puede expresar con diferentes unidades. La tabla anterior permite hacer fácilmente las conversiones.

En cada conversión solo habrá que multiplicar o dividir por una potencia de 10.

- ✱ Si se cambia de unidad de izquierda a derecha, se multiplica por la unidad seguida de tantos ceros como posiciones haya de separación.
- ✱ Si se cambia de unidad de derecha a izquierda, se divide por la unidad seguida de tantos ceros como posiciones haya de separación.

Ejemplo 1	4,56 cm = 45,6 mm	Hemos multiplicado por 10
Ejemplo 2	78,9 hm = 7,89 km	Hemos dividido entre 10
Ejemplo 3	3,2 dam = 3200 cm	Hemos multiplicado por 1000
Ejemplo 4	2634 dm = 0,2634 km	Hemos dividido entre 10 000

Sistema Anglosajón de Unidades

Este sistema es el oficial en Estados Unidos y es usado extraoficialmente en muchos países, especialmente los que históricamente han estado asociados al Reino Unido. También se conoce con el nombre de **sistema imperial**. Su influencia es grande incluso en países que no lo usan.

Unidades de longitud del Sistema Anglosajón de Unidades

Las más importantes son:

Unidad	pulgada	pie	yarda	milla
Símbolo	in	ft	yd	mi
Valor	2,54 cm	0,3048 m	0,9144 m	1,609 347 km

- ✱ **Ejemplo 5**: ¿cuánto mide en milímetros, redondeando a la unidad, una televisión de 32 pulgadas?

  $32 \cdot 2{,}54 = 81{,}28$ cm $= 812{,}8$ mm. Solución: 813 mm.
- ✱ **Ejemplo 6**: ¿cuánto mide en metros, redondeando a la unidad, una carrera de 15 millas?

  $15 \cdot 1{,}609347 = 24{,}140205$ km $= 24\,140{,}205$ m. Solución: 24 140 m.

Otras unidades de longitud

Unidad	milla náutica	unidad astronómica	año luz
Valor	1852 m	149 597 870 700 m	9 460 730 472 580 800 m

Enunciados

Realiza las siguientes conversiones entre unidades del SI. Es imprescindible que en la respuesta utilices el símbolo correcto.

① Convierte 234 cm en metros.

② Convierte 0,78 km en decámetros.

③ Convierte 8467 mm en decímetros.

④ Convierte 0,023 hm en centímetros.

⑤ Convierte 15,67 dam en decímetros.

⑥ Convierte 2894 m en kilómetros.

⑦ Convierte 0,347 dm en milímetros.

⑧ Convierte 897 m en hectómetros.

⑨ Convierte 834 dam en kilómetros.

⑩ Convierte 3489 mm en hectómetros.

Enunciados

⑪ Si un jugador de *football* ha recorrido en un partido 130 yardas, calcula cuántos metros ha recorrido. Da el resultado redondeando a la décima.

⑫ Si una televisión mide 65 pulgadas, calcula cuántos centímetros mide. Da el resultado redondeando a la unidad.

⑬ Si una persona mide 6 pies, ¿cuántos metros mide? Da el resultado redondenado a la centésima.

⑭ ¿Cuántos pies tienen doce pulgadas?

⑮ ¿Cuántas yardas tienen tres pies?

⑯ Si un avión vuela a una altura de 35 000 pies, calcula a cuántos kilómetros de altura vuela. Da al resultado redondeando a la centésima.

⑰ Si en una carretera te encuentras con un cartel que te informa de que estás a 55 millas de tu destino, ¿cuántos kilómetros te faltan para llegar? Da el resultado redondeando a la unidad.

⑱ Si un barco tiene que recorrer 100 millas náuticas, ¿cuántos hectómetros tiene que recorrer?

⑲ Cuando Marte se encuentra a 0,4 unidades astronómicas de la Tierra, ¿a cuántos kilómetros está? Da el resultado redondeando a la unidad.

⑳ Si hubiera que recorrer un año luz en un millón de años, ¿cuántos kilómetros habría que recorrer cada año? Da el resultado redondeando a la unidad.

Unidades de masa del Sistema Internacional

La unidad de masa del SI es el kilogramo; su símbolo es «kg». Es la única unidad del SI que está definida como un múltiplo (kilo) de una unidad distinta (gramo); esta anomalía se ha acordado por motivos históricos. Así pues, se utilizan los múltiplos y submúltiplos del gramo, aunque la unidad realmente sea el kilogramo. Este es el valor de los tres múltiplos y tres submúltiplos del gramo más importantes:

Unidad	kilogramo	hectogramo	decagramo	gramo	decigramo	centigramo	miligramo
Símbolo	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
Valor	1000 g	100 g	10 g	1 g	0,1 g	0,01 g	0,001 g

Cambio de unidad

Una misma medida se puede expresar con diferentes unidades. La tabla anterior permite hacer fácilmente las conversiones.

En cada conversión solo habrá que multiplicar o dividir por una potencia de 10.

- Si se cambia de unidad de izquierda a derecha, se multiplica por la unidad seguida de tantos ceros como posiciones haya de separación.
- Si se cambia de unidad de derecha a izquierda, se divide por la unidad seguida de tantos ceros como posiciones haya de separación.

Ejemplo 1	4,56 kg = 45,6 hg	Hemos multiplicado por 10
Ejemplo 2	78,9 cg = 7,89 dg	Hemos dividido entre 10
Ejemplo 3	3,2 g = 3200 mg	Hemos multiplicado por 1000
Ejemplo 4	2634 dg = 0,2634 kg	Hemos dividido entre 10 000

Sistema Anglosajón de Unidades

Este sistema es el oficial en Estados Unidos y es usado extraoficialmente en muchos países. También se conoce con el nombre de **sistema imperial**.

Unidades de masa del Sistema Anglosajón de Unidades

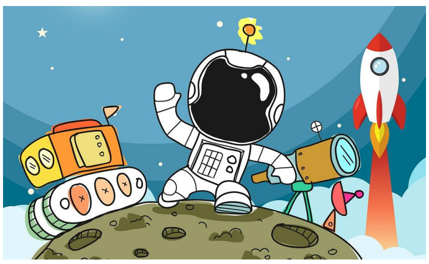
Las más importantes son:

- Onza (oz). 1 oz = 28,3495... g
- Libra (lb). 1 lb = 0,45359... kg

Masa y peso

Las palabras masa y peso se usan de manera indistinta en el lenguaje habitual. Pero significan magnitudes completamente distintas en el lenguaje científico, por lo que no deben ser intercambiadas en un contexto de estudio de las ciencias.

La masa depende del objeto, pero no de su posición: dos kilogramos de manzanas siempre son dos kilogramos. Pero el peso es la fuerza con la que un cuerpo celeste (estrella, planeta, satélite,...) atrae una determinada masa. Esos dos kilogramos de manzanas en el espacio pesan exactamente cero. En las asignaturas de Física estudiarás cómo se mide y calcula el peso.



Otra manera de explicar la diferencia es que tú siempre tienes la misma masa, pero pesas distinto en la Tierra que en la Luna (una sexta parte) que en Júpiter (unas dos veces y media) que en el espacio (nada).

Enunciados

Realiza las siguientes conversiones entre unidades del SI. Es imprescindible que en la respuesta utilices el símbolo correcto.

① Convierte 743 mg en gramos.

② Convierte 8,34 kg en decagramos.

③ Convierte 45,7 cg en decigramos.

④ Convierte 0,0046 kg en centigramos.

⑤ Convierte 0,12 hg en gramos.

⑥ Convierte 13,3 cg en miligramos.

⑦ Convierte 2,3 dag en hectogramos.

⑧ Convierte 348 mg en decigramos.

⑨ Convierte 457 g en kilogramos.

⑩ Convierte 0,82 g en miligramos.

Enunciados

⑪ Si te comes tres onzas de chocolate, ¿cuántos gramos de chocolate te has comido? Da el resultado redondeando a la unidad.

⑫ Si una persona tiene una masa de 100 libras, ¿cuál es su masa en kilogramos? Da el resultado redondeando a la décima.

⑬ El quintal es una unidad de masa que ha pasado por varios valores distintos a lo largo de la historia. Actualmente, un quintal equivale a 100 kg. Si un animal tiene una masa de 2,3 quintales, ¿cuál es su masa en kilogramos?

⑭ Hay varias definiciones de la unidad de masa llamada tonelada, pero la conocida como tonelada métrica es la más habitual en Europa. Equivale a mil kilogramos. Si un automóvil tiene una masa de 1,25 toneladas, ¿cuál es su masa en kilogramos?

⑮ La masa de las piedras preciosas se suele medir en quilates. Un quilate equivale a 0,2 gramos.

El mayor diamante conocido es el Cullinan, que tenía una masa en bruto de 3106 quilates. Calcula en gramos su masa, dando el resultado redondeado a la unidad.

A la derecha se ve una fotografía del diamante Cullinan, junto a su descubridor, Frederick Wells.

Unidades de tiempo del Sistema Internacional

La unidad de tiempo del SI es el segundo; su símbolo es «s». Este es el valor de los tres múltiplos y tres submúltiplos en el SI del segundo más importantes:

Unidad	kilosegundo	hectosegundo	decasegundo	segundo	decisegundo	centisegundo	milisegundo
Símbolo	ks	hs	das	s	ds	cs	ms
Valor	1000 s	100 s	10 s	1 s	0,1 s	0,01 s	0,001 s

Conversión entre estas unidades

En cada conversión solo habrá que multiplicar o dividir por una potencia de 10.

- ✱ Si se cambia de unidad de izquierda a derecha, se multiplica por la unidad seguida de tantos ceros como posiciones haya de separación.
- ✱ Si se cambia de unidad de derecha a izquierda, se divide por la unidad seguida de tantos ceros como posiciones haya de separación.

Uso habitual de estas unidades

Ya te habrás dado cuenta del poco uso que se da a estos múltiplos y submúltiplos. Como múltiplos se suelen utilizar el minuto, la hora, etc. y como submúltiplos se suele decir «décimas de segundo» en vez de «decisegundos», etc., sobre todo en los resultados de las competiciones deportivas.

Los submúltiplos que sí se usan mucho en ambientes científicos son los menores que el milisegundo, que estudiaremos en el nivel 3 de este curso.

Unidades de tiempo aceptadas por el SI

Hay tres unidades de tiempo que no pertenecen al SI, pero que se aceptan para su uso dentro de él, dada su universalidad e historia. Seguro que ya las conoces:

Unidad	minuto	hora	día
Símbolo	min	h	d
Valor	60 s	60 min	24 h

- ✱ **Ejemplo 1**: convierte 3 min en segundos.
  $3 \cdot 60 = 180$ s. Solución: 180 s.
- ✱ **Ejemplo 2**: convierte 240 min en horas.
  $240 : 60 = 4$ h. Solución: 4 h.

Otras unidades de tiempo

- ✱ **Semana**. Una semana equivale a 7 días.
- ✱ **Mes**. Es una unidad poco científica, porque cada mes tiene un número diferente de días. En algunos contextos (financieros, por ejemplo) se contempla que todos los meses tienen 30 días.
- ✱ **Año**. Las dificultades que presenta el año como unidad es que hay varias definiciones de año y que en cada definición no todos los años duran lo mismo. En cualquier caso, es una unidad muy útil y natural. Equivale a 12 meses.
- ✱ **Lustro**: cinco años; **decenio**: diez años; **siglo**: cien años; **milenio**: mil años.
- ✱ **Eón**. Esta unidad se usa en cosmología; equivale a mil millones de años. Se estima la edad del universo en unos 14 eones.

Enunciados

Realiza las siguientes conversiones entre unidades del SI. Es imprescindible que en la respuesta utilices el símbolo correcto.

① Convierte 2,3 das en decisegundos.

② Convierte 0,865 ks en segundos.

③ Convierte 15,6 ms en centisegundos.

④ Convierte 3,45 s en milisegundos.

⑤ Convierte 0,85 hs en decasegundos.

Enunciados

Realiza las siguientes conversiones entre unidades de tiempo. Es imprescindible que en la respuesta utilices el símbolo correcto.

⑥ Convierte 15 min en segundos.

⑦ Convierte 120 s en minutos.

⑧ Convierte 3 d en horas.

⑨ Convierte 7 h en minutos.

⑩ Convierte 0,5 h en minutos.

Enunciados

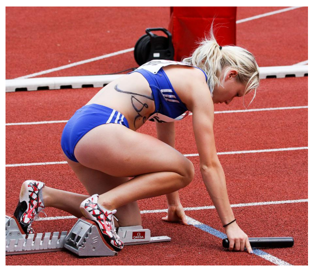
⑪ Calcula cuántos días hay en cinco semanas.

⑫ Calcula cuántos meses hay en un lustro.

⑬ Calcula cuántos lustros tiene un milenio.

⑭ Calcula cuántos segundos tiene un día.

⑮ Calcula cuántos minutos tiene un mes de 30 días.



⑯ En atletismo se considera salida falsa si el atleta se mueve antes de que pasen 150 ms tras el disparo. Si un atleta tarda menos de 0,15 s en moverse, ¿ha efectuado una salida falsa? Razona tu respuesta.

⑰ Se estima que el género *homo* apareció en la Tierra hace unos 200 milenios. En sociología se considera una generación el periodo de 25 años. Calcula cuántas generaciones de *homo* ha habido, aproximadamente.

⑱ Se estima que los dinosaurios se extinguieron hace 65 millones de años. Calcula cuántos eones hace que se extinguieron los dinosaurios.

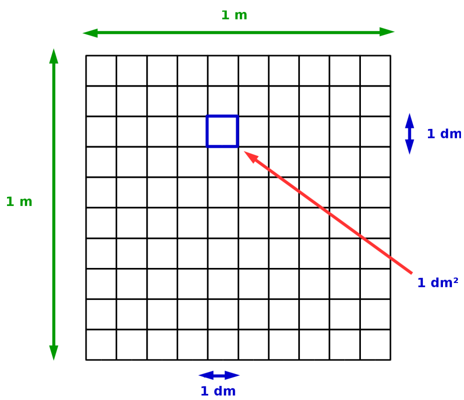
⑲ La llamada «hora de internet» es una propuesta de una empresa de relojería que consiste en dividir el día en mil *beats*. La hora de cada día se escribiría «@beats». ¿Qué hora corresponde a las @250?

Relación entre longitud y superficie

- La superficie es una **magnitud derivada** porque se obtiene como el cuadrado de la longitud, que es una magnitud fundamental del Sistema Internacional.
- Dada cualquier unidad de longitud, elevándola al cuadrado se obtiene una unidad de superficie.
- Por ejemplo, el metro es una unidad de longitud y el metro cuadrado es una unidad de superficie.

Relación entre unidades de superficie decimales consecutivas

Los múltiplos y submúltiplos de la longitud en el SI se van obteniendo multiplicando o dividiendo por 10. Sin embargo, los de superficie se van obteniendo multiplicando o dividiendo por 100.



Para entenderlo, vamos a estudiar gráficamente y calculando la relación entre un metro cuadrado ($1\,m^2$) y un decímetro cuadrado ($1\,dm^2$). Un metro cuadrado es la superficie de un cuadrado de lado un metro. Un decímetro cuadrado es la superficie de un cuadrado de lado un decímetro.

A la derecha se ve que en $1\,m^2$ hay $100\,dm^2$.

Lo vemos con un cálculo:

$$1\,m^2 = (1\,m)\cdot(1\,m) = (10\,dm)\cdot(10\,dm) = 100\,dm^2$$

Unidades de superficie del Sistema Internacional

La unidad de superficie del SI es el metro cuadrado; su símbolo es «m^2». Se puede utilizar con cualquiera de sus múltiplos y submúltiplos.

Este es el valor de los tres múltiplos más importantes:

Unidad	kilómetro cuadrado	hectómetro cuadrado	decámetro cuadrado	metro cuadrado
Símbolo	km^2	hm^2	dam^2	m^2
Valor	$1\,000\,000\ m^2$	$10\,000\ m^2$	$100\ m^2$	$1\ m^2$

Este es el valor de los tres submúltiplos más importantes:

Unidad	metro cuadrado	decímetro cuadrado	centímetro cuadrado	milímetro cuadrado
Símbolo	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
Valor	$1\ m^2$	$0{,}01\ m^2$	$0{,}0001\ m^2$	$0{,}000\,001\ m^2$

Cambio de unidad

Para cambiar de unidad habrá que multiplicar o dividir por una potencia de 100.

- Si se cambia de unidad de izquierda a derecha, se multiplica por la unidad seguida del doble de ceros que posiciones haya de separación.
- **Ejemplo 1**: convierte $8{,}3292\ km^2$ en m^2. Hay tres posiciones a la derecha, luego seis ceros: hay que multiplicar por 1 000 000. Solución: $8\,329\,200\ m^2$.
- Si se cambia de unidad de derecha a izquierda, se divide por la unidad seguida del doble de ceros que posiciones haya de separación.
- **Ejemplo 2**: convierte $36\,345\ dm^2$ en dam^2. Hay dos posiciones a la izquierda, luego cuatro ceros: hay que dividir entre 10 000. Solución: $3{,}6345\ dam^2$.

Unidades de superfice afines al Sistema Internacional

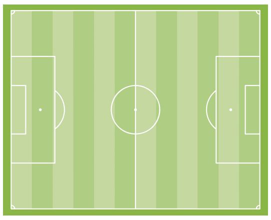
La magnitud llamada «superficie» también se puede llamar «área». Esto hace sorprendente que exista una unidad de superficie también llamada «área». Esta unidad se sigue usando por motivos históricos, pero debería ser paulatinamente sustituida por su equivalente en el SI.

Unidad: área; símbolo: a; valor: 1 a = 100 m^2. Por tanto 1 a = 1 dam^2

Esta unidad admite todos los múltiplos y submúltiplos del SI, pero solo es de uso común la hectárea:

Unidad: hectárea; símbolo: ha; valor: 1 ha = 100 a = 100 dam^2 = 1 hm^2

Comparación de uso común



En los medios de comunicación es habitual sustituir la palabra «hectárea» por la expresión «campo de fútbol». La superficie de un campo de fútbol válido para competiciones internacionales varía entre 0,64 ha y 0,825 ha, por lo que la comparación es muy poco precisa.

Sistema Anglosajón de Unidades

Este sistema es el oficial en Estados Unidos y es usado extraoficialmente en muchos países. También se conoce con el nombre de **sistema imperial**.

Unidades de superficie del Sistema Anglosajón de Unidades

Además de la pulgada cuadrada (in^2), pie cuadrado (ft^2), yarda cuadrada (yr^2), etc., también se utiliza el acre.

Unidad: acre; símbolo: ac; valor: 4046,8564224 m^2

Tradicionalmente, un acre se definía como la superficie que se puede arar con la ayuda de dos bueyes en un día de trabajo.

Ejemplos

Ejemplo 1

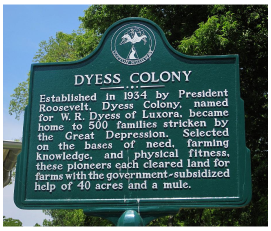
En un periódico de Nueva York se publica un anuncio para vender un piso y se dice que tiene una superficie de 500 pies cuadrados. Calcula la superficie en metros cuadrados redondeando a la unidad.

$500 \cdot 0{,}3048^2 = 46{,}45152$ m^2. Solución: 46 m^2.

Ejemplo 2

En Estados Unidos en 1865 se publicó una orden que otorgaba 40 acres y una mula a las familias de esclavos que habían sido liberadas. Calcula la superficie en hectómetros cuadrados redondeando a la décima.

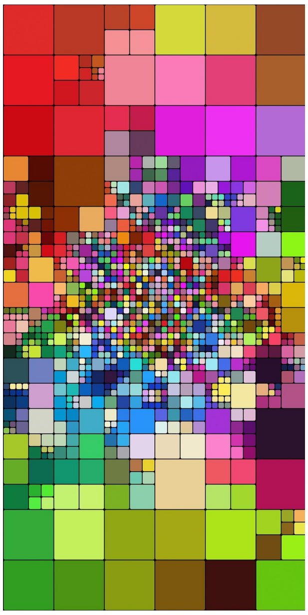
$40 \cdot 4046{,}8564224 = 161874{,}2569$ m^2 $= 16{,}18742569$ hm^2. Solución: 16,2 hm^2.



(La expresión «40 acres y una mula» se ha mantenido desde entonces para situaciones parecidas. El director de cine estadounidense Spike Lee llamó así a su productora de cine).

Enunciados

Realiza las siguientes conversiones entre unidades del SI. Es imprescindible que en la respuesta utilices el símbolo correcto.



① Convierte 2,839 km^2 en hectómetros cuadrados.

② Convierte 29 826 mm^2 en decímetros cuadrados.

③ Convierte 593 m^2 en decámetros cuadrados.

④ Convierte 0,34 hm^2 en metros cuadrados.

⑤ Convierte 2984 cm^2 en metros cuadrados.

⑥ Convierte 0,296 dam^2 en decímetros cuadrados.

⑦ Convierte 0,27 m^2 en centímetros cuadrados.

⑧ Convierte 298 339 dam^2 en kilómetros cuadrados.

⑨ Convierte 27,356 cm^2 en milímetros cuadrados.

⑩ Convierte 0,000 038 dam^2 en centímetros cuadrados.

Enunciados

⑪ ¿Cuántos metros cuadrados tiene una finca de 2,34 ha?

⑫ ¿Cuántas áreas tiene un kilómetro cuadrado?

⑬ Si divides una finca de 20 ha en 50 parcelas iguales, ¿cuántas áreas tendrá cada parcela?

⑭ Calcula cuántas hectáreas tiene un acre; da el resultado redondeando a la milésima.

⑮ Si vendemos los pisos de un edificio de seis plantas que tiene una superficie de cinco áreas por planta a razón de 1000 euros cada metro cuadrado, ¿cuánto dinero obtenemos?

⑯ La Organización Mundial de la Salud aconseja que en las ciudades haya al menos nueve metros cuadrados de zonas verdes por habitante. ¿Cuál sería la superficie mínima aconsejada para una ciudad de tres millones de habitantes? Da el resultado en kilómetros cuadrados.

⑰ Un urbanista se plantea dividir una zona de terreno que ocupa 1,5 hectáreas en parcelas de 750 metros cuadrados. ¿Cuántas parcelas obtendrá?

⑱ ¿Cuántos milímetros cuadrados tiene una pulgada cuadrada? Da el resultado redondeando a la unidad.

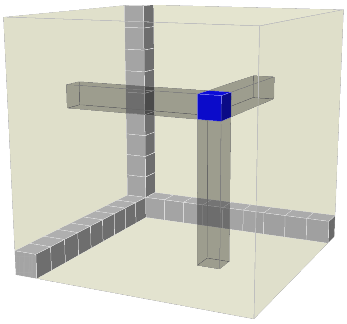
⑲ ¿Cuántos hectómetros cuadrados tiene una milla náutica cuadrada? Da el resultado redondeando a la unidad.

Relación entre longitud y volumen

- ✱ El volumen es una **magnitud derivada** porque se obtiene como el cubo de la longitud, que es una magnitud fundamental del Sistema Internacional.
- ✱ Dada cualquier unidad de longitud, elevándola al cubo se obtiene una unidad de volumen.
- ✱ Por ejemplo, el metro es una unidad de longitud y el metro cúbico es una unidad de volumen.

Relación entre unidades de volumen decimales consecutivas

Los múltiplos y submúltiplos de la longitud en el SI se van obteniendo multiplicando o dividiendo por 10. Sin embargo, los de volumen se van obteniendo multiplicando o dividiendo por 1000.



Para entenderlo, vamos a estudiar gráficamente y calculando la relación entre un metro cúbico (1 m^3) y un decímetro cúbico (1 dm^3). Un metro cúbico es el volumen de un cubo de lado un metro. Un decímetro cúbico es el volumen de un cubo de lado un decímetro.

A la derecha se ve que en 1 m^3 (el cubo grande trasparente) hay 1000 dm^3 (como el cubo azul).

Lo vemos con un cálculo:

$1\ m^3 = (1\ m)\cdot(1\ m)\cdot(1\ m) = (10\ dm)\cdot(10\ dm)\cdot(10\ dm) = 1000\ dm^3$

Unidades de volumen del Sistema Internacional

La unidad de volumen del SI es el metro cúbico; su símbolo es «m^3». Se puede utilizar con cualquiera de sus múltiplos y submúltiplos.

Este es el valor de los tres múltiplos más importantes:

Unidad	kilómetro cúbico	hectómetro cúbico	decámetro cúbico	metro cúbico
Símbolo	km^3	hm^3	dam^3	m^3
Valor	1 000 000 000 m^3	1 000 000 m^3	1000 m^3	1 m^3

Este es el valor de los tres submúltiplos más importantes:

Unidad	metro cúbico	decímetro cúbico	centímetro cúbico	milímetro cúbico
Símbolo	m^3	dm^3	cm^3 (extraoficial: cc)	mm^3
Valor	1 m^3	0,001 m^3	0,000 001 m^3	0,000 000 001 m^3

Cambio de unidad

Para cambiar de unidad habrá que multiplicar o dividir por una potencia de 1000.

- ✱ Si se cambia de unidad de izquierda a derecha, se multiplica por la unidad seguida del triple de ceros que posiciones haya de separación.
- ✱ **Ejemplo 1**: convierte 8,3292 km^3 en hm^3. Hay una posición a la derecha, luego tres ceros: hay que multiplicar por 1000. Solución: 8329,2 hm^3.
- ✱ Si se cambia de unidad de derecha a izquierda, se divide por la unidad seguida del doble de ceros que posiciones haya de separación.
- ✱ **Ejemplo 2**: convierte 36 345 dm^3 en dam^3. Hay dos posiciones a la izquierda, luego seis ceros: hay que dividir entre 1 000 000. Solución: 0,363 45 dam^3.

Unidades de volumen afines al Sistema Internacional

Tradicionalmente se han distinguido las magnitudes «volumen» y «capacidad»; la palabra «volumen» se utiliza para medir sólidos y la palabra «capacidad» para medir líquidos. En realidad, es la misma magnitud. La unidad por excelencia para medir líquidos es el litro, que tiene equivalencia perfecta en el Sistema Internacional y se admite usar en él.

Unidad: litro; símbolos: l, L; valor: 1 l = 1 dm^3

El símbolo de litro es «l» (ele minúscula), pero también se admite usar «L» (ele mayúscula) porque la ele minúscula se confunde en muchos tipos de letra con el numeral uno («1»). En algunos idiomas se usa el símbolo «ℓ» (ele minúscula cursiva).

El litro admite todos los múltiplos y submúltiplos del SI. Estos son los tres múltiplos y submúltiplos más sencillos:

Unidad	kilolitro	hectolitro	decalitro	litro	decilitro	centilitro	mililitro
Símbolo	kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
Valor	1000 l	100 l	10 l	1 l	0,1 l	0,01 l	0,001 l

Conversiones

Para convertir entre litros y unidades cúbicas, son útiles estas equivalencias:

1 l = 1 dm^3; 1 kl = 1 m^3; 1 ml = 1 cm^3

Sistema Anglosajón de Unidades

Este sistema es el oficial en Estados Unidos y es usado extraoficialmente en muchos países. También se conoce con el nombre de **sistema imperial**.

Unidades de volumen del Sistema Anglosajón de Unidades

Además de la pulgada cúbica (in^3), pie cúbico (ft^3), yarda cúbica (yr^3), etc., también se utilizan la pinta, el galón y el barril, pero tienen distinto valor en el Reino Unido que en Estados Unidos. En esta tabla damos unos valores aproximados:

Unidad	pinta (RU)	pinta (EU)	galón (RU)	galón (EU)	barril (RU)	barril (EU)
Valor	0,568 l	0,473 l	4,546 l	3,785 l	159,113 l	158,987 l

Ejemplos

Ejemplo 1

Si pides media pinta de cerveza en un *pub* del Reino Unido, ¿cuántos centímetros cúbicos de cerveza te sirven? (Recuerda que las personas menores de edad no deben beber bebidas alcohólicas y las mayores de edad deberían hacerlo con moderación.)

0,568 : 2 = 0,284 l = 0,284 dm^3 = 284 cm^3. Solución: 284 cm^3

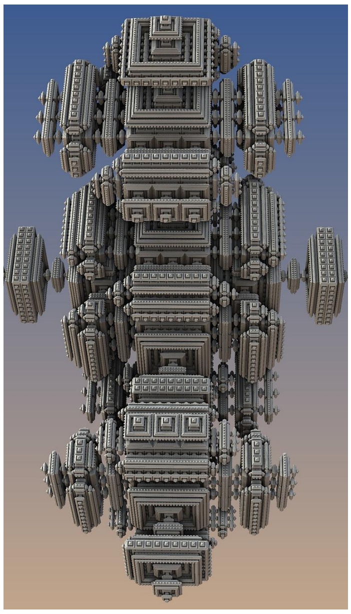
Ejemplo 2

Si en Estados Unidos echas 23 galones de combustible en tu furgoneta, ¿cuántos litros has echado? Da el resultado redondeado a la décima.

23 · 3,785 = 87,055 l. Solución: 87,1 l.

Enunciados

Realiza las siguientes conversiones entre unidades del SI. Es imprescindible que en la respuesta utilices el símbolo correcto.



① Convierte 3825 hm^3 en kilómetros cúbicos.

② Convierte 0,0035 cm^3 en milímetros cúbicos.

③ Convierte 8659,1 dm^3 en metros cúbicos.

④ Convierte 0,00347 dam^3 en decímetros cúbicos.

⑤ Convierte 12 856 cm^3 en metros cúbicos.

⑥ Convierte 0,1286 km^3 en hectómetros cúbicos.

⑦ Convierte 182,3 m^3 en decámetros cúbicos.

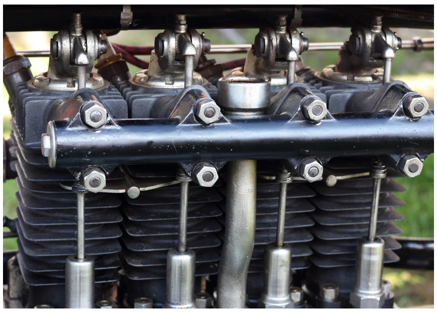
⑧ Convierte 0,3842 dm^3 en milímetros cúbicos.

⑨ Convierte 3400 dm^3 en decámetros cúbicos.

⑩ Convierte 185,7 dam^3 en hectómetros cúbicos.

Enunciados

Realiza las siguientes conversiones entre unidades de volumen. Es imprescindible que en la respuesta utilices el símbolo correcto.



⑪ Convierte 2345 l en metros cúbicos.

⑫ Convierte 0,37 dm^3 en decilitros.

⑬ Convierte 0,457 dam^3 en litros.

⑭ Convierte 349 ml en decímetros cúbicos.

⑮ Convierte 2934 mm^3 en mililitros.

Enunciados

⑯ La cilindrada de un motor es el volumen conjunto de sus cilindros (el lugar del motor en el que explota la mezcla de combustible y aire). Si un motor es de 125 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen en litros de sus cilindros?

⑰ ¿Cuántos centímetros cúbicos de bebida hay en una lata de 0,33 litros?

⑱ ¿Qué volumen es mayor: diez pintas de Estados Unidos o un galón del Reino Unido?

⑲ Calcula la diferencia entre el barril del Reino Unido y el de Estados Unidos. Da el resultado en centímetros cúbicos.

⑳ El precio del petróleo se suele dar en dólares estadounidenses por barril de Estados Unidos. Si cada litro de petróleo costara 0,4 dólares, ¿cuánto costaría un barril? Da el resultado recondeado a la centésima.

La magnitud «dinero»

Está claro que el dinero es una propiedad que cumple perfectamente con la definición de magnitud. De hecho, la mayor parte de las operaciones en las que interviene el dinero se hacen con mucha precisión.

Historia del dinero

La historia del dinero es apasionante. Se ha usado como moneda (la unidad de dinero) conchas de animales, la sal (de ahí la palabra «salario»), diversos metales para hacer monedas y papel para hacer billetes. El respaldo típico del dinero es el oro que se almacena en las criptas de los bancos centrales. En la actualidad se usa cada vez más el dinero electrónico, que no tiene presencia física y solo existe en los ordenadores.

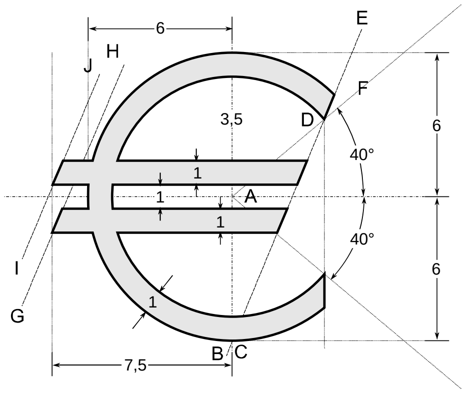
Unidades de dinero

Cada país tiene su propia moneda, lo que obliga a realizar cambios entre ellas. La unión económica de algunos países ha ayudado a que haya alguna unificación, como ocurre con la moneda llamada «euro», que es oficial en 21 países en febrero de 2021 y es aceptada comunmente en muchos más. El dólar estadounidense también es aceptado en muchos países además del propio.

Tanto el euro como el dólar estadounidense están divididos en centésimas partes. La centésima parte de un euro es un céntimo y la centésima parte de un dólar es un centavo. Por eso en las cantidades finales de dinero en estas dos monedas siempre hay que redondear a la centésima.

En la tabla de más abajo, a la izquierda, se ven algunos ejemplos de monedas actuales; a la derecha está la explicación técnica del diseño del símbolo del euro.

País	Moneda	Símbolo
Zona euro	Euro	€
Estados Unidos	Dólar estadounidense	$
China	Renminbi o yuán	¥
Japón	Yen	¥
Reino Unido	Libra esterlina	£
India	Rupia	₹
Vietnam	Đồng	₫
Filipinas	Peso filipino	₱
Mongolia	Tögrög	₮



Ejemplos

Ejemplo 1. Si el cambio dólar-euro está en 1,2043 dólares cada euro, ¿cuánto nos dan si gastamos 50 euros?

$50 \cdot 1{,}2043 = 60{,}215$ \$. Solución: 60,22 \$

Ejemplo 2. Si el cambio euro-dólar está en 0,8304 euros cada dólar, ¿cuánto nos dan si gastamos 57 dólares?

$57 \cdot 0{,}8304 = 47{,}3328$ €. Solución: 47,33 €

Enunciados

En las siguientes frases aparece una magnitud y una medida asociada a ella. Di cuál es la magnitud y expresa la medida con el número y el símbolo adecuados.

① Apenas han pasado 23 segundos y ya te aburres.

② Esta mesita tiene 18,4 centímetros de anchura.

③ En una semana he engordado 4 hectogramos.

④ Me voy a comprar un piso de 78 metros cuadrados.

⑤ En el embalse quedan 45 hectómetros cúbicos de agua.

⑥ Me gasté 250 euros en tu regalo.

⑦ La charla duró 40 minutos.

⑧ En una película aparece una mujer de 50 pies.

⑨ Ha nacido un elefante de 125 kilogramos.

⑩ Mi parcela tiene 7 hectáreas.

⑪ He hecho una donación de sangre de 400 mililitros.

⑫ Un perrito caliente en Londres me costó 3 libras esterlinas.

⑬ Hacen falta garrafas de agua de 5 litros.

⑭ Un chuletón de 1200 gramos es bastante grande.

⑮ Las bacterias miden mucho menos de un milímetro.

⑯ Dentro de cuatro horas tengo que volver a trabajar.

⑰ Un vuelo a Estados Unidos te saldrá por más de 500 dólares.

⑱ El mar de Aral ha perdido más de 50 000 kilómetros cuadrados.

⑲ El cerebro humano medio ocupa 1,1 litros.

⑳ El cerebro humano medio tiene una masa de 1,4 kilogramos.

㉑ La Luna está a unos 400 000 kilómetros de la Tierra.

㉒ La luz tarda más de ocho minutos en llegar desde el Sol a la Tierra.

㉓ La distancia del maratón es 42,195 kilómetros.

㉔ Елена Исинбаева (Yelena Isinbáyeva) llegó a saltar 5,06 metros.

㉕ Una cancha de baloncesto europeo ocupa 420 metros cuadrados.

㉖ La red de tenis debe estar a 914 milímetros del suelo en el centro.

①	3,4 m =	dm	②	45 dg =	g	③	120 s =	min
④	0,25 dm^2 =	cm^2	⑤	1,15 km^3 =	hm^3	⑥	3,24 kl =	l
⑦	0,5 h =	min	⑧	2,34 cm =	mm	⑨	345 mg =	dg
⑩	34 a =	dam^2	⑪	45,6 g =	dag	⑫	78 dm^3 =	l
⑬	1,27 km =	dam	⑭	10 h =	min	⑮	0,15 dam =	cm
⑯	128 mm^3 =	cm^3	⑰	678 cm^3 =	ml	⑱	0,9 hl =	dal
⑲	0,1267 m^3 =	dm^3	⑳	0,2 min =	s	㉑	34 cm^2 =	dm^2
㉒	0,25 dag =	cg	㉓	0,156 kg =	g	㉔	23 kl =	m^3
㉕	180 min =	h	㉖	0,12 m^3 =	dm^3	㉗	0,98 g =	cg
㉘	1,23 dam^2 =	m^2	㉙	78,2 cg =	mg	㉚	0,23 ha =	a
㉛	0,89 m =	cm	㉜	13,2 cl =	dl	㉝	0,0234 dam^2 =	dm^2
㉞	12 cg =	g	㉟	0,4 h =	min	㊱	76,2 hg =	kg
㊲	0,15 g =	mg	㊳	15 hm^2 =	ha	㊴	5,7 l =	dl
㊵	2,8 cm^3 =	mm^3	㊶	0,003 dam^2 =	m^2	㊷	1200 cm^2 =	dm^2
㊸	0,089 dal =	dl	㊹	300 min =	h	㊺	32 ml =	cm^3
㊻	907 g =	kg	㊼	856 l =	hl	㊽	432 m =	dam
㊾	1,5 h =	min	㊿	0,9 km =	dam	51	0,82 dm^2 =	cm^2
52	0,0032 cm^3 =	mm^3	53	67 hg =	kg	54	54 cm =	m
55	87 mm =	m	56	71 dg =	dag	57	0,24 m =	mm
58	2,5 min =	s	59	38 ml =	dl	60	1,23 hm =	dam
61	0,175 dam^3 =	m^3	62	7 m^2 =	cm^2	63	72 l =	hl
64	0,72 m^3 =	dm^3	65	0,09 hl =	cl	66	1,5 kg =	dag
67	0,73 dm^2 =	mm^2	68	0,96 hg =	cg	69	0,0891 m^3 =	dm^3
70	785 dam^2 =	ha	71	455 l =	m^3	72	7 a =	m^2
73	300 ml =	dm^3	74	1 h =	s	75	2 m^3 =	hl

① 0,34 dam = dm	② 6 min = s	③ 4 hm^3 = km^3
④ 2 hm^2 = m^2	⑤ 18 mm^2 = cm^2	⑥ 0,034 km^3 = hm^3
⑦ 43 hm^2 = ha	⑧ 1298 dm^3 = m^3	⑨ 3,56 hm = m
⑩ 509 mm = dm	⑪ 6 min = h	⑫ 0,2 h = min
⑬ 180 min = h	⑭ 0,04 cm^3 = mm^3	⑮ 0,87 kl = dal
⑯ 0,0049 hm^3 = m^3	⑰ 0,03 dm^2 = mm^2	⑱ 82 l = dm^3
⑲ 2,34 kl = m^3	⑳ 0,89 kg = g	㉑ 341 m^2 = dam^2
㉒ 23 m^3 = dam^3	㉓ 90 s = min	㉔ 213 dal = hl
㉕ 35,67 cm^2 = m^2	㉖ 0,87 dg = mg	㉗ 82,3 dam^2 = a
㉘ 0,2 dg = g	㉙ 0,8 hm = km	㉚ 8923 dm^2 = dam^2
㉛ 8273 hm^2 = km^2	㉜ 0,45 dam^2 = dm^2	㉝ 600 s = min
㉞ 7 dl = hl	㉟ 12,5 ha = hm^2	㊱ 8,92 cm = m
㊲ 30 min = h	㊳ 86 cm^3 = dm^3	㊴ 9,02 m^3 = kl
㊵ 45 cl = l	㊶ 2,3 dal = dl	㊷ 67 g = kg
㊸ 5 h = min	㊹ 3 cg = dag	㊺ 0,89 cm = mm
㊻ 0,93 hl = l	㊼ 75,1 ml = cm^3	㊽ 0,02 cl = ml
㊾ 3,5 min = s	㊿ 0,734 g = mg	51 2,4 hg = kg
52 2,34 m = hm	53 483 ml = dl	54 66 s = min
55 2,3 hg = dag	56 3,56 km = dam	57 44 mg = g
58 45 dm^3 = l	59 9,76 dl = ml	60 0,3 min = s
61 0,0034 m^3 = dm^3	62 0,023 dag = dg	63 2396 l = kl
64 1,08 m^2 = cm^2	65 21 dam^3 = m^3	66 65 cm^3 = ml
67 158 a = dam^2	68 0,23 km^2 = dam^2	69 4,5 h = min
70 89 dam = km	71 0,234 m = cm	72 187 mm^3 = cm^3
73 235 m^2 = a	74 3,4 m^3 = hl	75 0,01 h = s

Expresiones complejas e incomplejas

La expresión de una medida se puede escribir de dos formas:

* En la forma compleja se usa más de una unidad.
* En la forma incompleja se usa solo una unidad.

Puede parecer extraño, pero es muy habitual en la vida real utilizar expresiones en forma compleja, especialmente en las medidas de tiempo. Sin embargo, para hacer operaciones se prefiere utilizar la forma incompleja, por ser mucho más sencillas.

Ejemplos

Ejemplo 1	Esta película dura 1 h 30 min	Forma compleja: horas y minutos
Ejemplo 2	Esta jugadora mide 1,84 m	Forma incompleja: metros
Ejemplo 3	El récord es 44 min 32,24 s	Forma compleja: minutos y segundos
Ejemplo 4	El pueblo está a 23,4 km	Forma incompleja: kilómetros

Conversión entre las dos formas

En muchos problemas es necesario convertir una medida de una forma a la otra. En este nivel vamos a estudiar cómo hacerlo cuando las unidades siguen un patrón decimal, como las de longitud, superficie, volumen y masa. En el nivel 2 estudiaremos cómo hacerlo cuando las unidades siguen un sistema sexagesimal, como las de tiempo.

Paso de compleja a incompleja

Hay que elegir qué unidad se va a usar en la forma incompleja, convertir todas las medidas de la forma compleja a la unidad elegida y sumarlo todo.

Ejemplo 5. Expresa 8,2 km 7,5 hm 9,02 dam 3 m 18 dm en metros.

8,2 km 7,5 hm 9,02 dam 3 m 18 dm = 8200 m 750 m 90,2 m 3 m 0,18 m =

= 9043,38 m. Solución: 9043,38 m

Ejemplo 6. Expresa 21 dam² 47 m² 15 dm² en metros cuadrados

21 dam² 47 m² 15 dm² = 2100 dam² 47 m² 0,15 dm² = 2147,15 m²

Solución: 2147,15 m²

Paso de incompleja a compleja

Aunque se podría hacer de muchas maneras, el objetivo de esta conversión suele ser expresar todas las medidas con números enteros que tengan la menor cantidad de dígitos que sea posible, por lo que hay que usar los múltiplos o submúltiplos que corresponda. Observa el parecido de este método con la expresión polinómica de un número.

Ejemplo 7. Expresa 236,28 g en forma compleja.

236,28 g = 200 g + 30 g + 6 g + 0,2 g + 0,08 g = 2 hg 3 dag 6 g 2 dg 8 cg

Solución: 2 hg 3 dag 6 g 2 dg 8 cg

Ejemplo 8. Expresa 34,00028 m³ en forma compleja.

34,00028 m³ = 34 m³ + 0,00028 m³ = 34 m³ 280 cm³

Solución: 34 m³ 280 cm³

Observa en el último ejemplo que en la forma compleja no aparecen los decímetros cúbicos, pero que sus ceros son imprescindibles en la forma incompleja.

Enunciados

En las siguientes frases aparece una magnitud y una medida asociada a ella. Di cuál es la magnitud, cuáles son las unidades utilizadas y si la medida está en forma compleja o incompleja.

① El radio medio de la Tierra es 6501 kilómetros.

② El atleta Eliud Kipchoge corrió un maratón en 1 h 59 min 40 s.

③ La isla de Tenerife ocupa 2034,38 kilómetros cuadrados.

④ La tenista Martina Hingis ganó su primer Grand Slam con 16 años y 117 días.

⑤ El baloncestista Pau Gasol mide, para la NBA, siete pies y una pulgada.


La Tierra

Eliud Kipchoge


Tenerife


Martina Hingis


Pau Gasol

Enunciados

⑥ Expresa 3,6 km 9,3 hm 1,7 dam 3,7 m 4,6 dm en metros.

⑦ Expresa 7 hl 5 dal 9 l 8 dl 4 cl 1 ml en litros.

⑧ Expresa 7 kg 5 hg 4 dag 2 g 3 dg 8 mg en gramos.

⑨ Expresa 5,67 kg 9,8 dag 45,7 g 345 mg en gramos.

⑩ Expresa 9 km^2 43 hm^2 19 dam^2 38 m^2 41 dm^2 en metros cuadrados.

⑪ Expresa 15 km^2 2 hm^2 15,2 m^2 33,8 dm^2 en metros cuadrados.

⑫ Expresa 3 km^3 561 hm^3 45 dam^3 93 m^3 38 dm^3 en metros cúbicos.

Enunciados

Expresa las siguientes medidas en forma compleja de modo que todos los números usados sean enteros y con el menor número posible de dígitos.

⑬ 67,923 g

⑭ 1894,023 m

⑮ 9070,203 l

⑯ 830802,273 m^2

⑰ 1845002,2837 m^3

① El cabello humano crece 0,3 milímetros al día. ¿Cuánto crece en 30 días? Da el resultado en milímetros redondeando a la unidad.

② Hay tres objetos que llamamos A, B y C situados en línea recta como se ve:

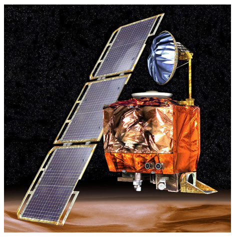
La distancia entre A y B es 3 m 9 dm 8 cm 9 mm; la distancia entre A y C es 4,832 metros. Calcula la distancia entre B y C; da el resultado en milímetros.

③ ¿Cuantos botes de 750 centímetros cúbicos se pueden llenar con 15 litros de líquido?

④ ¿Cuántos elefantes de 10 000 kilogramos hacen falta para equilibrar en una balanza una ballena azul de 150 toneladas?

⑤ En una plantación de 2,5 hectáreas se dedican 1 hm^2 52 dam^2 78 m^2 a hortalizas, 89 dam^2 49 m^2 a fruta y el resto a instalaciones auxiliares. Calcula en decámetros cuadrados la superficie que no es productiva.

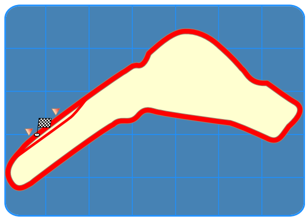
⑥ La sonda Mars Climate Orbiter quedó destruida al entrar en la atmósfera de Marte en 1999. Sufrió el problema de que el equipo de control en Tierra interpretaba las distancias en millas y el *software* de la sonda en kilómetros. Cada milla de viaje, ¿cuántos metros de error se acumulaban? Da el resultado redondeando a la unidad.



⑦ Vendemos un saco de 5,71 kilogramos de grano a un precio de 3,25 euros el kilogramo. ¿Cuánto dinero obtendremos?

⑧ Si dividimos equitativamente 0,625 kilogramos de jamón en siete bocadillos, ¿cuánto jamón pondremos en cada uno? Da el resultado en gramos redondenando a la décima.

⑨ Con el reglamento de 2021, una carrera de Fórmula 1 no puede exceder los 305 kilómetros. El circuito de Monza tiene 57 hectómetros. ¿Cuántas vueltas, como máximo, habrá que dar en él en un gran premio de Fórmula 1?



⑩ ¿Cuántos decímetros cuadrados tiene un piso de 1000 pies cuadrados? Da el resultado redondeando a la unidad.

⑪ Si de un recipiente de 4 metros cúbicos extraes 500 botellas de 300 mililitros, ¿cuánto queda? Da el resultado en litros.

⑫ Si la superficie del cráneo de una persona es de tres decímetros cuadrados y la densidad de su cabello es de 350 pelos cada centímetro cuadrado, ¿cuántos pelos tendrá en total en el cráneo? Puedes obtener como consecuencia de este problema que hay **muchas** personas con el mismo número de pelos.

⑬ Queremos comprar una parcela de 0,23 hectáreas a un precio de 120 euros el metro cuadrado. ¿Cuánto nos costará?

Enunciados

① Un arquitecto se plantea dividir cada planta de un edificio que ocupa 0,15 hectáreas de terreno en viviendas de 120 metros cuadrados. ¿Cuántas viviendas podrá tener cada planta?

② En condiciones normales, un mililitro de mercurio tiene una masa de 13,5 gramos. Calcula la masa de un litro de mercurio y da el resultado en kilogramos.

③ Una velocidad común en las sondas de exploración planetaria cuando viajan por el espacio es 20 000 kilómetros cada hora. A esa velocidad, ¿cuántos kilómetros se recorren en un segundo? Da el resultado redondeado a la décima.

④ El agua de mar tiene (aproximadamente) 35 gramos de sal en cada litro. ¿Cuántos kilogramos de sal hay en un metro cúbico de agua de mar?

⑤ De una barrica de vino de 2,2 hectolitros, ¿cuántas botellas de 75 centilitros se pueden obtener?

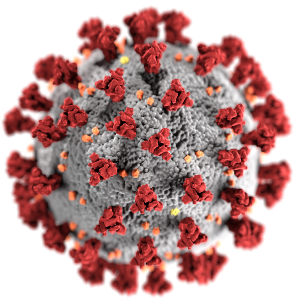
⑥ Cortamos una cuerda azul de 2,11 metros en nueve partes iguales y una cuerda roja de 470 milímetros en dos partes iguales. ¿Qué partes son más largas, las azules o las rojas?

⑦ Si un colibrí bate las alas 50 veces cada segundo, ¿cuántos centisegundos tarda en cada batida de alas?

⑧ La velocidad del sonido depende del medio por el que se propague. En el aire el sonido avanza 343 metros cada segundo y en el agua 1593 metros cada segundo. Si un sonido fuerte se propagara por el aire y por el agua, al cabo de un minuto de producirse ¿cuánta distancia iría por delante el sonido en el agua que en el aire? Da el resultado en kilómetros.

⑨ Un grifo pierde 25 milímetros cúbicos cada segundo. ¿Cuántos litros pierde en un día?

⑩ En 2020 la empresa farmacéutica Pfizer desarrolló una vacuna contra el SARS-CoV-2, el coronavirus que puede provocar la COVID-19. La vacuna se distribuye en viales de 0,45 militros; para preparar las vacunas hay que añadir a cada vial 1,8 mililitros de suero. Cada dosis individual de vacuna es de 0,3 mililitros. ¿Cuál es el número máximo de dosis de vacuna que se pueden obtener de un vial?



Concepto de fracción

Las fracciones aparecen cuando se divide algo en varias partes iguales y se toman unas cuantas de esas partes. Lo que se divide se llama la **unidad**. El número de partes en que se divide se llama **denominador**. El número de partes que se toman se llama **numerador**.

- ✱ Ejemplo 1: llega una pizza a casa que está dividida en ocho trozos y tú te comes tres trozos. La pizza es la unidad, el denominador es 8 y el numerador es 3.
- ✱ Ejemplo 2: estás leyendo un libro de 200 páginas y ya has leído 150. El libro es la unidad, el denominador es 200 y el numerador es 150.
- ✱ Ejemplo 3: en una familia hay cinco hermanos y dos de ellos son chicos. El conjunto de hermanos es la unidad, el denominador es 5 y el numerador es 2.

Escritura y lectura de fracciones

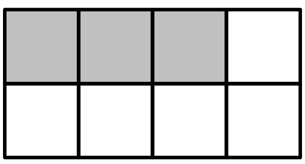
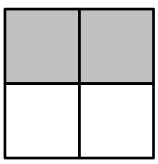
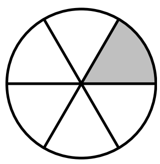
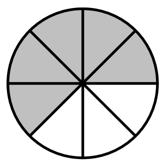
- ✱ Las fracciones se escriben con una pequeña barra horizontal, el numerador encima y el denominador debajo. Verás a veces escritas las fracciones con la barra diagonal; aunque se puede hacer, hay que saber cómo, así que tú no lo hagas hasta que te expliquen la manera de hacerlo correctamente.
- ✱ Se nombran diciendo el número del numerador y luego el del denominador acabado en -avo, salvo que el denominador sea menor de 11, para los que se usan nombres especiales: medio, tercio, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno y décimo.

	Fracción	Lectura	Numerador	Denominador
Ejemplo 4	$\frac{3}{8}$	Tres octavos	3	8
Ejemplo 5	$\frac{150}{200}$	Ciento cincuenta doscientosavos	150	200
Ejemplo 6	$\frac{2}{5}$	Dos quintos	2	5

Representación gráfica de fracciones

Para representar gráficamente una fracción se hace un dibujo de alguna figura geométrica sencilla, como un rectángulo o un círculo, se divide en las partes iguales que indique el denominador de algún modo que sea fácil de realizar y se señalan de alguna forma las partes que indique el numerador.

El objetivo de representar gráficamente las fracciones es entender mejor los conceptos y pensar los problemas. Por eso, no se suele hacer ni con números grandes ni con muchísima exactitud. Puedes dibujarlas a mano alzada.

Ejemplo 7	Ejemplo 8	Ejemplo 9	Ejemplo 10
			
$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{8}$

Enunciados

En las siguientes frases aparece una fracción. Di cuáles son el denominador y el numerador, escribe la fracción y cómo se lee.

① En un almacén hay veinte cajas, de las que quince son de tornillos.

② En un parque infantil hay trece juegos, de los que cuatro son columpios.

③ En un piso hay siete habitaciones y dos de ellas tienen cuarto de baño.

④ Tengo treinta videojuegos y cinco son de carreras.

⑤ De los seis trozos de la pizza yo me comí tres.

⑥ De las veinticinco vueltas a la pista, corrió trece en menos de dos minutos.

⑦ He comprado dos manzanas y me he comido una antes de llegar a casa.

⑧ Conozco en persona a veinte amigos de los noventa que tengo en una red social.

⑨ De las diez personas de casa, ya se han vacunado seis.

⑩ Voy por el kilómetro catorce y la carrera es de veintiuno.

⑪ De los cinco cantantes del grupo, cuatro son rubios.

⑫ De las cuatro horas que he estudiado, he aprovechado tres.

⑬ He lanzado a canasta tres veces y he anotado dos.

⑭ El tenista Rafael Nadal ganó en su carrera profesional las catorce veces que jugó la final en Roland Garros (Francia).

⑮ Siete veces he hecho diana de los doce dardos que he lanzado.

⑯ Ya han salido dos pollitos de los seis huevos que puso nuestra agapornis.

⑰ Ha saltado ocho veces y solo ha hecho salto nulo una.

⑱ Han batido sus marcas personales tres de los trece participantes.

⑲ Solo hay cinco jugadoras mayores de 30 años entre las dieciséis clasificadas para los octavos de final del torneo.

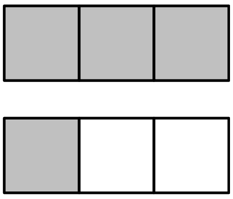
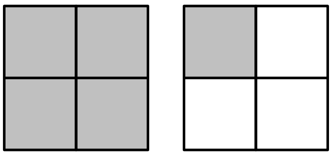
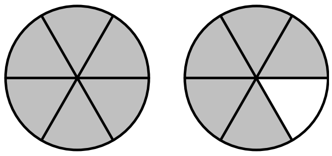
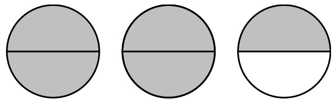
⑳ Mi equipo favorito ha empatado diez veces en los dieciocho partidos que lleva jugados esta temporada.

㉑ El jugador de baloncesto Stephen Curry en el entrenamiento del 26 de diciembre de 2020 encestó los ciento cinco lanzamientos de tres puntos que intentó. ¡En cinco minutos!

Fracciones propias e impropias

- ✱ **Ejemplo**: imagina que llegan a tu casa unos pastelitos para una fiesta y tu familia los parte cada uno en tres trozos; a ti te gustan mucho y te comes cuatro trozos. Te has comido cuatro tercios de pastelitos (más de una unidad).
- ✱ Una fracción **impropia** es la que tiene el numerador mayor que el denominador; para representarlas hay que usar más de una unidad.
- ✱ Una fracción **propia** es la que tiene el numerador menor o igual que el denominador.

Ejemplos de representaciones gráficas de fracciones impropias

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
			
$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{5}{2}$

Números mixtos

Un número mixto es la suma de un número entero y una fracción propia.

Ejemplo 5: $1+\frac{5}{6}$ es un número mixto. **Ejemplo 6**: $7+\frac{4}{5}$ es un número mixto.

- ✱ Antiguamente los números mixtos se escribían sin el signo de suma, pero ya no se hace porque se confunde con el producto del número y la fracción.
- ✱ Las calculadoras de bolsillo más modernas manejan números mixtos, aunque no usan el signo de sumar, sino otro específico de ellas.

Conversión de una fracción impropia en número mixto

- ✱ Como puedes observar comparando los ejemplos 3 y 5, una fracción impropia se puede convertir en un número mixto.
- ✱ El método es hacer la división entera del numerador entre el denominador. El cociente será el número y el resto será el numerador de la fracción propia.
- ✱ Esta conversión permite hacer con facilidad la representación gráfica de las fracciones impropias.

Ejemplo 7. Convierte $\frac{11}{6}$ en un número mixto.

Hacemos la siguiente división entera: el dividendo es 11 y el divisor es 6.

El resultado es que el cociente es 1 y el resto es 5. Solución: $\frac{11}{6}=1+\frac{5}{6}$

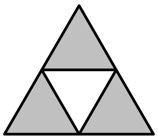
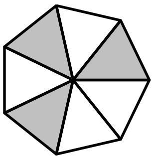
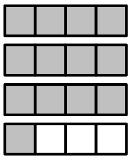
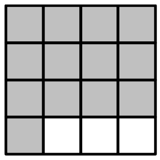
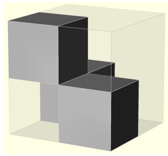
Ejemplo 8. Convierte $\frac{39}{5}$ en un número mixto.

Hacemos la siguiente división entera: el dividendo es 39 y el divisor es 5.

El resultado es que el cociente es 7 y el resto es 4. Solución: $\frac{39}{5}=7+\frac{4}{5}$

Enunciados

Escribe como fracción la parte en gris de estas figuras:

①  ②  ③  ④  ⑤ 

Enunciados

Escribe las siguientes fracciones como números enteros:

⑥ $\frac{13}{13}$ ⑦ $\frac{6}{3}$ ⑧ $\frac{12}{4}$ ⑨ $\frac{7}{1}$ ⑩ $\frac{150}{15}$

Enunciados

Escribe las siguientes fracciones como números mixtos:

⑪ $\frac{8}{5}$ ⑫ $\frac{9}{2}$ ⑬ $\frac{113}{10}$ ⑭ $\frac{17}{7}$ ⑮ $\frac{25}{13}$

Enunciados

Escribe los siguientes números mixtos como fracciones impropias:

⑯ $1+\frac{1}{2}$ ⑰ $2+\frac{2}{3}$ ⑱ $4+\frac{1}{7}$ ⑲ $3+\frac{2}{3}$ ⑳ $10+\frac{2}{7}$

Enunciados

㉑ ¿Qué fracción de un día son siete horas?

㉒ ¿Qué fracción de un día son veintinueve horas?

㉓ ¿Qué fracción de una hora son cuarenta y tres minutos?

㉔ ¿Qué fracción de una hora son setenta y siete minutos?

㉕ ¿Qué fracción de un minuto son siete segundos?

㉖ ¿Qué fracción de un minuto son noventa y un segundos?

㉗ ¿Qué fracción de un lustro son tres años?

㉘ ¿Qué fracción de un lustro son trece años?

㉙ ¿Qué fracción de un siglo son veintitrés años?

㉚ ¿Qué fracción de un siglo son doscientos treinta y un años?

㉛ Si te comes tres bocadillos y medio, ¿cuántos medios bocadillos has comido?

㉜ Si tienes ahorrados 321 euros y te gastas 125, ¿qué fracción de tus ahorros te has gastado?

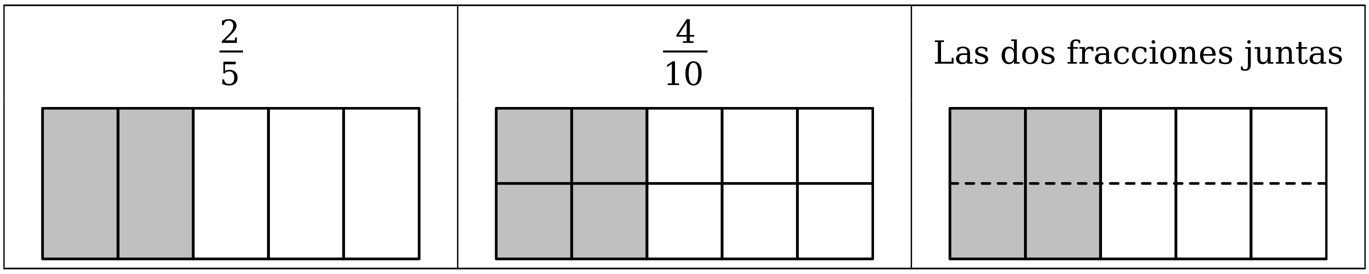
㉝ Si en el bolsillo derecho tienes tres monedas y el izquierdo tienes cinco monedas, ¿qué fracción de las monedas llevas en el bolsillo izquierdo?

Fracciones equivalentes

- Se dice que dos fracciones son equivalentes cuando representan **la misma parte de la unidad**.
- Para escribir que dos fracciones son equivalentes usamos el signo «igual» («=») entre ellas.
- Para escribir que dos fracciones no son equivalentes usamos el signo «distinto» («≠») entre ellas.

Ejemplo 1

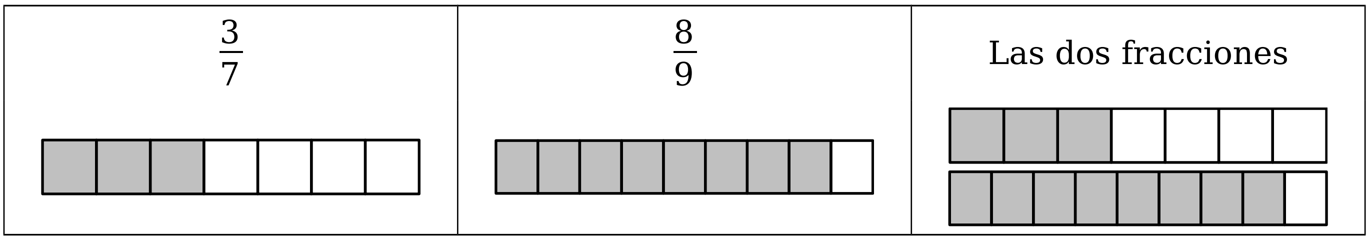
Las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ son equivalentes. Si hacemos la representación gráfica de las dos podemos ver que si dividimos cada uno de los dos quintos de $\frac{2}{5}$ en dos partes, obtenemos los cuatro décimos de $\frac{4}{10}$.



Por tanto, escribimos $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$

Ejemplo 2

Las fracciones $\frac{3}{7}$ y $\frac{8}{9}$ no son equivalentes. Vemos la representación gráfica:



Por tanto, escribimos $\frac{3}{7}\neq\frac{8}{9}$

Averiguar si hay o no equivalencia

En los dos ejemplos mostrados es muy fácil saber si las fracciones dadas son equivalentes o no.

- En el ejemplo 1, por la división en dos partes de cada quinto.
- En el ejemplo 2, por la obvia diferencia de tamaño en las dos fracciones, aunque hay que tener la precaución de dibujarlas de modo que las figuras completas tengan la misma longitud.

Ahora tendremos que estudiar métodos que permitan distinguir si dos fracciones son equivalentes o no de un modo seguro en los casos que no sean tan fáciles.

Método para averiguar si dos fracciones son equivalentes

- ✱ Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes cuando ad=bc.
- ✱ Escrito simbólicamente: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$
- ✱ Cuando escribimos la igualdad $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, los números a y d son el primero y el último que escribimos, por eso se llaman los «extremos»; los números b y c los escribimos por en medio, por eso se llaman los «medios».
- ✱ Otra manera de decir esta propiedad es: dos fracciones son equivalentes cuando **el producto de extremos es igual al producto de medios**.

Ejemplo 1

Averigua si las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ son equivalentes.

Producto de extremos: 2·10 = 20; producto de medios: 5·4 = 20. Son iguales.

Solución: $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$

Ejemplo 2

Averigua si las fracciones $\frac{3}{7}$ y $\frac{8}{9}$ son equivalentes.

Producto de extremos: 3·9 = 27; producto de medios: 7·8 = 56. No son iguales.

Solución: $\frac{3}{7}\neq\frac{8}{9}$

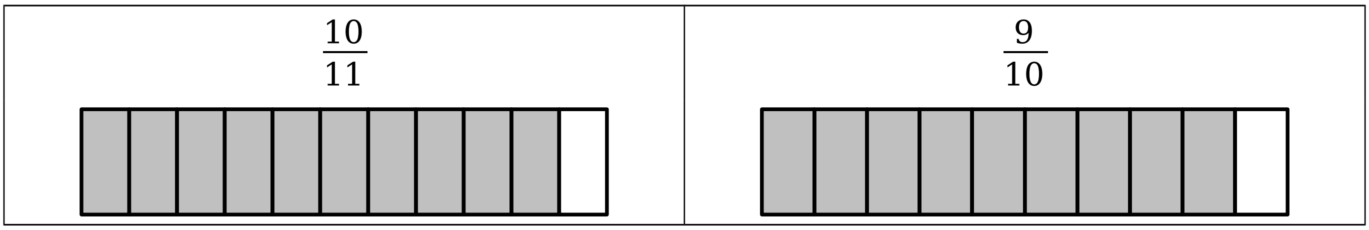
Ejemplo 3

Averigua si las fracciones $\frac{10}{11}$ y $\frac{9}{10}$ son equivalentes.

Producto de extremos: 10·10 = 100; producto de medios: 11·9 = 99. No son iguales.

Solución: $\frac{10}{11}\neq\frac{9}{10}$

Observa que en este ejemplo los dos productos son muy cercanos entre sí, aunque distintos. Esto nos está indicando que las fracciones representan valores cercanos. La representación gráfica de las dos fracciones no es adecuada para distinguir si son equivalentes o no.



Ejemplo 4

$\frac{11}{15}=\frac{143}{195}$ porque 11·195 = 2145 y 15·143 = 2145.

Observa lo difícil que sería hacer las representaciones gráficas en este caso.

Obtención de fracciones equivalentes

Existen **dos métodos** para obtener fracciones equivalentes a una fracción que nos den y cada uno se utiliza en matemáticas para resolver situaciones distintas, así que es importante manejar los dos.

Método de amplificación

Consiste en **multiplicar** el numerador y el denominador de la fracción que nos den por un número, vale cualquiera. Así es posible obtener infinitas fracciones, aunque normalmente solo nos interesará una de ellas.

Ejemplo 1

Obtén varias fracciones equivalentes a $\frac{2}{5}$ mediante amplificación.

$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{8}{20}=\frac{20}{50}=\ldots$ Hemos multiplicado por 2, 3, 4 y 10.

Ejemplo 2

Obtén varias fracciones equivalentes a $\frac{3}{7}$ mediante amplificación.

$\frac{3}{7}=\frac{6}{14}=\frac{9}{21}=\frac{12}{28}=\frac{300}{700}=\ldots$ Hemos multiplicado por 2, 3, 4 y 100.

Método de simplificación

Consiste en **dividir** el numerador y el denominador de la fracción que nos den por un número. Este método es más difícil que el anterior, porque es necesario encontrar un divisor común del numerador y el denominador. Para averiguarlo, vienen muy bien **las tablas de multiplicar** y **los criterios de divisibilidad**.

Ejemplo 3

$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ Hemos dividido entre 2 numerador y denominador.

Ejemplo 4

$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ Hemos dividido entre 3 numerador y denominador.

Ejemplo 5

$\frac{143}{195}=\frac{11}{15}$ Hemos dividido entre 13 numerador y denominador. Este ejemplo demuestra que la simplificación de fracciones puede ser muy difícil en algunos casos.

Fracciones equivalentes, múltiplos y divisores

- Para obtener fracciones equivalentes por el método de amplificación se usan múltiplos del numerador y del denominador. Por tanto, este método siempre se puede utilizar y, como hay infinitos múltiplos, se pueden obtener infinitas fracciones equivalentes.
- Para obtener fracciones equivalentes por el método de simplificación se usan divisores comunes del numerador y del denominador. Por tanto, este método no siempre se puede utilizar y, como la cantidad de divisores comunes es finita, solo se podrá obtener una cantidad finita de fracciones equivalentes, incluso ninguna.

Enunciados

Di si las siguientes parejas de fracciones son equivalentes o no.

① $\frac{5}{7}$ y $\frac{15}{21}$

② $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{5}$

③ $\frac{24}{10}$ y $\frac{12}{5}$

④ $\frac{7}{8}$ y $\frac{6}{7}$

⑤ $\frac{5}{11}$ y $\frac{4}{10}$

Enunciados

Obtén por amplificación tres fracciones equivalentes a la que te den de modo que los números que uses sean los más pequeños que sea posible:

⑥ $\frac{4}{3}$

⑦ $\frac{7}{8}$

⑧ $\frac{1}{4}$

⑨ $\frac{6}{5}$

⑩ $\frac{11}{13}$

Enunciados

Obtén por simplificación una fracción equivalente a la que te den:

⑪ $\frac{25}{35}$

⑫ $\frac{49}{42}$

⑬ $\frac{16}{18}$

⑭ $\frac{22}{33}$

⑮ $\frac{26}{39}$

⑯ $\frac{2}{102}$

Importancia de la simplificación de fracciones

Obtener una fracción equivalente por simplificación también recibe el nombre de **simplificación de la fracción**. Hacerlo con cierta soltura es muy importante en tu formación matemática. Uno de los objetivos de los ejercicios de cálculo mental que hemos hecho hasta ahora en el curso es prepararte para que seas rápido en la simplificación de fracciones.

La simplificación de fracciones será imprescindible en la realización de operaciones con fracciones. También te será útil en los niveles superiores del curso.

Método sencillo para simplificar fracciones

El método más sencillo, que resulta muy útil cuando los números de la fracción son de una o dos cifras, es saberse muy bien las **tablas de multiplicar**: si reconoces que el numerador y el denominador están en misma tabla de algún número, podrás simplificar usando ese número.

Ejemplo 1. Simplifica la fracción $\frac{35}{20}$.

El numerador y el denominador están en la tabla del 5: $35 = 5 \cdot 7$; $20 = 5 \cdot 4$.

Por tanto, podemos dividir numerador y denominador entre 5.

Solución: $\frac{35}{20}=\frac{7}{4}$

Ejemplo 2. Simplifica la fracción $\frac{63}{49}$.

El numerador y el denominador están en la tabla del 7: $63 = 7 \cdot 9$; $49 = 7 \cdot 7$.

Solución: $\frac{63}{49}=\frac{9}{7}$

Método avanzado para simplificar fracciones

En los casos algo más difíciles, cuando no se ve fácilmente que el numerador y el denominador estén en la tabla de multiplicar de algún número, suele ser un buen método descomponer en factores primos el numerador y el denominador, porque si encontramos algún factor común, podremos simplificar por él.

Ejemplo 3. Simplifica la fracción $\frac{572}{1683}$.

Descomponemos en factores primos: $572 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13$; $1683 = 3^2 \cdot 11 \cdot 17$.

Vemos que el 11 es un factor común, así que podemos simplificar entre 11. Además, las dos divisiones se podrán hacer multiplicando, porque disponemos de las descomposiciones factoriales.

$572 : 11 = 2^2 \cdot 13 = 52$; $1683 : 11 = 3^2 \cdot 17 = 153$.

Solución: $\frac{572}{1683}=\frac{52}{153}$

Ejemplo 4. Simplifica la fracción $\frac{65}{26}$.

Descomponemos en factores primos: $65 = 5 \cdot 13$; $26 = 2 \cdot 13$.

Solución: $\frac{65}{26}=\frac{5}{2}$. (En este ejemplo es divertido ver que **parece** que hemos quitado el 6 del numerador y el 6 del denominador).

Enunciados

Obtén por simplificación dos fracciones equivalentes a la que te den:

① $\dfrac{12}{20}$

② $\dfrac{8}{44}$

③ $\dfrac{9}{18}$

④ $\dfrac{27}{45}$

⑤ $\dfrac{50}{75}$

⑥ $\dfrac{63}{99}$

⑦ $\dfrac{24}{28}$

⑧ $\dfrac{28}{44}$

⑨ $\dfrac{52}{68}$

Enunciados

Obtén por simplificación tres fracciones equivalentes a la que te den:

⑩ $\dfrac{12}{18}$

⑪ $\dfrac{6}{30}$

⑫ $\dfrac{24}{40}$

⑬ $\dfrac{30}{40}$

⑭ $\dfrac{66}{88}$

⑮ $\dfrac{42}{30}$

⑯ $\dfrac{48}{56}$

⑰ $\dfrac{15}{30}$

Enunciados

Obtén por simplificación una fracción equivalente a la que te den:

① $\frac{5}{35}$

② $\frac{7}{49}$

③ $\frac{5}{10}$

④ $\frac{15}{21}$

⑤ $\frac{10}{35}$

⑥ $\frac{18}{14}$

⑦ $\frac{21}{30}$

⑧ $\frac{11}{33}$

⑨ $\frac{35}{49}$

⑩ $\frac{21}{49}$

⑪ $\frac{22}{26}$

⑫ $\frac{13}{26}$

⑬ $\frac{2}{14}$

⑭ $\frac{3}{30}$

⑮ $\frac{15}{25}$

⑯ $\frac{6}{10}$

⑰ $\frac{6}{21}$

⑱ $\frac{30}{21}$

⑲ $\frac{4}{22}$

⑳ $\frac{4}{26}$

㉑ $\frac{77}{14}$

㉒ $\frac{3}{39}$

㉓ $\frac{3}{303}$

㉔ $\frac{24}{21}$

㉕ $\frac{49}{91}$

㉖ $\frac{55}{121}$

㉗ $\frac{3}{51}$

㉘ $\frac{26}{10}$

㉙ $\frac{5}{45}$

㉚ $\frac{143}{187}$

㉛ $\frac{91}{63}$

㉜ $\frac{30}{25}$

㉝ $\frac{5}{555}$

㉞ $\frac{17}{51}$

㉟ $\frac{21}{99}$

㊱ $\frac{55}{10}$

Enunciados

Simplifica las siguientes fracciones (solo es posible hacerlo de una forma):

① $\dfrac{154}{273}$

② $\dfrac{385}{374}$

③ $\dfrac{93}{124}$

④ $\dfrac{748}{663}$

⑤ $\dfrac{56}{693}$

⑥ $\dfrac{119}{539}$

⑦ $\dfrac{238}{255}$

Enunciados

Simplifica las siguientes fracciones (solo es posible hacerlo de una forma). Puedes observar en todos estos ejercicios que hay una gran similitud entre la fracción propuesta y la fracción simplificada; ¡búscala!

⑧ $\dfrac{13}{325}$

⑨ $\dfrac{124}{217}$

⑩ $\dfrac{154}{253}$

⑪ $\dfrac{176}{275}$

⑫ $\dfrac{187}{286}$

⑬ $\dfrac{275}{374}$

⑭ $\dfrac{286}{385}$

Fracción irreducible

Una fracción irreducible es aquella que no se puede simplificar. En estos dos casos la fracción es irreducible:

* El numerador es 1 y el denominador es un número natural mayor que 1.
* El numerador y el denominador son positivos y coprimos.

Ejemplo 1	$\frac{1}{4}$	El numerador es 1
Ejemplo 2	$\frac{1}{397}$	El numerador es 1
Ejemplo 3	$\frac{2}{5}$	El numerador y el denominador son coprimos
Ejemplo 4	$\frac{8}{21}$	El numerador y el denominador son coprimos

Obtención de fracciones irreducibles

Un problema muy importante es obtener una fracción irreducible que sea equivalente a una fracción dada. Para hacerlo, normalmente se pueden dar tantos pasos de simplificación como sea necesario, buscando el camino más cómodo.

Ejemplo 5. Obtén una fracción irreducible que sea equivalente a $\frac{18}{24}$.

$\frac{18}{24}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. Primero hemos simplificado entre 2 y luego entre 3.

También podríamos haber simplificado directamente entre 6.

Solución: $\frac{3}{4}$

Obtención de fracciones irreducibles usando descomposición factorial

Si se quisiera obtener la fracción irreducible equivalente a la fracción dada con una sola simplificación, habría que calcular el máximo común divisor del numerador y el denominador y simplificar por él. Pero esta idea es más fácil de aplicar usando directamente las descomposiciones factoriales del numerador y el denominador y simplificando los factores comunes.

Este método da buenos resultados en muchos casos difíciles, como en el ejemplo que se presenta ahora:

Ejemplo 6. Obtén una fracción irreducible que sea equivalente a $\frac{1638}{1848}$.

La descomposición factorial del numerador es $1638 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$

La descomposición factorial del denominador es $1848 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$

Podemos simplificar entre $2 \cdot 3 \cdot 7$, y para ello bastarán unas multiplicaciones:

$1638 : (2 \cdot 3 \cdot 7) = (2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13) : (2 \cdot 3 \cdot 7) = 3 \cdot 13 = 39$

$1848 : (2 \cdot 3 \cdot 7) = (2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11) : (2 \cdot 3 \cdot 7) = 2^2 \cdot 11 = 44$

Solución: $\frac{39}{44}$

Enunciados

Encuentra la fracción irreducible equivalente a la fracción dada mediante los pasos de simplificación que necesites. Si la fracción dada ya es irreducible, indícalo.

① $\frac{12}{18}$

② $\frac{6}{30}$

③ $\frac{24}{40}$

④ $\frac{7}{5}$

⑤ $\frac{12}{20}$

⑥ $\frac{8}{44}$

⑦ $\frac{9}{18}$

⑧ $\frac{27}{45}$

⑨ $\frac{50}{75}$

⑩ $\frac{7}{11}$

⑪ $\frac{30}{40}$

⑫ $\frac{66}{88}$

⑬ $\frac{36}{30}$

⑭ $\frac{77}{22}$

⑮ $\frac{121}{99}$

⑯ $\frac{33}{66}$

⑰ $\frac{49}{100}$

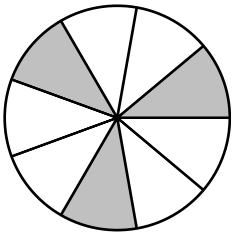
⑱ $\frac{84}{198}$

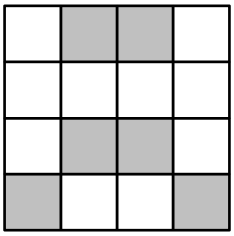
Escribe al lado de cada fracción una fracción equivalente que sea irreducible

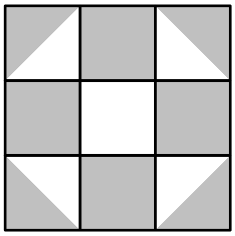
	A		B		C		D		E	
1	$\frac{2}{4}$		$\frac{10}{15}$		$\frac{3}{9}$		$\frac{20}{25}$		$\frac{30}{35}$	
2	$\frac{12}{24}$		$\frac{14}{21}$		$\frac{35}{40}$		$\frac{100}{400}$		$\frac{3000}{4000}$	
3	$\frac{13}{26}$		$\frac{18}{36}$		$\frac{15}{35}$		$\frac{8}{24}$		$\frac{2}{22}$	
4	$\frac{12}{18}$		$\frac{35}{45}$		$\frac{40}{80}$		$\frac{6}{15}$		$\frac{2}{16}$	
5	$\frac{4}{16}$		$\frac{27}{81}$		$\frac{45}{63}$		$\frac{60}{36}$		$\frac{7}{21}$	
6	$\frac{25}{10}$		$\frac{8}{32}$		$\frac{15}{35}$		$\frac{70}{49}$		$\frac{55}{66}$	
7	$\frac{350}{250}$		$\frac{9}{90}$		$\frac{12}{16}$		$\frac{10}{55}$		$\frac{4}{44}$	
8	$\frac{3}{36}$		$\frac{2}{28}$		$\frac{7}{14}$		$\frac{35}{15}$		$\frac{39}{26}$	
9	$\frac{4}{16}$		$\frac{8}{26}$		$\frac{36}{40}$		$\frac{32}{14}$		$\frac{3}{306}$	
10	$\frac{5}{105}$		$\frac{31}{62}$		$\frac{15}{24}$		$\frac{18}{90}$		$\frac{42}{70}$	

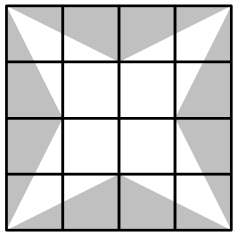
Enunciados

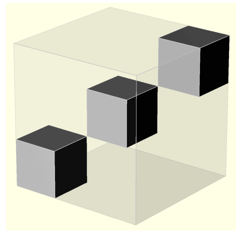
Escribe como fracción irreducible la parte en gris de estas figuras:

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

Enunciados

Encuentra la fracción irreducible equivalente a la fracción dada.

⑥ $\dfrac{374}{429}$

⑦ $\dfrac{483}{665}$

⑧ $\dfrac{760}{456}$

⑨ $\dfrac{429}{637}$

⑩ $\dfrac{715}{935}$

Enunciados

Encuentra la fracción irreducible equivalente a la fracción dada. Puedes observar en todos estos ejercicios que hay una gran similitud entre la fracción propuesta y la fracción irreducible; ¡búscala!

⑪ $\dfrac{138}{184}$

⑫ $\dfrac{145}{435}$

⑬ $\dfrac{161}{644}$

⑭ $\dfrac{266}{665}$

⑮ $\dfrac{182}{819}$

⑯ $\dfrac{273}{728}$

⑰ $\dfrac{364}{637}$

Averiguar el número desconocido

Uno de los problemas que aparece más a menudo trabajando con fracciones consiste en averiguar un número desconocido que forma parte de una equivalencia de dos fracciones.

Ejemplo 1

Averigua el número que debe ir en el lugar del símbolo «⊡» en la expresión $\frac{3}{5}=\frac{⊡}{20}$

Al conocer los dos denominadores, podemos compararlos. ¿Por cuánto hay que multiplicar 5 para obtener 20? Por 20 : 5 = 4. Por tanto, si las fracciones son equivalentes es que hay que multiplicar por 4 el numerador y el denominador de la fracción que conocemos completa. Multiplicamos: 3 · 4 = 12.

Solución: 12. Comprobación: $\frac{3}{5}=\frac{12}{20}$ porque 3 · 20 = 5 · 12 = 60

Ejemplo 2

Averigua el número que debe ir en el lugar del símbolo «⊡» en la expresión $\frac{6}{8}=\frac{⊡}{4}$

Al conocer los dos denominadores, podemos compararlos. ¿Entre cuánto hay que dividir 8 para obtener 4? Entre 8 : 4 = 2. Por tanto, si las fracciones son equivalentes es que hay que dividir entre 2 el numerador y el denominador de la fracción que conocemos completa. Dividimos: 6 : 2 = 3.

Solución: 3. Comprobación: $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ porque 6 · 4 = 8 · 3 = 24

Simplificación previa

Para resolver este problema con facilidad, casi siempre conviene simplificar las fracciones que lo admitan, quizá hasta llegar a la fracción irreducible equivalente.

Ejemplo 3

Averigua el número desconocido en la expresión $\frac{14}{35}=\frac{6}{⊡}$

Comenzamos por simplificar entre 7 la primera fracción y obtenemos $\frac{2}{5}=\frac{6}{⊡}$

Como conocemos los dos numeradores, podemos compararlos. ¿Por cuánto hay que multiplicar 2 para obtener 6? Por 6 : 2 = 3. Por tanto, si las fracciones son equivalentes es que hay que multiplicar por 3 el numerador y el denominador de la fracción que conocemos completa. Multiplicamos: 5 · 3 = 15.

Solución: 15. Comprobación: $\frac{14}{35}=\frac{6}{15}$ porque 14 · 15 = 35 · 6 = 210

Ejemplo 4

Averigua el número desconocido en la expresión $\frac{⊡}{8}=\frac{21}{24}$

Como 24 : 8 = 3, podemos dividir 21 : 3 = 7. Solución: 7

Y también lo podemos resolver simplificando: $\frac{⊡}{8}=\frac{21}{24}\Rightarrow\frac{⊡}{8}=\frac{7}{8}$. Solución: 7

Usar un método u otro es cuestión de gustos. Decide tú.

Averiguar el número desconocido

Uno de los problemas que aparece más a menudo trabajando con fracciones consiste en averiguar un número desconocido que forma parte de una equivalencia de dos fracciones.

Problemas sin solución

Algunos de estos problemas no tienen solución.

Ejemplo 1

Averigua el número natural desconocido en la expresión $\frac{3}{\boxdot}=\frac{4}{5}$

No es posible simplificar fracciones y tampoco es posible dividir 4 entre ningún número natural de modo que obtengamos 3. Por tanto: sin solución.

Ejemplo 2

Averigua el número natural desconocido en la expresión $\frac{26}{5}=\frac{13}{\boxdot}$

Para convertir el numerador de la primera fracción (26) en el numerador de la segunda (13), hay que dividir entre 2. Pero el denominador de la primera (5) no es divisible entre 2, así que no es posible encontrar un número natural que cumpla la condición. Por tanto: sin solución.

Ejemplo 3

Averigua el número natural desconocido en la expresión $\frac{15}{35}=\frac{\boxdot}{5}$

Para convertir el denominador de la primera fracción (35) en el denominador de la segunda (5), hay que dividir entre 7. Pero el numerador de la primera (15) no es divisible entre 7, así que no es posible encontrar un número natural que cumpla la condición. Por tanto: sin solución.

Podemos intentar resolver el ejercicio comenzando por simplificar la primera fracción: $\frac{15}{35}=\frac{\boxdot}{5}\Rightarrow\frac{3}{7}=\frac{\boxdot}{5}$. Pero ahora no es posible convertir el denominador de la primera fracción (7) en el denominador de la segunda (5) dividiéndolo por ningún número natural, así que llegamos a la misma conclusión: sin solución.

Explicación de la dificultad

Cuando trabajamos con fracciones, tanto el numerador como el denominador deben ser números enteros. Esto es una característica que define a las fracciones. Los problemas que no hemos podido resolver se podrían solventar usando números decimales, pero entonces no estaríamos usando fracciones.

Por ejemplo, la propuesta $\frac{26}{5}=\frac{13}{\boxdot}$ se podría resolver con $\frac{26}{5}=\frac{13}{2{,}5}$:

Efectivamente, $26 \cdot 2{,}5 = 5 \cdot 13 = 65$, pero $\frac{13}{2{,}5}$ no es una fracción, porque el denominador (2,5) no es un número entero.

Más adelante en el curso verás que trabajaremos sin dificultad con expresiones como $\frac{13}{2{,}5}$, pero porque le daremos otro significado (una división: $\frac{13}{2{,}5}=5{,}2$).

Enunciados

Averigua el número natural que debe ir el lugar del símbolo «⊡» para que se cumpla cada una de las siguientes equivalencias:

① $\frac{8}{3}=\frac{\boxdot}{6}$

② $\frac{5}{9}=\frac{\boxdot}{27}$

③ $\frac{8}{12}=\frac{\boxdot}{3}$

④ $\frac{35}{25}=\frac{\boxdot}{5}$

⑤ $\frac{21}{9}=\frac{\boxdot}{15}$

⑥ $\frac{33}{55}=\frac{\boxdot}{10}$

⑦ $\frac{7}{5}=\frac{\boxdot}{6}$

⑧ $\frac{\boxdot}{2}=\frac{15}{10}$

⑨ $\frac{\boxdot}{15}=\frac{8}{5}$

⑩ $\frac{\boxdot}{35}=\frac{9}{15}$

⑪ $\frac{8}{5}=\frac{16}{\boxdot}$

⑫ $\frac{13}{26}=\frac{\boxdot}{2}$

⑬ $\frac{45}{81}=\frac{5}{\boxdot}$

⑭ $\frac{8}{15}=\frac{13}{\boxdot}$

⑮ $\frac{7}{11}=\frac{\boxdot}{33}$

⑯ $\frac{42}{49}=\frac{\boxdot}{14}$

⑰ $\frac{40}{15}=\frac{\boxdot}{3}$

⑱ $\frac{\boxdot}{4}=\frac{27}{12}$

⑲ $\frac{4}{\boxdot}=\frac{28}{21}$

⑳ $\frac{13}{7}=\frac{\boxdot}{21}$

㉑ $\frac{5}{\boxdot}=\frac{9}{2}$

㉒ $\frac{15}{24}=\frac{\boxdot}{16}$

㉓ $\frac{45}{55}=\frac{9}{\boxdot}$

㉔ $\frac{\boxdot}{7}=\frac{22}{14}$

㉕ $\frac{\boxdot}{28}=\frac{35}{20}$

㉖ $\frac{42}{88}=\frac{\boxdot}{44}$

㉗ $\frac{55}{15}=\frac{\boxdot}{9}$

㉘ $\frac{7}{4}=\frac{\boxdot}{8}$

㉙ $\frac{12}{48}=\frac{1}{\boxdot}$

㉚ $\frac{41}{19}=\frac{\boxdot}{31}$

㉛ $\frac{4}{6}=\frac{\boxdot}{9}$

㉜ $\frac{4}{7}=\frac{\boxdot}{21}$

㉝ $\frac{4}{15}=\frac{\boxdot}{30}$

㉞ $\frac{28}{36}=\frac{\boxdot}{9}$

㉟ $\frac{4}{\boxdot}=\frac{28}{49}$

㊱ $\frac{\boxdot}{7}=\frac{15}{14}$

Conversión al mismo denominador

Dadas dos o más fracciones, hay que obtener fracciones equivalentes que tengan entre sí el mismo denominador. Resolver esta cuestión nos permitirá comparar fracciones con distinto denominador y sumar fracciones con distinto denominador.

Ejemplo 1

Convierte las fracciones $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{9}$ en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Podríamos convertir las fracciones de modo que las nuevas fracciones tuvieran denominador 54 (el producto de los denominadores de las dos fracciones); pero hay una idea mejor, que nos lleva a unas operaciones y solución más sencillas.

Es preferible convertir las fracciones en otras equivalentes que **tengan como denominador el mínimo común múltiplo de los denominadores**. Aunque podríamos pensar que así se trabaja más, en realidad usaremos números más sencillos, la operación será más cómoda y las fracciones obtenidas serán más sencillas.

Calculamos el mcm(6, 9) → $6 = 2 \cdot 3$; $9 = 3^2$; mcm(6, 9) $= 2 \cdot 3^2 = 18$.

Ahora hay que convertir las dos fracciones dadas en otras equivalentes que tengan denominador 18: $\frac{5}{6}=\frac{¿?}{18}$ y $\frac{4}{9}=\frac{¿?}{18}$.

Observa lo fácil que es gracias a que ya hemos practicado cómo calcular el número desconocido en una equivalencia de dos fracciones:

$\frac{5}{6}=\frac{¿?}{18}$ → $18 : 6 = 3$; $5 \cdot 3 = 15$; por tanto $\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$

$\frac{4}{9}=\frac{¿?}{18}$ → $18 : 9 = 2$; $4 \cdot 2 = 8$; por tanto $\frac{4}{9}=\frac{8}{18}$

Solución: $\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$ y $\frac{4}{9}=\frac{8}{18}$

Ejemplo 2

Convierte las fracciones $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{8}{15}$ en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

En este ejemplo, el producto de los denominadores es $4 \cdot 6 \cdot 15 = 360$, pero el mínimo común múltiplo es mucho menor, así que quedará claro cuál es la mejor elección. En matemáticas, cuando hay varias formas de resolver un problema, se prefiere usar la más sencilla.

$4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$; $15 = 3 \cdot 5$; mcm(4, 6, 15) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

$\frac{3}{4}=\frac{¿?}{60}$ → $60 : 4 = 15$; $3 \cdot 15 = 45$; por tanto $\frac{3}{4}=\frac{45}{60}$

$\frac{5}{6}=\frac{¿?}{60}$ → $60 : 6 = 10$; $5 \cdot 10 = 50$; por tanto $\frac{5}{6}=\frac{50}{60}$

$\frac{8}{15}=\frac{¿?}{60}$ → $60 : 15 = 4$; $8 \cdot 4 = 32$; por tanto $\frac{8}{15}=\frac{32}{60}$

Solución: $\frac{3}{4}=\frac{45}{60}$, $\frac{5}{6}=\frac{50}{60}$ y $\frac{8}{15}=\frac{32}{60}$

Casos particulares de conversión al mismo denominador

El método general es que el denominador común de las fracciones obtenidas sea el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas, pero como hay dos casos particulares de cálculo del mínimo común múltiplo, también hay dos casos particulares en la conversión al mismo denominador.

Denominadores coprimos

Cuando los denominadores de las fracciones son coprimos, su mínimo común múltiplo es el producto, de modo que en ese caso el denominador común tendrá que ser el producto de los denominadores.

Ejemplo 1

Convierte las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{7}$ en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

mcm(5, 7) = 5 · 7 = 35

$\frac{2}{5}=\frac{¿?}{35}$ → 35 : 5 = 7; 2 · 7 = 14; por tanto $\frac{2}{5}=\frac{14}{35}$

$\frac{4}{7}=\frac{¿?}{35}$ → 35 : 7 = 5; 4 · 5 = 20; por tanto $\frac{4}{7}=\frac{20}{35}$

Solución: $\frac{2}{5}=\frac{14}{35}$ y $\frac{4}{7}=\frac{20}{35}$

Observa que en este caso los numeradores de las soluciones son el producto del numerador de cada fracción por el denominador de la otra: 2 · 7 =14, 4 · 5 = 20.

Un denominador múltiplo de los demás

Cuando un denominador es múltiplo de los demás, él será el mínimo común multiplo, con lo que algunas operaciones serán más sencillas.

Ejemplo 2

Convierte las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{15}$ en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

mcm(3, 5, 15) = 15, porque 15 es múltiplo de 3 y de 5.

$\frac{2}{3}=\frac{¿?}{15}$ → 15 : 3 = 5; 2 · 5 = 10; por tanto $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$

$\frac{3}{5}=\frac{¿?}{15}$ → 15 : 5 = 3; 3 · 3 = 9; por tanto $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$

La fracción $\frac{7}{15}$ ya tiene denominador 15, así que no hay que convertirla.

Solución: $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$, $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$ y $\frac{7}{15}$

Enunciados

Convierte los siguientes grupos de fracciones en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y los números más sencillos que sea posible.

① $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{15}$ y $\frac{5}{6}$

② $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{9}$ y $\frac{1}{6}$

③ $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{7}{20}$

④ $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{5}{14}$, $\frac{4}{21}$ y $\frac{5}{6}$

⑥ $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{7}$ y $\frac{4}{35}$

⑦ $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{7}{10}$

⑧ $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{1}{3}$

⑨ $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{5}$

⑩ $\frac{4}{15}$, $\frac{3}{21}$ y $\frac{4}{35}$

⑪ $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ y $\frac{5}{27}$

⑫ $\frac{2}{5}$, $\frac{31}{25}$ y $\frac{3}{10}$

⑬ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{8}$

⑭ $\frac{7}{11}$, $\frac{5}{22}$ y $\frac{1}{33}$

Enunciados

Convierte los siguientes grupos de fracciones en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y los números más sencillos que sea posible. En estos ejercicios el método general no es particularmente útil, intenta alguna otra idea.

⑮ $\frac{3}{7}$ y $\frac{20}{14}$

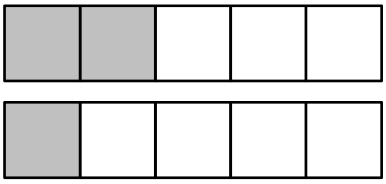
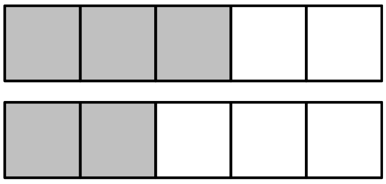
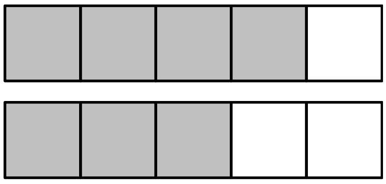
⑯ $\frac{9}{6}$, $\frac{35}{10}$ y $\frac{55}{22}$

Comparación de fracciones

* Comparar fracciones es decidir cuál es mayor y cuál es menor.
* Hay varios métodos para hacerlo.
* Para los casos fáciles, hay métodos fáciles.

Comparación de fracciones con el mismo denominador

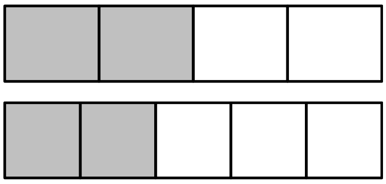
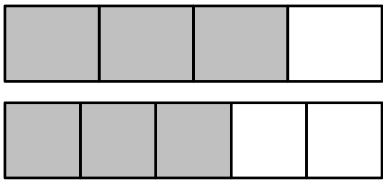
Si dos fracciones están formadas por números naturales y tienen el mismo denominador, la mayor es la que tenga **mayor el numerador**.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
$\frac{2}{5} > \frac{1}{5}$ 	$\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$ 	$\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$ 

Como el denominador indica en cuántas partes de divide la unidad, en las dos fracciones la unidad se ha dividido en partes iguales, por lo que será mayor la fracción que indique que hemos tomado más partes.

Comparación de fracciones con el mismo numerador

Si dos fracciones están formadas por números naturales y tienen el mismo numerador, la mayor es la que tenga **menor el denominador**.

Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6
$\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ 	$\frac{2}{4} > \frac{2}{5}$ 	$\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$ 

Cuando las fracciones tienen el mismo numerador, es que en ellas se ha tomado el mismo número de partes. Por tanto será mayor la fracción que tenga mayor cada una de las partes. Si el denominador es menor, las partes son mayores, puesto que se ha dividido la misma unidad en menos partes.

Ejemplos

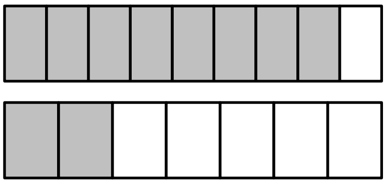
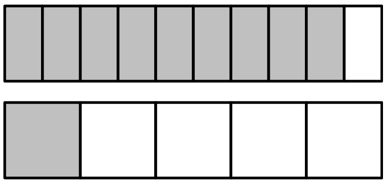
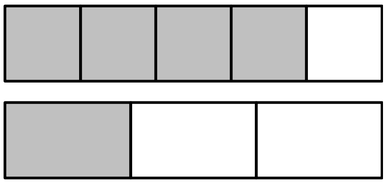
Ejemplo 7	$\frac{15}{7} > \frac{15}{9}$	El mismo numerador y $7 < 9$
Ejemplo 8	$\frac{15}{7} > \frac{13}{7}$	El mismo denominador y $15 > 13$
Ejemplo 9	$\frac{31}{41} > \frac{31}{43}$	El mismo numerador y $41 < 43$

Comparación de fracciones

- ✱ Comparar fracciones es decidir cuál es mayor y cuál es menor.
- ✱ Hay varios métodos para hacerlo.
- ✱ Para los casos fáciles, hay métodos fáciles.

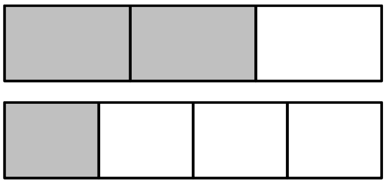
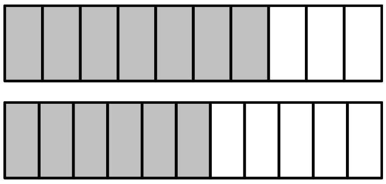
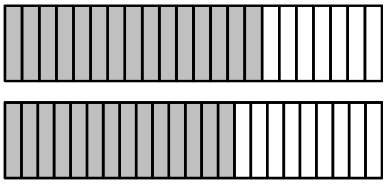
Comparación de dos fracciones con resultado muy claro

Hay muchos casos de comparación de dos fracciones en el que el resultado está muy claro, incluso sin hacer la representación gráfica, basta imaginarlas.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
$\frac{8}{9} > \frac{2}{7}$	$\frac{9}{10} > \frac{1}{5}$	$\frac{4}{5} > \frac{1}{3}$
		

Comparación de dos fracciones con resultado fácil

Hay un caso que resulta fácil si nos fijamos con un poco de atención, que se aplica a fracciones formadas por números naturales: una fracción tiene el numerador mayor que el de la otra y además su denominador es menor que el de la otra. Entonces, la primera es mayor que la segunda.

Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6
$\frac{2}{3} > \frac{1}{4}$	$\frac{7}{10} > \frac{6}{11}$	$\frac{15}{22} > \frac{14}{23}$
		

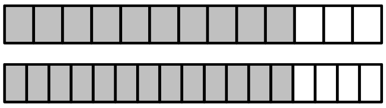
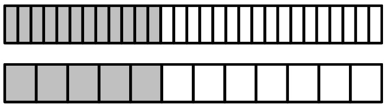
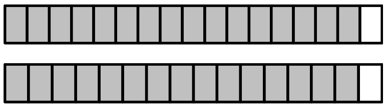
Incluso aunque la representación gráfica no resultara clara, el razonamiento sí lo es: si la primera tiene menor el denominador, es que las partes en que se ha dividido son mayores; y además, como tiene mayor el numerador, se han tomado más partes. Si se han tomado más partes y cada parte mayor, la fracción es mayor.

Ejemplos

Ejemplo 7	$\frac{8}{7} > \frac{5}{6}$	La primera es mayor que 1 y la segunda es menor que 1
Ejemplo 8	$\frac{31}{2} > \frac{13}{6}$	La primera es mayor que 15 y la segunda es poco mayor que 2
Ejemplo 9	$\frac{27}{50} > \frac{9}{22}$	La primera es mayor que $\frac{1}{2}$ y la segunda es menor que $\frac{1}{2}$

Método general de comparación de dos fracciones

- Si dos fracciones están formadas por números naturales, siempre se puede aplicar un método general para compararlas.
- Es especialmente apropiado aplicar este método cuando no está clara la decisión de qué fracción es menor y cuál es mayor.
- El método consiste en comparar los productos de extremos y los productos de medios que ya usamos para comprobar la equivalencia de fracciones.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		
$\frac{10}{13}$ ¿ < = > ? $\frac{13}{17}$	$\frac{12}{29}$ ¿ < = > ? $\frac{5}{12}$	$\frac{16}{17}$ ¿ < = > ? $\frac{15}{16}$

- Queremos comparar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ y decidir si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ o $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$.
- El **producto de extremos es a·d** y el **producto de medios es b·c**.
- Se verifica:
  - $a\cdot d<bc\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$
  - $a\cdot d=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
  - $a\cdot d>bc\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$

Resolución de los ejemplos

Ejemplo 1. Compara las fracciones $\frac{10}{13}$ y $\frac{13}{17}$

Producto de extremos: $10 \cdot 17 = 170$; producto de medios: $13 \cdot 13 = 169$

Como $170 > 169$, $10 \cdot 17 > 13 \cdot 13$. Por tanto:

Solución: $\frac{10}{13}>\frac{13}{17}$

Ejemplo 2. Compara las fracciones $\frac{12}{29}$ y $\frac{5}{12}$

Producto de extremos: $12 \cdot 12 = 144$; producto de medios: $29 \cdot 5 = 145$

Como $144 < 145$, $12 \cdot 12 > 29 \cdot 5$. Por tanto:

Solución: $\frac{12}{29}<\frac{5}{12}$

Ejemplo 3. Compara las fracciones $\frac{16}{17}$ y $\frac{15}{16}$

Producto de extremos: $16 \cdot 16 = 256$; producto de medios: $17 \cdot 15 = 255$

Como $256 > 255$, $16 \cdot 16 > 17 \cdot 15$. Por tanto:

Solución: $\frac{16}{17}>\frac{15}{16}$

Nivel 1 • Aritmética • Fracciones • Cálculo mental (02)

	A	B	C	D	E
1	$\frac{1}{3} \boxdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{2} \boxdot \frac{3}{6}$	$\frac{4}{7} \boxdot \frac{9}{7}$	$\frac{5}{4} \boxdot \frac{6}{5}$	$\frac{11}{17} \boxdot \frac{9}{19}$
2	$\frac{31}{7} \boxdot \frac{13}{31}$	$\frac{5}{15} \boxdot \frac{1}{3}$	$\frac{3}{17} \boxdot \frac{3}{41}$	$\frac{3}{8} \boxdot \frac{9}{16}$	$\frac{1}{101} \boxdot \frac{99}{100}$
3	$\frac{3}{4} \boxdot \frac{5}{7}$	$\frac{71}{81} \boxdot \frac{91}{81}$	$\frac{7}{5} \boxdot \frac{10}{7}$	$\frac{3}{5} \boxdot \frac{6}{11}$	$\frac{3}{7} \boxdot \frac{4}{5}$
4	$\frac{2}{4} \boxdot \frac{3}{6}$	$\frac{1}{13} \boxdot \frac{1}{11}$	$\frac{12}{11} \boxdot \frac{13}{11}$	$\frac{12}{23} \boxdot \frac{9}{25}$	$\frac{8}{13} \boxdot \frac{3}{5}$
5	$\frac{23}{24} \boxdot \frac{23}{27}$	$\frac{101}{23} \boxdot \frac{200}{23}$	$\frac{6}{7} \boxdot \frac{2}{15}$	$\frac{8}{5} \boxdot \frac{5}{8}$	$\frac{3}{2} \boxdot \frac{7}{5}$
6	$\frac{17}{19} \boxdot \frac{2}{21}$	$\frac{3}{71} \boxdot \frac{3}{91}$	$\frac{1}{6} \boxdot \frac{3}{18}$	$\frac{7}{5} \boxdot \frac{9}{5}$	$\frac{10}{31} \boxdot \frac{10}{11}$
7	$\frac{6}{10} \boxdot \frac{30}{50}$	$\frac{5}{11} \boxdot \frac{4}{9}$	$\frac{5}{23} \boxdot \frac{2}{9}$	$\frac{3}{5} \boxdot \frac{4}{5}$	$\frac{5}{9} \boxdot \frac{5}{7}$
8	$\frac{2}{7} \boxdot \frac{4}{14}$	$\frac{1}{9} \boxdot \frac{11}{13}$	$\frac{11}{10} \boxdot \frac{8}{9}$	$\frac{43}{88} \boxdot \frac{51}{100}$	$\frac{7}{4} \boxdot \frac{5}{3}$
9	$\frac{9}{13} \boxdot \frac{2}{31}$	$\frac{3}{2} \boxdot \frac{5}{7}$	$\frac{41}{10} \boxdot \frac{43}{10}$	$\frac{5}{17} \boxdot \frac{5}{31}$	$\frac{9}{10} \boxdot \frac{8}{9}$
10	$\frac{201}{100} \boxdot \frac{2999}{1000}$	$\frac{2}{10} \boxdot \frac{3}{15}$	$\frac{15}{13} \boxdot \frac{16}{11}$	$\frac{13}{2} \boxdot \frac{101}{4}$	$\frac{9}{6} \boxdot \frac{12}{8}$

Comparación de más de dos fracciones

- ✱ Idea del problema: nos dan tres o más fracciones y nos piden ordenarlas (casi siempre de menor a mayor).
- ✱ Los métodos usados para comparar dos fracciones son difíciles de aplicar al problema de comparar más de dos fracciones, ya que habría que ir comparándolas de dos en dos y luego unir los resultados.
- ✱ Hay un método mucho mejor: convertir todas las fracciones en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y luego ordenarlas mediante los numeradores.

Ejemplo 1

Ordena de menor a mayor las fracciones $\frac{10}{21}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{7}{15}$

Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$21 = 3 \cdot 7$; $9 = 3^2$; $15 = 3 \cdot 5$; $\text{mcm}(21, 9, 15) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$

Convertimos las tres fracciones a denominador 315:

$\frac{10}{21}=\frac{¿?}{315}$; $315 : 21 = 15$; $10 \cdot 15 = 150$; por tanto, $\frac{10}{21}=\frac{150}{315}$

$\frac{4}{9}=\frac{¿?}{315}$; $315 : 9 = 35$; $4 \cdot 35 = 140$; por tanto, $\frac{4}{9}=\frac{140}{315}$

$\frac{7}{15}=\frac{¿?}{315}$; $315 :15 = 21$; $7 \cdot 21 = 147$; por tanto, $\frac{7}{15}=\frac{147}{315}$

El orden de los numeradores de las fracciones obtenidas es $140 < 147 < 150$.

Solución: $\frac{4}{9}<\frac{7}{15}<\frac{10}{21}$

Ejemplo 2

Ordena de menor a mayor las fracciones $\frac{29}{42}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{9}{14}$ y $\frac{40}{63}$

Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$42 = 2\cdot3\cdot7$; $21 = 3\cdot7$; $14 = 2\cdot7$; $63 = 3^2\cdot7$; $\text{mcm}(42, 21, 14, 63) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$

Convertimos las cuatro fracciones a denominador 126:

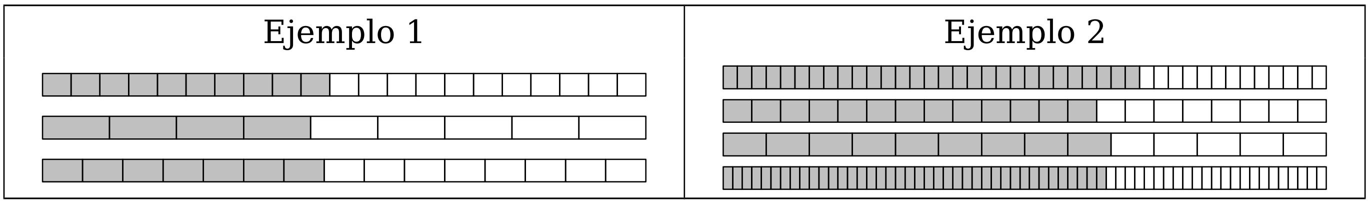
$\frac{29}{42}=\frac{87}{126}$; $\frac{13}{21}=\frac{78}{126}$; $\frac{9}{14}=\frac{81}{126}$; $\frac{40}{63}=\frac{80}{126}$

El orden de los numeradores de las fracciones obtenidas es $78 < 80 < 81 < 87$.

Solución: $\frac{13}{21}<\frac{40}{63}<\frac{9}{14}<\frac{29}{42}$

Representación gráfica

Mostramos la representación gráfica de los dos ejemplos para ilustrar la dificultad del problema. Así apreciamos que el método expuesto es muy bueno.



Enunciados

Ordena de menor a mayor las fracciones de cada uno de los siguientes grupos de fracciones.

① $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ y $\frac{3}{4}$

② $\frac{13}{14}$, $\frac{19}{21}$ y $\frac{32}{35}$

③ $\frac{8}{15}$, $\frac{5}{9}$ y $\frac{11}{21}$

④ $\frac{34}{49}$, $\frac{11}{14}$ y $\frac{16}{21}$

⑤ $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{8}$

⑥ $\frac{22}{27}$, $\frac{7}{9}$ y $\frac{5}{6}$

⑦ $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{15}$ y $\frac{16}{25}$

⑧ $\frac{32}{55}$, $\frac{13}{22}$ y $\frac{19}{33}$

⑨ $\frac{11}{12}$, $\frac{31}{36}$, $\frac{47}{54}$ y $\frac{19}{24}$

⑩ $\frac{6}{35}$, $\frac{2}{15}$ y $\frac{1}{6}$

⑪ $\frac{13}{24}$, $\frac{11}{20}$ y $\frac{9}{16}$

⑫ $\frac{47}{100}$, $\frac{23}{50}$ y $\frac{33}{75}$

⑬ $\frac{5}{24}$, $\frac{7}{36}$ y $\frac{3}{16}$

⑭ $\frac{33}{75}$, $\frac{7}{15}$ y $\frac{20}{45}$

⑮ $\frac{5}{14}$, $\frac{31}{98}$ y $\frac{9}{28}$

⑯ $\frac{19}{44}$, $\frac{9}{22}$ y $\frac{15}{33}$

⑰ $\frac{31}{63}$, $\frac{10}{21}$ y $\frac{47}{98}$

⑱ $\frac{27}{42}$, $\frac{19}{30}$ y $\frac{25}{42}$

Fracciones negativas

Una vez entendida la necesidad de usar números enteros considerando números positivos y negativos, también entendimos la necesidad de considerar números decimales positivos y negativos. Por los mismos motivos, es conveniente utilizar fracciones positivas y negativas.

El manejo básico de las fracciones se aprende mejor usando solo fracciones formadas por números naturales, como hemos hecho hasta ahora. Es imprescindible tener claros los conceptos de representación, equivalencia y ordenación de fracciones, por eso hasta el momento solo hemos usado fracciones positivas.

Pero cuando hay que hacer operaciones con fracciones, deberemos tener en consideración también las fracciones negativas.

Una fracción negativa se escribe simplemente con el signo menos delante de la raya de fracción.

Ejemplo 1: menos dos tercios se escribe « $-\frac{2}{3}$ ».

Pero hay otras dos fracciones que son equivalentes a ella:

Ejemplo 2: $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$

Es decir, el signo menos de una fracción negativa se puede escribir en el numerador, en el denominador o delante de la raya. Se pone donde resulte más cómodo en cada operación. Para las soluciones finales se prefiere escribirlo delante de la raya.

Otra definición de fracción

Además de la definición clásica de fracción que hemos usado hasta ahora, podemos definir una fracción de esta otra manera:

Una fracción es el cociente indicado de dos números enteros

«Cociente» quiere decir que se podría hacer la división entre el numerador y el denominador; pero «indicado» quiere decir que la división realmente no la realizamos, que nos interesa saber en cuántas partes se ha descompuesto la unidad y cuántas estamos considerando.

Según esta definición, consideramos como fracciones estas expresiones:

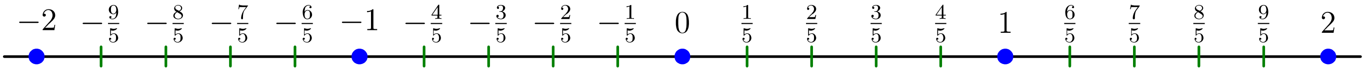
Ejemplo 3: $\frac{-2}{-3}$; **ejemplo 4**: $\frac{17}{1}$; **ejemplo 5**: $\frac{15}{-5}$

Sin embargo, como en matemáticas buscamos la simplicidad, las expresiones anteriores casi siempre las escribiremos y usaremos de otra forma:

- $\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$. Esto coincide con la regla de los signos de la división: negativo entre negativo da positivo.
- $\frac{17}{1}=17$. Esta expresión también se puede interpretar con la definición clásica, pero sería trivial, porque estaría indicando que cada unidad se ha descompuesto en un solo trozo (es decir, que realmente no se ha descompuesto).
- $\frac{15}{-5}=-3$. Un número entero es más sencillo de manejar que una fracción.

Números enteros y fracciones

Los números enteros y las fracciones se pueden representar en la misma recta. Vemos los números enteros de –2 a 2 (representados con un punto azul) junto con todas las fracciones con denominador 5 que hay entre ellos (representadas con una línea verde vertical):



Observa que las fracciones aparecen entre los números enteros, exactamente como ocurría con los números decimales.

A la vista de la representación, son obvias las siguientes equivalencias:

$$-2=-\frac{10}{5} \qquad -1=-\frac{5}{5} \qquad 0=\frac{0}{5} \qquad 1=\frac{5}{5} \qquad 2=\frac{10}{5}$$

La relación entre números enteros, números decimales y fracciones es muy profunda. En este nivel del curso estudiaremos la relación entre los números enteros y las fracciones y en el nivel 2 estudiaremos la relación entre los números decimales y las fracciones.

Conversión de fracción a número entero

Algunas fracciones son equivalentes a números enteros: aquellas en las que la división entre el numerador y el denominador sea exacta.

Ejemplo 1	$\frac{15}{5}=3$	Ejemplo 2	$\frac{-21}{7}=-3$	Ejemplo 3	$\frac{26}{-13}=-2$

Conversión de número entero a fracción

Cualquier número entero se puede escribir como fracción, usando para ello el denominador que se quiera. El numerador se calcula entonces como el producto del número entero por el denominador elegido.

Ejemplo 4: escribe el número entero 3 como una fracción con denominador 4.

El 3 significa que tenemos 3 unidades. Escribir una fracción con denominador 4 significa dividir cada una unidad en 4 partes. Si tenemos 3 unidades y de cada una obtenemos 4 partes, en total habrá 3 · 4 = 12 partes, luego el numerador es 12.

Solución: $3=\frac{12}{4}$

Ejemplo 5: escribe el número entero –4 como una fracción con denominador 5.

El numerador es –4 · 5 = –20. La fracción se puede escribir $\frac{-20}{5}$, pero la solución final es mejor escribirla con el signo menos delante de la raya de fracción.

Solución: $-4=-\frac{20}{5}$

Ejemplo 6: escribe el número entero 7 como una fracción con denominador 11.

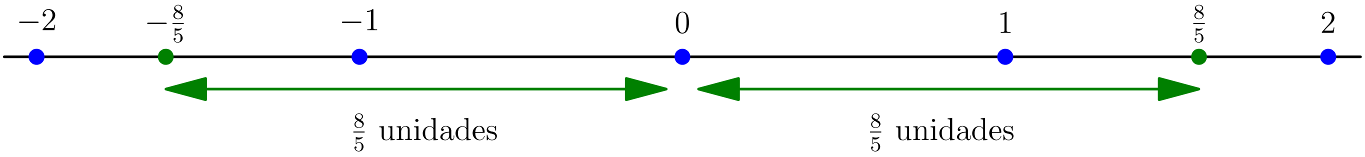
El numerador es 7 · 11 = 77. Solución: $7=\frac{77}{11}$

Fracciones opuestas

Igual que definimos con los números enteros y los números decimales, dos fracciones es son opuesta una de la otra cuando están a la misma distancia del cero en la representación de los fracciones en una recta.

Ejemplo

Las fracciones $\frac{8}{5}$ y $-\frac{8}{5}$ son una la opuesta de la otra porque ambas distan $\frac{8}{5}$ unidades del 0.



Propiedades de las fracciones opuestas

Las fracciones opuestas tienen las mismas propiedades que ya tenían los números enteros opuestos y los números decimales opuestos.

- La opuesta de una fracción negativa es una fracción positiva.
- La opuesta de una fracción positiva es una fracción negativa.
- La opuesta de la opuesta de una fracción es la misma fracción.

Notación de fracción opuesta

Igual que hicimos con los números enteros y los números decimales, se usa el signo menos («–») para indicar «opuesto de».

Ejemplo: para decir «la fracción opuesta de $-\frac{8}{5}$» tenemos que escribir «$-\left(-\frac{8}{5}\right)$».

El primer signo «–» significa «opuesto», el segundo es el de la fracción negativa y el paréntesis es necesario para que no haya dos signos seguidos.

Valor absoluto de una fracción

La definición y la notación de valor absoluto de una fracción son las mismas que las de valor absoluto de un número entero y de un número decimal:

- Si una fracción es positiva, su valor absoluto es la misma fracción.
- Si una fracción es negativa, su valor absoluto es la opuesta de la fracción, por lo que el resultado es una fracción positiva.

Ejemplo 1	$\left\lvert\frac{17}{13}\right\rvert=\frac{17}{13}$	El valor absoluto de $\frac{17}{13}$ es $\frac{17}{13}$
Ejemplo 2	$\left\lvert-\frac{15}{23}\right\rvert=\frac{15}{23}$	El valor absoluto de $-\frac{15}{23}$ es $\frac{15}{23}$

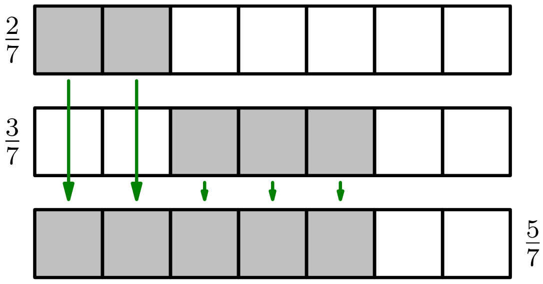
Propiedades del valor absoluto de las fracciones

El valor absoluto de las fracciones tiene las mismas propiedades que ya tenía el valor absoluto de los números enteros y de los números decimales:

- El valor absoluto de una fracción mide la distancia entre la fracción y 0 en la recta en la que se representan las fracciones.
- Si dos fracciones son opuestas, tienen el mismo valor absoluto.

Suma de fracciones con el mismo denominador

- La regla es: **se suman los numeradores y se deja el mismo denominador**.
- Simbólicamente: si a, b y c son números enteros, entonces $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$
- **Ejemplo 1**: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$
- El motivo es que, al tener las fracciones el mismo denominador, las dos indican que la unidad se ha dividido en el mismo número de partes, luego las partes de cada fracción son del mismo tamaño; por eso, solo es necesario sumar los numeradores.



- La regla es aplicable a la suma de cualquier cantidad de fracciones.

Ejemplo 2

$$\frac{5}{13}-\frac{2}{13}=\frac{5-2}{13}=\frac{3}{13}$$

Observa que la segunda fracción es negativa, así que esta operación sigue siendo una suma. Recuerda cuando sumábamos números enteros positivos y negativos. Además, con fracciones también podemos escribirlo así para convercernos de que es una suma:

$$\frac{5}{13}-\frac{2}{13}=\frac{5}{13}+\frac{-2}{13}=\frac{5-2}{13}=\frac{3}{13}$$

Ejemplo 3

$$\frac{7}{15}+\frac{2}{15}-\frac{11}{15}=\frac{7+2-11}{15}=\frac{-2}{15}=-\frac{2}{15}$$

Cuando el resultado es una fracción negativa, se prefiere escribir el signo menos antes de la raya de fracción.

Posible simplificación

Como ves, sumar fracciones con el mismo denominador es muy sencillo; pero falta un paso más: casi siempre queremos el resultado escrito del modo más sencillo posible, así que habrá que tener la precaución de comprobar si el resultado se puede simplificar y, en ese caso, hacerlo. El resultado final será una fracción irreducible o un número entero.

Ejemplos

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

Ejemplo 4	$\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5+1}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$
Ejemplo 6	$\frac{63}{77}-\frac{8}{77}=\frac{63-8}{77}=\frac{55}{77}=\frac{5}{7}$
Ejemplo 8	$\frac{23}{3}-\frac{2}{3}=\frac{23-2}{3}=\frac{21}{3}=7$

Ejemplo 5	$\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=\frac{8+2}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{5}$
Ejemplo 7	$-\frac{3}{18}-\frac{7}{18}=\frac{-3-7}{18}=\frac{-10}{18}=-\frac{5}{9}$
Ejemplo 9	$-\frac{8}{5}-\frac{2}{5}=\frac{-8-2}{5}=\frac{-10}{5}=-2$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\frac{19}{35}+\frac{9}{35}$

② $\frac{10}{21}-\frac{1}{21}$

③ $\frac{40}{27}-\frac{61}{27}$

④ $\frac{2}{11}-\frac{15}{11}$

⑤ $\frac{21}{5}+\frac{11}{5}-\frac{2}{5}$

⑥ $-\frac{31}{28}+\frac{11}{28}$

⑦ $\frac{101}{63}-\frac{10}{63}+\frac{8}{63}$

⑧ $-\frac{7}{3}-\frac{19}{3}+\frac{5}{3}$

⑨ $\frac{3}{22}+\frac{13}{22}-\frac{5}{22}+\frac{19}{22}$

⑩ $-\frac{6}{17}+\frac{11}{17}$

⑪ $\frac{21}{25}+\frac{16}{25}-\frac{2}{25}$

⑫ $\frac{71}{13}-\frac{51}{13}+\frac{6}{13}$

⑬ $\frac{52}{33}-\frac{8}{33}$

⑭ $\frac{2}{45}-\frac{4}{45}+\frac{12}{45}$

⑮ $\frac{16}{10}-\frac{31}{10}$

⑯ $\frac{1}{7}-\frac{5}{7}-\frac{2}{7}$

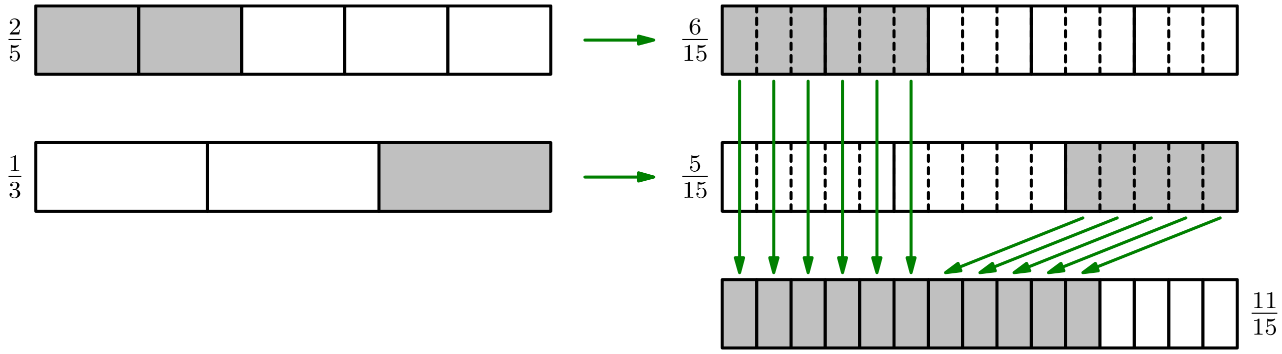
⑰ $\frac{51}{5}+\frac{9}{5}-\frac{8}{5}-\frac{12}{5}$

⑱ $\frac{22}{39}-\frac{5}{39}+\frac{9}{39}$

Suma de fracciones con distinto denominador

✱ Se convierten todas las fracciones en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y luego se hace la suma.

✱ **Ejemplo 1**: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$



✱ El motivo del método es que, al tener las fracciones distinto denominador, las partes de cada fracción son de distinto tamaño y no se pueden sumar los numeradores directamente. Al convertir las fracciones al mismo denominador, la dificultad queda resuelta.

✱ La regla es aplicable a la suma de cualquier cantidad de fracciones.

✱ Para ahorrar tiempo y esfuerzo, es habitual escribir una sola vez el nuevo denominador y escribir como numerador la suma de los nuevos numeradores.

✱ **Ejemplo 2**: $\frac{5}{6}-\frac{2}{9}=\frac{15-4}{18}=\frac{11}{18}$

Posible simplificación

Como en casi todas las operaciones con fracciones, habrá que comprobar si el resultado se puede simplificar y, en ese caso, hacerlo. El resultado final será una fracción irreducible o un número entero.

Ejemplos

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

Ejemplo 3	$\frac{3}{5}+\frac{1}{15}=\frac{9+1}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$
Ejemplo 4	$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3+2+1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$
Ejemplo 5	$\frac{3}{14}-\frac{12}{7}=\frac{3-24}{14}=\frac{-21}{14}=-\frac{3}{2}$
Ejemplo 6	$\frac{3}{7}+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}=\frac{6+7+1}{14}=\frac{14}{14}=1$
Ejemplo 7	$\frac{3}{2}+\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{15+2+3}{10}=\frac{20}{10}=2$
Ejemplo 8	$\frac{8}{11}-\frac{5}{3}=\frac{24-55}{33}=\frac{-31}{33}=-\frac{31}{33}$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\frac{3}{7}-\frac{2}{5}$

② $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}$

③ $\frac{5}{6}+\frac{3}{10}$

④ $\frac{1}{6}+\frac{3}{14}$

⑤ $\frac{4}{15}+\frac{4}{21}$

⑥ $\frac{2}{3}-\frac{11}{2}$

⑦ $\frac{9}{14}+\frac{4}{21}$

⑧ $-\frac{7}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}$

⑨ $\frac{3}{7}-\frac{4}{5}$

⑩ $\frac{7}{6}+\frac{8}{9}+\frac{5}{18}$

⑪ $\frac{11}{3}+\frac{4}{7}-\frac{5}{21}$

⑫ $\frac{9}{14}-\frac{3}{4}-\frac{1}{28}$

⑬ $\frac{7}{5}-\frac{67}{30}$

⑭ $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$

⑮ $\frac{1}{4}-\frac{5}{9}$

⑯ $\frac{5}{11}-\frac{10}{7}-\frac{2}{77}$

⑰ $\frac{2}{3}+\frac{4}{21}$

⑱ $\frac{8}{55}-\frac{3}{5}$

Fracciones unitarias

- Se llaman fracciones unitarias a las que tienen numerador 1 y denominador positivo.
- Son todas irreducibles.
- Son de las primeras fracciones usadas extensamente por la humanidad.
- Se siguen usando actualmente en algunos problemas científicos.
- Cualquier fracción positiva (incluyendo los números naturales) se puede escribir como suma de fracciones unitarias.

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado como fracción unitaria.

① $\frac{19}{20}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

② $\frac{19}{20}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{180}$

③ $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$

④ $\frac{4}{5}-\frac{1}{20}-\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{7}{10}-\frac{1}{2}$

⑥ $\frac{3}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{3}$

⑦ $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$

⑧ $\frac{1}{10}+\frac{1}{40}$

⑨ $\frac{1}{11}-\frac{1}{12}$

⑩ $\frac{1}{44}+\frac{1}{77}$

⑪ $\frac{1}{22}+\frac{1}{33}+\frac{1}{66}$

⑫ $\frac{1}{60}+\frac{1}{84}$

⑬ $\frac{3}{10}+\frac{1}{5}$

⑭ $\frac{1}{9}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}$

Importancia de las simplificaciones

Cuando se trabaja con fracciones, especialmente cuando hay que hacer las operaciones manualmente, nos podemos encontrar con cálculos complicados. En matemáticas se busca siempre el camino más sencillo. En este contexto, el camino más sencillo casi siempre consiste en simplificar las fracciones lo antes posible.

Cuanto antes simplifiques, más fácil será la operación

Irás viendo a lo largo del estudio de las fracciones cómo aplicamos este principio una y otra vez. Ahora vamos a aplicarlo a la suma de fracciones.

Enunciado común de todos los ejemplos

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

Ejemplo 1. $\frac{6}{22}+\frac{15}{33}-\frac{10}{55}$

Observamos que las tres fracciones tienen distinto denominador, así que, en principio tendríamos que obtener fracciones equivalentes con el mismo denominador, para lo que habría que calcular el mínimo común múltiplo de 22, 33 y 55.

Sin embargo, cada una de las tres fracciones se puede simplificar. Si obtenemos fracciones irreducibles equivalentes, la operación se convierte en

$$\frac{6}{22}+\frac{15}{33}-\frac{10}{55}=\frac{3}{11}+\frac{5}{11}-\frac{2}{11}$$

Ahora todas las fracciones de la suma tienen el mismo denominador, así que nos vamos a ahorrar muchas operaciones. Terminamos:

$$\frac{3}{11}+\frac{5}{11}-\frac{2}{11}=\frac{6}{11}$$

La fracción obtenida es irreducible, así que ya es la solución final. Solución: $\frac{6}{11}$

Ejemplo 2. $\frac{35}{147}-\frac{16}{132}$

Si lo hacemos sin simplificación previa: $\frac{35}{147}-\frac{16}{132}=\frac{1540-785}{6468}=\frac{756}{6468}=\frac{9}{77}$

Si lo hacemos con simplificación previa: $\frac{35}{147}-\frac{16}{132}=\frac{5}{21}-\frac{4}{33}=\frac{27}{231}=\frac{9}{77}$

Fíjate en que los números son mucho más sencillos en la segunda resolución.

Excepciones

Las reglas generales están bien, ayudan a los estudiantes a seguir buenos caminos de pensamiento. Pero no debes perder de vista que para algunas situaciones se pueden encontrar mejores métodos, así que dedica un momento antes de empezar las operaciones para reflexionar sobre cuál es realmente el camino más sencillo.

Ejemplo 3. $\frac{10}{18}+\frac{15}{18}$

Aunque las dos fracciones se pueden simplificar, hacerlo no es buena idea porque ya tienen el mismo denominador. Solución: $\frac{25}{18}$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\frac{4}{10}+\frac{9}{15}$

② $\frac{5}{15}+\frac{2}{12}$

③ $\frac{6}{10}-\frac{20}{30}$

④ $\frac{7}{24}+\frac{8}{24}-\frac{1}{24}$

⑤ $\frac{8}{6}-\frac{4}{30}$

⑥ $\frac{4}{20}-\frac{4}{14}$

⑦ $\frac{21}{14}+\frac{20}{25}-\frac{3}{10}$

⑧ $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}$

⑨ $\frac{1}{3}+\frac{5}{15}+\frac{7}{21}$

⑩ $\frac{2}{14}+\frac{9}{35}$

⑪ $\frac{16}{12}+\frac{25}{20}-\frac{7}{12}$

⑫ $\frac{15}{25}-\frac{6}{10}$

⑬ $\frac{3}{18}+\frac{4}{5}-\frac{3}{10}$

⑭ $\frac{7}{28}+\frac{5}{10}$

⑮ $-\frac{35}{25}+\frac{14}{35}$

⑯ $\frac{33}{30}+\frac{2}{30}$

⑰ $\frac{14}{35}-\frac{16}{28}$

⑱ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{18}$

Suma de un número entero y una fracción

Sabemos que cualquier número entero se puede escribir como fracción y además usando el denominador que se desee. Lo vamos a poner en práctica para sumar un número entero y una fracción.

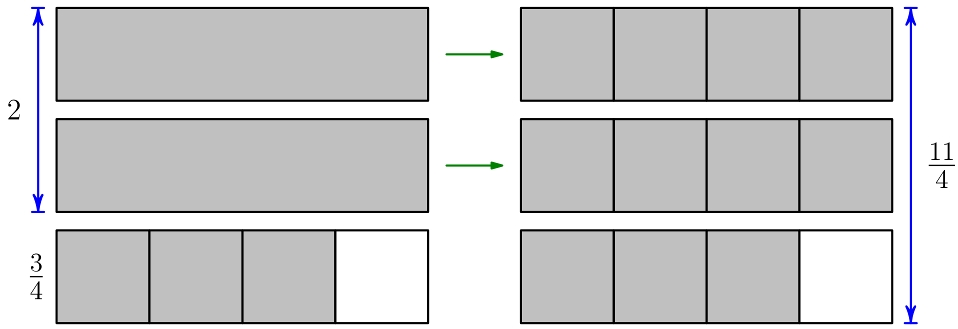
Ejemplo 1. $2+\frac{3}{4}$

Convertimos el número entero (2) en una fracción con denominador 4: $2=\frac{¿?}{4}$

El numerador será 2 · 4 = 8, porque estamos descomponiendo 2 unidades en 4 partes cada una. Así que $2=\frac{8}{4}$

Ahora podemos poner con el mismo denominador el número entero y la fracción y sumar los numeradores:

$2+\frac{3}{4}=\frac{8}{4}+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$. Solución: $\frac{11}{4}$. Vemos gráficamente el procedimiento:



Más ejemplos

Ejemplo 2	$4-\frac{3}{5}=\frac{20}{5}-\frac{3}{5}=\frac{17}{5}$	Porque 4 · 5 = 20
Ejemplo 3	$\frac{8}{11}-2=\frac{8}{11}-\frac{22}{11}=-\frac{14}{11}$	Porque 2 · 11 = 22

Cálculo mental

Con números sencillos, es posible hacer mentalmente todas las operaciones.

Ejemplo 4	$5+\frac{7}{3}=\frac{22}{3}$	Porque 5 · 3 + 7 = 22
Ejemplo 5	$\frac{4}{5}-2=-\frac{6}{5}$	Porque 4 – 2 · 5 = –6

Simplificaciones

* Si la fracción original es irreducible, la fracción final también lo es.
* Si la fracción original no es irreducible, conviene simplificarla antes de operar, porque si no habría que hacerlo después y los números serían más complicados.

Ejemplo 6	$2+\frac{21}{33}=2+\frac{7}{11}=\frac{29}{11}$	Porque $\frac{21}{33}=\frac{7}{11}$ y 2 · 11 + 7 = 29

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado como fracción irreducible.

① $3+\frac{1}{2}$

② $4+\frac{5}{3}$

③ $5+\frac{15}{35}$

④ $2-\frac{2}{3}$

⑤ $4-\frac{7}{5}$

⑥ $3-\frac{18}{45}$

⑦ $\frac{2}{5}+3$

⑧ $\frac{7}{2}+5$

⑨ $\frac{20}{28}+3$

⑩ $\frac{2}{3}-1$

⑪ $\frac{6}{7}-2$

⑫ $\frac{49}{42}-3$

⑬ $2-\frac{15}{4}$

⑭ $\frac{5}{10}-7$

⑮ $-2+\frac{3}{8}$

⑯ $-\frac{4}{5}-3$

⑰ $\frac{8}{3}-3$

⑱ $-3+\frac{30}{54}$

	A	B	C	D	E
1	$1+\frac{3}{2}$	$3-\frac{2}{5}$	$2+\frac{5}{4}$	$1-\frac{8}{3}$	$\frac{2}{5}+2$
2	$\frac{2}{5}-3$	$-1-\frac{2}{3}$	$-2+\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}-1$	$\frac{7}{5}-1$
3	$4+\frac{1}{7}$	$5-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}-2$	$-\frac{1}{2}-3$	$2-\frac{3}{8}$
4	$\frac{4}{5}+2$	$-1-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{7}+3$	$\frac{8}{9}-1$	$5+\frac{3}{10}$
5	$10-\frac{19}{2}$	$-\frac{5}{3}+1$	$4+\frac{4}{5}$	$3-\frac{2}{7}$	$\frac{2}{3}+5$
6	$\frac{7}{10}-5$	$2-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{7}+1$	$\frac{3}{7}-2$	$1+\frac{1}{3}$
7	$-1-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}-2$	$1+\frac{5}{13}$	$\frac{7}{13}-1$	$2+\frac{4}{11}$
8	$-3+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{7}-2$	$4+\frac{9}{4}$	$\frac{12}{7}-1$	$\frac{7}{3}-4$
9	$5+\frac{2}{9}$	$\frac{33}{4}-3$	$10+\frac{7}{10}$	$\frac{4}{13}+1$	$-2-\frac{1}{2}$
10	$2+\frac{9}{4}$	$-2+\frac{6}{7}$	$3+\frac{1}{8}$	$7-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{7}+3$

Suma de un número entero y varias fracciones

Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones y se escriben tanto el número como las fracciones con ese denominador. Por último, se suman los nuevos numeradores.

Ejemplo 1	$2-\frac{4}{5}+\frac{2}{3}=\frac{30}{15}-\frac{12}{15}+\frac{10}{15}=\frac{30-12+10}{15}=\frac{28}{15}$	Porque mcm(5, 3) = 15
Ejemplo 2	$\frac{1}{4}-2+\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{24}{12}+\frac{10}{12}=\frac{3-24+10}{12}=\frac{-11}{12}=-\frac{11}{12}$	Porque mcm(4, 6) = 12

Escritura más sencilla

En vez de repetir el nuevo denominador en todas las fracciones, se puede escribir una sola vez e ir escribiendo directamente las operaciones del numerador.

Ejemplo 3	$-1+\frac{2}{7}+\frac{5}{14}=\frac{-14+4+5}{14}=\frac{-5}{14}=-\frac{5}{14}$	Porque mcm(7, 14) = 14
Ejemplo 4	$-\frac{7}{8}+\frac{1}{12}+1=\frac{-21+2+24}{24}=\frac{5}{24}$	Porque mcm(8, 12) = 24

Simplificación final

Como ocurre con casi todas las operaciones en las que el resultado final puede ser una fracción, se suele pedir que la fracción dada como resultado sea irreducible.

Ejemplo 5	$\frac{29}{14}-\frac{5}{21}-2=\frac{87-10-84}{42}=\frac{-7}{42}=-\frac{1}{6}$	Porque mcm(14, 21) = 42
Ejemplo 6	$\frac{5}{6}-\frac{11}{15}+2=\frac{25-22+60}{30}=\frac{63}{30}=\frac{21}{10}$	Porque mcm(6, 15) = 30

Simplificaciones previas

Casi siempre ahorra trabajo simplificar las fracciones lo antes posible.

Ejemplo 7	$\frac{3}{12}+3-\frac{40}{25}=\frac{1}{4}+3-\frac{8}{5}=\frac{5+60-32}{20}=\frac{33}{20}$	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ y $\frac{40}{25}=\frac{8}{5}$
Ejemplo 8	$-2+\frac{12}{45}+\frac{6}{40}=-2+\frac{4}{15}+\frac{3}{20}=\frac{-120+16+9}{60}=\frac{-95}{60}=-\frac{19}{12}$	$\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$ y $\frac{6}{40}=\frac{3}{20}$

Suma de varios números enteros y varias fracciones

Suele ser buena idea hacer la operación entre los números enteros para reducir todos ellos a uno solo y luego operar este con las fracciones. En el mismo paso en que se hace la operación con los números enteros, se puede aprovechar para ir simplificando aquellas funciones que lo admitan.

Ejemplo 9	$4-6+\frac{7}{14}+\frac{5}{3}=-2+\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=\frac{-12+3+10}{6}=\frac{1}{6}$	Porque 4–6=2 y $\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$
Ejemplo 10	$-7-\frac{5}{7}+\frac{26}{39}+8=1-\frac{5}{7}+\frac{2}{3}=\frac{21-15+14}{21}=\frac{20}{21}$	Porque –7+8=1 y $\frac{26}{39}=\frac{2}{3}$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $2-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}$

② $3-\frac{1}{4}+\frac{5}{8}-2$

③ $8-\frac{19}{3}-\frac{23}{6}$

④ $5-\frac{7}{5}-\frac{9}{2}$

⑤ $1-\frac{13}{15}+\frac{1}{6}$

⑥ $-\frac{13}{10}+\frac{2}{15}+2$

⑦ $3-\frac{7}{4}-\frac{5}{6}$

⑧ $4+\frac{1}{7}-\frac{4}{28}-3$

⑨ $1+\frac{3}{6}-\frac{15}{25}$

⑩ $7-\frac{3}{21}+\frac{15}{35}-8$

⑪ $4-\frac{5}{15}+\frac{4}{15}$

⑫ $2-\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$

⑬ $2+\frac{10}{15}-\frac{28}{21}$

⑭ $1-\frac{18}{21}+\frac{5}{21}$

⑮ $1+\frac{1}{5}-\frac{2}{7}$

⑯ $-2+\frac{7}{3}+\frac{3}{7}-\frac{16}{21}$

⑰ $1+\frac{5}{6}+\frac{7}{15}-\frac{6}{7}$

⑱ $\frac{7}{10}-\frac{4}{15}-\frac{1}{35}-1$

Regla para restar dos fracciones

Para restar dos fracciones se suma al minuendo la fracción opuesta del sustraendo.

Ejemplos

Ejemplo 1	Minuendo: $-\frac{3}{7}$	Conversión de la operación:	Resultado:
Operación:	Sustraendo: $+\frac{2}{7}$		
$\left(-\frac{3}{7}\right)-\left(+\frac{2}{7}\right)$	Opuesto del sustraendo: $-\frac{2}{7}$	$\left(-\frac{3}{7}\right)+\left(-\frac{2}{7}\right)$	$-\frac{5}{7}$
Resumen	$\left(-\frac{3}{7}\right)-\left(+\frac{2}{7}\right)=\left(-\frac{3}{7}\right)+\left(-\frac{2}{7}\right)=-\frac{5}{7}$		

Ejemplo 2	Minuendo: $+\frac{3}{8}$	Conversión de la operación:	Resultado:
Operación:	Sustraendo: $-\frac{2}{8}$		
$\left(+\frac{3}{8}\right)-\left(-\frac{2}{8}\right)$	Opuesto del sustraendo: $+\frac{2}{8}$	$\left(+\frac{3}{8}\right)+\left(+\frac{2}{8}\right)$	$+\frac{5}{8}$
Resumen	$\left(+\frac{3}{8}\right)-\left(-\frac{2}{8}\right)=\left(+\frac{3}{8}\right)+\left(+\frac{2}{8}\right)=+\frac{5}{8}$		

Escritura simplificada

Cuando no escribimos tantos signos ni paréntesis se ve que el único caso importante que hay que considerar es que el sustraendo sea negativo.

Los ejemplos anteriores, simplificados, quedan así:

Ejemplo 1	$-\frac{3}{7}-\frac{2}{7}=-\frac{5}{7}$
Ejemplo 2	$\frac{3}{8}-\left(-\frac{2}{8}\right)=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$

Es decir, lo fundamental es saber que la fracción opuesta de una fracción negativa es una fracción positiva del mismo valor absoluto:

$$\boxed{-\left(-\frac{2}{8}\right)=\frac{2}{8}}$$

Varios sustraendos

En una operación puede haber varios sustraendos, colocados en cualquier sitio.

Ejemplo 3

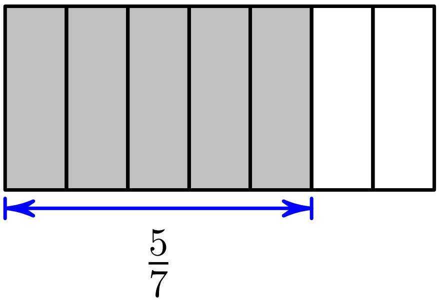
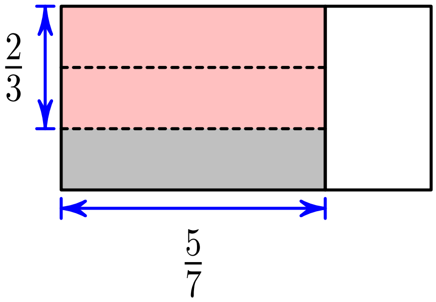
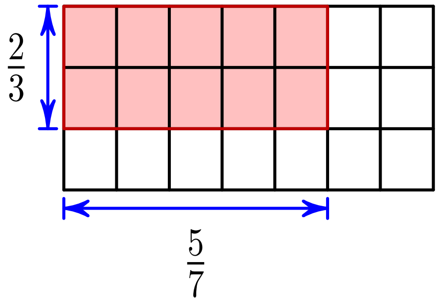
$$-\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{2}{7}-\left(-\frac{3}{14}\right)=\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+\frac{3}{14}=\frac{42+20+15}{70}=\frac{77}{70}=\frac{11}{10}$$

Producto de dos fracciones

Para poder entender por qué se multiplican fracciones tal como vamos a ver, es conveniente que interpretes el producto de dos fracciones como calcular **una parte de otra parte** de la unidad.

Ejemplo 1

Para multiplicar las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{7}$ piensa que queremos averiguar qué parte de una unidad constituyen los dos tercios de los cinco séptimos de la unidad.

Paso 1	Paso 2	Paso 3
		
Marcamos (en gris) los cinco séptimos de una unidad.	Marcamos (en rosa) los dos tercios de los cinco séptimos que hemos marcado antes.	Vemos que la parte rosa se puede obtener como 10 partes de las 21 en que se ha dividido la unidad.

Para formar los dos tercios de los cinco séptimos de una unidad hemos dividido la unidad en $3 \cdot 7 = 21$ partes (primero en siete partes verticales y luego en tres partes horizontales) y nos hemos quedado con $2 \cdot 5 = 10$ (primero cinco y luego dos).

Por tanto, $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

Regla para multiplicar dos fracciones

- ✱ El resultado de multiplicar dos fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.
- ✱ El método se expresa simbólicamente así:

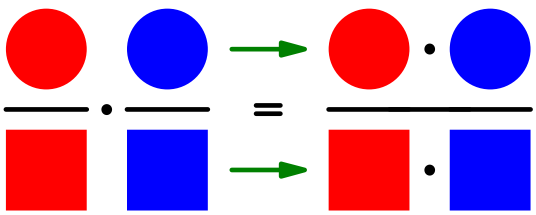
  Si a, b, c y d son números enteros y b y d no son cero, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- ✱ Se aplica la regla de los signos, como con los números enteros.
- ✱ Más abajo, a la derecha, se ve un esquema visual.

Ejemplo 2

$\frac{5}{11} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{11 \cdot 4} = \frac{15}{44}$

Ejemplo 3

$\frac{9}{2} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) = -\frac{9 \cdot 5}{2 \cdot 8} = -\frac{45}{16}$



Simplificaciones en el producto de fracciones

Cuando hacemos operaciones con fracciones, casi siempre queremos el resultado final escrito del modo más sencillo posible, fracción irreducible o número entero; por eso es muy conveniente simplificar lo antes posible. En los productos de fracciones es muy habitual que se puedan hacer simplificaciones que ahorran mucho tiempo y algunos errores.

Enunciado común de todos los ejemplos

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

Ejemplo 1. $\frac{10}{15}\cdot\frac{49}{77}$

Las dos fracciones se pueden simplificar, la primera entre 5 y la segunda entre 7, así que lo hacemos antes de efectuar el producto: $\frac{10}{15}\cdot\frac{49}{77}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{11}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 11}=\frac{14}{33}$

Si no hiciéramos las simplificaciones, los números con los que tendríamos que trabajar serían mayores y la simplificación final sería más difícil (entre 35), con lo que aumenta la probabilidad de cometer algún error: $\frac{10}{15}\cdot\frac{49}{77}=\frac{10\cdot 49}{15\cdot 77}=\frac{490}{1155}=\frac{14}{33}$

Ejemplo 2. $\frac{14}{33}\cdot\frac{44}{35}$

Ahora las fracciones no se pueden simplificar, pero el numerador de la primera se podrá simplificar con el denominador de la segunda (entre 7) y el numerador de la segunda se podrá simplificar con el denominador de la primera (entre 11).

$\frac{14}{33}\cdot\frac{44}{35}=\frac{\mathbf{14}\cdot\mathbf{44}}{\mathbf{33}\cdot\mathbf{35}}=\frac{\mathbf{2}\cdot\mathbf{4}}{\mathbf{3}\cdot\mathbf{5}}=\frac{8}{5}$. Hemos señalado con colores las dos simplificaciones.

Resultado con numerador 1

A veces, haciendo estas simplificaciones, el resultado acaba siendo una fracción con numerador 1. Sabes que entonces la fracción obtenida es irreducible.

Ejemplo 3. $\frac{5}{14}\cdot\frac{2}{25}=\frac{\mathbf{5}\cdot\mathbf{2}}{\mathbf{14}\cdot\mathbf{25}}=\frac{\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}}{\mathbf{7}\cdot\mathbf{5}}=\frac{1}{35}$. Hemos simplificado entre 5 y entre 2.

Resultado con denominador 1

Otras veces, haciendo estas simplificaciones, el resultado acaba siendo una fracción con denominador 1. Entonces el resultado es un número entero.

Ejemplo 4. $\frac{49}{4}\cdot\frac{8}{7}=\frac{\mathbf{49}\cdot\mathbf{8}}{\mathbf{4}\cdot\mathbf{7}}=\frac{\mathbf{7}\cdot\mathbf{2}}{\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}}=\frac{14}{1}=14$. Hemos simplificado entre 7 y entre 4.

Consejos

- ✱ Primero simplifica, luego multiplica.
- ✱ Si ves que no se va a poder simplificar nada, multiplica directamente.
- ✱ Si lo ves claro, te puedes saltar el paso de escribir los productos indicados y pasar a las simplificaciones.

Ejemplo 5	$\frac{\mathbf{7}}{3}\cdot\frac{5}{\mathbf{14}}=\frac{\mathbf{1}\cdot 5}{3\cdot\mathbf{2}}=\frac{5}{6}$	Ejemplo 6	$\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{12}{35}$	Ejemplo 7	$-\frac{\mathbf{5}}{7}\cdot\frac{8}{\mathbf{5}}=-\frac{8}{7}$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}$

② $\frac{14}{10} \cdot \frac{21}{15}$

③ $\frac{15}{7} \cdot \frac{14}{9}$

④ $\frac{2}{27} \cdot \frac{3}{16}$

⑤ $\frac{14}{5} \cdot \frac{10}{7}$

⑥ $\frac{13}{5} \cdot \frac{7}{26}$

⑦ $\frac{11}{5} \cdot \frac{15}{22}$

⑧ $\frac{42}{5} \cdot \frac{25}{7}$

⑨ $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}$

⑩ $\frac{1}{20} \cdot \frac{40}{7}$

⑪ $\frac{13}{17} \cdot \frac{17}{13}$

⑫ $\frac{3}{5} \cdot \frac{35}{9}$

⑬ $\frac{49}{22} \cdot \frac{11}{7}$

⑭ $\frac{2}{21} \cdot \frac{7}{16}$

⑮ $\frac{6}{101} \cdot \frac{101}{10}$

⑯ $\frac{5}{3} \cdot \frac{5}{9}$

⑰ $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$

⑱ $\frac{17}{15} \cdot \frac{5}{34}$

Producto de un número entero y una fracción

Para multiplicar un número entero por una fracción convertimos (mentalmente) el número entero en una fracción con denominador 1 y hacemos el producto de las dos fracciones resultantes.

Enunciado común de todos los ejemplos

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

Ejemplo 1. $7\cdot\frac{4}{5}$

- Escribimos de color verde el 1 como denominador del número entero para que veas que no influye en el resultado de la operación:
  - $7\cdot\frac{4}{5}=\frac{7}{\mathbf{1}}\cdot\frac{4}{5}=\frac{7\cdot 4}{\mathbf{1}\cdot 5}=\frac{28}{5}$
- Es mejor **imaginarse** que el número 1 está ahí, pero no escribirlo:
  - $7\cdot\frac{4}{5}=\frac{7\cdot 4}{5}=\frac{28}{5}$

Ejemplo 2. $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 5$

- Escribiendo el 1, para que lo veas:
  - $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 5=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{5}{\mathbf{1}}=-\frac{2\cdot 5}{3\cdot\mathbf{1}}=\frac{10}{3}$
- Mejor, sin escribirlo:
  - $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 5=-\frac{2\cdot 5}{3}=-\frac{10}{3}$

Consecuencia

Podríamos escribir el método de esta otra manera:

Para multiplicar un número entero por una fracción se multiplica el número entero por el numerador de la fracción

Simplificaciones

Ten en cuenta que sigue siendo aplicable el consejo de simplificar lo antes posible.

Ejemplo 3. $9\cdot\frac{10}{14}$

La fracción se puede simplificar antes de multiplicar:

$$9\cdot\frac{10}{14}=9\cdot\frac{5}{7}=\frac{45}{7}$$

Ejemplo 4. $\frac{11}{25}\cdot 15$

Se puede simplificar (entre 5) el número entero con el denominador de la fracción:

$$\frac{11}{\mathbf{25}}\cdot\mathbf{15}=\frac{11\cdot\mathbf{3}}{\mathbf{5}}=\frac{33}{5}$$

	A	B	C	D	E
1	$3\cdot\frac{5}{6}$	$4\cdot\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}\cdot 2$	$3\cdot\frac{7}{3}$	$4\cdot\frac{10}{15}$
2	$\frac{1}{5}\cdot 10$	$4\cdot\frac{1}{8}$	$\frac{2}{4}\cdot 3$	$7\cdot\frac{7}{3}$	$\frac{5}{15}\cdot(-1)$
3	$15\cdot\frac{2}{3}$	$8\cdot\left(-\frac{13}{8}\right)$	$6\cdot\frac{5}{2}$	$2\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{4}{12}\cdot 5$
4	$-2\cdot\frac{5}{3}$	$(-3)\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)$	$3\cdot\frac{7}{11}$	$\frac{15}{13}\cdot 2$	$10\cdot\frac{3}{20}$
5	$5\cdot\frac{7}{15}$	$4\cdot\frac{21}{9}$	$\frac{1}{22}\cdot(-11)$	$7\cdot\frac{5}{70}$	$-5\cdot\frac{3}{7}$
6	$12\cdot\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}\cdot 5$	$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(-2)$	$-5\cdot\frac{9}{5}$	$15\cdot\frac{2}{25}$
7	$7\cdot\frac{5}{14}$	$\frac{9}{3}\cdot(-5)$	$11\cdot\frac{2}{4}$	$-8\cdot\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}\cdot 30$
8	$7\cdot\frac{4}{16}$	$14\cdot\frac{2}{21}$	$\frac{-5}{6}\cdot 12$	$3\cdot\frac{17}{9}$	$\frac{15}{25}\cdot(-7)$
9	$-8\cdot\frac{5}{40}$	$5\cdot\frac{3}{17}$	$5\cdot\frac{7}{10}$	$\frac{3}{7}\cdot 21$	$-5\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)$
10	$5\cdot\frac{7}{25}$	$4\cdot\frac{4}{7}$	$7\cdot\frac{4}{7}$	$-2\cdot\frac{101}{101}$	$4\cdot\frac{1}{4}$

Fracciones inversas

Dos fracciones son una inversa de la otra cuando su producto es 1.

Ejemplo 1

Las fracciones $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ son inversas una de la otra porque $\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$

Ejemplo 2

Las fracciones $-\frac{5}{7}$ y $-\frac{7}{5}$ son inversas una de la otra porque $\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)=1$

Fracción inversa de un número entero

La fracción inversa de un número entero es una fracción unitaria (es decir, una fracción con numerador 1).

Ejemplo 3

La fracción inversa del número 5 es $\frac{1}{5}$ porque $5\cdot\frac{1}{5}=1$

Ejemplo 4

La fracción inversa del número –9 es $-\frac{1}{9}$ porque $-9\cdot-\frac{1}{9}=1$

Fracción inversa de una fracción unitaria

La fracción inversa de una fracción unitaria es un número entero.

Ejemplo 5

La fracción inversa de $\frac{1}{7}$ es 7 porque $\frac{1}{7}\cdot 7=1$

Ejemplo 6

La fracción inversa de $-\frac{1}{13}$ es –13 porque $-\frac{1}{13}\cdot(-13)=1$

Fracción inversa del número 0

El número 0 no tiene fracción inversa porque ninguna fracción multiplicada por 0 puede dar como resultado 1.

$0\cdot\frac{a}{b}=1$ → imposible.

Fracción inversa del número 1

La fracción inversa del número 1 es el propio número 1 porque 1 · 1 = 1.

Fracción inversa del número –1

La fracción inversa del número –1 es el propio número –1 porque (–1) · (–1) = 1.

Notación de fracción inversa

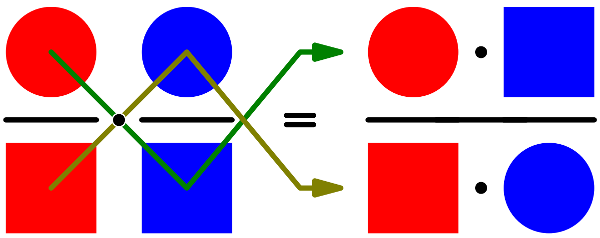
Igual que la fracción opuesta se representa con el signo «–», existe una manera de representar la fracción inversa de otra, pero lo estudiaremos en el nivel 2 del curso, que será el momento de definir potencias con exponentes negativos.

Entenderemos por qué la fracción inversa de $\frac{a}{b}$ se escribe $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$

Cociente de fracciones

- ✱ Para dividir dos fracciones se multiplica el dividendo por la fracción inversa del divisor.
- ✱ **Ejemplo 1**. $\frac{3}{5}:\frac{7}{2}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{35}$
- ✱ Simbólicamente la regla se expone así:

  Si a, b, c y d son números enteros y b y c no son 0, entonces $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$
- ✱ Como la división de fracciones se convierte en un producto, suele ahorrar algo de tiempo escribir directamente el producto: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$
- ✱ Un poco más abajo, a la derecha, está la representación visual de este atajo.
- ✱ **Ejemplo 2**. $\frac{4}{5}:\frac{3}{2}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{8}{15}$
- ✱ **Ejemplo 3**. $\frac{-7}{2}:\frac{11}{5}=\frac{-7\cdot 5}{2\cdot 11}=\frac{-35}{22}=-\frac{35}{22}$
- ✱ **Ejemplo 4**. $\frac{8}{5}:\frac{1}{3}=\frac{8\cdot 3}{5\cdot 1}=\frac{24}{5}$



- ✱ Debido a este atajo, muchas veces se dice que para dividir fracciones hay que multiplicar en cruz, aunque sería más apropiado decir que se multiplica en aspa (cruz: «✚»; aspa: «✖»).

Enunciado común de todos los ejemplos

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

Simplificaciones

A veces posible simplificar las fracciones antes de hacer el cociente:

Ejemplo 5. $\frac{6}{9}:\frac{35}{55}=\frac{2}{3}:\frac{7}{11}=\frac{2\cdot 11}{3\cdot 7}=\frac{22}{21}$

Otras veces será posible simplificar tras aplicar el atajo:

Ejemplo 6. $\frac{10}{7}:\frac{15}{14}=\frac{\mathbf{10}\cdot\mathbf{14}}{\mathbf{7}\cdot\mathbf{15}}=\frac{\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}}{\mathbf{1}\cdot\mathbf{3}}=\frac{4}{3}$

Cociente de un número entero y una fracción

Para dividir un número entero entre una fracción (o viceversa) convertimos mentalmente el número entero en una fracción con denominador 1 y hacemos el cociente de las dos fracciones resultantes.

Ejemplo 7. $4:\frac{7}{8}$

Mostrando el 1: $4:\frac{7}{8}=\frac{4}{\mathbf{1}}:\frac{7}{8}=\frac{4\cdot 8}{\mathbf{1}\cdot 7}=\frac{32}{7}$; mejor, sin mostrar el 1: $4:\frac{7}{8}=\frac{4\cdot 8}{7}=\frac{32}{7}$

Ejemplo 8. $\frac{9}{4}:3=\frac{9}{4\cdot 3}=\frac{3}{4}$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\frac{3}{5}:\frac{7}{2}$

② $\frac{5}{7}:\frac{10}{11}$

③ $\frac{21}{8}:\frac{33}{4}$

④ $5:\frac{25}{7}$

⑤ $\frac{25}{35}:2$

⑥ $\frac{33}{15}:\frac{44}{35}$

⑦ $\frac{14}{5}:\frac{7}{25}$

⑧ $\frac{12}{18}:\frac{15}{21}$

⑨ $\frac{13}{17}:\frac{26}{34}$

⑩ $\frac{401}{37}:\frac{401}{37}$

⑪ $\frac{5}{8}:\frac{3}{5}$

⑫ $8:\frac{4}{7}$

⑬ $\frac{16}{9}:2$

⑭ $\frac{2}{3}:\frac{1}{5}$

⑮ $\frac{8}{7}:\frac{16}{21}$

⑯ $\frac{39}{11}:\frac{13}{22}$

⑰ $-5:\frac{15}{4}$

⑱ $\frac{5}{8}:\frac{3}{7}$

Potencia de fracciones

La definición y las propiedades de una potencia de una fracción cuando el exponente es un número natural son las mismas que ya conoces para el caso en que la base sea un número entero.

Si $\frac{a}{b}$ es una fracción y n es un número natural, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{\text{n factores}}$

Ejemplo 1	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{8}{125}$

Signo del resultado

- ✱ Si la fracción es positiva, el resultado siempre es positivo.
- ✱ Si la fracción es negativa, el resultado puede ser positivo o negativo:
  - ■ Si el exponente es par, el resultado es positivo.
  - ■ Si el exponente es impar, el resultado es negativo.

Ejemplo 2	$\left(-\frac{3}{7}\right)^2 = \left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 7} = \frac{9}{49}$
Ejemplo 3	$\left(-\frac{3}{7}\right)^3 = \left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{7 \cdot 7 \cdot 7} = -\frac{27}{343}$

Propiedad

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. **Demostración:** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{\text{n factores}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n factores}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{n factores}}} = \frac{a^n}{b^n}$

Utilización

Esta propiedad permite calcular las potencias de fracciones de una manera más cómoda que mediante la definición.

Ejemplo 4	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$		Ejemplo 5	$\left(-\frac{5}{4}\right)^3 = -\frac{5^3}{4^3} = -\frac{125}{64}$

Simplificaciones

- ✱ Si la fracción es irreducible, el resultado de la potencia también lo es.
- ✱ Si la fracción no es irreducible, la potencia puede llegar a ser muy complicada, lo que hace más dificil simplificarla.
- ✱ Por tanto, cuando calculamos una potencia de una fracción es muy importante simplificar la fracción, si se puede, antes de calcular la potencia.

Ejemplo 6	$\left(\frac{63}{77}\right)^3 = \left(\frac{9}{11}\right)^3 = \frac{9^3}{11^3} = \frac{729}{1331}$; mejor que $\left(\frac{63}{77}\right)^3 = \frac{63^3}{77^3} = \frac{250047}{456533} = \frac{729}{1331}$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\left(\frac{3}{2}\right)^2$

② $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

③ $\left(\frac{1}{5}\right)^2$

④ $\left(\frac{25}{35}\right)^2$

⑤ $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

⑥ $\left(\frac{7}{6}\right)^2$

⑦ $\left(-\frac{2}{4}\right)^2$

⑧ $\left(\frac{7}{77}\right)^2$

⑨ $\left(\frac{14}{7}\right)^3$

⑩ $\left(-\frac{8}{32}\right)^3$

⑪ $\left(\frac{-2}{-5}\right)^3$

⑫ $\left(\frac{3}{10}\right)^3$

⑬ $\left(\frac{6}{13}\right)^2$

⑭ $\left(\frac{49}{70}\right)^2$

⑮ $\left(-\frac{24}{36}\right)^2$

⑯ $\left(\frac{-3}{2}\right)^5$

⑰ $\left(-\frac{26}{13}\right)^3$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

1 $\frac{2}{3}-\frac{7}{5}$	2 $\frac{1}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)$	3 $\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{5}$	4 $\frac{8}{5}:\frac{4}{15}$
5 $\left(\frac{3}{4}\right)^2$	6 $4\cdot\frac{17}{8}$	7 $\frac{15}{7}:(-3)$	8 $\left\lvert-\frac{35}{45}\right\rvert$
9 $2-\frac{15}{4}$	10 $1+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}$	11 $\frac{14}{5}\cdot\frac{10}{21}$	12 $\frac{6}{7}:\frac{3}{49}$
13 $-\left(-\frac{10}{16}\right)+\frac{3}{8}$	14 $\frac{5}{14}+\frac{10}{21}$	15 $\left(\frac{16}{24}\right)^5$	16 $\left\lvert\frac{9}{27}\right\rvert$
17 $\left(-\frac{7}{4}\right):\left(-\frac{2}{5}\right)$	18 $2-\frac{5}{6}+\frac{3}{10}$	19 $-3\cdot\frac{2}{15}$	20 $\frac{14}{15}\cdot\frac{25}{21}$
21 $\frac{2}{5}-(-3)$	22 $\left(-\frac{103}{103}\right)^5$	23 $\frac{7}{5}:3$	24 $\frac{5}{8}+\frac{3}{16}$
25 $4-\frac{21}{4}$	26 $\frac{22}{2}\cdot\frac{3}{33}$	27 $\frac{5}{3}:\frac{25}{39}$	28 $\frac{10}{21}-\left(-\frac{9}{35}\right)$
29 $\frac{8}{7}-\frac{10}{21}+\frac{1}{3}$	30 $\frac{14}{35}-\frac{8}{40}$	31 $\left\lvert-\frac{4}{22}\right\rvert$	32 $\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{18}$
33 $\frac{-4}{24}\cdot 3$	34 $\frac{-18}{-36}$	35 $\frac{5}{21}:\frac{25}{7}$	36 $\left(\frac{18}{15}\right)^2$
37 $\frac{7}{11}-\frac{3}{2}$	38 $\frac{11}{22}-3$	39 $5\cdot\frac{49}{42}$	40 $12:\frac{6}{5}$
41 $-\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{25}$	42 $\frac{3}{7}:\frac{6}{35}$	43 $\left(-\frac{1}{10}\right)^3$	44 $-\frac{5}{6}+\frac{1}{12}$
45 $-7\cdot\frac{5}{14}$	46 $\frac{13}{15}\cdot\frac{15}{13}$	47 $\frac{31}{4}:\frac{31}{2}$	48 $\frac{8}{15}-\left(-\frac{11}{75}\right)$
49 $\frac{10}{15}+\frac{28}{21}-\frac{6}{10}$	50 $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$	51 $8:\frac{16}{7}$	52 $\left\lvert-\frac{14}{42}\right\rvert$
53 $\frac{8}{3}+\frac{2}{6}$	54 $\frac{5}{7}-\frac{1}{4}$	55 $\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{5}$	56 $13:\frac{26}{3}$
57 $\frac{1}{6}:\frac{1}{24}$	58 $\left(\frac{20}{28}\right)^2$	59 $-\frac{4}{7}+\frac{5}{21}-\frac{2}{3}$	60 $\left(-\frac{11}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)$
61 $\frac{13}{5}:\frac{26}{15}$	62 $\frac{5}{4}-\frac{13}{8}$	63 $15\cdot\frac{7}{5}$	64 $(-18):\frac{6}{7}$
65 $\frac{2}{3}-\frac{4}{5}$	66 $\frac{3}{15}+\frac{10}{15}-\frac{1}{15}$	67 $\frac{49}{33}\cdot\frac{44}{77}$	68 $\frac{14}{5}:21$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\frac{1}{3}-\frac{9}{11}$	② $-\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{8}$	③ $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{11}$	④ $\frac{5}{24}\cdot 4$
⑤ $\frac{3}{7}:\frac{15}{14}$	⑥ $\left\lvert-\frac{15}{21}\right\rvert$	⑦ $\left(\frac{2}{5}\right)^3$	⑧ $\left(-\frac{10}{15}\right)^3$
⑨ $3-\frac{7}{2}$	⑩ $\frac{22}{5}:2$	⑪ $\frac{11}{6}+\frac{5}{9}+\frac{11}{18}$	⑫ $\frac{14}{25}\cdot\frac{10}{21}$
⑬ $-2-\frac{3}{5}$	⑭ $\frac{4}{7}:8$	⑮ $\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$	⑯ $\frac{1}{7}-\frac{10}{119}$
⑰ $1-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{13}{12}$	⑱ $\frac{-4}{3}\cdot\frac{5}{-8}$	⑲ $\frac{4}{3}:\frac{16}{9}$	⑳ $\frac{5}{15}\cdot(-3)$
㉑ $\left\lvert\frac{7}{70}\right\rvert$	㉒ $\left(-\frac{1}{8}\right)^2$	㉓ $\left(-\frac{3}{20}\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)$	㉔ $(-4)\left(-\frac{3}{40}\right)$
㉕ $\frac{7}{5}-\frac{9}{4}$	㉖ $\frac{1}{5}-\frac{2}{35}$	㉗ $4+\frac{5}{2}$	㉘ $\frac{7}{15}:14$
㉙ $\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{5}$	㉚ $\frac{2}{7}\cdot\frac{21}{4}$	㉛ $\frac{13}{8}\cdot 16$	㉜ $\frac{7}{4}+\frac{2}{5}-\frac{3}{20}$
㉝ $\frac{20}{7}\cdot\frac{35}{2}$	㉞ $\frac{2}{7}-\left(-\frac{1}{14}\right)$	㉟ $\left(\frac{7}{49}\right)^2$	㊱ $(-3):\left(-\frac{6}{7}\right)$
㊲ $\frac{13}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{15}$	㊳ $\frac{2}{3}-\frac{17}{7}$	㊴ $\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{25}$	㊵ $2\cdot\frac{5}{3}$
㊶ $\frac{4}{5}:(-2)$	㊷ $\frac{1}{13}:\frac{1}{26}$	㊸ $\frac{21}{15}-\frac{14}{35}$	㊹ $2-\frac{13}{3}$
㊺ $\frac{13}{5}-\frac{6}{10}$	㊻ $\left(-\frac{8}{16}\right)^3$	㊼ $\left\lvert-\frac{15}{21}\right\rvert$	㊽ $\frac{15}{30}\cdot\frac{17}{34}$
㊾ $\frac{3}{14}:\frac{3}{7}$	㊿ $\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{42}$	(51) $\frac{13}{17}\cdot\frac{17}{26}$	(52) $\frac{7}{2}-3$
(53) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$	(54) $2-\frac{17}{3}+\frac{13}{5}+\frac{1}{15}$	(55) $\frac{2}{3}-\frac{7}{5}+1$	(56) $\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5}$
(57) $\left\lvert-\frac{3}{39}\right\rvert$	(58) $\frac{1}{5}-\frac{1}{30}$	(59) $\frac{12}{49}\cdot\frac{14}{21}$	(60) $\left(\frac{3}{8}\right)^2$
(61) $\frac{15}{14}+\frac{16}{21}$	(62) $-2+\frac{15}{4}$	(63) $-\frac{3}{7}-\frac{1}{2}$	(64) $3:\frac{7}{3}$
(65) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$	(66) $\frac{17}{5}:\frac{17}{5}$	(67) $\frac{7}{13}-\frac{1}{26}$	(68) $\frac{1}{10}+\frac{1}{90}$

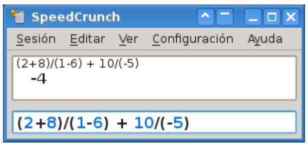
Problemas que se resuelven con fracciones

A lo largo de los tres primeros niveles del curso irás viendo cómo se pueden aplicar las fracciones para resolver distintos tipos de problemas. Conforme vayamos utilizando métodos más sofisticados podremos resolver problemas más difíciles de manera más sencilla.

Es importante que vayas aplicando, poco a poco, métodos cada vez más avanzados incluso para problemas que ya sabes resolver por métodos más sencillos. Piensa que conforme avances se te irán presentando problemas cada vez más difíciles y necesitarás dominar técnicas cada vez más avanzadas.

Escritura de fracciones dentro de un texto

Cuando se redactan enunciados de problemas es muy habitual que haya que introducir fracciones en ellos. Esto plantea un problema tipográfico, porque si escribimos las fracciones con la línea horizontal como hacemos al operar, como $\dfrac{3}{4}$, que es lo más correcto matemáticamente, las líneas de texto tendrán separaciones diferentes, lo que queda feo; o hay que escribir la fracción más pequeña, que tampoco queda bien.



La solución más sencilla, pero menos adecuada, es utilizar la barra diagonal y escribir numerador y denominador del mismo tamaño y en la misma posición vertical, como 3/4. Esto se usa obligatoriamente en los programas de ordenador de matemáticas, pero obliga a escribir paréntesis extra en ocasiones y, si no se maneja bien, provoca errores.

Las fuentes de letras que se usan en los procesadores de textos suelen incorporar caracteres que representan las fracciones más comunes, como ¾, pero solo están preparadas unas cuantas fracciones, por lo que no es un método general.

El método recomendado tipográficamente es utilizar la barra diagonal de fracción, que es un carácter diferente de la barra diagonal «normal», junto con los caracteres superíndices para los numeradores y caracteres subíndices para los denominadores. Los procesadores permiten escribir superíndices y subíndices, pero no nos referimos a eso, sino a caracteres diseñados especialmente para ser usados como subíndices y superíndices. Por ejemplo: ¾ y $^{37}/_{47}$.

Como ves, el asunto no es trivial. Estas explicaciones te permitirán ir apreciando las distintas maneras de escribir matemáticas, pero el consejo para ti es que sigas usando la barra horizontal para indicar fracciones hasta que en las distintas asignaturas te vayan explicando cómo y dónde escribirlas de otra manera.

Por último, debes saber que la escritura de matemáticas siempre se ha considerado un problema difícil. Incluso con los primeros ordenadores personales, allá por los 1980, no se podía hacer. El matemático estadounidense **Donald Knuth** (nacido en 1938) desarrolló el sistema $\TeX$, que ha sido la base de muchísimos más sistemas de escritura de matemáticas. Con él se pueden escribir fracciones como

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\dots}}}}$$

Resolución de problemas usando fracciones como números

En muchos problemas las fracciones tienen exactamente el mismo papel que cualquier otro tipo de número con los que ya has trabajado: naturales, enteros y decimales. Por tanto, podrás aplicar las mismas técnicas de resolución de problemas y solo tendrás que adaptar cómo hacer las operaciones, que es lo último que has estado aprendiendo.

Ejemplo 1

En un tercio de una huerta se cultivan tomates, en un medio de la huerta se cultivan patatas y el resto de la huerta está libre para cultivar en un futuro. ¿Qué fracción de la huerta está cultivada? Da el resultado como fracción irreducible.

Resolución

Este problema se piensa igual que si nos hubieran dado numéricamente las superficies cultivadas de tomates y de patatas: hay que sumar. Solo que ahora hay que sumar fracciones.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$$

Solución: $\frac{5}{6}$

Ejemplo 2

Disponemos de 340 botes y en cada uno hay ⅖ de litro de un líquido. ¿Qué cantidad de líquido tenemos en total?

Resolución

Imagina que nos hubieran dicho que en cada bote hay 0,23 litros, por ejemplo. Tendrías claro que el problema se resuelve multiplicando el número de botes por la capacidad de cada uno. Pues con una fracción lo hacemos igual:

$340\cdot\frac{3}{5}$. Para hacer a mano este tipo de operación casi siempre es más cómodo simplificar. Podemos simplificar el 340 con el 5. También puedes verlo como que primero hay que dividir 340 entre 5 y luego hay que multiplicar el resultado por 3.

$$340\cdot\frac{3}{5}=68\cdot 3=204$$

Solución: 204 litros.

Ejemplo 3

Un hilo de cierto material tiene la propiedad de que si baja la temperatura 10 ℃, su longitud se reduce a ⅞ de la longitud original. Si la temperatura baja 40 ℃, ¿a qué longitud respecto a la original queda reducida la longitud del hilo? Da el resultado como fracción irreducible.

Resolución

Cada vez que la temperatura baja 10 ℃ hay que multiplicar por ⅞. Como 40:10 = 4, hay que multiplicar 4 veces por ⅞, lo que se hace con una potencia:

$$\left(\frac{7}{8}\right)^4=\frac{7^4}{8^4}=\frac{2041}{4096}$$

Solución: queda reducida a $\frac{2041}{4096}$ de la longitud original.

Enunciados

① En una carrera de relevos, la primera persona de un equipo recorre $\frac{1}{4}$ del total, la segunda recorre $\frac{3}{8}$ y la tercera $\frac{1}{5}$. ¿Qué fracción de la carrera han cubierto entre esas tres primeras personas? Da el resultado como fracción irreducible.

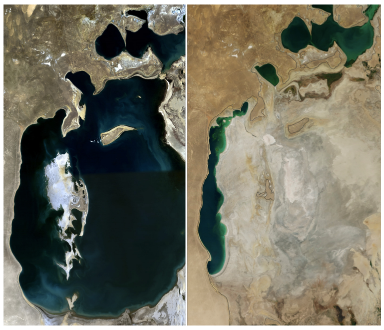
② Queremos repartir 20 litros de líquido en botes con una capacidad de $\frac{4}{5}$ de litro cada uno. ¿Cuántos botes necesitaremos como mínimo?

③ Dos amigos compran tres *pizzas* pequeñas para merendar. Uno de los amigos come $\frac{3}{2}$ de *pizza* y el otro come $\frac{4}{3}$ de *pizza*. ¿Qué fracción de *pizza* queda sin comer? Da el resultado como fracción irreducible.

④ La persona encargada de una carnicería decide poner a la venta hamburguesas de pollo y de ternera. Cada hamburguesa de pollo lleva $\frac{5}{14}$ de kilogramo y cada hamburguesa de ternera lleva $\frac{7}{20}$ de kilogramo. ¿Cuál de las dos lleva más carne?

⑤ Una furgoneta de reparto de mercancías lleva 24 paquetes de $\frac{3}{4}$ de kilogramo, 55 paquetes de $\frac{6}{5}$ de kilogramo y 36 paquetes de $\frac{1}{2}$ de kilogramo. ¿Cuánta carga lleva la furgoneta?

⑥ Un lago está reduciendo su superficie por culpa del calentamiento global. Si cada año queda reducida su superficie a $\frac{2}{3}$ de lo que tenía, ¿a qué fracción de la superficie original queda reducido tras cinco años? Da el resultado como fracción irreducible.



Aunque los datos no son los mismos que los del enunciado, el mar de Aral desde 1989 hasta 2014 ha perdido la mayor parte de su superficie, como se ve a la derecha.

⑦ Un atleta ya ha recorrido $\frac{2}{3}$ del recorrido de una carrera en la que se usan distintos métodos de transporte. Los primeros $\frac{4}{15}$ los hizo nadando y el resto hasta el momento lo ha hecho en patines. ¿Qué fracción del recorrido lleva hecha en patines? Da el resultado como fracción irreducible.

⑧ Tenemos un líquido almacenado en 40 botes de $\frac{7}{10}$ de litro y lo queremos llevar a otros botes de $\frac{7}{3}$ de litro. ¿Cuántos botes necesitaremos como mínimo?

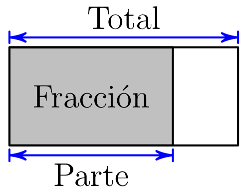
⑨ En una carrera automovilística cada equipo compite con dos pilotos. En el equipo Cantreones el primer piloto ha hecho $\frac{1}{4}$ del recorrido y el segundo piloto ha hecho $\frac{1}{28}$. En el equipo Gantaremos el primer piloto ha hecho $\frac{1}{5}$ del recorrido y el segundo piloto ha hecho $\frac{8}{35}$. ¿Qué equipo va en primer lugar en la carrera?

⑩ Cada persona dedica un tercio del día a descansar. ¿Cuańtas horas habría que descansar en una semana?

⑪ Una persona millonaria se va de vacaciones durante $\frac{1}{4}$ de los meses del año. ¿Cuántos meses estará de vacaciones en cinco años?

Problemas de fracciones con total, fracción y parte

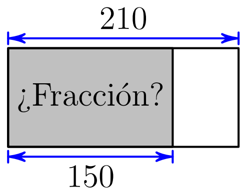
Hay una serie de problemas muy típicos que se resuelven mediante fracciones en los que aparecen tres conceptos: un número que expresa un total, un número que expresa una parte de ese total y una fracción que relaciona los dos números. Vemos un esquema a la derecha.



Cuando leas ejemplos de enunciados de este tipo de problemas te darás cuenta de que tú ya los sabes resolver todos aplicando técnicas anteriores. Pero ahora se trata de que **reconozcas patrones de problemas**, para aprender técnicas más generales. Así, cuando reconozcas uno de estos patrones ya no tendrás que volver a pensar cómo resolver el problema, sino que simplemente aplicarás el método.

Conocidos una parte y el total, averiguar la fracción

Enunciado 1: en un rebaño de 210 ovejas hay 150 ovejas blancas. Averigua qué fracción del total constituyen las ovejas blancas. Da el resultado como fracción irreducible.



Resolución: $\text{Fracción}=\dfrac{\text{Número de ovejas blancas}}{\text{Número total de ovejas}} = \dfrac{150}{210} = \dfrac{5}{7}$

Solución: $\dfrac{5}{7}$

Explicación: estos problemas se resuelven directamente por la definición de fracción, ya que el total corresponde con el denominador y la parte corresponde con el numerador. Hay que escribir la fracción y, si el enunciado lo pide, simplificarla.

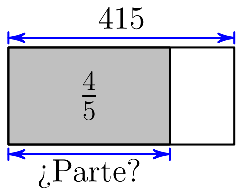
Conocidos la fracción y el total, averiguar la parte

Enunciado 2: en un rebaño de 415 ovejas, $4/5$ son blancas. Averigua cuántas ovejas blancas tiene el rebaño.

Resolución: $\text{Número de ovejas blancas} = \text{Fracción}\cdot\text{Total} = \dfrac{4}{5}\cdot 415 = 332$

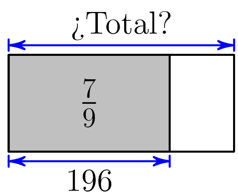
Solución: 332

Explicación: este problema es el más directo de todos: una fracción de un número es precisamente la definición de producto de un número entero y una fracción. Recuerda que, para hacer la operación a mano, lo mejor suele ser simplificar primero o, al menos, hacer primero la división del número entre el denominador y luego multiplicar por el numerador.



Conocidas la fracción y la parte, averiguar el total

Enunciado 3: en un rebaño hay 196 ovejas blancas, que constituyen $7/9$ del total. Averigua cuántas ovejas tiene el rebaño.



Resolución: $\text{Total de ovejas} = \text{Parte}:\text{Fracción} = 196:\dfrac{7}{9} = 252$

Solución: 252

Explicación: hemos visto que si multiplicamos el total por la fracción obtenemos la parte; pues para este problema, que es el inverso, en vez de multiplicar hay que dividir la parte entre la fracción. Llegaríamos a la misma conclución aplicando otro razonamiento: 196:7 nos da cuánto es cada séptimo; como en total hay 9 séptimos, hay que multiplicar por 9. Pero es más lento así.

Enunciados

① En una asignatura de la universidad se matriculan 432 personas y al final aprueban 378. Averigua qué fracción del total constituyen las personas aprobadas. Da el resultado como fracción irreducible.

② Tengo una gran colección de figuritas de porcelana y me gustan 728 figuritas, que son $7/12$ de la colección. El resto de las figuritas no me gustan, pero como son de la colección, no las tiro. ¿Cuántas figuritas tengo?

③ Un animal pone 527 huevos pero $3/17$ de los huevos no eclosionan. ¿Cuántos huevos no han eclosionado?

④ Hoy han salido de excursión 180 alumnos, lo que supone los $3/8$ del total de alumnos del instituto. ¿Cuántos alumnos tiene el instituto?

⑤ En una manada de 1254 búfalos vemos que $5/6$ están en buena condición física. ¿Cuántos búfalos están en buena condición física?

⑥ Un depósito de agua tiene actualmente 130 litros, lo que supone $2/5$ de su capacidad total. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

⑦ De 315 personas que ocupan cargos ejecutivos en una multinacional, 45 son mujeres. ¿Qué fracción del total representan las mujeres? Da el resultado como fracción irreducible. ¿Qué te parece que ocurriera esto en 2021?

⑧ El embalse de El Atazar (en Madrid, España) tiene una capacidad de 425 hectómetros cúbicos. Si nos dicen que está a $4/5$ de su capacidad, ¿cuánta agua tiene?

⑨ Un depósito de agua tiene actualmente 210 litros, lo que supone $3/5$ de su capacidad total. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

⑩ La terraza de un bar tiene 36 mesas, de las que 30 están ocupadas. ¿Qué fracción del total de mesas representan las mesas ocupadas? Da el resultado como fracción irreducible.

⑪ El aforo de una sala de cine es 400 personas. ¿Cuántas personas deberían asistir para que estuviera a los $5/8$ de su capacidad?

⑫ Una finca está dividida en siete partes iguales. Conseguimos medir la superficie conjunta de dos de las partes y obtenemos 264 metros cuadrados. Calcula la superficie total de la finca.

⑬ Si te comes los $7/12$ de una pizza de 240 gramos, ¿qué cantidad de pizza te has comido?

⑭ Compras botellas de refresco para una fiesta y te sobran 26, que son los $2/9$ del total que compraste. ¿Cuántas botellas habías comprado?

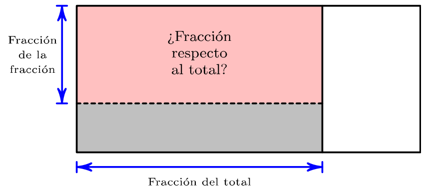
⑮ Cuando llevas recorridos 4 kilómetros de una carrera te dicen que ya llevas $2/13$ del total. ¿Cuál es la longitud de la carrera?

Dos problemas típicos de fracciones

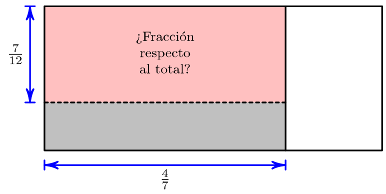
Vamos a estudiar otros dos problemas muy típicos de resolver usando fracciones; intenta aprender estos dos **patrones de problemas**, porque aparecen muy a menudo como parte de otros problemas más complicados.

Fracción de fracción

Conocemos una fracción de la unidad y una fracción de esa primera fracción; queremos averiguar qué fracción de la unidad representa la fracción de la fracción. ¿Parece un trabalenguas, verdad? Se entiende mejor con el dibujo de la derecha y luego con el ejemplo.



Enunciado 1: en una urna hay bolas de madera y bolas de plástico. Las bolas de madera son $4/7$ del total. De las bolas de madera, $7/12$ son de color rosa y el resto es de color gris. Calcula qué fracción de las bolas de la urna son de madera y rosas. Da el resultado como fracción irreducible.



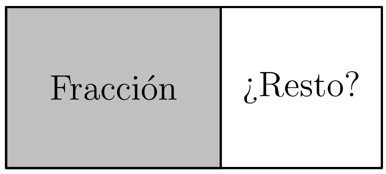
Resolución: $\text{Fracción}=\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{7}=\frac{7\cdot 4}{12\cdot 7}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Solución: $\frac{1}{3}$

Explicación: este problema corresponde con la explicación del producto de fracciones que vimos en su momento. La clave para recordar el método de resolución es que $7/12$ **de** $4/7$ es $7/12$ **por** $4/7$. Piensa que es muy parecido a la frase «el triple de 4 es 3·4»; la palabra «de» se convierte en un producto en matemáticas.

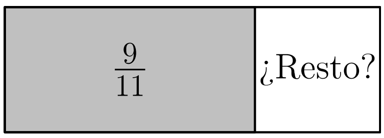
Conocida una fracción, calcular el resto

Nos dan una fracción de una unidad y queremos calcular qué fracción de la unidad corresponde al resto, es decir: a la parte que no corresponde con la fracción que nos han dado. Realmente, es un problema muy fácil de resolver, pero casi siempre lo encontraremos como un paso sencillo de un problema más complicado.



Enunciado 2: en un rebaño de ovejas, $9/11$ son blancas y el resto son negras. Averigua qué fracción del rebaño corresponde a las ovejas negras.

Resolución: $\text{Resto} = 1-\text{Fracción} = 1-\frac{9}{11} = \frac{2}{11}$



Solución: $\frac{2}{11}$

Explicación: recuerda que la primera definición de fracción habla de dividir **la unidad** en partes iguales. Pues bien, la unidad es el número 1. Piensa que en el enunciado nos hablan de **un** rebaño; en número, un rebaño es un **1**. De ahí que en la operación haya que restarle a 1 la fracción de las ovejas blancas. Otra manera de verlo es que el rebaño está descompuesto en 11 onceavos y 9 de ellos corresponden a las ovejas blancas, así que las ovejas negras foman los otros 11−9=2 onceavos. Lo mires como lo mires, es muy sencillo.

Los dibujos

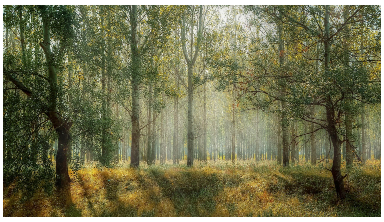
Observa que no es necesario que los dibujos sean muy precisos. Solo los usamos para pensar en el método de resolución y ayudarnos a entenderlo.

Enunciados

① En un congreso participan personas de Europa y de América. Las procedentes de Europa son $2/3$ del total. De las procedentes de Europa, $15/22$ son mujeres y el resto son hombres. Calcula qué fracción de las personas que asisten al congreso son mujeres procedentes de Europa. Da el resultado como fracción irreducible.

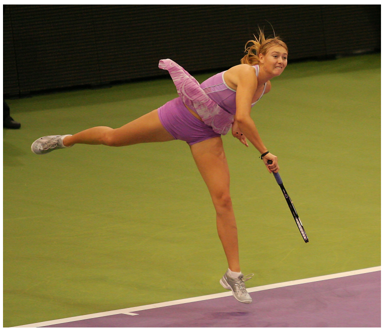
② En una droguería venden un producto en botes grandes y en botes pequeños. Los botes grandes constituyen los $4/7$ de todos los botes. Averigua qué fracción de los botes corresponde a los botes pequeños.

③ En un bosque hay árboles de hoja perenne y de hoja caduca. Los de hoja perenne son $4/11$ del total. De los de hoja perenne, $11/16$ son pinos. Calcula qué fracción de los árboles del bosque son pinos. Da el resultado como fracción irreducible.



④ En una oposición para un puesto en el ayuntamiento se presentan muchas personas y aprueban la primera fase $2/5$ de las que se presentan. ¿Qué fracción de las que se han presentado no ha aprobado la primera fase?

⑤ Una jugadora de tenis ha jugado $18/33$ de sus partidos en pista de tierra batida. Ha ganado $22/27$ de los partidos que ha jugado sobre tierra batida. Calcula qué fracción de todos sus partidos ha ganado sobre tierra batida. Da el resultado como fracción irreducible.



⑥ Un jugador de ajedrez en un torneo no ha hecho tablas (es decir, empatado) en ninguna de sus partidas y ha ganado $7/10$ de las que ha jugado. Calcula qué fracción de sus partidas ha perdido.

⑦ En una huerta se dedican $5/7$ de la superficie a regadío y el resto a secano. De la parte dedicada a regadío, $3/10$ se dedica a cultivar tomates. Calcula qué fracción de la superficie de la finca se dedica al cultivo de tomates. Da el resultado como fracción irreducible.

⑧ En una partida de go solo se usan piezas (llamadas «piedras») blancas o negras. En un momento de la partida, $15/23$ de las piezas son blancas. Calcula qué fracción de las piezas corresponde a las negras.

El go es un juego muy antiguo, de origen chino. Se juega en un tablero de 19 × 19 líneas. Tiene una complejidad superior a la del ajedrez, ya que hay unas 10^{170} posibles configuraciones de las piedras. El programa AlphaGo, programado usando técnicas de inteligencia artificial, derrotó en 2016 al multicampeón del mundo 이세돌 (Lee Sedol), coreano del sur.

Métodos para resolver problemas usando fracciones

Hemos ido viendo varias técnicas:

- Usar fracciones como números.
- Reconocer patrones de problema con total, fracción y parte.
- Calcular fracción de fracción.
- Calcular el resto de una fracción.

Lo normal será que en casi todos los problemas haya que utilizar dos o más de estas ideas combinándolas o adaptándolas adecuadamente. Y ahí es donde entra tu **creatividad**, en el modo de afrontar cada problema.

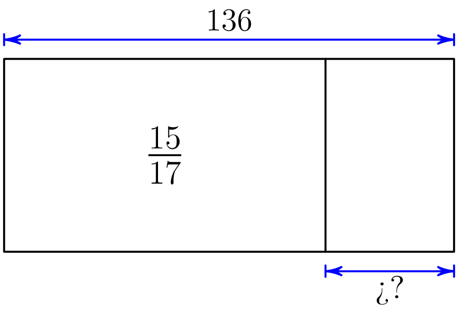
Hacer dibujos suele ser de gran ayuda para resolver estos problemas. No hace falta que sean muy precisos. Y no tienen por qué ser como los de los ejemplos.

Problema 1

En un rebaño de 136 ovejas, $15/17$ de ellas son blancas y el resto son negras. Calcula cuántas ovejas negras hay en el rebaño.

Primera resolución

El número de ovejas blancas es $\frac{15}{17}\cdot 136=15\cdot 8=120$



El resto de las ovejas son negras: 136 – 120 = 16

Solución: 16

Segunda resolución

La fracción de ovejas negras es $1-\frac{15}{17}=\frac{2}{17}$

El número de ovejas negras es $\frac{2}{17}\cdot 136=2\cdot 8=16$

Solución: 16

Comentarios

- Los dos métodos son perfectamente válidos.
- Elegir uno u otro suele ser cuestión de gustos.
- En algunos casos las operaciones pueden ser más fáciles con una resolución que en otra; en este ejemplo, una de las operaciones es más sencilla en la segunda resolución (2·8 es más fácil que 15·8). Piensa antes de decidirte.

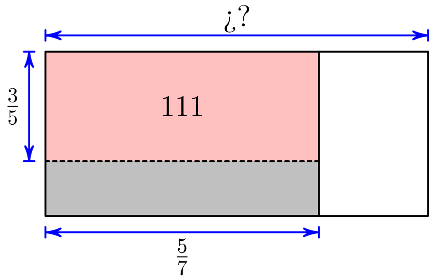
Problema 2

En una urna solo hay bolas de madera y de plástico. Las bolas de madera pueden ser de color rosa o gris. Las bolas de madera representan $5/7$ del total de las bolas. Las bolas rosas representan $3/5$ de las bolas de madera. Sabiendo que hay 111 bolas rosas de madera, calcula cuántas bolas hay en la urna.

Resolución

Las bolas rosas de madera representan

$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3}{7}$ del total de bolas.



El número total de bolas es $111:\frac{3}{7}=\frac{111\cdot 7}{3}=37\cdot 7=259$

Solución: 259

Enunciados

① Me gasto 630 euros en comprar una pulsera y un reloj. La pulsera me ha costado 350 euros. Averigua qué fracción del pago se corresponde con el reloj; da el resultado como fracción irreducible.

② En un jardín, $2/5$ de la superficie están dedicados a plantas de origen asiático, $4/15$ de la superficie está dedicado a plantas de origen africano y el resto a plantas de origen europeo. Averigua qué fracción de la superficie del jardín está dedicada a las plantas de origen europeo; da el resultado como fracción irreducible.

③ Los hermanos William y Macarena deciden donar parte de sus ahorros a una ONG. William destina $3/7$ de sus 1400 euros y Macarena $2/5$ de sus 805 euros. Entre los dos, ¿cuánto dinero donan a la ONG?

④ Averigua cuántas bolas hay en una urna sabiendo que $3/8$ de las bolas son blancas y el resto son 175 bolas.

⑤ En un pequeño bosque se han contado 870 árboles, de los que $2/15$ son abedules. ¿Cuántos abedules hay en el bosque?

⑥ En un pequeño bosque hay 495 árboles, de los que 198 son coníferas. Averigua qué fracción de los árboles del bosque son coníferas; da el resultado como fracción irreducible.

⑦ En una rosaleda hay 294 rosas blancas que constituyen $3/11$ del total de rosas. ¿Cuántas rosas hay en la rosaleda?

⑧ Un animal pone gran cantidad de huevos, pero $3/17$ de ellos no eclosionan. ¿Cuál es la fración de huevos que sí han eclosionado?

⑨ En una urna hay exclusivamente bolas blancas y bolas negras. Averigua cuántas bolas hay en total en la urna sabiendo que hay 273 bolas blancas y que las bolas negras constituyen $8/11$ del total.

⑩ En las urnas A y B hay exclusivamente bolas blancas y bolas negras. En la urna A hay 1105 bolas, de las que $2/5$ son blancas; en la urna B hay 315 bolas, de las que $4/7$ son blancas. Si juntas en una urna mayor las bolas de las urnas A y B, ¿cuántas bolas negras habrá?

⑪ En una vivienda se dedica un medio de la superficie a habitaciones, un cuarto al salón, un sexto al cuarto de baño y el resto a la cocina. Averigua qué fracción de la superficie de la casa se dedica a la cocina y da el resultado como fracción irreducible.

⑫ Un bosque tiene 2520 árboles, de los que 840 son abedules, 672 son pinos y el resto son eucaliptos. Averigua qué fracción de los árboles del bosque son eucaliptos; da el resultado como fracción irreducible.

⑬ En una urna solo hay bolas de madera y de metal. Las bolas de metal pueden ser de color verde o amarillo. Las bolas de metal representan $5/8$ del total de las bolas. Las bolas verdes representan $3/5$ de las bolas de metal. Averigua qué fracción del total de bolas corresponde a las bolas metálicas amarillas; da el resultado como fracción irreducible.

Enunciados

① Hoy han salido de excursión 180 alumnos, lo que supone los $\frac{3}{8}$ del total de alumnos del instituto. ¿Cuántos alumnos tiene el instituto?

② ¿Cuántos litros de aceite se necesitan para llenar 30 frascos de $\frac{2}{5}$ de litro?

③ En una tienda de chuches $\frac{4}{5}$ de las golosinas tienen azúcar. De las golosinas que tienen azúcar, $\frac{5}{9}$ son rojas. De las golosinas rojas con azúcar, $\frac{3}{5}$ son redondas. Averigua qué fracción de las golosinas constituyen las golosinas con azúcar, rojas y redondas; da el resultado como fracción irreducible.

④ De un viaje de 540 kilómetros, Rosario ha recorrido $\frac{3}{5}$ por la mañana y $\frac{1}{4}$ por la tarde.

a) ¿Qué fracción del camino le queda por recorrer?

b) ¿Cuántos kilómetros le faltan para completar el viaje?

⑤ Un vehículo sale de Azapacla hacia Boclotopo y otro sale, a la vez que el primero, de Boclotopo hacia Azapacla. Cuando los vehículos están separados 105 kilómetros, el primer vehículo ha recorrido $\frac{1}{3}$ de su viaje y el segundo ha recorrido $\frac{1}{4}$ del suyo. Calcula la distancia entre Azapacla y Boclotopo.

⑥ En una reunión de 120 personas, 40 son mayores de edad. Calcula qué fracción del total son menores de edad; da el resultado como fracción irreducible.

⑦ Me he gastado la mitad de mis ahorros en un aparato. Si me hubiera gastado 200 euros más, me habría gastado $\frac{7}{10}$ de mis ahorros. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado?

⑧ Me toca un premio en un sorteo y me lo gasto todo en tres regalos. El regalo de mi padre cuesta 425 euros, el de mi madre cuesta 450 euros y el mío cuesta 225 euros. Averigua qué fracción del premio me he gastado en el regalo de mi madre; da el resultado como fracción irreducible.

⑨ Una persona pilota un coche en una carrera de resistencia y completa $\frac{3}{5}$ del recorrido. Si hubiera conducido 80 kilómetros más, habría completado $\frac{5}{7}$ cinco séptimos del recorrido. ¿De qué longitud era la carrera?

⑩ En una reunión de 280 personas, 80 son mujeres. Calcula qué fracción del total corresponde a los hombres.

⑪ El depósito de agua A tiene una capacidad de 100 litros, pero solo está a $\frac{3}{10}$ de su capacidad. El depósito de agua B tiene una capacidad de 175 litros y está lleno. Calcula qué fracción del contenido de B hay que echar en A para llenarlo; da el resultado como fracción irreducible.

⑫ Si me gasto $\frac{3}{5}$ de 210 euros, ¿cuánto dinero me queda?

⑬ Dispongo de una cantidad de dinero y estoy haciendo planes para gastármelo. Voy a dedicar $\frac{3}{4}$ del dinero a hacer dos viajes, uno a París y otro a Berlín. Del dinero dedicado a viajar me voy a gastar $\frac{8}{15}$ en el viaje a París, que me va a costar 810 euros. Calcula cuál es la cantidad de dinero de la que dispongo.

Uso de letras en matemáticas

A lo largo de la parte de aritmética del nivel 1 de este curso ya hemos utilizado letras en varias ocasiones; por ejemplo:

- La suma de números enteros es conmutativa: a + b = b + a
- La potencia se define como $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n factores)
- Propiedad del producto de potencias de la misma base: $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$

En todos los casos, las letras representan a algún número. Siempre se ha especificado qué tipo de número: natural, entero, decimal o fracción.

El uso de letras nos ha permitido escribir con **generalidad**, porque las expresiones que hemos escrito son válidas para cualquier número que sea de la categoría especificada.

El álgebra

Es la parte de la matemática que estudia cómo manejar expresiones en las que aparecen números y letras que representan números. En álgebra más avanzada también se estudian las distintas características que pueden tener las operaciones.

La palabra proviene del árabe الجبر (al-ŷabr), que significa «recomposición», porque una de las características del álgebra que irás aprendiendo es que manipularemos los símbolos (números y letras) casi como si fueran objetos físicos.

En *El Quijote*, del escritor español **Miguel de Cervantes** (1547-1616), aparece la palabra «algebrista» con el significado de sanador de huesos dislocados o rotos. Del capítulo XV:

> *En esto fueron razonando los dos, hasta que llegaron a un pueblo donde fue ventura hallar un algebrista, con quien se curó el Sansón desgraciado.*

Expresiones algebraicas

Son operaciones, igualdades o desigualdades en las que aparecen números y letras que representan números. Para que sean de utilidad, es imprescindible saber cuál es el significado de las letras.

Ejemplo 1

Si n es un número entero, su siguiente es $n+1$

La expresión algebraica es «$n+1$», que es una operación, y sabemos qué representa la letra n.

Ejemplo 2

Si p es la edad de una persona, dentro de 5 años tendrá 43 años se expresa como

$p + 5 = 43$

La expresión algebraica es «$p + 5 = 43$», que es una igualdad, y sabemos qué representa la letra p.

Ejemplo 3

Si r es la longitud en metros de un salto de longitud de un atleta infantil, para decir que ni siquiera saltando el doble llegaría a saltar 8 metros, escribimos

$2r < 8$

La expresión algebraica es «$2r < 8$», que es una desigualdad, y sabemos qué representa la letra r.

Alfabetos

Ya que en álgebra vamos a usar letras que representan números, tiene sentido plantearse qué letras usar.

A lo largo de la historia, la humanidad ha desarrollado multitud de formas de escritura, comenzando por la cuneiforme y siguiendo por la jeroglífica.

A la derecha se ve una tablilla de arcilla escrita con la técnica cuneiforme hace unos 4000 años con contenido matemático. Se encuentra en un museo de Iraq.

El concepto de alfabeto entendido como un pequeño conjunto de símbolos que permite generar palabras usando combinaciones de los símbolos permitió simplificar mucho la escritura y se ha generalizado su utilización.

De entre los alfabetos más extendidos en la actualidad señalamos por su importancia el latino, el cirílico, el árabe, el devanagari y el griego.

Alfabeto latino

Es que usamos en este curso, así que ya lo conoces:

Mayúsculas	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Minúsculas	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

Para que las expresiones algebraicas sean lo más universales que sea posible y así poder comunicarnos con facilidad con cuantas más personas mejor, es aconsejable no usar letras del alfabeto latino que contengan tildes de ningún tipo, como «ñ», «á», «è», «ï», «ĉ», «ž», «ů», «ĕ» o «ű» ni que pertenezcan a alguna grafía particular de algún idioma, como «ç», «ħ» o «ł».

Alfabeto griego

Es de uso muy común en matemáticas, por lo que no te viene mal ir familiarizándote con él, aunque ahora mismo te pueda resultar extraño. El símbolo de la izquierda corresponde a la mayúscula y los de la derecha a las minúsculas; en plural, porque dos letras tienen variantes:

alfa	Α α	eta	Η η	ni	Ν ν	tau	Τ τ
beta	Β β	theta	Θ θ	xi	Ξ ξ	ípsilon	Υ υ
gamma	Γ γ	iota	Ι ι	ómicron	Ο ο	fi	Φ ϕ φ
delta	Δ δ	kappa	Κ κ	pi	Π π	ji	Χ χ
épsilon	Ε ε	lambda	Λ λ	rho	Ρ ρ	psi	Ψ ψ
dseta	Ζ ζ	mi	Μ μ	sigma	Σ σ ς	omega	Ω ω

Alfabetos de este curso

Utilizaremos preferentemente el alfabeto latino y ocasionalmente el griego.

Valor numérico

En una expresión algebraica aparecen letras (una o más) que representan números. Si se sustituyen las letras por números concretos y se hacen las operaciones se obtiene el llamado valor numérico de la expresión algebraica.

- ✱ El valor numérico de una operación algebraica es un número.
- ✱ El valor numérico de una igualdad o una desigualdad algebraica es una igualdad o desigualdad numérica que puede ser verdadera o falsa.

Ejemplos de valores numéricos de operaciones

Ejemplo 1. Calcula el valor numérico de «$3a - 5$» para $a=4$.

$a=4 \Rightarrow 3a - 5 = 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$. Solución: 7

Observa que entre el 3 y la a no es necesario el punto de multiplicar pero entre el 3 y el 4 sí es necesario.

Ejemplo 2. Calcula el valor numérico de «$b^2 - b + 3$» para $b=-5$.

$b=-5 \Rightarrow b^2 - b + 3 = (-5)^2 - (-5) + 3 = 25 + 5 + 3 = 33$. Solución: 33

Observa que la letra aparece dos veces en la expresión algebraica, luego las dos veces hay que sustituirla por el mismo número. Fíjate también en que hemos tenido que añadir paréntesis alrededor del número -5; en la expresión algebraica no eran necesarios, pero como -5 es negativo, en la expresión numérica sí lo son.

Ejemplo 3. Calcula el valor numérico de «$(a+b)^3 + 2b - a^2$» para $a=4$ y $b=-6$.

$$\left.\begin{matrix} a=4 \\ b=-6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a+b)^3 + 2b - a^2 = (4-6)^3 + 2\cdot(-6) - 4^2 = (-2)^3 -12 -16 = -8 -28 = -36$$

Solución: -36

Ejemplos de valores numéricos de igualdades

Ejemplo 4. Calcula el valor numérico de «$3x + 1 = 2x - 3$» para $x=-4$ y di si la igualdad numérica resultante es verdadera o falsa.

$x=-4 \Rightarrow 3(-4) + 1 = 2(-4) - 3 \Rightarrow -12 + 1 = -8 - 3 \Rightarrow -11 = -11$.

Solución: $-11 = -11$; es verdadera.

Ejemplo 5. Calcula el valor numérico de «$x^2 + 3 = -x$» para $x=5$ y di si la igualdad numérica resultante es verdadera o falsa.

$x=5 \Rightarrow 5^2 + 3 = -5 \Rightarrow 28 = -5$.

Solución: $28 = -5$; es falsa.

Ejemplos de valores numéricos de desigualdades

Recuerda que α es la letra griega **alfa** minúscula y β es la **beta** minúscula.

Ejemplo 6. Calcula el valor numérico de «$\alpha + \beta < 180$» para $\alpha=45$ y $\beta=30$ y di si la desigualdad numérica resultante es verdadera o falsa.

$$\left.\begin{matrix} \alpha=45 \\ \beta=30 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 45 + 30 < 180 \Rightarrow 75 < 180.$$ Solución: $75 < 180$; es verdadera.

Ejemplo 7. Calcula el valor numérico de «$\alpha + \beta < 180$» para $\alpha=145$ y $\beta=130$ y di si la desigualdad numérica resultante es verdadera o falsa.

$$\left.\begin{matrix} \alpha=145 \\ \beta=130 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 145 + 130 < 180 \Rightarrow 275 < 180.$$ Solución: $275 < 180$; es falsa.

Enunciados

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los números dados.

① «$5a - 9$» para $a=7$

② «$b^2 + 8b$» para $b=-3$

③ «$3c - 5c^2 + 1$» para $c=1$

④ «$2d^2 + 4d - 3$» para $d=-2$

⑤ «$a^3 - 4a + 5$» para $a=-2$

⑥ «$(b+2)^2 + (b-1):2$» para $b=3$

⑦ «$(c^2 + c)^2$» para $c=-2$

⑧ «$d^{d-1}+(d-1)^d$» para $d=3$

⑨ «$2a + 3b - c^2$» para $a=4$, $b=-2$, $c=-5$

⑩ «$a^2b + bc^3$» para $a=-1$, $b=2$, $c=-2$

⑪ «$(a+b)^2 - a^2 - b^2$» para $a=8$, $b=-3$

⑫ « $\sqrt{a+5}$ » para $a=11$

⑬ «$a^b + b^a$» para $a=1$, $b=10$

⑭ « $\sqrt{b^2+c^2}$ » para $b=5$, $c=12$

⑮ «$(a+b)^{c:2}$» para $a=4$, $b=-2$, $c=6$

Enunciados

Calcula el valor numérico de las siguientes igualdades algebraicas para los números dados y di si la igualdad numérica resultante es verdadera o falsa.

⑯ «$x^2 - x = 30$» para $x=-5$

⑰ «$x^3 + 2x^2 = 3x - 1$» para $x=2$

⑱ «$2x + 3y = (x-y)^2$» para $x=4$, $y=-3$

⑲ «$(x+y)^2 = x^2 + y^2$» para $x=2$, $y=3$

⑳ « $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$ » para $x=9$, $y=16$

Enunciados

Calcula el valor numérico de las siguientes desigualdades algebraicas para los números dados y di si la desigualdad numérica resultante es verdadera o falsa.

㉑ «$2(\alpha + \beta) < 90$» para $\alpha=5$, $\beta=25$

㉒ «$2\alpha + 3\beta < 90$» para $\alpha=15$, $\beta=20$

Enunciados

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los números dados.

① «$a^3 + 2a^2 - 5a$» para $a=-3$

② «$(b^2 - 1) : (b - 1)$» para $b=8$

③ «$c - c : 2 + c : 3$» para $c=12$

④ «$(d^2 - 1) : (d + 1)$» para $d=-4$

⑤ «$3^{a-2} - 2$» para $a=4$

⑥ «$(b + 1)(b - 1) - b^2$» para $b=9$

⑦ «$(c + 2)^2 - c^2 - 4$» para $c=8$

⑧ «$(d - 2)(d + 2) - d^2$» para $d=-5$

⑨ «$(a + b)^c - (a - c)^b$» para $a=8$, $b=2$, $c=3$

⑩ «$(a + b + c) : 3 - a : 3 - b : 3 - c : 3$» para $a=9$, $b=-18$, $c=3$

⑪ «$a : b + a : (-b)$» para $a=35$, $b=-7$

⑫ « $\sqrt{a^2+51}$ » para $a=7$

⑬ «$(a + b)(a - b) : (a^2 - b^2)$» para $a=7$, $b=3$

⑭ « $\sqrt{b+\sqrt{c}}$ » para $b=21$, $c=16$

⑮ «$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$» para $a=3$, $b=-1$, $c=2$

Enunciados

Calcula el valor numérico de las siguientes igualdades algebraicas para los números dados y di si la igualdad numérica resultante es verdadera o falsa.

⑯ «$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$» para $x=3$

⑰ «$(x - 5)^3 = x^3 - 5^3$» para $x=6$

⑱ «$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$» para $x=5$, $y=-2$

⑲ «$x^y = y^x$» para $x=5$, $y=2$

⑳ « $\sqrt{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ » para $x=1681$, $y=1600$

Enunciados

Calcula el valor numérico de las siguientes desigualdades algebraicas para los números dados y di si la desigualdad numérica resultante es verdadera o falsa.

㉑ «$\alpha : 2 + \beta : 3 > 90$» para $\alpha=90$, $\beta=240$

㉒ «$5\alpha + 2\beta > 360$» para $\alpha=60$, $\beta=30$

Lenguaje usual

En matemáticas y en lógica (una parte de la filosofía) se denomina lenguaje usual a cualquier idioma hablado entre humanos, como español, inglés, chino, hindi o ruso.

Los lenguajes usuales son ricos en variantes, dobles significados y diversos juegos de palabras. Por tanto, permiten los juegos artístico (literatura) y humorístico (chistes). Presentan a veces dificultades para establecer afirmaciones con la claridad necesaria en la ciencia.

Otros lenguajes

Existen varios lenguajes no usuales, diseñados artificialmente, que se utilizan en diversas áreas de la ciencia y la tecnología; por ejemplo, los lenguajes de programación se usan para especificar a los ordenadores cómo operar. Son lenguajes que no admiten ambigüedad, cada frase tiene un solo significado. Como contrapartida, es más difícil crear con ellos obras artísticas.

Lenguaje algebraico

Ahora en matemáticas estamos interesados en el lenguaje algebraico, que es el que **muestra un enunciado mediante una expresión algebraica**.

Traducción de lenguaje usual a lenguaje algebraico

Una parte importantísima de tu aprendizaje matemático es desarrollar la habilidad de escribir algebraicamente un enunciado expresado en lenguaje usual. Poco a poco irás viendo ejemplos, pensando ejercicios y mejorando esta habilidad.

Como este curso está escrito en el lenguaje usual español, es el que usaremos para las traducciones; pero piensa que el planteamiento es similar con cualquier otro lenguaje usual. Por otra parte, se intenta que el lenguaje algebraico sea lo más universal posible, de modo que hablantes de distintos lenguajes usuales puedan entender el mismo enunciado en lenguaje algebraico.

Lenguaje usual (español)	**Lenguaje algebraico**
El doble de ...	2 · ...
Un tercio de ...	... : 3
El resultado es ...	... = ...

Lenguaje matemático

El lenguaje matemático va mucho más allá que el lenguaje algebraico, pero para tu formación debes comenzar por manejar el lenguaje algebraico como base para llegar a utilizar el lenguaje matemático.

Gran parte del progreso científico y tecnológico de la humanidad se basa en la capacidad de expresar con lenguaje matemático lo que observamos en la realidad.

Famosos estudiosos de la ciencia se han maravillado de que el lenguaje matemático, aun siendo artificial y tratar de entidades no tangibles, se adecue tan bien para describir el mundo real. El físico y matemático austrohúngaro **Eugene Wigner** (1902-1995), premio nobel de física en 1963, escribe en su libro *La irrazonable efectividad de las matemáticas en las ciencias naturales*:

El milagro de la adecuación del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes de la física es un regalo maravilloso que ni entendemos ni merecemos.

Ejemplos de traducciones del lenguaje usual al algebraico

Para que vayas aprendiendo a hacer las traducciones, mostramos varios ejemplos que tratan de situaciones que se dan a menudo.

Ejemplo 1

Expresa la suma de un número y su cuadrado.

Llamamos a al número. «$a + a^2$»

Ejemplo 2

Expresa la diferencia del cuadrado de un número y el cubo de otro.

Llamamos a al primer número y b al segundo. «$a^2 - b^3$»

Ejemplo 3

Expresa que el triple de un número es la mitad del cuadrado de otro.

Llamamos a al primer número y b al segundo. «$3a = b^2 : 2$»

Ejemplo 4

Expresa que el cubo de un número es menor que su triple.

Llamamos a al número. «$a^3 < 3a$»

Ejemplo 5

Expresa que la suma de un número entero y su siguiente es 401.

Llamamos n al número entero. «$n + (n + 1) = 401$»

Primera observación

Sabes que el paréntesis que rodea a la expresión «$n + 1$» no es necesario; pero se puede escribir para que sea más fácil asociarlo con la expresión usual «su siguiente». Tú podrás escribir el paréntesis o no, según tu criterio.

Segunda observación

Aunque en el enunciado aparecen dos números, solo usamos una letra, porque es fácil relacionar un número con su siguiente. En general, se prefiere usar la menor cantidad posible de letras; pero si eso lleva a una excesiva complicación, usaremos varias. Hay que encontrar un equilibrio entre claridad y sencillez.

Ejemplo 6

Expresa la edad que tendrá una persona dentro de 23 años, si continúa viva.

Llamamos d a la edad actual de la persona. «$d + 23$»

Observación

Si la persona no continuara viva, la expresión no tendría sentido.

Ejemplo 7

Si una persona nació hace 20 años, expresa la edad que tenía hace 13 años.

Llamamos d a la edad actual de la persona. «$d - 13$»

Observación

Sabemos que la persona existía hace 13 años porque tenemos el dato de que nació hace 20. Si hubiera nacido hace 3 años, la expresión no tendría sentido.

Enunciados

Traduce a lenguaje algebraico las siguientes frases usando la letra a para representar el número que aparezca en la frase.

① La suma del triple de un número entero y el doble del siguiente del número.

② La diferencia entre el cubo y el cuadrado de un número.

③ El cuadrado de la suma de un número y su doble.

④ La suma de un número con su tercera parte.

⑤ El cuadrado del siguiente de un número entero es 49.

⑥ Si divides un número entero entre 3 te da el mismo resultado que si al número le sumas 4.

⑦ La suma de un número entero y su anterior es igual al anterior del doble del número.

⑧ Si calculas las tres cuartas partes de un número obtienes como resultado la unidad.

⑨ Si al cuadrado de un número le sumas −6, obtienes el número.

⑩ La suma del cuadrado y el cubo de un número es 150.

Enunciados

Si llamamos d a la edad de una persona en un momento dado, escribe la edad que tendría en las siguientes situaciones, siempre suponiendo que estuviera viva.

⑪ Cinco años antes.

⑫ Tres años después.

Enunciados

Traduce a lenguaje algebraico las siguientes frases usando las letras x e y para representar los números que aparezcan en la frase.

⑬ La suma de los cubos de dos números.

⑭ El producto de los siguientes de dos números enteros.

⑮ La mitad de la suma de dos números.

⑯ El cuadrado de la suma de los valores absolutos de dos números.

⑰ La suma de los cuadrados de los valores absolutos de dos números.

⑱ La suma de dos números es 0.

⑲ El cubo del producto de dos números es igual al producto de sus cubos.

⑳ La suma del producto de un número por la mitad de otro con el producto del segundo por la mitad del primero es igual al producto de los dos números.

Tipos de expresiones algebraicas

Existen varias maneras de clasificar las expresiones algebraicas: según el aspecto que tengan y según su significado.

Si atendemos al aspecto, pueden ser:

* **Igualdades**

  Ejemplo 1: $a + b = 3$. Ejemplo 2: $x^2 + 2x = 0$.

  Llevan el signo igual («=»). Son las más usuales y las que más estudiaremos.

* **Desigualdades**

  Ejemplo 3: $x^2 + 2x - 3 < 0$. Ejemplo 4: $x + 3y > 2$.

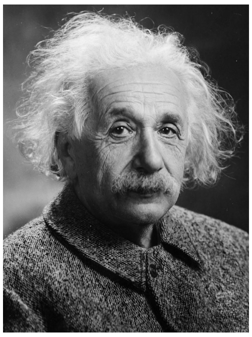
  Llevan algún signo de desigualdad, como menor («<») o mayor («>»), aunque hay más signos. Se usan menos y estudiaremos algunas a partir del nivel 4.

Si atendemos al significado, pueden ser:

* **Definiciones**. Sirven para introducir algún concepto nuevo, como hemos hecho con la raíz cuadrada.

  Ejemplo 5: si un objeto móvil recorre un espacio e en un tiempo t, definimos su velocidad v como $v = e : t$.

* **Fórmulas**. Permiten describir la relación entre varias magnitudes. Normalmente cuesta mucho trabajo científico descubrirlas, pero luego la tecnología (que es la aplicación de la ciencia a las actividades humanas) las puede aprovechar.

  Ejemplo 6: el físico alemán **Albert Einstein** (1879-1955) descubrió que si en una reacción nuclear se pierde una masa m, se genera una energía E y ambas están relacionadas; si llamamos c a la velocidad de la luz en el vacío, se cumple que $E = m \cdot c^2$.

* **Identidades**. Son expresiones verdaderas para cualquier valor numérico de las letras. Saber si una expresión es una identidad a veces es fácil y a veces no, pero en este curso vas a aprender muchas identidades que reconocerás.

  Ejemplo 7: la expresión «$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$» es verdadera para cualquier valor numérico de la letra x.

* **Contradicciones**. Son expresiones falsas para cualquier valor numérico de las letras. Saber si una expresión es una contradicción a veces es fácil y a veces no, puede requerir un estudio.

  Ejemplo 8: la expresión «$0 \cdot x = 1$» es falsa para cualquier valor numérico de la letra x.

* **Ecuaciones**. En estas expresiones hay que averiguar para qué valor o valores numéricos de las letras la expresión es verdadera. El estudio de las ecuaciones es el origen del álgebra y sigue siendo su principal objetivo en la enseñanza secundaria, así que le vas a dedicar mucho tiempo en este curso.

  Ejemplo 9: la expresión «$x^2 + x = 30$» es verdadera para $x=5$ y para $x=-6$ y es falsa para $x=6$ y $x=-5$.

  A veces estudiando una expresión que nos presentan como una ecuación llegamos a la conclusión de que la expresión en realidad es una identidad o una contradicción. Lo estudiaremos como un aspecto de las ecuaciones.

Enunciados

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas asignando a las letras los valores que tú consideres oportuno y luego contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Podría ser una identidad la expresión algebraica?

b) ¿Podría ser una contradicción la expresión algebraica?

Nota: no estás en condiciones de responder con seguridad absoluta a todas las preguntas, pero se pide que digas lo que tú crees que puede estar pasando.

① «$x + 2 = 8$», donde x es un número entero.

② «$(a + b)^2 = a^2 + b^2$», donde a y b son números enteros.

③ «$(n^2 - 1) : (n + 1) = n - 1$», donde n es un número natural.

④ «$3(c + 1) = 3c + 2$», donde c es un número entero.

⑤ «$x^2 + 1 = 10$», donde x es un número entero.

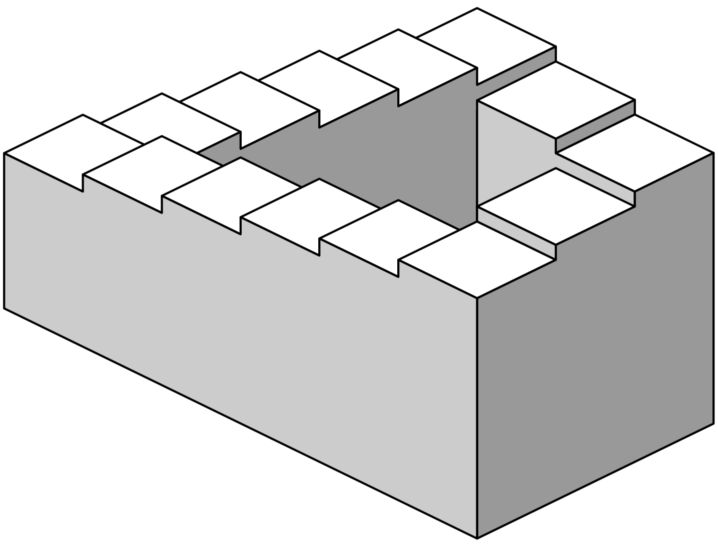
⑥ «$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$», donde a y b son números enteros.

⑦ $\sqrt{x^2} = x$, donde x es un número entero.

⑧ «$0 \cdot a = 0 \cdot b$», donde a y b son números enteros.

⑨ «$(n + 2) : (n + 1) = 1$», donde n es un número natural.

⑩ «$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n \cdot (n + 1) : 2$», donde n es un número natural.



Miembros de una igualdad

En una expresión algebraica que sea una igualdad llamamos **primer miembro** a todo el contenido que hay a la izquierda del signo igual y **segundo miembro** a todo el contenido que hay a la derecha del signo igual.

Ejemplo 1: $\underbrace{3x^2+2x-3}_{\text{Primer miembro}}=\underbrace{x^3+x^2-7x+2}_{\text{Segundo miembro}}$

Transformaciones

Una de las técnicas más importantes del álgebra es la posibilidad de **transformar** una igualdad en otra haciendo operaciones en sus dos miembros. Dicho de otra manera, podemos deducir una igualdad a partir de otra aplicando ciertas operaciones a los dos miembros.

Para indicar que de una igualdad deducimos otra tenemos que usar un signo nuevo, la flecha doble: «⇒». Debe quedar claro que no podemos usar también el signo igual para unir igualdades, porque entonces no se entendería lo que se pretende explicar.

Ejemplo 2

Para decir que de la igualdad «$a = b$» se puede deducir la igualdad «$c = d$», escribimos «$a = b \Rightarrow c = d$». Lo más correcto es leerlo así: «si a es igual a b, entonces c es igual a d», pero muchas veces lo decimos de una manera más corta simplemente como «a igual a b implica que c es igual a d».

Ejemplos de transformaciones

La corrección de los métodos de transformación se puede comprobar con expresiones que solo contengan números, pero para eso los métodos no resultan muy útiles. La idea del álgebra y de estas transformaciones es aplicarlas a expresiones algebraicas que contengan letras.

- Los dos miembros se pueden intercambiar: $a = b \Rightarrow b = a$
  - **Ejemplo 3**. $17 = x \Rightarrow x = 17$
- Si sumamos la misma cantidad a los dos miembros de una igualdad, se obtiene otra igualdad. La cantidad puede ser positiva o negativa, claro.
  - **Ejemplo 4**. $5 = 5 \Rightarrow 5 + 4 = 5 + 4$. Hemos sumado 4, pero la expresión es bastante trivial; y lo que es peor, inútil.
  - **Ejemplo 5**. $x - 2 = 8 \Rightarrow x - 2 + 2 = 8 + 2$. Hemos sumado 2.
  - **Ejemplo 6**. $x + 3 = 9 \Rightarrow x + 3 - 3 = 9 - 3$. Hemos sumado -3.
- Si multiplicamos por la misma cantidad a los dos miembros de una igualdad, se obtiene otra igualdad. La cantidad puede ser una fracción.
  - **Ejemplo 7**. $5x=8\Rightarrow\frac{1}{5}\cdot 5x=\frac{1}{5}\cdot 8$. Hemos multiplicado por un quinto.
  - **Ejemplo 8**. $\frac{x}{7}=3\Rightarrow 7\cdot\frac{x}{7}=7\cdot 3$. Hemos multiplicado por 7.
- Si cambiamos el signo a los dos miembros de una igualdad, obtenemos otra igualdad.
  - **Ejemplo 9**. $-x = 8 \Rightarrow -(-x) = -8$
  - **Ejemplo 10**. $-x = -2 \Rightarrow -(-x) = -(-2)$

Vocabulario básico de las ecuaciones

- ✱ Una **ecuación** es una expresión algebraica con una igualdad que propone averiguar para qué valores numéricos de las letras es cierta.
- ✱ Siempre hay que saber a qué **conjunto de números** deben pertenecer los valores numéricos, pero esto muchas veces no se dice explícitamente, sino que queda claro por el contexto de la ecuación.
- ✱ Decimos que una ecuación **se verifica** para unos determinados valores numéricos de las letras cuando al sustituir las letras por los números se obtiene una igualdad verdadera. La palabra «verificar» aquí proviene de la palabra «verdad», significa comprobar que algo es verdadero.
- ✱ Las letras de las que hay que averiguar los valores se llaman **incógnitas**; esta palabra proviene del verbo latín *cognoscere* («conocer») con el prefijo de negación «in» y significa «no conocida».
- ✱ Una ecuación puede tener **cualquier número** de incógnitas.
- ✱ Llamamos **solución** de una ecuación a un conjunto de valores de las incógnitas que verifican la ecuación.
- ✱ Cada ecuación puede tener **cualquier número de soluciones**, incluyendo ninguna e infinitas. Uno de los aspectos de las ecuaciones que estudia la matemática es cuántas soluciones tiene una ecuación. A lo largo del curso irás aprendiendo cuántas soluciones tienen algunos tipos de ecuaciones.
- ✱ **Resolver** una ecuación es averiguar todas sus soluciones o demostrar que no tiene ninguna.

Ejemplo 1

$2x + 7 = 19$

La incógnita es la letra x. Es una ecuación con una incógnita. Como no se especifica, entendemos que representa algún número de los conjuntos numéricos que conocemos (naturales, enteros o fracciones).

El valor x=–4 no verifica la ecuación porque $2\cdot(-4)+7=19$ es una expresión falsa.

El valor x=6 verifica la ecuación porque $2\cdot6+7=19$ es una expresión verdadera.

El valor x=6 es una solución de la ecuación. Sabemos que esta ecuación solo tiene una solución, ya verás más adelante por qué.

Ejemplo 2

$x^2 + 1 = 10$

La incógnita es la letra x. Es una ecuación con una incógnita.

El valor x=3 es solución de la ecuación porque $3^2 + 1 = 10$ es verdadera.

El valor x=–3 es solución de la ecuación porque $(-3)^2 + 1 = 10$ es verdadera.

Sabemos que esta ecuación tiene dos soluciones, en el nivel 2 de este curso verás el motivo.

Ejemplo 3

$2(y + 3) = 2y + 4$

La incógnita es la letra y. Es una ecuación con una incógnita.

El valor y=0 no es solución de la ecuación porque $2 \cdot (0 + 3) = 2 \cdot 0 + 4$ es falsa.

Sabemos que esta ecuación no tiene ninguna solución.

Más ejemplos de ecuaciones

El estudio de las ecuaciones es una materia muy amplia y útil. Antes de sumergirnos en su estudio pormenorizado, es conveniente que veas varios tipos de ecuaciones, para que seas consciente del gran número de posibilidades que se pueden dar.

Ejemplo 1

$5x = 19$, con x un número entero.

La incógnita es la letra x. Es una ecuación con una incógnita. Nos dicen explícitamente que x debe ser un número entero.

Sabemos que no hay ningún número entero que multiplicado por 5 dé como resultado 19, así que la ecuación no tiene solución.

Si nos hubieran dado la posibilidad de que x fuera una fracción, la ecuación sí tendría solución; sería $x = 19/5$. Y también hay una solución decimal, $x = 3{,}8$. En el nivel 2 estudiaremos que las dos soluciones son iguales.

Ejemplo 2

$(x - 1)(x + 2)(x - 5) = 0$

La incógnita es la letra x. Es una ecuación con una incógnita. Como no se especifica, entendemos que representa algún número de los conjuntos numéricos que conocemos (naturales, enteros o fracciones).

Esta ecuación tiene tres soluciones: $x = 1$, $x = -2$ y $x = 5$.

Ejemplo 3

$2x + y = 13$

La incógnitas son las letras x e y. Es una ecuación con dos incógnitas.

Las soluciones a una ecuación de dos incógnitas consisten en un valor para cada una de las letras, valores que deber ir unidos entre sí (por eso decíamos que una solución es un **conjunto** de valores). Para expresar que los valores de las letras van unidos, utilizamos una llave que los engloba.

Los valores $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ no son solución de la ecuación porque $2 \cdot 1 + 3 = 13$ es falsa.

Los valores $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ son **una** solución de la ecuación porque $2 \cdot 4 + 5 = 13$ es verdadera. Observa que aunque hay dos valores, uno para cada letra, solo forman una solución, no dos soluciones.

Esta ecuación tiene infinitas soluciones, seguro que a ti se te ocurren muchas. Una dificultad, que tendremos que afrontar en niveles superiores, es cómo conseguir escribir y manejar las infinitas soluciones.

Búsqueda de soluciones

Una buena manera de aproximarse al estudio de las ecuaciones es intentar averiguar alguna solución de alguna ecuación **por tanteo**, es decir, probando valores. Este método te va a dar soltura y va a conseguir que te familiarices con la mecánica de las ecuaciones.

Pero, naturalmente, iremos viendo métodos más específicos de resolución de ecuaciones a lo largo del curso.

También existen métodos para resolver ecuaciones que utilizan programas de ordenador para obtener soluciones aproximadas. Esos apenas los veremos.

Enunciados

Averigua por tanteo una solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

① $5x = -30$

② $y + 15 = 12$

③ $z : 2 = -11$

④ $-p + 4 = 0$

⑤ $x^5 = 32$

⑥ $(y - 5)(y^2 + 3) = 0$

⑦ $2x + 7 = 15$

⑧ $-3y + 1 = 13$

⑨ $8z + 127 = 127$

⑩ $x : 2 + 2 : x = 2$

Enunciados

Averigua por tanteo dos soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones:

⑪ $x \cdot (x + 1) = 0$

⑫ $x^2 - x = 0$

⑬ $(y + 13)(y + 14) = 0$

⑭ $x^2 = 25$

⑮ $x^2 \cdot (x - 6) = 0$

Enunciados

Di de cada una de las siguientes ecuaciones si tiene alguna solución o no tiene ninguna solución:

⑯ $5x + 2y = 7$

⑰ $x^2 + y^2 = 5^2$; x e y son números enteros

⑱ $x^2 = -1$; x es un número entero

⑲ $xy + x + y = 1$

⑳ $x^2 + y^2 = 3$; x e y son números naturales

Las ecuaciones más sencillas

Son aquellas en las que la incógnita aparece una sola vez, acompañada por un número con el que se opera y da como resultado otro número.

Ejemplo 1	$x + 2 = 8$	La operación es una suma
Ejemplo 2	$x - 3 = 6$	Podemos decir que la operación es una resta, por sencillez
Ejemplo 3	$2x = 14$	La operación es una multiplicación
Ejemplo 4	$x : 5 = 6$	La operación es una división
Ejemplo 5	$-x = 4$	La operación es un cambio de signo, no hay otro número

Despejar la incógnita

Despejar la incógnita consiste en conseguir que la incógnita sea lo único que aparezca en uno de los dos miembros. Es la idea fundamental para resolver ecuaciones.

Resolución de las ecuaciones sencillas

Para resolver todas estas ecuaciones hay que despejar la incógnita haciendo a los dos miembros alguna operación que permita eliminar al número (u operación) que acompaña a la incógnita.

Ejemplo 1	$x + 2 = 8 \Rightarrow x + 2 - 2 = 8 - 2 \Rightarrow x = 8 - 2 \Rightarrow x = 6$	Hemos restado 2
Ejemplo 2	$x - 3 = 6 \Rightarrow x - 3 + 3 = 6 + 3 \Rightarrow x = 6 + 3 \Rightarrow x = 9$	Hemos sumado 3
Ejemplo 3	$2x = 14 \Rightarrow 2x : 2 = 14 : 2 \Rightarrow x = 14 : 2 \Rightarrow x = 7$	Dividido entre 2
Ejemplo 4	$x : 5 = 6 \Rightarrow 5 \cdot x : 5 = 6 \cdot 5 \Rightarrow x = 6 \cdot 5 \Rightarrow x = 30$	Multiplicado por 5
Ejemplo 5	$-x = 4 \Rightarrow -(-x) = -(+4) \Rightarrow x = -(+4) \Rightarrow x = -4$	Cambio de signo

Reglas prácticas de resolución

En la práctica diaria, realizar todo el proceso que acabamos de exponer sería muy largo, así que es mejor recordar solo cuál es el resultado final en cada situación. Vemos cinco casos, que corresponden con los cinco ejemplos:

Caso 1. Si un número está sumando en un miembro, pasa restando al otro.

Caso 2. Si un número está restando en un miembro, pasa sumando al otro.

Caso 3. Si un número está multiplicando en un miembro, pasa dividiendo al otro.

Caso 4. Si un número está dividiendo en un miembro, pasa multiplicando al otro.

Caso 5. Si la incógnita lleva un cambio de signo, se cambia de signo el otro miembro.

Esquemáticamente, siendo x la incógnita:

Caso 1	$x + a = b \Rightarrow x = b - a$
Caso 3	$ax = b \Rightarrow x = b : a$
Caso 5	$-x = b \Rightarrow x = -b$

Caso 2	$x - a = b \Rightarrow x = b + a$
Caso 4	$x : a = b \Rightarrow x = b \cdot a$

¿Suma o resta?

Hemos visto a lo largo de la parte de aritmética que los números negativos se pueden sumar y que para restar hay que sumar el número opuesto. Sin embargo, en estas reglas prácticas estamos tratando los números negativos como restas: se suele hacer así como costumbre, para que sea más fácil recordar las reglas.

Ejemplos de resolución de ecuaciones sencillas

Mostramos los cinco casos de resolución de ecuaciones sencillas. Además de aprender bien los casos y aplicar las reglas, es importante que escribas correctamente el desarrollo. Recuerda que usamos el signo «⇒» para indicar que vamos deduciendo de la igualdad de la izquierda la igualdad de la derecha.

Ejemplo 1. $17 + x = -13 \Rightarrow x = -13 - 17 \Rightarrow x = -30$

El 17 está sumando en el primer miembro y pasa restando al segundo.

Ejemplo 2. $-15 + x = 18 \Rightarrow x = 18 + 15 \Rightarrow x = 33$

El 15 está restando en el primer miembro y pasa sumando al segundo.

Ejemplo 3. $8x = -7 \Rightarrow x = -7 : 8 \Rightarrow x = -0{,}875$

El 8 está multiplicando en el primer miembro y pasa dividiendo al segundo.

Observa que el resultado es un número decimal.

Ejemplo 4. $x : 3 = -17 \Rightarrow x = -17 \cdot 3 \Rightarrow x = -51$

El 3 está dividiendo en el primer miembro y pasa multiplicando al segundo.

Ejemplo 5. $-x = -52 \Rightarrow x = -(-52) \Rightarrow x = 52$

La incógnita lleva un cambio de signo, que pasa al segundo miembro.

Ejemplo 6. $21 = x + 26 \Rightarrow 21 - 26 = x \Rightarrow -5 = x \Rightarrow x = -5$

El 26 está sumando en el segundo miembro y pasa restando al primero. En el último paso hemos intercambiado los miembros de la igualdad por estética: aunque es correcto escribir «$-5 = x$» como solución final, es más agradable y natural escribir «$x = -5$».

Ejemplo 7. $-4 = -7 + x \Rightarrow -4 + 7 = x \Rightarrow -3 = x \Rightarrow x = -3$

El 7 está restando en el segundo miembro y pasa sumando al primero. En el último paso hemos intercambiado los miembros de la igualdad por estética.

Ejemplo 8. $-13 = -5x \Rightarrow -13 : (-5) = x \Rightarrow 2{,}6 = x \Rightarrow x = 2{,}6$

El -5 está multiplicando en el segundo miembro y pasa dividiendo al primero.

Fíjate bien en este ejemplo, porque es motivo de confusión: el -5 está multiplicando, no está sumando ni restando, por eso pasa dividiendo y no cambia de signo.

Ejemplo 9. $13 = x : 2 \Rightarrow 13 \cdot 2 = x \Rightarrow 26 = x \Rightarrow x = 26$

El 2 está dividiendo en el segundo miembro y pasa multiplicando al primero.

Ejemplo 10. $4 = -x \Rightarrow -4 = x \Rightarrow x = -4$

La incógnita lleva un cambio de signo, que pasa al primer miembro.

Ejemplo 11. $24 = x + 31 \Rightarrow x + 31 = 24 \Rightarrow x = -7$

Hemos empezado por intercambiar los miembros de la igualdad; luego, hemos pasado el 31 que está sumando en el primer miembro restando al segundo, pero hemos hecho mentalmente la operación $24 - 31 = 7$.

Ejemplo 12. $-3 = 6x \Rightarrow 6x = -3 \Rightarrow x = -3 : 6 \Rightarrow x = -0{,}5$

Hemos empezado por intercambiar los miembros de la igualdad.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones; da el resultado como número entero o decimal.

① $x + 41 = 103$

② $x - 19 = -3$

③ $2x = 542$

④ $x : 5 = -33$

⑤ $-x = 31$

⑥ $32 + x = -25$

⑦ $-8 + x = -29$

⑧ $32 = 32 + x$

⑨ $-23 = -4 + x$

⑩ $36 = -12x$

⑪ $-15 = x : 2$

⑫ $-13 = -x$

⑬ $x + 109 = 234$

⑭ $x - 34 = 51$

⑮ $6x = 7{,}44$

⑯ $-4x = -20$

⑰ $18 = x : (-3)$

⑱ $x + 2{,}6 = 7{,}3$

⑲ $x - 28 = -28$

⑳ $-8x = -116$

㉑ $23 = 57 + x$

㉒ $-41 = -13 + x$

㉓ $-7x = 77$

㉔ $x : 0{,}1 = -3$

㉕ $0{,}25 = 0{,}2x$

㉖ $x + 3{,}45 = 2{,}04$

	A	B	C	D	E
①	x+12=16	x–3=4	2x=18	x:3=8	–x=5
②	x+3=–7	x–4=–13	7x=–56	x:2=–3	–x=–8
③	2+x=8	–4+x=9	3x=–12	x:4=–5	2=–x
④	x+7=7	(–1)x=8	–x=8	2=x+5	–3=–2+x
⑤	x+6=–8	24=–6x	–2=x:3	16=x+12	–3=x–3
⑥	–3x=–3	2x=–8	–2x=–10	x:1=–4	x+1=–1
⑦	23+x=3	–x=–21	–5x=–10	5=x–6	–3=x:5
⑧	9+x=–3	x–3=–11	x:3=–6	7=17+x	5x=–35
⑨	–5x=–35	–8=x:2	–13=–x	2=x+10	x–10=2
⑩	2x=10	x:2=10	–6x=12	7x=–49	13=13+x

Nivel 1 • Álgebra • Ecuaciones • Cálculo mental (02)

	A	B	C	D	E
①	x+10=–3	x–3=8	2x=16	x:5=–1	–x=4
②	x+4=9	x–5=–7	–3x=12	x:4=7	–3=–x
③	3=x+9	–2=x–2	6=x–6	3=–3x	–6=x:2
④	5=8+x	3=–7+x	–5x=30	x:7=–2	–5x=–5
⑤	x+707=707	–8=–6+x	–x=–13	2x=26	x:2=7
⑥	x:2=–8	–8=2x	–12=–4x	x+10=0	3=x–4
⑦	7x=0	–37x=–37	x+13=2	–15=x–3	x:2=–11
⑧	x+9=7	–1=x+4	8=–2x	x:13=0	2x=–100
⑨	x–11=23	4=x–5	10x=–20	x:2=–13	–x=5
⑩	8=x+14	–3=x:7	–8x=8	x+8=8	x–8=8

Tipos de ecuaciones

Existen muchos tipos de ecuaciones diferentes, que hay que estudiar por separado porque requieren distintos métodos de resolución.

Simplificación de ecuaciones

Para saber de qué tipo es una ecuación primero hay que simplificarla, hasta dejarla del modo más sencillo que se pueda. Una parte de tu aprendizaje sobre resolución de ecuaciones corresponde a aprender a simplificar la ecuación.

Casos particulares

Cuando se simplifica al máximo una ecuación cualquiera, siempre puede ocurrir que se elimine la incógnita y se llegue a una expresión algebraica que sea una identidad (como «0 = 0», por ejemplo) o una contradicción (como «0 = 1», por ejemplo). En esos casos particulares, la respuesta a la solución de la ecuación es:

- ✱ Si se llega a una identidad, cualquier número es solución de la ecuación.
- ✱ Si se llega a una contradicción, la ecuación no tiene solución.

Poco a poco

Conforme avances en este curso irás viendo progresivamente tanto métodos de simplificación como de resolución. En este primer nivel veremos solo algunos casos sencillos.

Ecuaciones de primer grado

Son aquellas que, cuando se simplifican al máximo, se transforman en una expresion así: el producto de un número por la incógnita es igual a otro número.

- ✱ Ejemplos: las siguientes expresiones **simplificadas** corresponden a ecuaciones de primer grado: «3x = 6», «–5x = 8», «–4x = 0», «–x = 9». La última es equivalente a «(–1)x = 9».
- ✱ Expresión general: $ax = b$, donde x es la incógnita y a y b son números.

Ecuaciones con paréntesis

Las ecuaciones más complicadas que vamos a resolver en este nivel serán ecuaciones de primer grado con algún paréntesis; por ejemplo: «2(5x + 3) + 3 = –11», «2(x + 7) – 4= –7(x – 5) + 2».

Método de resolución de ecuaciones de primer grado

El método general para resolver ecuaciones de primer grado con una sola incógnita, con paréntesis o no, es este:

1. Si hay paréntesis, se eliminan todos.
2. Se organizan los sumandos individuales de modo que en un miembro queden todos los sumandos con incógnita y en el otro todos los sumandos que no tengan incógnita.
3. Se simplifica al máximo cada miembro de la ecuación.
4. Si es posible, se aconseja simplificar la ecuación.
5. Se resuelve la ecuación simplificada obtenida.

El número de pasos que se den dependerá de cada persona: unas darán algunos pasos mentalmente, otras tendrán que escribir más; habrá que encontrar un equilibrio, debes entender tú el desarrollo y deben entenderlo quienes lo lean.

Ejemplo detallado de resolución de una ecuación de primer grado

Enunciado

Resuelve la ecuación «$3(4x–2) = –2x + 5(4–1)$»; da el resultado como número entero o número decimal.

Primer paso

Como la ecuación tiene paréntesis, empezamos por eliminarlos.

El segundo paréntesis se puede eliminar fácilmente, puesto que es una operación con números: $5(4–1) = 5·3 = 15$.

Pero el primer paréntesis incluye una letra, así que para eliminarlo hay que utilizar la propiedad transitiva: $3(4x–2) = 3·4x – 3·2 = 12x – 6$

Por tanto, en un primer paso la ecuación queda «$12x–6=–2x+15$»

Segundo paso

En la ecuación hay cuatro sumandos: «$12x$», «$–6$», «$–2x$» y «15». Se suele llamar términos a los sumandos de una ecuación. Tenemos que organizarlos de modo que en un miembro queden los términos con incógnita y en el otro miembro los términos sin incógnita. Para cambiar de miembro un término hay que cambiarle el signo (es decir, usamos la técnica de sumar el número opuesto a los dos miembros).

El término «$12x$» está en el primer miembro y lo vamos a dejar ahí.

El término «$–2x$» está en el segundo miembro y lo pasamos al primero como «$2x$».

El término «15» está en el segundo miembro y lo vamos a dejar ahí.

El término «$–6$» está en el primer miembro y lo pasamos al segundo como «6».

Tras este segundo paso la ecuación queda «$12x+2x=15+6$»

Tercer paso

Simplificamos al máximo cada miembro. El segundo es una operación con números, así que la realizamos: $15+6 = 21$. El primero es una operación en la que hay una letra, la x, pero que representa a un número, así que por lógica $12x+2x=14x$. Este paso se puede explicar de varias maneras: si tienes doce cosas y te doy dos, tendrás catorce cosas; o con la propiedad distributiva: $12x+2x = (12+2)x = 14x$.

Tras este tercer paso la ecuación queda «$14x=21$»

Cuarto paso

Si nos viene bien, y es posible, podemos simplificar la ecuación completa multiplicándo o dividiendo cada miembro por el mismo numéro. En este caso, podemos divir entre 7 los dos miembros y la ecuación queda «$2x=3$».

Quinto paso

Hemos llegado a la ecuación más simplificada posible y vemos que, efectivamente, es una ecuación de primer grado. Para resolverla, solo nos falta pasar el 2 que está multiplicando en el primer miembro dividiendo al segundo y operar:

$2x = 3 \Rightarrow x = 3 : 2 \Rightarrow x = 1{,}5$

Solución

$x = 1{,}5$

Resolución completa

$3(4x–2) = –2x + 5(4–1) \Rightarrow 3·4x – 3·2 = –2x + 5·3 \Rightarrow 12x – 6 = –2x +15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x + 2x = 15 + 6 \Rightarrow 14x \Rightarrow 21 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 3 : 2 \Rightarrow x = 1{,}5$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones; da el resultado como número entero o número decimal.

① $4x + 5 = 2x - 17$

② $-3(5x + 1) + 5x = 15$

③ $7\cdot(5 - 8) + x = 5(2x + 1) + 4(-x + 13)$

④ $9(4x + 2) + 1 = 6(6x - 3)$

⑤ $2(5x+2) = 10(x + 1) - 6$

Resolución 1

$4x + 5 = 2x - 17 \Rightarrow 4x - 2x = -17 - 5 \Rightarrow 2x = -22 \Rightarrow x = -22 : 2 \Rightarrow x = -11$

Como la ecuación no tiene paréntesis, empezamos directamente colocando en un miembro los términos con incógnita y en otro los términos sin incógnita.

Resolución 2

$-3(5x + 1) + 5x = 15 \Rightarrow -15x - 3 + 5x = 15 \Rightarrow -15x + 5x = 15 + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -10x = 18 \Rightarrow x = 18 : (-10) \Rightarrow x = -1{,}8$

Aunque la ecuación «$-10x = 18$» se puede simplificar entre 2, no lo hemos hecho porque es más fácil dividir entre 10 que entre 5.

Resolución 3

$7\cdot(5 - 8) + x = 5(2x + 1) + 4(x + 13) \Rightarrow -21 + x = 10x + 5 + 4x + 52 \Rightarrow$

$\Rightarrow -21 - 5 - 52 = 10x + 4x - x \Rightarrow -78 = 13x \Rightarrow 13x = -78 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -78 : 13 \Rightarrow x = -6$

Esta vez hemos colocado los términos con incógnita en el segundo miembro y en un paso posterior hemos intercambiado los dos miembros.

Resolución 4

$9(4x + 2) + 1 = 6(6x - 5) \Rightarrow 36x + 18 + 1 = 36x - 30 \Rightarrow 36x - 36x = -18 - 30 -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = -49 \rightarrow$ sin solución

La expresión algebraica «$0 = -49$» es una contradicción.

Resolución 5

$2(5x+2) = 10(x + 1) - 6 \Rightarrow 10x + 4 = 10x + 10 - 6 \Rightarrow 10x - 10x = 10 - 6 - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 0 \rightarrow$ cualquier número es solución

La expresión algebraica «$0 = 0$» es una identidad.

Observaciones

✱ Es preferible no cortar las líneas en mitad de una igualdad; aunque es correcto hacerlo, puede provocar errores.

✱ Cuando el desarrollo continúa en la siguiente línea, hay que repetir al comienzo de la nueva línea el último signo de la línea anterior; en estos ejemplos, el signo «⇒».

✱ Cuando lo hagas tú, puedes saltarte algún paso haciendo mentalmente alguna operación.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones; da el resultado como número entero o decimal.

① $3x + 7 = 6x - 5$

② $2(x - 5) = 7\cdot(12 - 1) + x$

③ $4(3x + 11) = 5 + 2(x + 7)$

④ $2x - 3(3x - 1) = 9x - 21$

⑤ $2(2x + 3) = 4x + 5$

⑥ $-6x + 1 = 5(2x - 3)$

⑦ $7(2x + 4) = 3(5x + 7) + 7$

⑧ $5 - 7(x + 2) = -5(x + 3)$

⑨ $2(x + 1) + 3(2x - 4) = 4(2x - 1) - 6$

⑩ $-3(7x - 8) = 2(1 - 10x)$

⑪ $2x - 7 = -3x + 2$

⑫ $7(3x - 2) - 4(2x + 1) = -3x + 14$

⑬ $-5(6x + 3) + 2\cdot(13-8) + 5x = 0$

⑭ $8(2x - 1) + 4x = 2(x - 4) + 9$

⑮ $3(4x + 8) +1 = 2(6x - 3)$

⑯ $5\cdot(7-10) + 2x = 4x + 8$

⑰ $x + 12 + 2x = 3(x + 4)$

⑱ $17(x - 4) + x = 4(2x + 3) + 7$

⑲ $-3(7x + 2) + 3x = 2(7x + 5) + 32$

⑳ $-3(x - 7) - 2x = 7(7 + 1)$

㉑ $2(5x - 3) + 4(3x +2) = -3(5x +2) - 29$

㉒ $-2(3x + 3) + 5x = 3$

㉓ $7x + 8 = -2x - 10$

㉔ $4(3x - 12) + 1 = 2(x - 3) + 5$

㉕ $6(2x - 3) + 4(4x - 5) = 3(3x + 3) + 19x$

㉖ $-2(5x + 4) + 3x = 27$

Enunciado de todos los ejemplos

Resuelve la ecuación; da el resultado como número entero o número decimal.

Observación

En los ejemplos se han efectuado mentalmente algunos pasos, pero se ha señalado escribiendo puntos suspensivos («...»). Si tú no puedes dar los pasos mentalmente, deberías comprobarlos escribiendo lo que falta.

Eliminación de paréntesis con signo «+»

Cuando un paréntesis tiene solo un signo «+» delante, el paréntesis se puede simplemente suprimir, manteniendo todos los signos que haya dentro del paréntesis.

Ejemplo 1

$2 + (4x - 3) = (2x + 7) \Rightarrow 2 + 4x - 3 = 2x + 7 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

Eliminación de paréntesis con signo «–»

Cuando un paréntesis tiene solo un signo «–» delante, para suprimirlo hay que cambiar el signo a todos los signos que haya dentro del paréntesis. Motivo: el signo «–» se comporta como si fuera el número «–1».

Ejemplo 2

$4 - (8x - 3) = -(-2x + 5) \Rightarrow 4 - 8x + 3 = 2x - 5 \Rightarrow \ldots \Rightarrow -10x = -4 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 0{,}4$

Simplificaciones dentro de los paréntesis

Si un paréntesis tiene delante un número y dentro varios sumandos, se suele ahorrar tiempo simplificando el contenido interno de los paréntesis antes de eliminar los paréntesis.

Ejemplo 3

$3(-2x + 4x + 7 - 3) = 5(6x - 3 - 2x + 8) \Rightarrow 3(2x + 4) = 5(4x + 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x + 12 = 20x + 25 \Rightarrow -6x - 20x = 25 - 12 \Rightarrow -26x = 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = -0{,}5$

Simplificaciones de los números delante de los paréntesis

En algunas ecuaciones es posible simplificar la expresión entera, dividiéndola o multiplicandola por un número.

Ejemplo 4

$35(x + 2) = 14(x - 1) \Rightarrow 5(x+2) = 2(x-1) \Rightarrow 5x + 10 = 2x - 2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = -12 \Rightarrow x = -4$

Hemos dividido entre 7 la ecuación original y así los números son más sencillos.

Ejemplo 5

$1{,}2x + 2 = 0{,}5x - 0{,}1 \Rightarrow 12x + 20 = 5x - 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 7x = -21 \Rightarrow x = -3$

Hemos multiplicado por 10 la ecuación original y así hemos eliminado todos los números decimales.

Números decimales en las ecuaciones

Los números decimales se pueden usar en las ecuaciones igual que los números enteros, simplemente algunas operaciones pueden ser más incómodas.

Ejemplo 6

$2{,}8x + 2{,}23 = -0{,}4x + 5{,}67 \Rightarrow 2{,}8x + 0{,}4x = 5{,}67 - 2{,}23 \Rightarrow 3{,}2x = 3{,}44 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3{,}44 : 3{,}2 \Rightarrow x = 1{,}075$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones; da el resultado como número entero o decimal.

① $2 + (5x - 2) = -(3x + 16)$

② $2(2x + 1) - (3x + 8) = 5 \cdot (18 - 12)$

③ $49(3x - 2) = 77(2x + 1)$

④ $x - 0{,}2x = 5 - 4{,}2$

⑤ $2(5x + 10x - 3) + 1 = 3(4x + 6x) - 7$

⑥ $30x + 50 = 110 + 20x$

⑦ $8(2x + 5 + 3x) = 4(7 - 9 + 2x)$

⑧ $7(2x + 3) - (12x - 5) = 4$

⑨ $9 + (2x + 3x + 6 + 7) = x - (x + 4)$

⑩ $6(x - 7) = 12(2x - 3) - 6x$

⑪ $15(2x + 1) + 18(3x - 2) = 21(x - 7)$

⑫ $25(6x - 5x + 7 - 10) = 35(7x - 2x + 4 - 7)$

⑬ $2(2x + 2) = 4(x + 1)$

⑭ $7(2x - 4) - 4x = 15 \cdot (16 - 9 - 7)$

⑮ $16(3x - 2) = 24(2x + 1)$

⑯ $5 - (2x + 3) = 2x + 5$

⑰ $1000x - 7000 = 3000(x + 5)$

⑱ $2(x - 3x + 4x + 4) = 3(5 - 7 + 8 + x)$

⑲ $-4 - (x + 5) = 2(3x - 1)$

⑳ $(2x + 1) + (2x + 3) = 8$

㉑ $(2x + 1) - (2x + 3) = 8$

㉒ $x + 2(x + 1) = -19$

㉓ $2(x + 1) + 5(2x + 3) = -19$

㉔ $5(3x - 2) + x = 4(4x - 2) - 2$

㉕ $x - (x + 4) = 5 - x$

㉖ $7(x - 5) + 3x = 2(x - 3) + 15$

Resolución de problemas usando una ecuación

Cuando se intenta resolver un problema usando una ecuación hay que añadir una serie de consejos a los habituales sobre resolución de problemas:

1. Escribe qué significado tendrá la incógnita que uses.
2. Plantea una ecuación.
3. Resuelve la ecuación.

Estos tres consejos son la parte central de la resolución del problema; antes, debes entender el problema y pensar cómo resolverlo; después, tienes que redactar la solución del problema. Ten en cuenta que

- Muchas veces se puede resolver un problema con diferentes ecuaciones.
- Si no escribes qué significa la incógnita, no se entenderá tu resolución.
- Para plantear la ecuación tienes que traducir al lenguaje algebraico el significado del enunciado del problema.
- La solución de la ecuación no es la solución del problema.
- En la redacción de la solución del problema no debe aparecer la letra que usaste como incógnita.

Ejemplo 1 de problema resuelto con una ecuación

Enunciado

Averigua un número entero que sumado con el triple de su siguiente dé como resultado 207.

Observación

Podemos llamar x al número pedido o a su siguiente, de las dos maneras podremos resolver el problema. En general, es mejor elegir como incógnita el número más pequeño de todos los que aparezcan en el enunciado.

Resolución

Llamamos x al número entero pedido. El siguiente es $x+1$.

Se verifica que $x + 3(x + 1) = 207$.

Resolvemos la ecuación:

$x + 3(x + 1) = 207 \Rightarrow x + 3x + 3 = 207 \Rightarrow x + 3x = 207 - 3 \Rightarrow 4x = 204 \Rightarrow x = 51$

Solución: 51

Ejemplo 2 de problema resuelto con una ecuación

Enunciado

Averigua un número entero que sumado con el séptuple de su siguiente dé como resultado 145.

Resolución

Llamamos x al número entero pedido. El siguiente es $x+1$.

Se verifica que $x + 7(x + 1) = 145$.

Resolvemos la ecuación:

$x + 7(x + 1) = 145 \Rightarrow x + 7x + 7 = 145 \Rightarrow x + 7x = 145 - 7 \Rightarrow 8x = 138 \Rightarrow x = 17{,}25$

17,25 no es un número entero, de modo que el problema no tiene solución.

Solución: no hay ningún número entero que cumpla las condiciones del enunciado.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas utilizando una ecuación.

① En un bar todos los bocadillos tienen el mismo precio y todos los refrescos tienen el mismo precio. Sabemos que un bocadillo cuesta 2,5 euros más que un refresco. Por cuatro bocadillos y seis refrescos hemos pagado 47,5 euros. Calcula el precio de cada bocadillo y el precio de cada refresco.

② Una madre tiene 22 años más que su hijo y dentro de seis años la edad de la madre será el triple que la de su hijo. Averigua la edad de la madre y la edad del hijo.

Resolución 1

Observaciones

✱ Aunque el enunciado pregunta dos números, solo sabemos (de momento) utilizar una incógnita, así que hay que buscar la manera de escribir los dos números usando una sola letra.

✱ Podemos llamar x al precio de cada bocadillo o al precio de cada refresco. En general, es mejor elegir como incógnita el número más pequeño de todos los que aparezcan en el enunciado.

Resolución

Llamamos x al precio de un refresco. El precio de un bocadillo es «$x + 2{,}5$».

Se verifica que $4(x + 2{,}5) + 6x = 47{,}5$; resolvemos la ecuación:

$4(x + 2{,}5) + 6x = 47{,}5 \Rightarrow 4x + 10 + 6x = 47{,}5 \Rightarrow 4x + 6x = 47{,}5 - 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x = 37{,}5 \Rightarrow x = 3{,}75$

Cada bocadillo cuesta $x + 2{,}5 = 3{,}75 + 2{,}5 = 6{,}25$

Solución: cada bocadillo cuesta 6,25 euros y cada refresco cuesta 3,75 euros.

Resolución 2

Observaciones

✱ Como el enunciado pregunta dos números hay que buscar la manera de escribirlos usando una sola letra.

✱ Hay cuatro posibilidades distintas de elección de la incógnita.

✱ Cuando nos preguntan las edades, entendemos que son las edades **ahora**.

Resolución

Llamamos x a la edad del hijo. Por tanto,

Persona	Edad (ahora)	Edad dentro de 6 años
Hijo	x	$x + 6$
Madre	$x + 22$	$x + 22 + 6 = x + 28$

Se verifica que $x + 28 = 3(x + 6)$. Resolvemos la ecuación:

$x + 28 = 3(x + 6) \Rightarrow x + 28 = 3x + 18 \Rightarrow 28 - 18 = 3x - x \Rightarrow 10 = 2x \Rightarrow x = 5$

La madre tiene x + 22 = 5 + 22 = 27

Solución: la madre tiene 27 años y el hijo tiene 5 años.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas utilizando una ecuación.

① Averigua un número entero que sumado con su siguiente dé como resultado 527.

② En una cafetería todos los bollos tienen el mismo precio, cada uno cuesta 0,85 euros más que un café. Por ocho cafés y seis bollos hemos pagado 22,6 euros. Calcula el precio de un café y el precio de un bollo.

③ Un padre tiene 48 años más que su hija y dentro de 11 años la edad del padre será el triple que la de la hija. Calcula las edades del padre y de la hija.

④ Averigua un número entero sabiendo que si al doble de su anterior le restas el triple de su siguiente, el resultado es 27.

⑤ En una frutería un kilogramo de manzanas cuesta 60 céntimos más que un kilogramo de peras. Sabiendo que hemos pagado lo mismo por cinco kilogramos de peras que por cuatro kilogramos de manzanas, calcula cuánto cuesta un kilogramo de manzanas y cuánto cuesta un kilogramos de peras; da el resultado en euros.

⑥ Una mujer tiene diez años más que su hermano y hace cuarenta años su edad era el triple que la de su hermano. Calcula las edades de los dos hermanos.

⑦ En una granja hay el triple de gallinas que de ovejas y entre los dos tipos de animal tienen 330 patas. ¿Cuántas ovejas y cuántas gallinas hay en la granja?

⑧ Averigua un número natural que sumado al doble de su anterior y al triple de su siguiente dé como resultado 235.

⑨ En un bar los bocadillos de chorizo cuestan 1,5 euros más que los de salchichón y los bocadillos de jamón cuestan 2,5 euros más que los de chorizo. Unos amigos piden 8 bocadillos de salchichón, 5 bocadillos de chorizo y 4 bocadillos de jamón y tienen que pagar por todo 117 euros. Averigua el precio de cada tipo de bocadillo.

⑩ Para descargar una camioneta con 185 kilogramos de carga hay preparadas 7 personas normales y 4 personas fuertes. Deciden que podrán repartir perfectamente la carga si cada persona fuerte lleva 5 kilogramos más que cada persona normal. Calcula cuánta carga llevará cada persona normal y cuánta llevará cada persona fuerte.

⑪ En un garaje hay el cuádruple de coches que de motos y en total hay 306 ruedas, sin contar las ruedas de repuesto que tienen algunos coches. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay en el garaje?

⑫ En una familia el padre tiene 29 años, la madre 25, la hija 4 y el hijo 2. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la suma de las edades del padre y de la madre sea el triple que la suma de las edades de la hija y del hijo?

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas utilizando una ecuación.

① Averigua dos números que sumen 1 de modo que la suma del menor y el séxtuple del mayor dé 14.

② En una tienda venden telas por metros. Las telas estampadas cuestan 40 céntimos por metro más caras que las telas lisas. Comprar 9 metros de tela lisa cuesta lo mismo que comprar 8 metros de tela estampada. ¿Cuánto nos costará en total comprar 5 metros de cada tipo de tela?

Resolución 1

Observaciones

✱ Si llamamos «x» a uno de los dos números, el otro será «$1 - x$», ya que se verificará que suman 1: $x + 1 - x = 1$.

✱ Como el enunciado distingue entre el número menor y el mayor, hay que decir claramente a cuál de los dos vamos a llamar «x».

✱ No es necesario especificar en la solución cuál es el número menor y cuál es el mayor, porque es evidente cuál es cuál.

Resolución

Llamamos «x» al mayor de los dos números. El menor será «$1 - x$».

Se verifica que «$(1 - x) + 6x = 14$»; resolvemos la ecuación:

$(1 - x) + 6x = 14 \Rightarrow 1 - x + 6x = 14 \Rightarrow -x + 6x = 14 - 1 \Rightarrow 5x = 13 \Rightarrow x = 13 : 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2{,}6$

El número menor es $1 - x = 1 - 2{,}6 = -1{,}6$

Solución: $-1{,}6$ y $2{,}6$

Resolución 2

Observaciones

✱ Cuando planteamos una ecuación para resolver un problema, podemos designar como incógnita cualquier valor que nos interese, no tiene por qué ser justamente el valor que nos pidan.

✱ La resolución de un problema puede constar de una parte que resolvemos con una ecuación y otra parte que resolvemos con otras técnicas.

Resolución

Llamamos «x» al precio en euros de un metro de tela lisa. El precio de un metro de tela estampada será «$x + 0{,}4$».

Sabemos que «$9x = 8(x + 0{,}4)$». Resolvemos la ecuación:

$9x = 8(x + 0{,}4) \Rightarrow 9x = 8x + 3{,}2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 3{,}2$

Cada metro de tela estampada costará $x + 0{,}4 = 3{,}2 + 0{,}4 = 3{,}6$

Comprar 5 metros de cada tela costará

$5 \cdot 3{,}2 + 5 \cdot 3{,}6 = 5 \cdot (3{,}2 + 3{,}6) = 5 \cdot 6{,}8 = 34$

Solución: 34 euros.

Enunciado

Averigua un número de dos cifras sabiendo que la cifra de las unidades es 5 unidades mayor que la cifra de las decenas y que si le sumas 9 y luego multiplicas por 2, obtienes un número que tiene las cifras invertidas respecto al número original.

Observación

Para resolver este tipo de problemas en los que hay que averiguar las cifras individuales de un número hay que utilizar la descomposición polinómica del número.

Recuerda aquello de $345 = 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$.

Si un número tiene dos cifras, estaríamos tentados de llamar «x» a la cifra de las decenas, «y» a la cifra de las unidades y escribir el número como «xy». Pero esa expresión sería el producto de las cifras del número, no el propio número. El número realmente es «$10x + y$», según su descomposición polinómica.

Resolución

Llamamos x a la cifra de las decenas. La cifra de las unidades será «$x + 5$».

El número original es «$10x + (x + 5)$». El paréntesis no es necesario, pero lo podemos escribir por claridad.

Si le sumamos 9 unidades, tendremos «$10x + (x + 5) + 9$».

Si ahora multiplicamos por 2, tendremos «$2(10x + (x + 5) + 9)$».

El enunciado dice que obtendremos un número con las cifras invertidas respecto al original, es decir, que el nuevo número tendrá «x» como cifra de las unidades y «$x + 5$» como cifra de las decenas; por tanto el número será «$10(x + 5) + x$»; el paréntesis ahora es imprescindible.

Ya podemos plantear la ecuación: $2(10x + (x + 5) + 9) = 10(x + 5) + x$

Resolvemos la ecuación:

$$2(10x + (x + 5) + 9) = 10(x + 5) + x \Rightarrow 2(10x + x + 5 + 9) = 10x + 50 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(11x + 14) = 10x + 50 \Rightarrow 22x + 28 = 10x + 50 \Rightarrow 22x - 10x = 50 - 28 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11x = 22 \Rightarrow x = 22 : 11 \Rightarrow x = 2$$

Hemos averiguado la cifra de las decenas; la de las unidades es $x + 5 = 2 + 5 = 7$

Por lo tanto el número es el 27.

Solución : 27

Comprobación

Una actividad que puedes hacer tras redactar la solución de un problema es comprobarla. En el mundo real, es una acción importantísima: imagínate que una empresa sacara a la venta un nuevo producto sin que nadie lo hubiera probado antes. En el mundo de la educación, comprobar una solución sirve para detectar errores y para entender mejor el problema.

Para comprobar una solución, tienes que llevártela desde donde la has redactado hasta el enunciado y ver si cumple todo lo que se pide. En este caso:

- El número tiene dos cifras: sí, el 2 y el 7.
- La cifra de las unidades es 5 unidades mayor que la cifra de las decenas: sí, porque $2 + 5 = 7$
- Si le sumas 9 y luego multiplicas por 2, obtienes un número que tiene las cifras invertidas respecto al número original: sí, porque $2 \cdot (27 + 9) = 2 \cdot 36 = 72$.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas utilizando una ecuación.

① Averigua dos números que sumen 3 de modo que el triple del menor y el doble del mayor sumen 4.

② Una familia vive de alquiler en una vivienda. Cuando llevan seis meses en ella, el casero les sube 70 euros mensuales el alquiler. Ahora, pagarán en cinco meses lo mismo que antes en seis meses. ¿Cuánto tendrán que pagar por dos años completos de alquiler, contados desde que empezaron el alquiler?

③ Averigua un número de dos cifras iguales sabiendo que si lo multiplicas por 8 y le sumas 161, obtienes un número con tres cifras iguales que son las mismas que las del número original.

④ Verónica y Fabio llevan en el bolsillo la misma cantidad de dinero. Si Fabio le diera a Verónica 35 euros, Verónica tendría el triple de dinero que Fabio. ¿Cuánto dinero llevan entre los dos?

⑤ Una madre tiene 36 años más que sus dos hijos gemelos y dentro de 8 años su edad será el doble de la suma de las edades de sus hijos. Calcula las edades de las tres personas.

⑥ En una competición de fútbol se dan cero puntos por cada partido perdido, un punto por cada partido empatado y tres puntos por cada partido ganado. Un equipo lleva jugados 17 partidos, en los que ha ganado el doble de los que ha empatado, y lleva 35 puntos. ¿Cuántos partidos ha perdido?

⑦ Averigua una fracción equivalente a $5/7$ en la que el denominador sea 34 unidades mayor que el numerador.

⑧ ¿Qué número hay que sumar al numerador y al denominador de la fracción $3/5$ para obtener una fracción equivalente a $5/6$?

⑨ En las urnas A y B hay bolas de colores. El número de bolas en B es el triple del número de bolas en A. Si pasáramos 13 bolas de la urna A a la urna B, en la urna B habría el cuádruple de bolas que en A. Calcula cuántas bolas hay en cada urna.

⑩ Averigua dos números enteros sabiendo que uno es 7 unidades mayor que el otro y que si al triple del menor le sumas el quíntuple del mayor, obtienes 19.

⑪ En un bar hay sillas, que tienen cuatro patas, y taburetes, que tienen tres patas. Hay 15 taburetes más que sillas. Sabemos que si se rompieran cuatro taburetes, el número de patas de las sillas sería el triple que el número de patas de los taburetes. Calcula cuántas sillas y cuántos taburetes hay en el bar.

⑫ Averigua un número de dos cifras sabiendo que la cifra de las unidades es 7 unidades mayor que la cifra de las decenas y que si le sumas 63, obtienes un número que tiene las cifras invertidas respecto al número original.

Partes de la matemática

En la matemática hay varias ramas; tú ya conoces dos de ellas: la **aritmética** (en la que se manejan **números**) y la **geometría** (en la que se manejan **formas**); a la aritmética ya hemos dedicado una parte en el nivel 1 del curso y a la geometría dedicaremos otra, aunque en tus estudios de educación primaria ya aprendiste sobre las dos. El **análisis** es otra rama de la matemática, en la que estudiaremos **relaciones** entre cosas (principalmente, entre números).

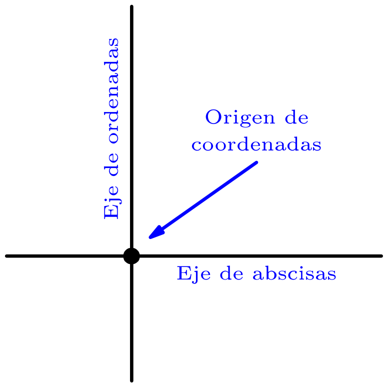
Concepto de coordenadas

Las coordenadas nos permiten unir los números con las formas. Las coordenadas de un punto (concepto geométrico) son dos o más números (concepto aritmético). El número de coordenadas depende de dónde situemos el punto: si el punto está en el plano (como en una pantalla, por ejemplo), tendrá dos coordenadas; pero si el punto está en el espacio (como en un edificio, por ejemplo), tendrá tres.

En este curso no se utilizan las tres coordenadas de un punto en el espacio hasta el nivel 6; en todos los demás niveles usaremos dos coordenadas.

Ejes y origen de coordenadas

Imagina un plano: puede ser tu mesa, una pantalla de ordenador, una pizarra, una cancha o un campo para practicar deporte... pero infinito por todas partes. Ahora imagina en él dos líneas rectas, una horizontal y otra vertical.



✱ La línea horizontal se llama **eje de abscisas**.

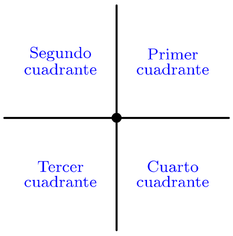
✱ La línea vertical se llama **eje de ordenadas**.

✱ Las dos líneas conjuntamente se llaman **ejes de coordenadas**.

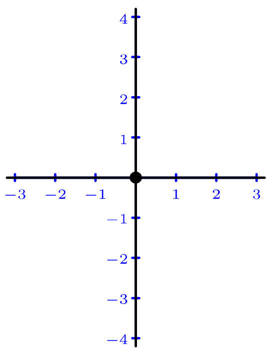
✱ El punto donde se cortan las rectas se llama **origen de coordenadas**.

Cuadrantes

Los ejes de coordenadas definen cuatro zonas en el plano, que se llaman cuadrantes: primer cuadrante, segundo cuadrante, tercer cuadrante y cuarto cuadrante, situados como se ve en el dibujo de la derecha.



Escalas



✱ En cada eje de coordenadas hay que señalar (o imaginar), números de referencia. Empezaremos por señalar números enteros, pero los números también podrían ser decimales o fracciones.

✱ Recuerda que ya dibujamos los números enteros en una recta: positivos hacia la derecha y negativos hacia la izquierda; ahora lo hacemos en el eje de abscisas. En el eje de ordenadas también señalaremos los números enteros: positivos hacia arriba y negativos hacia abajo.

✱ En principio, usaremos la misma escala en los dos ejes, para que puedas dominar la técnica; pero se pueden usar escalas distintas en cada eje.

✱ Observa que los dos números 0 (el de abscisas y el de ordenadas) coinciden en el origen de coordenadas (no se han mostrado en el dibujo).

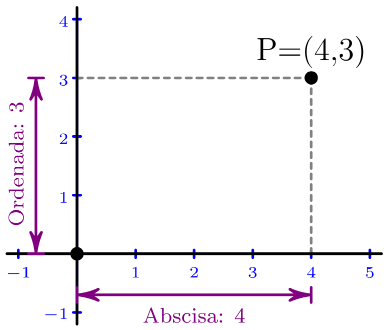
Coordenadas de un punto

Una vez establecidos los ejes de coordenadas, a cada punto del plano se le asignan dos coordenadas:

- La abscisa es la distancia (con signo) entre el eje de ordenadas y el punto.
- La ordenada es la distancia (con signo) entre el eje de abscisas y el punto.
- Las dos coordenadas se escriben juntas dentro de un paréntesis separadas por una coma: (*abscisa*, *ordenada*). Ejemplo 1: (4,3).
- Si alguna coordenada es un número decimal, como separador de coordenadas se usa el punto y coma. Ejemplo 2: (2,4;7,6).
- Es común nombrar a los puntos con letras latinas mayúsculas («A», «B»,...).

Ejemplo 1

Llamamos «P» al punto que se muestra en la figura.



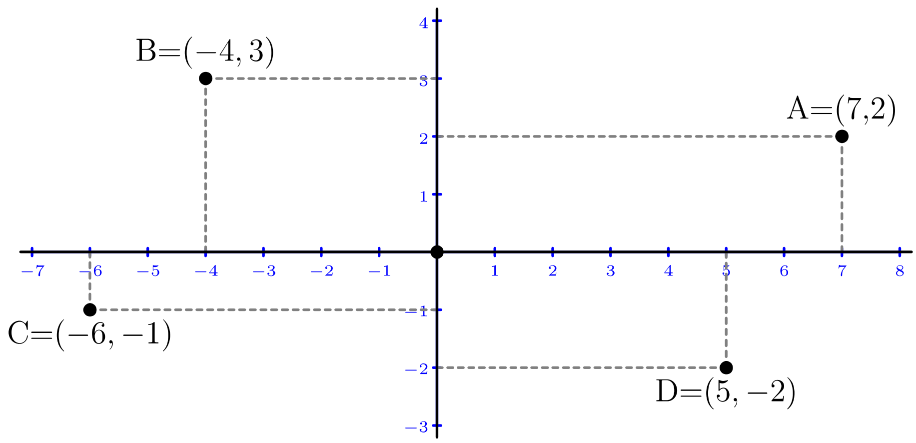
- La abscisa de P es 4.
- La ordenada de P es 3.
- Las coordenadas de P son (4,3).
- Se puede escribir P=(4,3), aunque algunos textos prefieren escribir P(4,3), sin el signo de igualdad.
- Las líneas punteadas grises que sirven para señalar las distancias del punto a los ejes se han dibujado en este ejemplo, pero cuando hay muchos puntos en la misma figura es mejor no dibujarlas si complican el dibujo.

Signos de las coordenadas por cuadrantes

Coordenada	Primer cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante
Abscisa	Positiva	Negativa	Negativa	Positiva
Ordenada	Positiva	Positiva	Negativa	Negativa

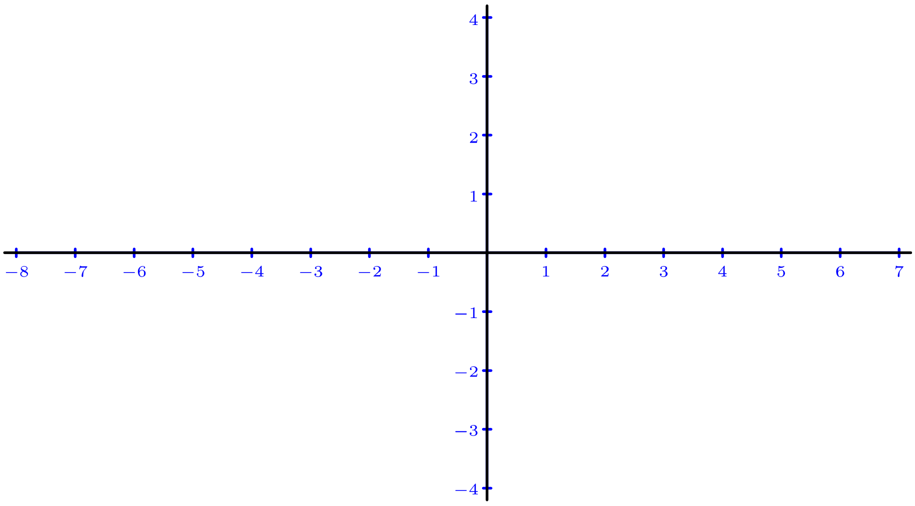
Ejemplos

- Ejemplo 3. El punto A=(7,2) está en el primer cuadrante.
- Ejemplo 4. El punto B=(–4,3) está en el segundo cuadrante.
- Ejemplo 5. El punto C=(–6,–1) está en el tercer cuadrante.
- Ejemplo 6. El punto D=(5,–2) está en el cuarto cuadrante.

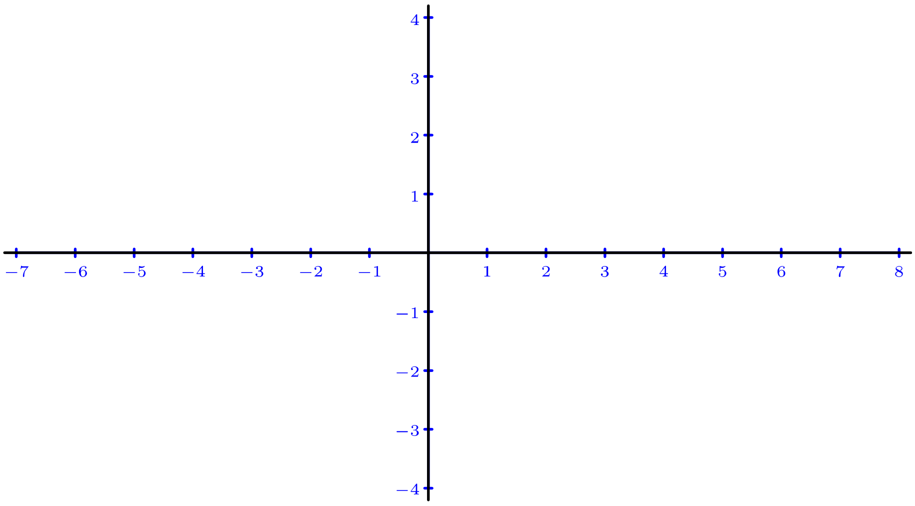


Enunciados

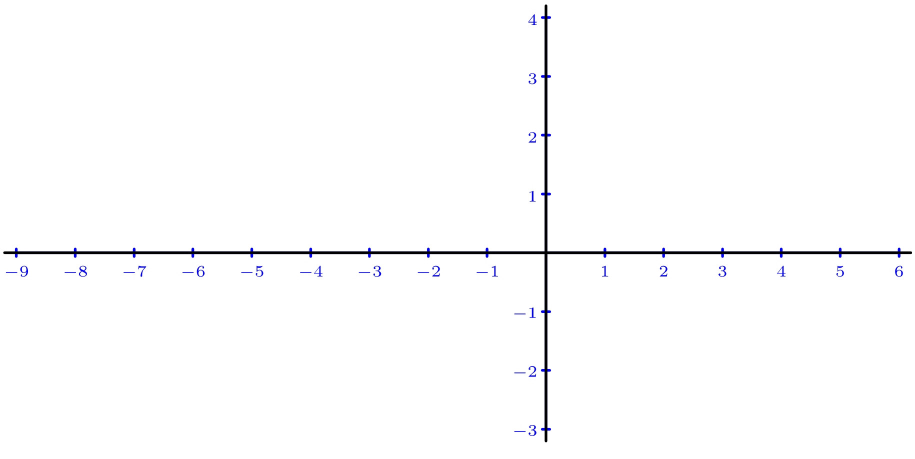
① Representa gráficamente los puntos A=(–7,–2), B=(6,3), C=(–2,1) y D=(4,–3) y di en qué cuadrante está cada uno.



② Representa gráficamente los puntos A=(7,–3), B=(–4,2), C=(2,1) y D=(–6,–1) y di en qué cuadrante está cada uno.



③ Representa gráficamente los puntos A=(–8,–2), B=(1,–3), C=(–2,3) y D=(5,1) y di en qué cuadrante está cada uno.



Coordenadas de puntos sobre los ejes

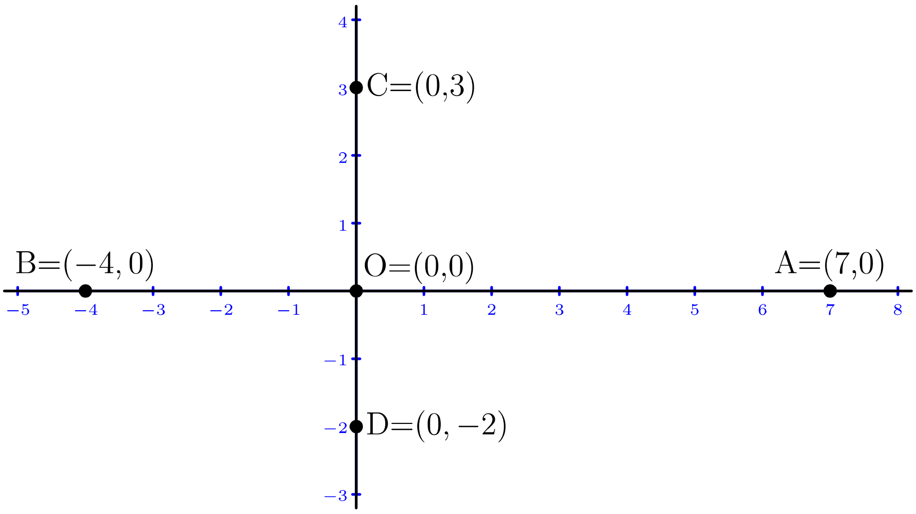
- Los puntos del eje de abscisas tienen ordenada 0.
- Los puntos del eje de ordenadas tienen abscisa 0.

Coordenadas del centro de coordenadas

- Las coordenadas del centro de coordenadas son (0,0).
- Es costumbre llamar «O» (letra «o» mayúscula) al origen de coordenadas.
- Por tanto, habitualmente O=(0,0).

Ejemplos

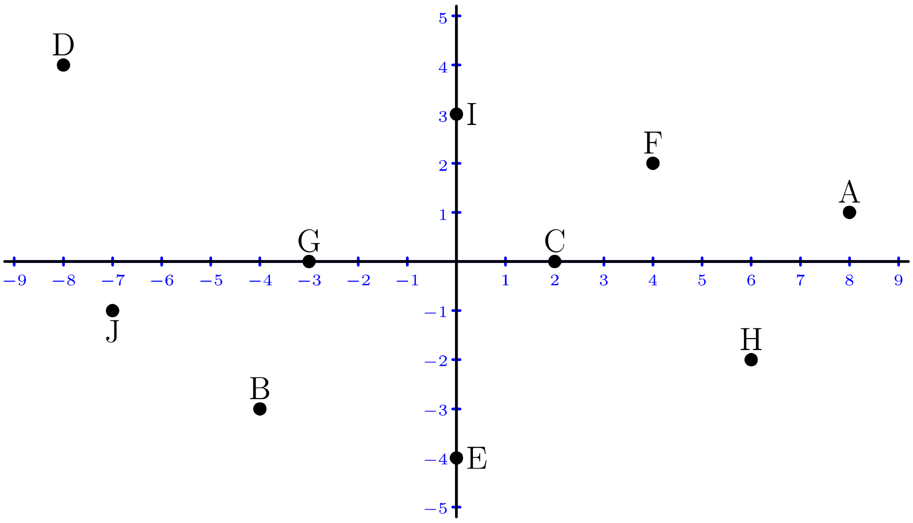
- El punto A=(7,0) está en el eje de abscisas.
- El punto B=(–4,0) está en el eje de abscisas.
- El punto C=(0,3) está en el eje de ordenadas.
- El punto D=(0,–2) está en el eje de ordenadas.
- El punto O=(0,0) es el origen de coordenadas.



Ejercicio resuelto

Representa gráficamente los puntos A=(8,1), B=(–4,–3), C=(2,0), D=(–8,4), E=(0,–4), F=(4,2), G=(–3,0), H=(6,–2), I=(0,3) y J=(–7,–1). Señala únicamente los puntos y sus nombres.

Resolución

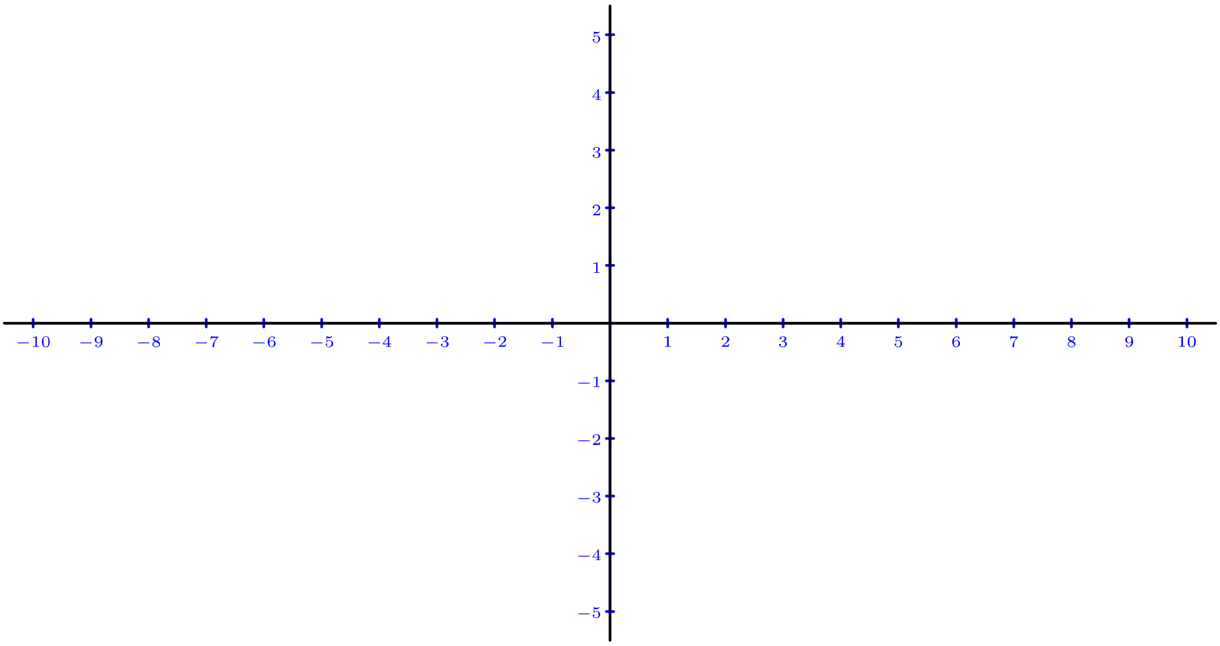


Enunciados

Representa gráficamente los puntos propuestos en cada ejercicio. Señala únicamente los puntos y sus nombres.

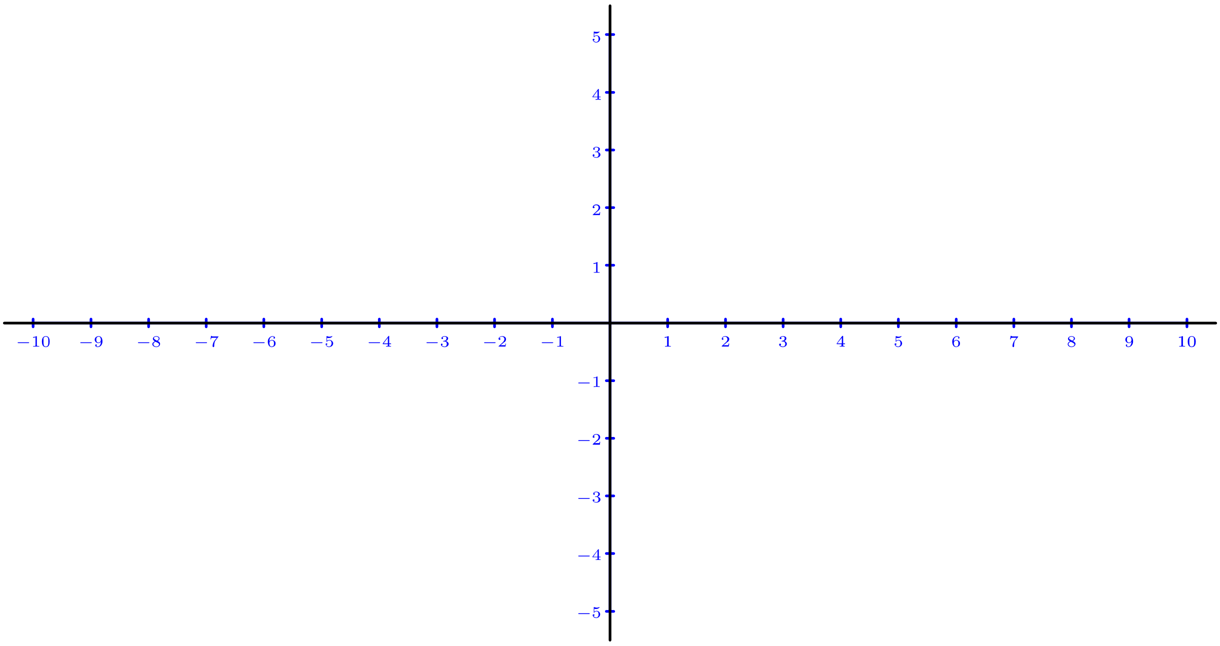
①

A = (7,–2)	B = (4,0)	C = (3,5)	D = (–10,3)	F = (0,–5)
G = (3,–4)	H = (–8,0)	I = (–7,–2)	J = (9,2)	K = (–2,3)
L = (6,3)	M = (–4,–1)	Q = (0,3)	R = (–9,–3)	T = (6,1)



②

A = (1,0)	B = (–4,5)	C = (0,–5)	D = (10,1)	F = (4,4)
G = (–10,–1)	H = (8,3)	I = (0,3)	J = (2,–2)	K = (–7,–3)
L = (6,–3)	M = (–7,4)	Q = (1,5)	R = (8,–1)	T = (4,–1)

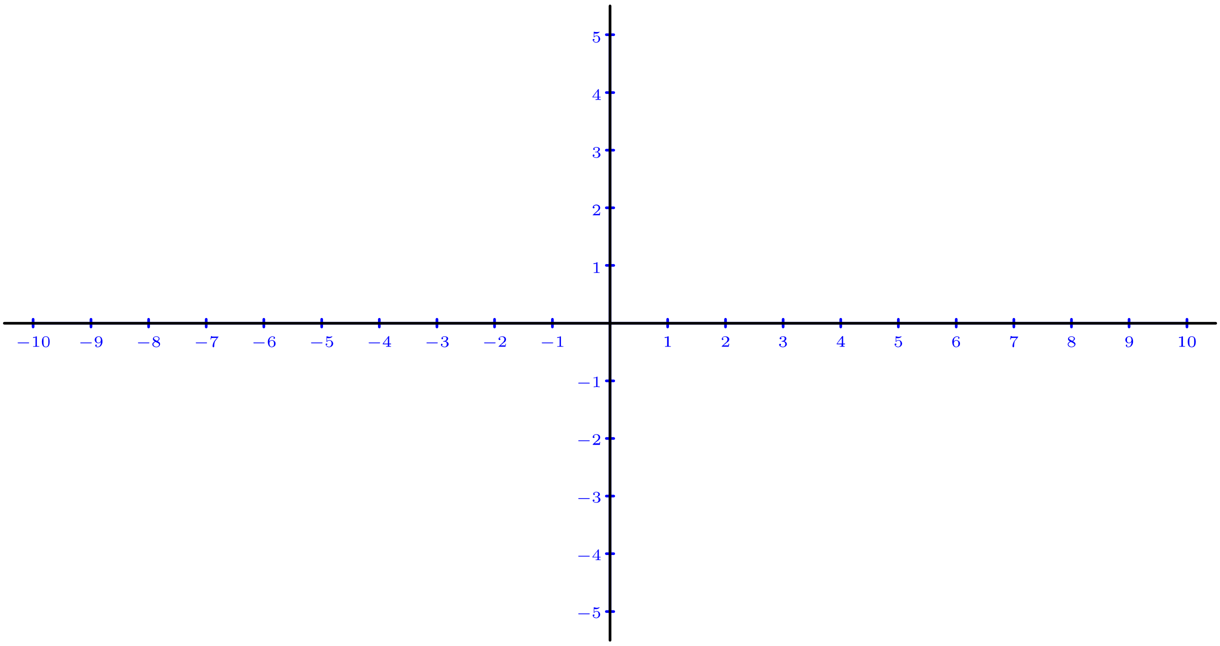


Enunciados

Representa gráficamente los puntos propuestos en cada ejercicio. Señala únicamente los puntos y sus nombres.

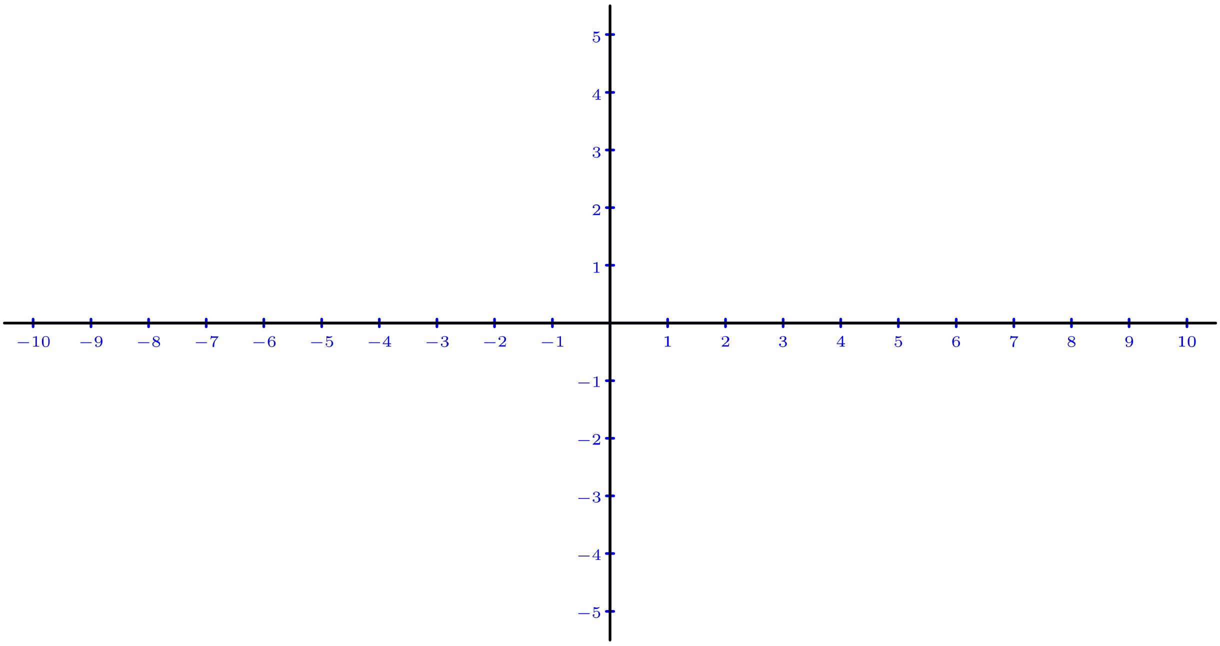
①

A = (10,4)	B = (–7,5)	C = (–8,–4)	D = (9,–3)	F = (7,0)
G = (0,2)	H = (–10,0)	I = (0,–5)	J = (4,3)	K = (–6,2)
L = (–3,–4)	M = (3,–2)	Q = (1,4)	R = (–2,5)	T = (5,–5)

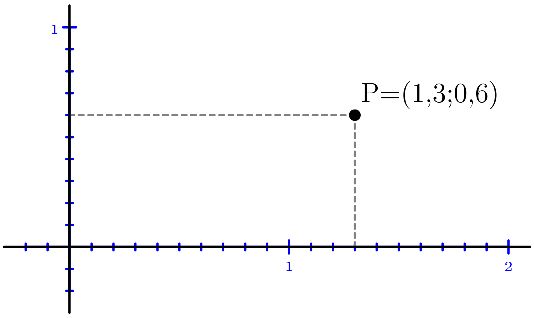


②

A = (2,3)	B = (–3,4)	C = (–4,–1)	D = (3,–4)	F = (2,0)
G = (0,4)	H = (–8,0)	I = (0,–1)	J = (10,5)	K = (–9,4)
L = (–7,–3)	M = (8,3)	Q = (8,–2)	R = (6,–4)	T = (9,2)



Representación de puntos con coordenadas decimales



La representación de puntos que tengan alguna coordenada que sea un número decimal no tiene más dificultad que la representación de puntos con coordenadas que sean números enteros.

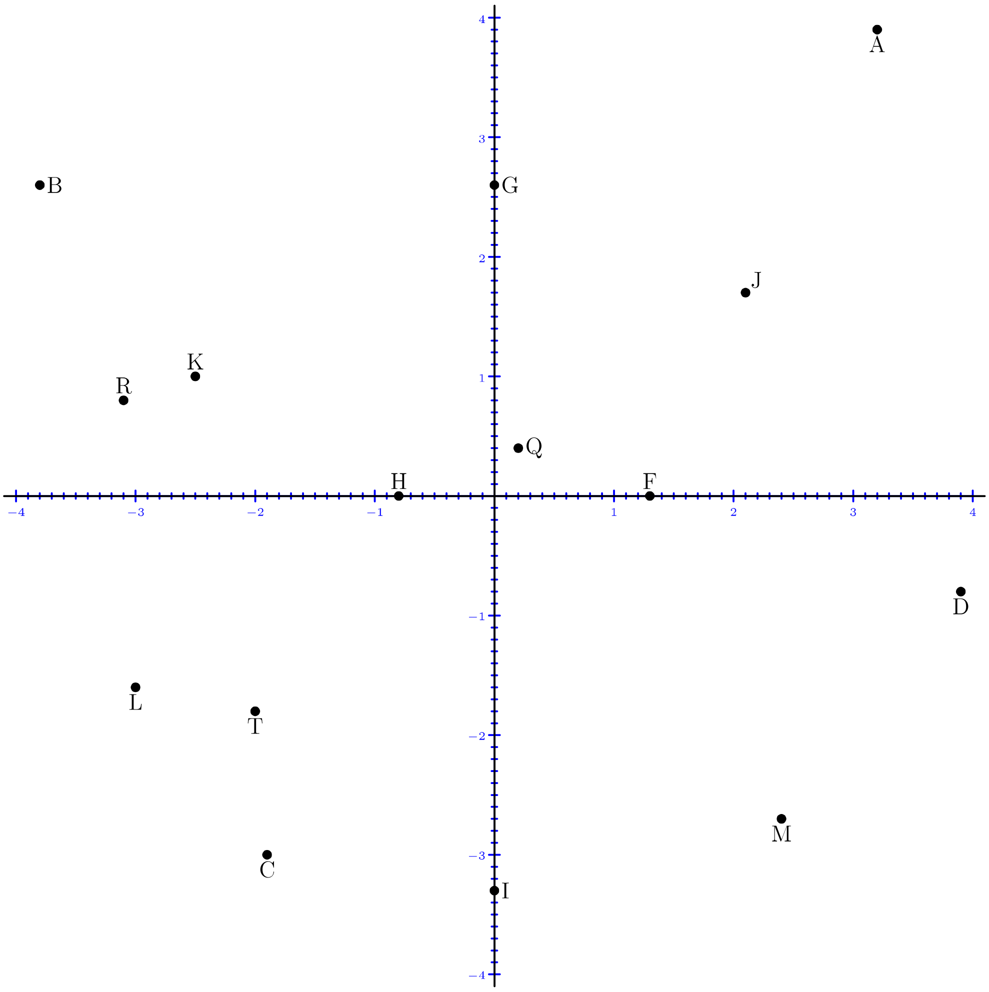
Recuerda que la representación gráfica en matemáticas la hacemos para entender mejor los problemas y para ayudarnos a pensar cómo resolverlos, así que no te preocupes por hacer las representaciones con una precisión excelente. Cuando es necesaria, podemos usar las técnicas que se explican en las asignaturas de dibujo o bien ayudarnos de programas de ordenador.

Ejercicio resuelto

Representa gráficamente los siguientes puntos. Señala únicamente los puntos y sus nombres.

A = (3,2;3,9)	B = (–3,8;2,6)	C = (–1,9;–3)	D = (3,9;–0,8)	F = (1,3;0)
G = (0;2,6)	H = (–0,8;0)	I = (0;–3,3)	J = (2,1;1,7)	K = (–2,5;1)
L = (–3;–1,6)	M = (2,4;–2,7)	Q = (0,2;0,4)	R = (–3,1;0,8)	T = (–2;–1,8)

Resolución

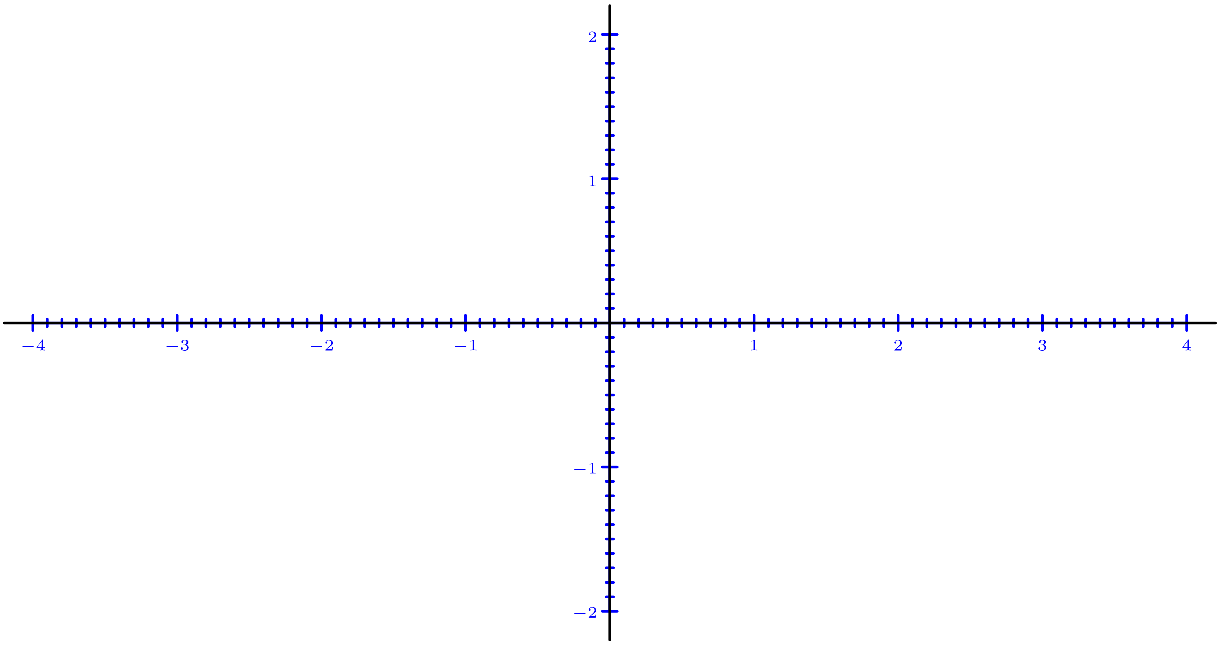


Enunciados

Representa gráficamente los puntos propuestos en cada ejercicio. Señala únicamente los puntos y sus nombres.

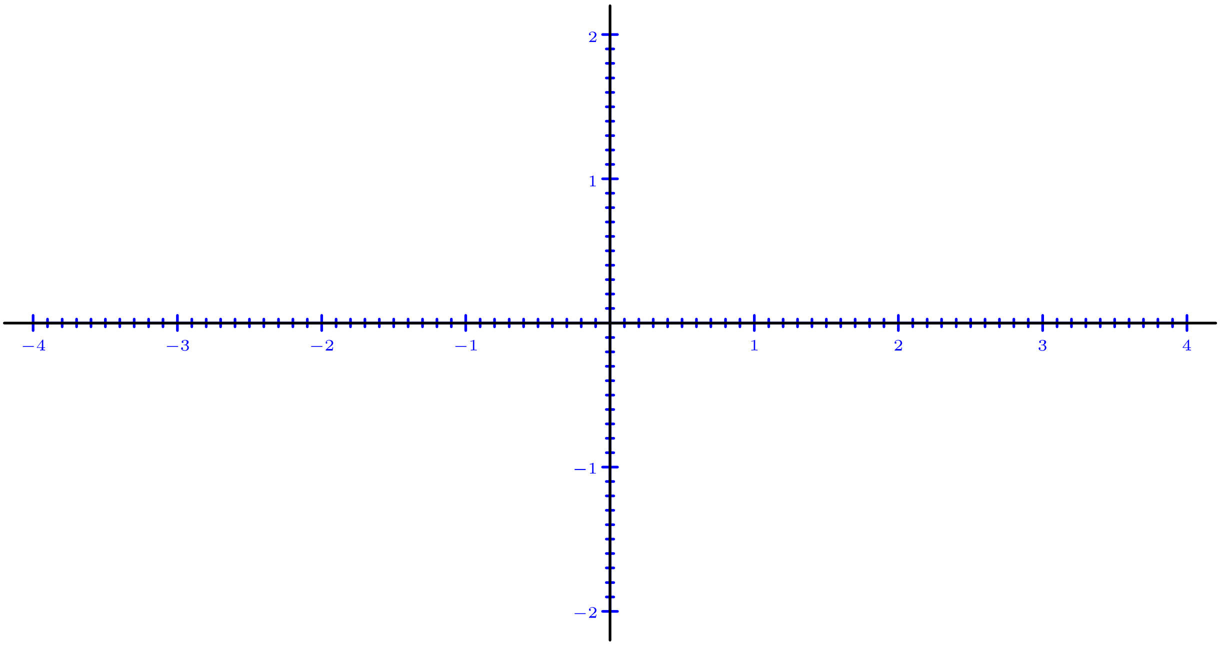
①

A = (3,8;1,9)	B = (–1,6;1,2)	C = (–2,1;–1,7)	D = (3,5;–0,5)	F = (3,4;0)
G = (0;1,5)	H = (–2,8;0)	I = (0;–1,6)	J = (2,2;0,9)	K = (–3,5;1,3)
L = (–3,3;–0,3)	M = (1,4;–1,2)	Q = (0,7;1)	R = (–3,9;1,8)	T = (–3,6;–1,9)



②

A = (0,8;0,9)	B = (–1;–1,7)	C = (–3,1;1,9)	D = (2,5;–1,5)	F = (3;0,2)
G = (3,7;–1,5)	H = (–3,8;0)	I = (1,3;–0,6)	J = (–2;0,4)	K = (–3,2;–1)
L = (2,3;1,4)	M = (–1,4;1,6)	Q = (0;–1,2)	R = (1,9;–1,3)	T = (3,9;1,7)

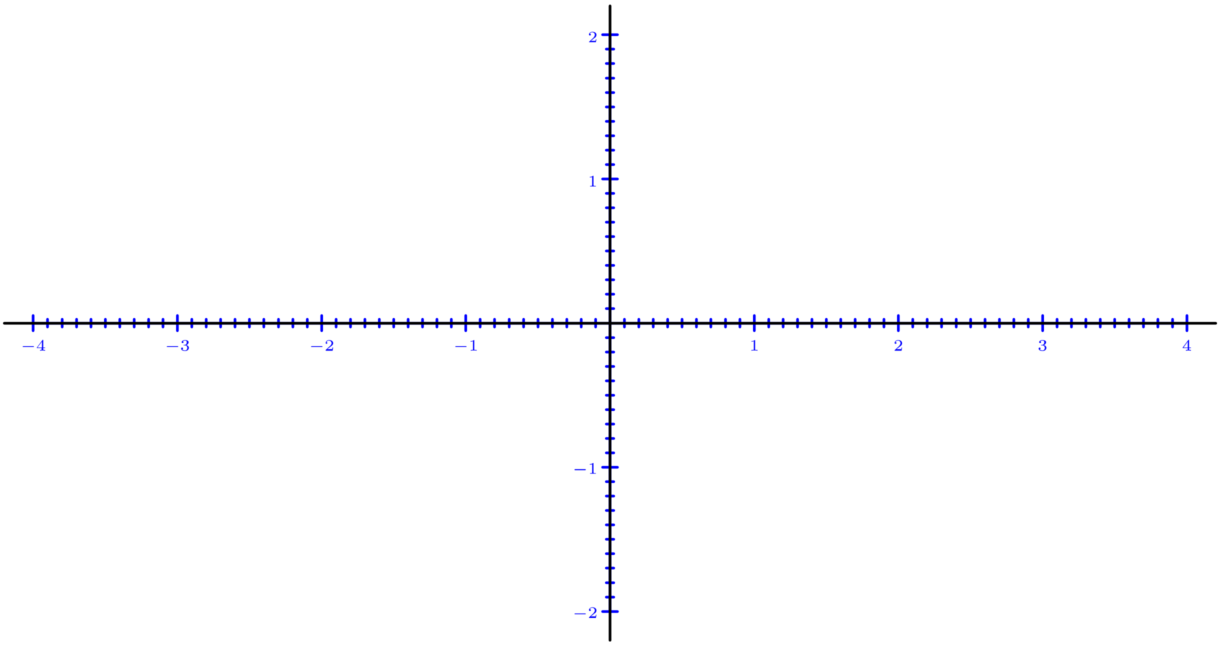


Enunciados

Representa gráficamente los puntos propuestos en cada ejercicio. Señala únicamente los puntos y sus nombres.

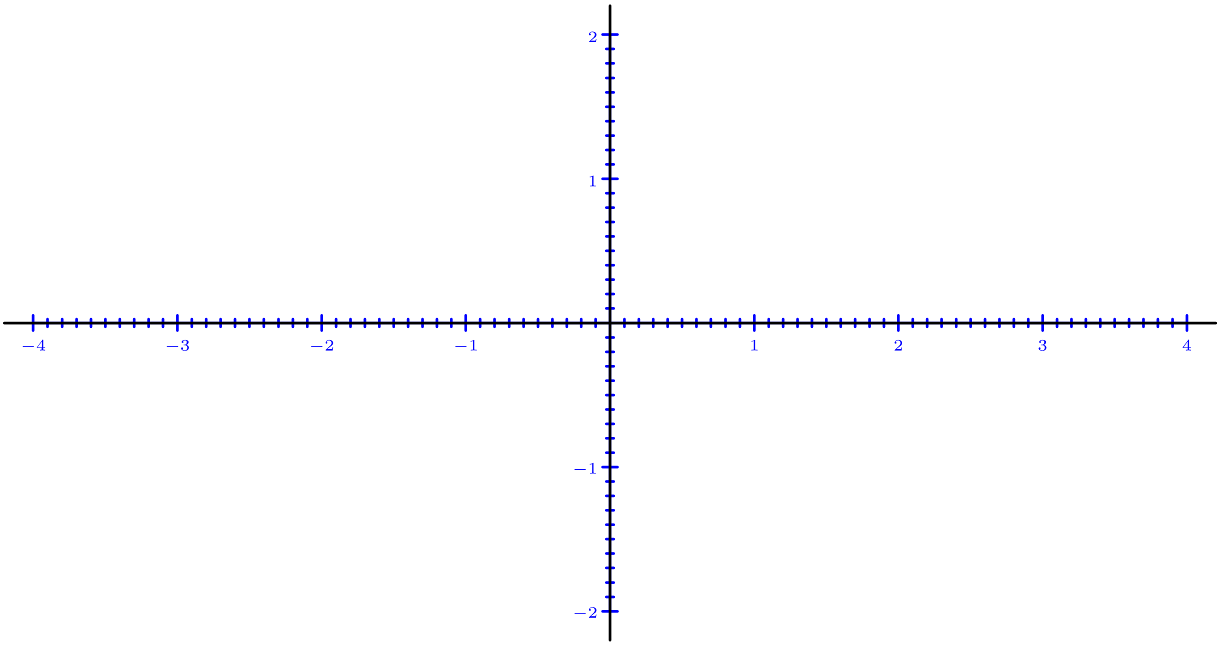
①

A = (0;–0,8)	B = (1,6;1,2)	C = (3,9;0)	D = (–3,5;–1,5)	F = (–3,4;1,8)
G = (3,7;–1,1)	H = (–1,8;1,8)	I = (3;1,6)	J = (–1,2;0)	K = (2;–1,3)
L = (–2,3;–1,3)	M = (–0,7;1,7)	Q = (1,3;–1,9)	R = (2,7;–1,2)	T = (–2,6;0,9)

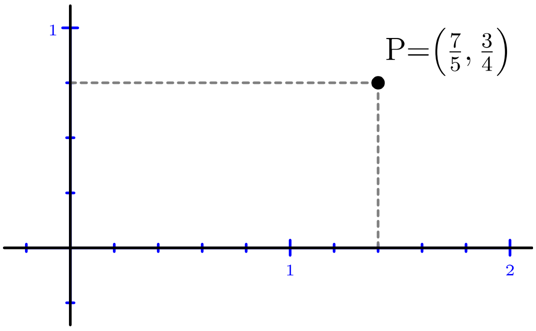


②

A = (–1,3;1,8)	B = (0;–1,3)	C = (–3,1;0)	D = (–2,5;1,5)	F = (2,3;–1,8)
G = (1,7;–0,5)	H = (–1,9;–1,5)	I = (3,3;–0,3)	J = (–1,4;0)	K = (3,9;–1,9)
L = (0;0,1)	M = (1,2;1)	Q = (–0,1;–0,8)	R = (–3,9;1)	T = (1,2;–0,7)



Representación de puntos con coordenadas fraccionarias



La representación de puntos que tengan alguna coordenada que sea una fracción no tiene más dificultad que recordar cómo se representan gráficamente las fracciones en una recta, especialmente las fracciones impropias.

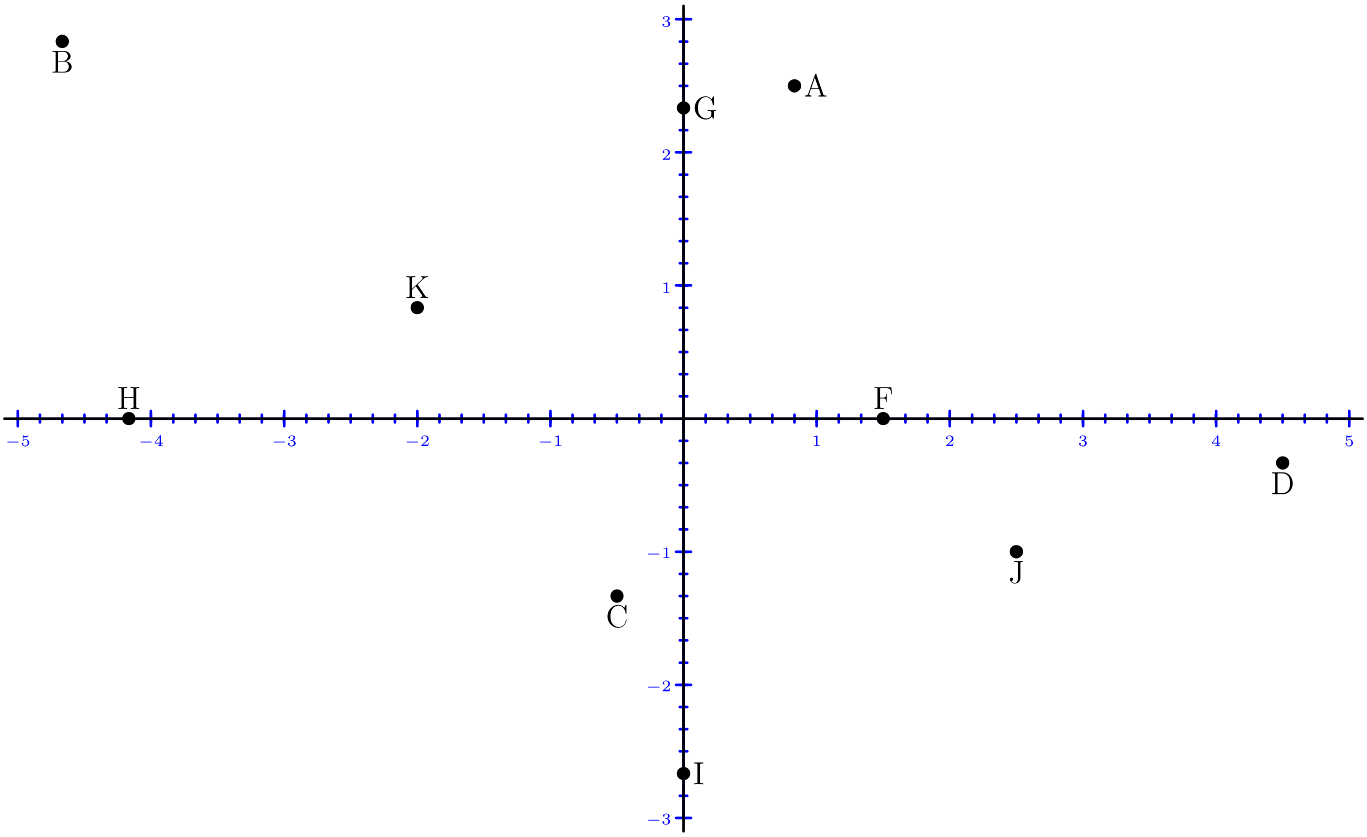
Recuerda que la representación gráfica en matemáticas la hacemos para entender mejor los problemas y para ayudarnos a pensar cómo resolverlos, así que no te preocupes por hacer las representaciones con una precisión excelente. Cuando es necesaria, podemos usar las técnicas que se explican en las asignaturas de dibujo o bien ayudarnos de programas de ordenador.

Ejercicio resuelto

Representa gráficamente los siguientes puntos. Señala únicamente los puntos y sus nombres.

$A=\left(\frac{5}{6},\frac{5}{2}\right)$	$B=\left(-\frac{14}{3},-\frac{17}{6}\right)$	$C=\left(-\frac{1}{2},-\frac{4}{3}\right)$	$D=\left(\frac{9}{2},-\frac{1}{3}\right)$	$F=\left(\frac{3}{2},0\right)$
$G=\left(0,\frac{7}{3}\right)$	$H=\left(-\frac{25}{6},0\right)$	$I=\left(0,-\frac{8}{3}\right)$	$J=\left(\frac{5}{2},-1\right)$	$K=\left(-2,\frac{5}{6}\right)$

Resolución

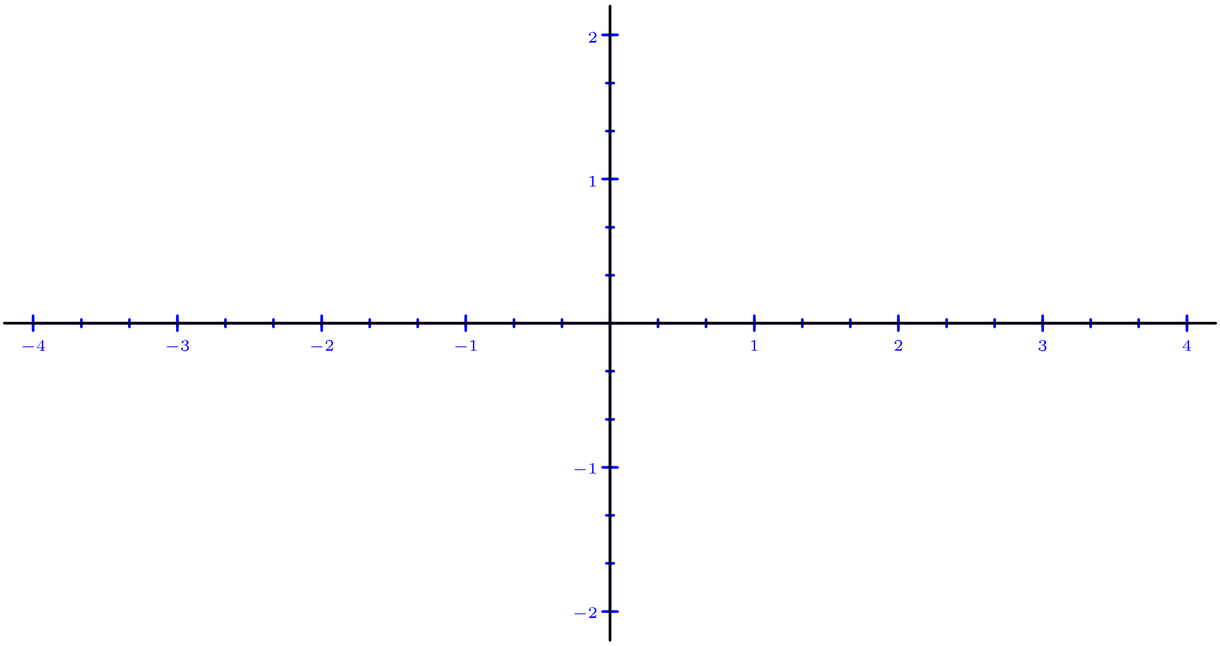


Enunciados

Representa gráficamente los puntos propuestos en cada ejercicio. Señala únicamente los puntos y sus nombres.

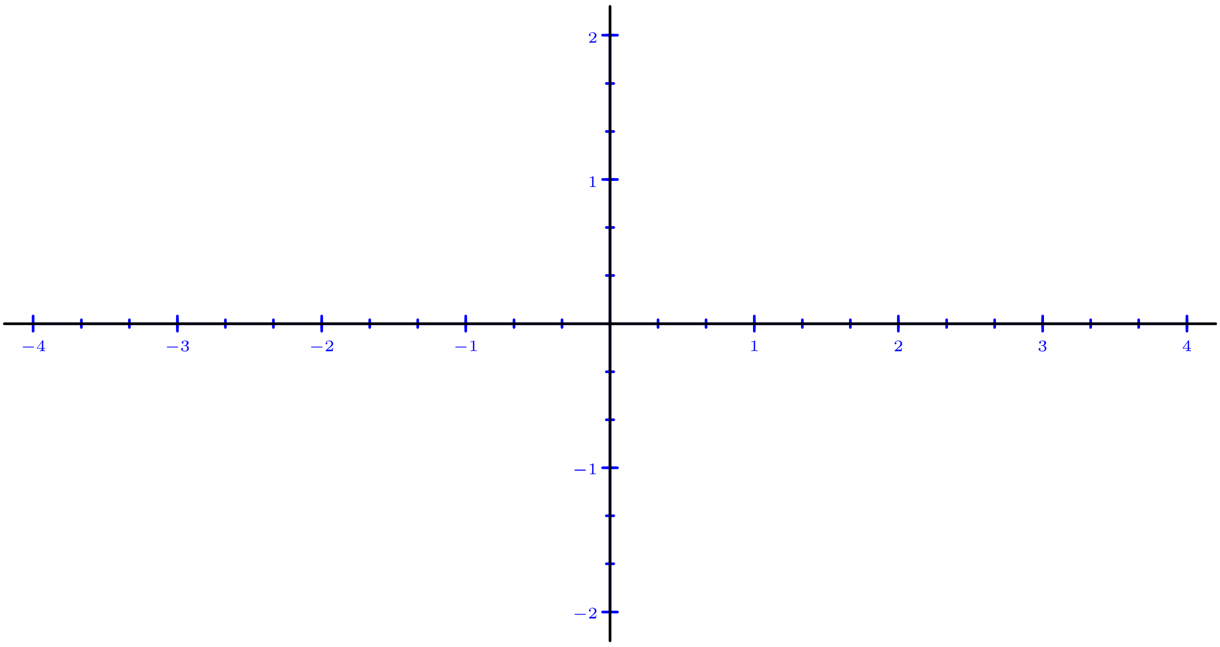
①

$A = \left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$B = \left(-\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$	$C = \left(-1, -\frac{5}{3}\right)$	$D = \left(2, -\frac{2}{3}\right)$



②

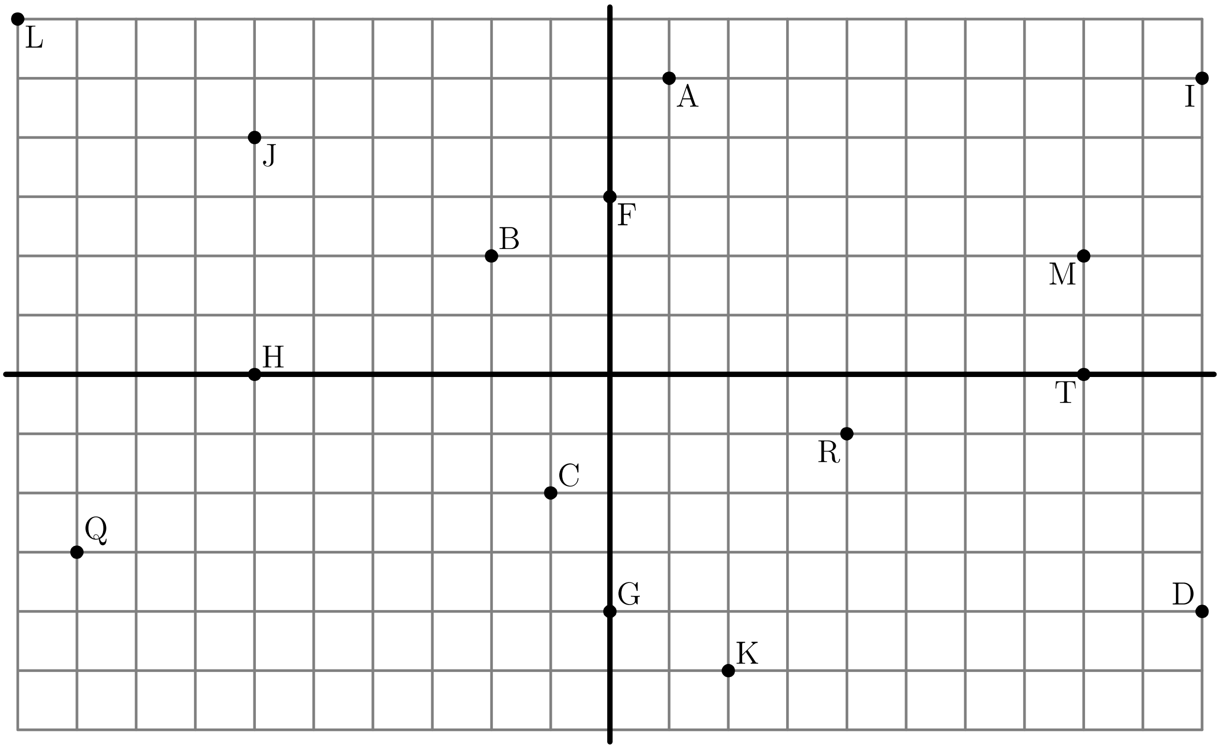
$A = \left(-4, -\frac{1}{3}\right)$	$B = \left(\frac{10}{3}, 0\right)$	$C = \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$	$D = \left(0, -\frac{5}{3}\right)$



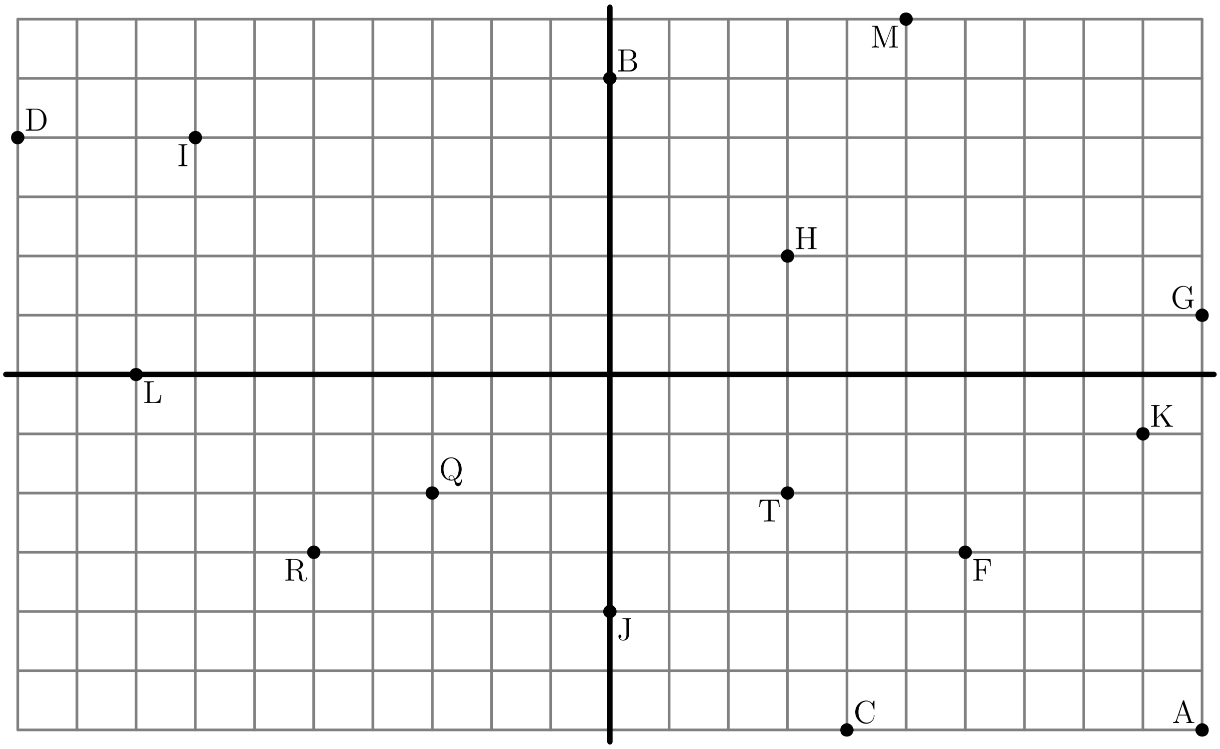
Enunciados

Escribe las coordenadas de los quince puntos representados en cada ejercicio. Todas las coordenadas son números enteros.

①



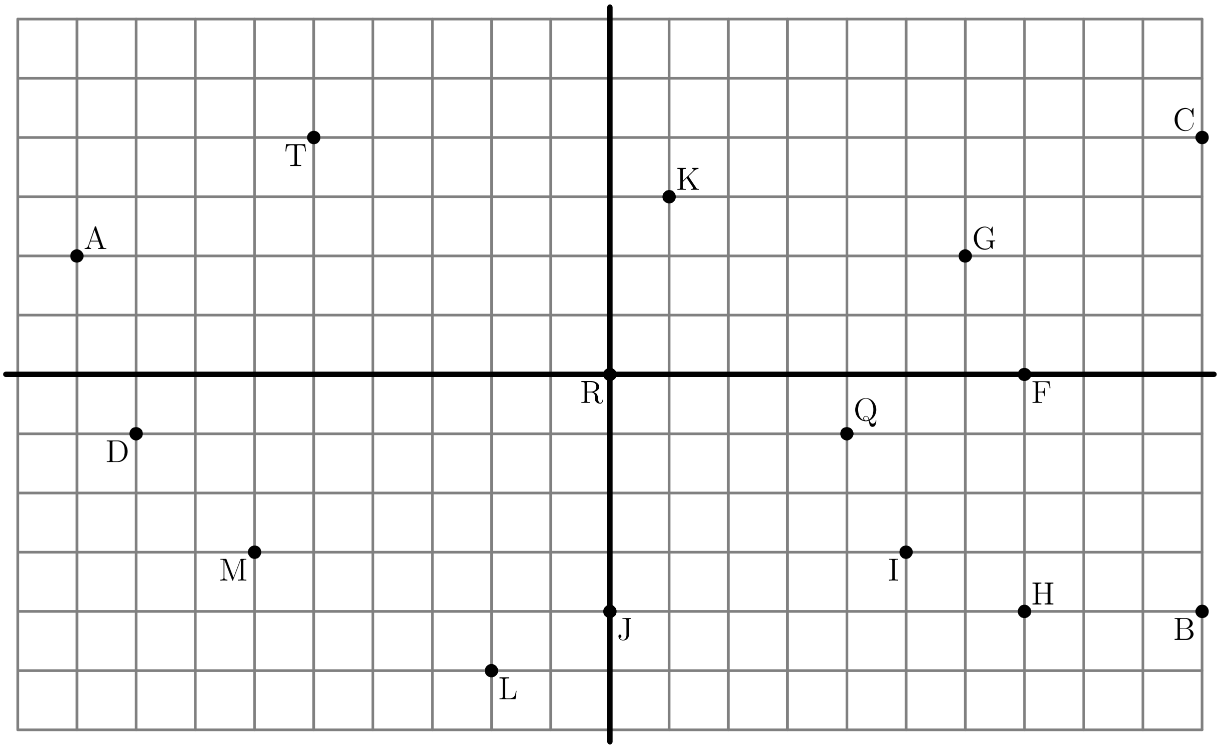
②



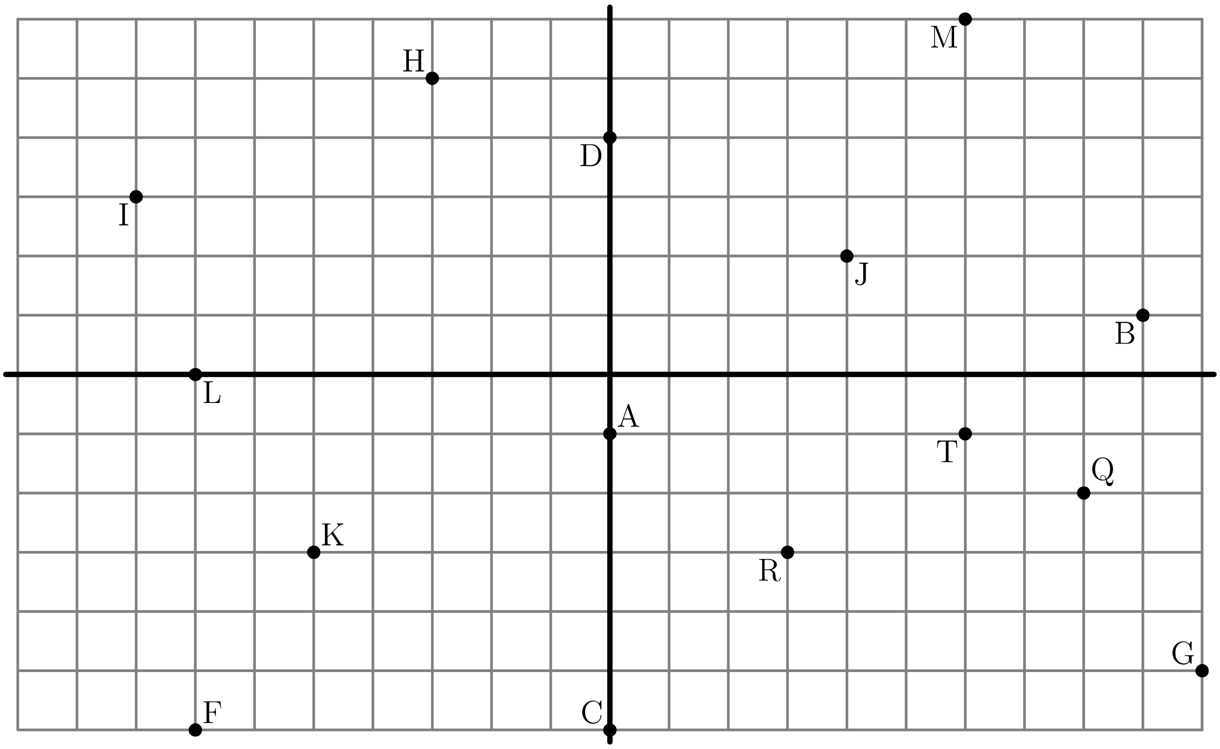
Enunciados

Escribe las coordenadas de los quince puntos representados en cada ejercicio. Todas las coordenadas son números enteros.

①



②



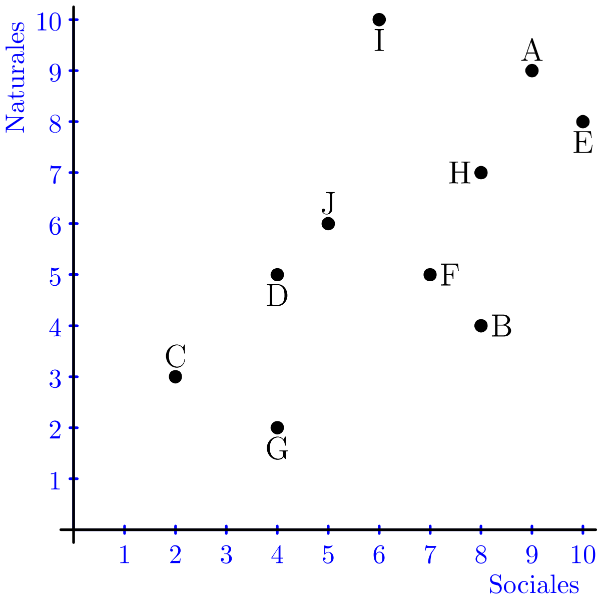
Coordenadas con significado

La utilización de dos coordenadas para señalar un punto permite ayudarnos a estudiar si entre dos magnitudes correspondientes al mismo individuo hay relación o no, y de qué tipo podría ser esa relación.

Ejemplo 1

Anotamos en una tabla las notas de varios alumnos y alumnas en las asignaturas «Ciencias Sociales» y «Ciencias Naturales». A la derecha representamos las notas en un gráfico con coordenadas.

Alumno/a	*C. Soc.*	*C. Nat.*	*Punto*
Alba	9	9	A
Benito	8	4	B
Carla	2	3	C
Domingo	4	5	D
Emilia	10	8	E
Federico	7	5	F
Gloria	4	2	G
Hipólito	8	7	H
Isabel	6	10	I
Jaime	5	6	J

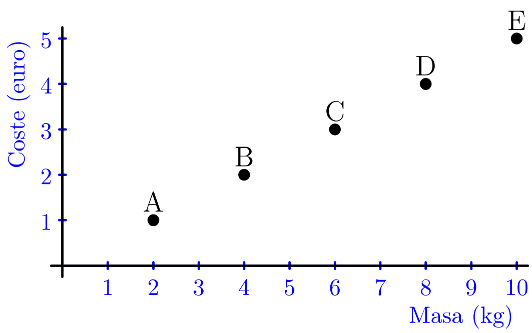


Observamos que hay alguna relación entre las dos magnitudes: en general los alumnos y las alumnas obtienen notas parecidas en las dos asignaturas, aunque con variaciones. Este tipo de relación la iremos estudiando este curso en las partes «Estadística y probabilidad».

Ejemplo 2

Compramos distintas cantidades (medidas en kilogramos) del mismo tipo de patatas y anotamos cuánto pagamos (en euros) por ellas. A la derecha representamos los datos en un gráfico con coordenadas.

Masa (kg)	*Coste (€)*	*Punto*
2	1	A
4	2	B
6	3	C
8	4	D
10	5	E



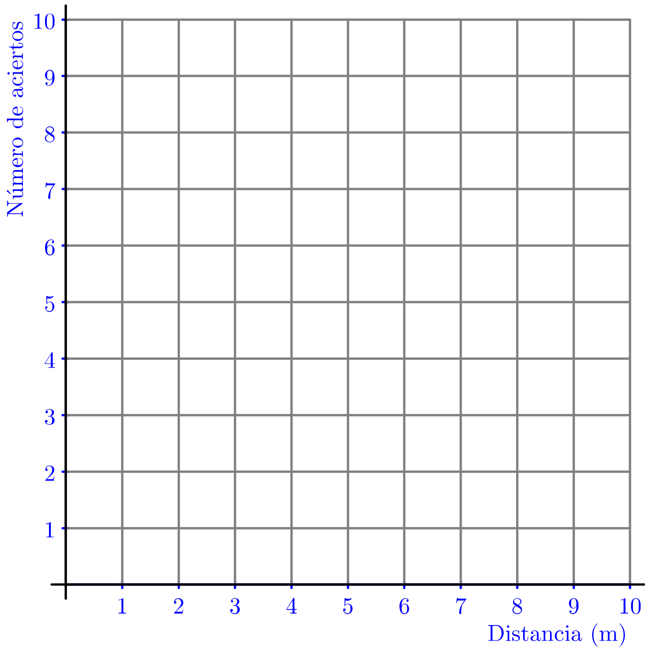
Es evidente que hay una fuerte relación entre las dos magnitudes. Este tipo de relación es el que estudiaremos en las partes «Análisis».

Significado de cada coordenada

Observa que en los dibujos hemos indicado el significado de la abscisa y de la ordenada al lado de su correspondiente eje.

① Una persona que está entrenando tiros a canasta de baloncesto practica lanzando diez veces desde distintas distancias, desde 1 metro hasta 10 metros. Ha anotado cuántos aciertos ha conseguido, según se ve en la tabla, pero se le olvidó apuntar cuántos aciertos tuvo desde 5 metros.

Distancia (m)	*Número de aciertos*
1	9
2	7
3	7
4	6
5	¿ ?
6	5
7	4
8	4
9	3
10	2

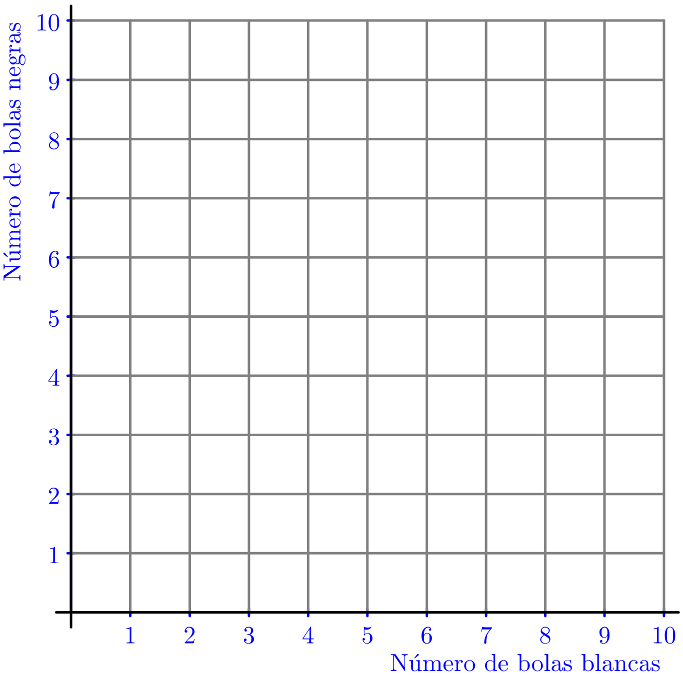


Se pide:

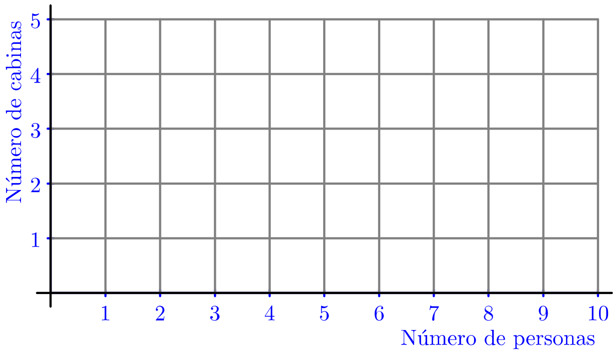
(a) Representar gráficamente usando coordenadas un punto por cada pareja de datos distancia-aciertos.

(b) Decir cuántos aciertos es razonable esperar que tuviera cuando lanzó desde 5 metros.

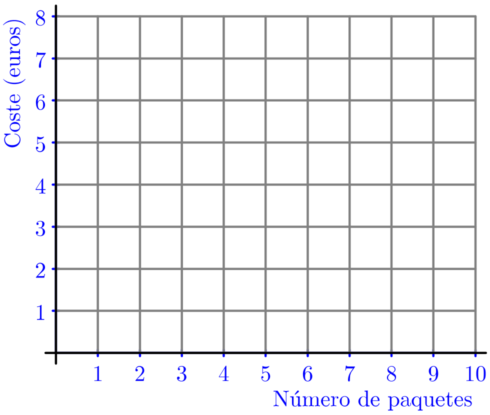
② Sabemos que en una urna hay diez bolas, que podrían ser solamente blancas o negras, pero no sabemos cuántas hay de cada color. Representa gráficamente usando coordenadas las distintas posibilidades de composición de la urna.



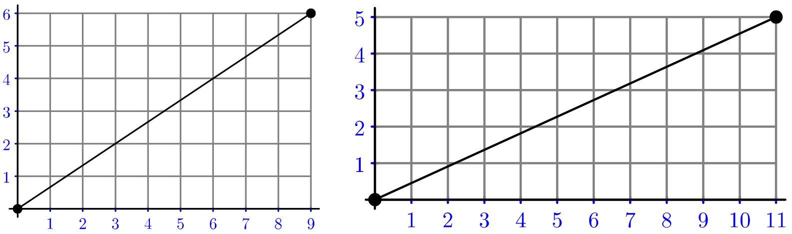
① Un grupo de diez personas se dirige a una atracción de una feria, pero no están muy convencidos de montarse. Ven que en la atracción hay que ir llenando cabinas que admiten una o dos personas. Representa gráficamente usando coordenadas el número de cabinas que necesitarán utilizar según cuántas personas del grupo se animen a subirse a la atracción.



② En un supermercado se vende un producto que cuesta 1 euro cada paquete. Un día hacen una oferta 3 × 2: si compras tres paquetes, solo pagas dos. Representa gráficamente usando coordenadas el dinero que tendrás que pagar según compres de 1 a 10 paquetes.



③ (a) Se unen con un segmento los puntos de coordenadas (0,0) y (9,6). Averigua cuántos puntos del segmento, además de los dos extremos, tienen las dos coordenadas números naturales. (Ilustración de abajo a la izquierda).



(b) Se unen con un segmento los puntos de coordenadas (0,0) y (11,5). Averigua cuántos puntos del segmento, además de los dos extremos, tienen las dos coordenadas números naturales. (Ilustración de arriba a la derecha).

④ (a) Se unen con un segmento los puntos de coordenadas (0,0) y (99,66). Averigua cuántos puntos del segmento, además de los dos extremos, tienen las dos coordenadas números naturales.

(b) Se unen con un segmento los puntos de coordenadas (0,0) y (99,91). Averigua cuántos puntos del segmento, además de los dos extremos, tienen las dos coordenadas números naturales.

La geometría

- Es la rama de la matemática que estudia la forma.
- Es una de las partes más antiguas de la matemática.
- El nombre significa originalmente «medida de la tierra».
- Se ha utilizado desde hace siglos en la astronomía.
- Ha evolucionado hacia una generalidad cada vez mayor, como las demás ramas de la matemática.

Geometría plana y del espacio

- En el nivel 1 del curso solo estudiaremos geometría plana, es decir, aquella que utiliza dos dimensiones. En informática se conoce como geometría 2D.
- En el nivel 2 del curso solo estudiaremos geometría del espacio, es decir, aquella que utiliza tres dimensiones. En informática se conoce como geometría 3D.
- Probablemente conozcas la existencia de videojuegos 2D y 3D. Se llaman así porque utilizan geometría plana o del espacio.
- En la enseñanza secundaria no se aprende geometría de más de tres dimensiones, aunque existe. Por ejemplo, si unificamos el espacio y el tiempo como propone la teoría de la relatividad, utilizaremos cuatro dimensiones.

Ideas intuitivas

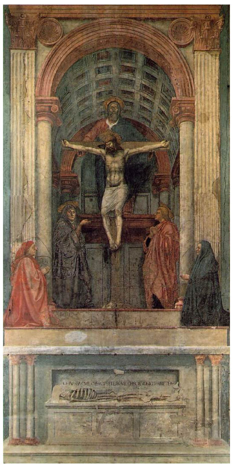
Los elementos fundamentales de la geometría son muy difíciles de definir, así que en la enseñanza secundaria recurrimos a las ideas intuitivas que tenemos de esos elementos. Por ejemplo: los puntos no existen en la naturaleza, son una abstracción creada por la mente humana, y decir que «no tienen dimensiones» es solo una idea intuitiva; pero esta aproximación funciona bien y permite ir aprendiendo y calculando lo básico.

Geometría en la antigüedad

La historia nos ha demostrado que la geometría se ha utilizado desde la antigüedad en muchas culturas. Señalamos como especialmente importante su estudio y desarrollo en las culturas babilónica, egipcia, griega y maya.

Geometría euclídea

Durante siglos se ha estado estudiando la geometría usando el libro *Elementos*, del matemático griego Εὐκλείδης (Euclides), que vivió aproximadamente desde el año 325 a. e. c. hasta el 265 a. e. c. Su influencia ha sido tan decisiva que ahora llamamos geometría euclídea a la geometría que corresponde con ese libro y geometrías no euclídeas a las que se desarrollaron a partir de finales del siglo XVII y principios del XIX separándose en algunos aspectos de los del libro.



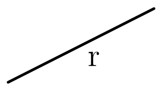
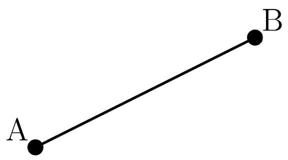
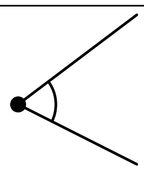
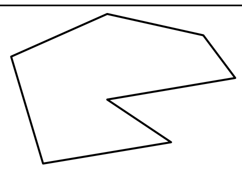
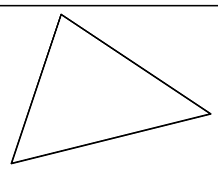
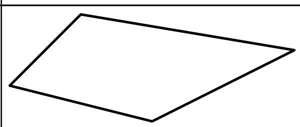
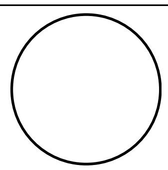
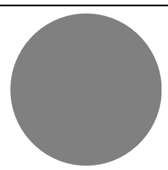
Representación plana de la geometría del espacio

Los seres humanos vivimos en el espacio pero dibujamos en el plano. Desde muy antiguo se ha buscado la mejor manera de representar en un plano (lienzo, papel, pared...) objetos tridimensionales. En el Renacimiento italiano (siglo XV) se desarrolló la **perspectiva** como un método muy adecuado de hacerlo. A la derecha se ve el cuadro *La Trinidad*, del pintor italiano Tommaso di ser Giovanni di Mone Cassai, conocido como Masaccio (1401-1428).

Desarrollo de la parte de Geometría

Durante esta parte del nivel 1 del curso vamos a ir estudiando con detalle varios aspectos de la geometría plana. Tú ya conoces muchas de las figuras que vamos a tratar. Como las propiedades de unas figuras están relacionadas con propiedades de otras, es importante que tengas una idea general de lo que vamos a tratar.

Figuras principales de geometría plana

Nombre	Representación	Comentario
Punto		Tienen tamaño nulo, se considera que no tienen dimensión o que tienen dimensión 0.
Recta		Una colección infinita de puntos con una sola dimensión. Se consideran de longitud infinita, pero sin anchura ni profundidad.
Plano	La pantalla o el papel en que lees esto son buenas representaciones	Una colección infinita de puntos con dos dimensiones. Se consideran de amplitud infinita, pero sin profundidad.
Segmento		Una parte de longitud finita de una recta. Está determinado por los puntos de sus extremos.
Ángulo		Parte del plano determinada por dos semirrectas con origen común. Mediremos su amplitud.
Polígono		Parte del plano determinada por tres o más segmentos. Habrá que calcular su perímetro y su área.
Triángulo		Polígono de tres lados.
Cuadrilátero		Polígono de cuatro lados.
Circunferencia		Conjunto de puntos que distan lo mismo de un punto concreto, llamado centro. Habrá que calcular su longitud.
Círculo		La parte interior de una circunferencia. Habrá que calcular su área.

Perímetro

- ✱ El perímetro de una figura plana es la suma de las longitudes de todos sus lados, sean rectos o curvos.
- ✱ Se mide en unidades de longitud. En muchos problemas no se especifica la unidad de medida; en ese caso se puede usar la letra «u» como símbolo de «unidad» tras el número. Ejemplo 1: perímetro = 3,5 u.
- ✱ Las figuras curvas también tienen perímetro, aunque es más difícil de calcular.
- ✱ En el caso de la circunferencia, en vez de usar la palabra «perímetro» se usa la palabra «longitud», pero el significado es el mismo.
- ✱ Es muy común usar la letra «P» para nombrar el perímetro, aunque se puede usar cualquier otra.

Área

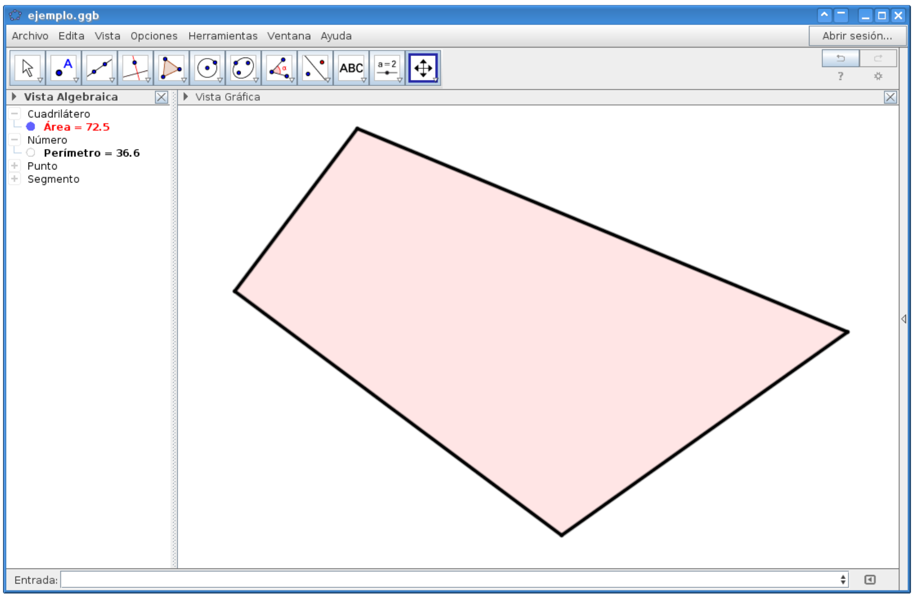
- ✱ El área de una figura plana es la medida de la superficie que ocupa.
- ✱ En los niveles más elementales de la enseñanza de la matemática solo se calculan áreas de figuras cerradas, aunque más adelante se pueden calcular algunas áreas de figuras que no están cerradas.
- ✱ Se mide en unidades de superficie. En muchos problemas no se especifica la unidad de medida; en ese caso se puede usar la notación «u²» como símbolo de «unidad de superficie» tras el número. Ejemplo 2: área = 8 u².
- ✱ Es muy común usar la letra «A» para nombrar el área, aunque se puede usar cualquier otra.

Perímetro y área en programas de ordenador

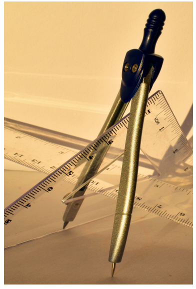
En los programas de ordenador de diseño, tanto técnico como artístico, se pueden aplicar distintos valores gráficos independientemente al perímetro y al área, para simplificar su interpretación, pero hay que recordar que el perímetro en matemáticas tiene anchura cero.

Ejemplo 3

La siguiente ilustración se ha realizado con el programa de matemáticas *Geogebra*. El perímetro se muestra en color negro (36,6 u) y el área en rosa y rojo (72,5 u²).



Construcciones con regla y compás



La geometría griega clásica (hace más de 2000 años) insistía en la necesidad de realizar construcciones utilizando exclusivamente una regla y un compás. Por ejemplo, dado el lado de un hexágono regular, trazar el hexágono.

Este tipo de construcciones son tan importantes que probablemente las sigas aprendiendo a realizar en las asignaturas de Dibujo. Han impregnado la historia de la matemática y de la cultura y hasta hoy llega su influencia.

Condiciones

La regla y el compás usados en estas construcciones son idealizaciones matemáticas de objetos físicos y tienen alguna caracteristica que los disntinguen:

- La regla es infinita, tiene un solo borde y no tiene marcas.
- El compás permite dibujar circunferencias conocido el centro y el radio, pero no está permitido mantener su apertura entre dos trazados.

Existen maneras de superar estas condiciones, pero no vamos a detenernos en eso.

Tres problemas clásicos

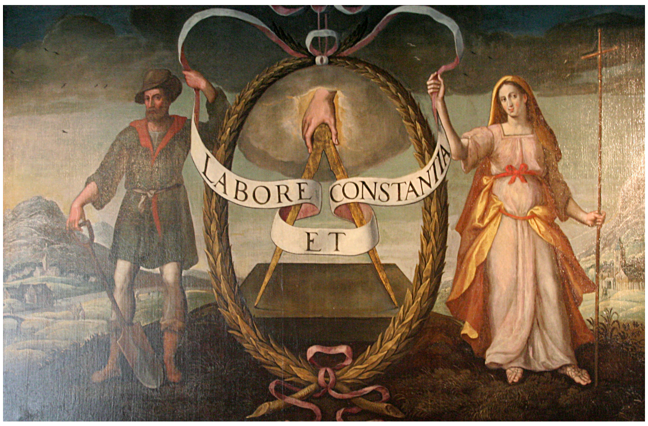
Hubo tres construcciones que no se pudieron realizar con regla y compás, pese a los esfuerzos realizados por brillantes matemáticos:

- La cuadratura del círculo: dado un círculo, dibujar un cuadrado que tenga la misma área.
- La duplicación del cubo: dado un cubo, dibujar un cubo que tenga el doble de volumen.
- La trisección del ángulo: dado un ángulo cualquiera, dibujar un ángulo que sea la tercera parte.

En distintos momentos se demostró que estos problemas no se pueden resolver. Pero tanto los intentos por resolverlos como los intentos de demostrar que no se pueden resolver llevaron a numerosos avances en la matemática.

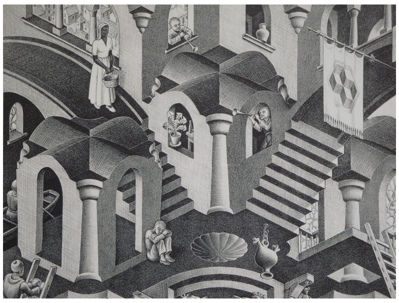
Labore et constantia

La regla y el compás han inspirado a numerosas personalidades de la cultura. La imprenta Plantin-Moretus, ubicada en Amberes (Bélgica), adoptó como lema la expresión latina «Labore et constantia» («con trabajo y perseverancia») observando el trabajo de un compás: el brazo que se fija al papel representa la perseverancia y el brazo que traza la circunferencia representa el trabajo.



Figuras convexas y cóncavas

Los conceptos «convexo» y «cóncavo» dan lugar a diferentes interpretaciones, porque a veces dependen del lugar desde el que se mire la figura o, en general, el objeto. El artista neerlandés Maurits Cornelis Escher (1898-1972) ilustra a la perfección este problema en su obra *Convex and concave* (Convexo y cóncavo). Puedes ver a la derecha una foto de una reproducción de esta obra. Fíjate bien en ella durante un rato.



Definiciones matemáticas

En lo que sí hay acuerdo es en el significado en matemáticas de figura convexa y figura cóncava.

Figura convexa

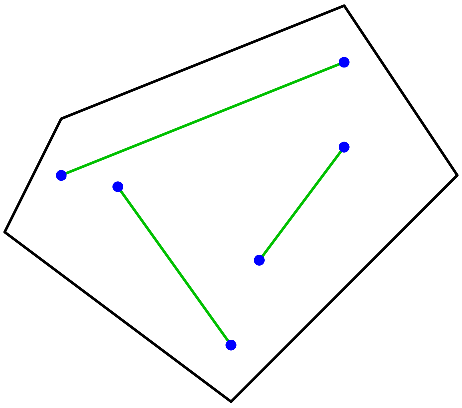
Una figura es convexa cuando dados dos puntos cualesquiera de la figura, el segmento que los une está totalmente contenido en la figura.

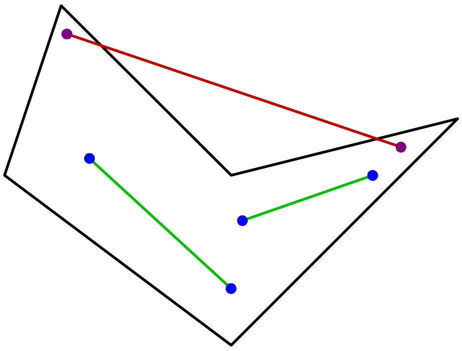
Figura cóncava

Una figura es cóncava cuando es posible encontrar dos puntos de ella de modo que el segmento que los une no está totalmente contenido en la figura.

Ejemplos

- La figura de abajo a la izquierda es convexa. Mostramos algunas parejas de puntos (en azul) unidos con un segmento (en verde) que vemos que está completamente contenido en la figura, pero si eligiéramos otras parejas de puntos, pasaría lo mismo.
- La figura de abajo a la derecha es cóncava porque hemos encontrado una pareja de puntos (en magenta) que verifica que el segmento que los une (en rojo) no está totalmente contenido en la figura. Sin embargo, puede ocurrir que otras parejas de puntos (en azul) sí tengan el segmento que los une (en verde) completamente contenido en la figura; no importa, con que haya una sola pareja que no cumpla la propiedad, ya la figura es cóncava.





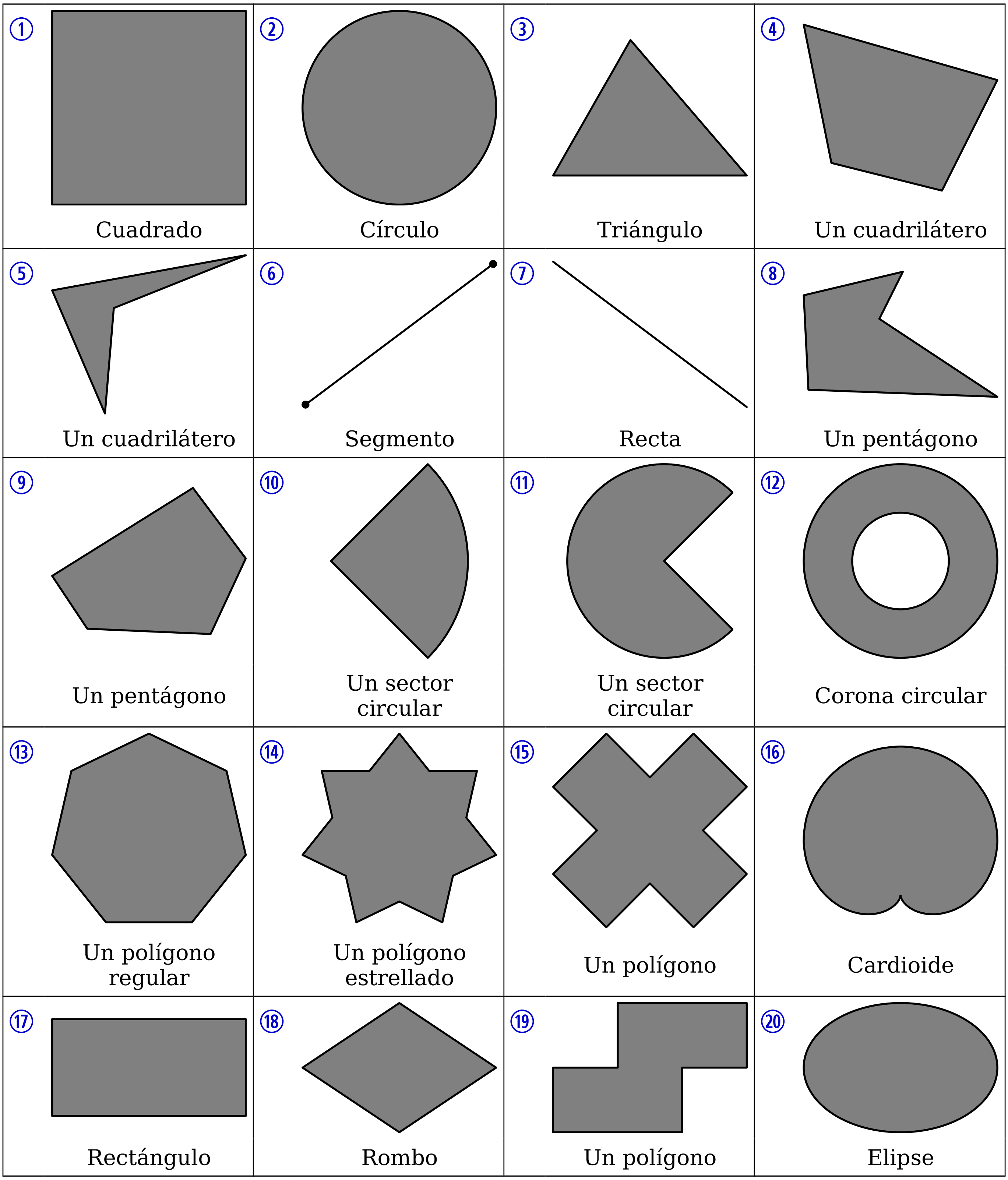
Utilización en este nivel

Necesitaremos estas definiciones en este nivel 1 del curso para definir:

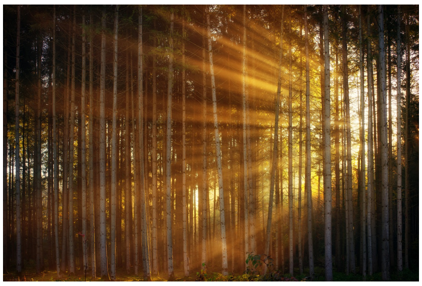
- Ángulo convexo y cóncavo.
- Polígono convexo y cóncavo.

Enunciados

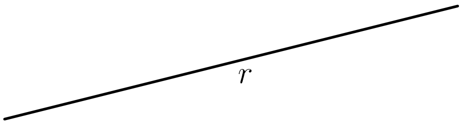
Di si las siguientes figuras son convexas o cóncavas. Para entender mejor la figura, se ha rellenado de gris su interior, cuando lo tiene. Con cada figura puedes ver su nombre, para que te vayas familiarizando con ellas, puesto que algunas las estudiaremos a continuación.



Ideas sobre las rectas

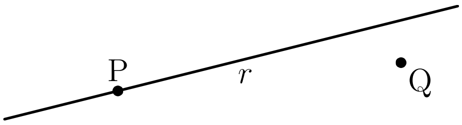


- Una recta es un conjunto infinito de puntos.
- La idea de ser una línea «recta», por oposición a ser «curva», es difícil de definir, porque no hay nada en la realidad que sea perfectamente recto; lo más parecido a una recta es la trayectoria de un fotón (es decir, un rayo de luz).
- Una recta no tiene extremos.
- Una recta no tiene anchura ni profundidad.
- Las rectas tienen dimensión 1, lo que significa que solo se pueden medir longitudes en ellas; no se pueden medir áreas ni volúmenes.
- Para indicar gráficamente que la recta no tiene extremos, al dibujarla no marcamos nada de manera especial ni al principio ni al final. Como no podemos dibujar la infinitud de una recta, es necesario este convenio.
- Es común nombrar a las rectas con letras latinas minúsculas: r, s, t,...



Puntos de una recta

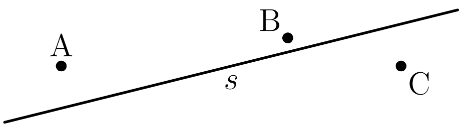
- Para indicar que el punto P pertenece a la recta r escribimos «P ∈ r», es decir, la misma notación que usamos para indicar que un elemento pertenece a un conjunto, ya que una recta es un conjunto de puntos.
- Para indicar que el punto Q no pertenece a la recta r escribimos «Q ∉ r»



Semiplanos

Una recta divide el plano en tres partes sin puntos en común: la propia recta y dos semiplanos. Cada semiplano está a un lado diferente de la recta. Los semiplanos son de dimensión 2, se pueden medir áreas en ellos.

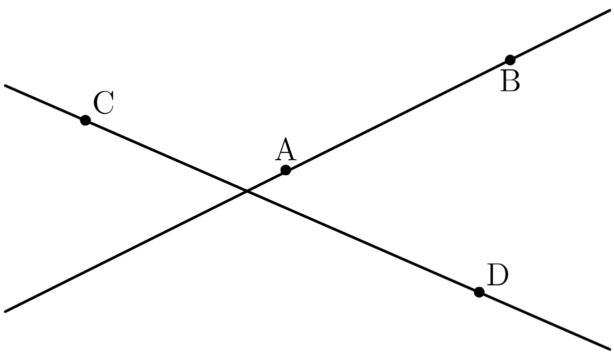
Ejemplo 1: los puntos A y B están en el mismo semiplano respecto a la recta s; los puntos A y C están en distinto semiplano respecto a la recta s.



Recta que pasa por dos puntos

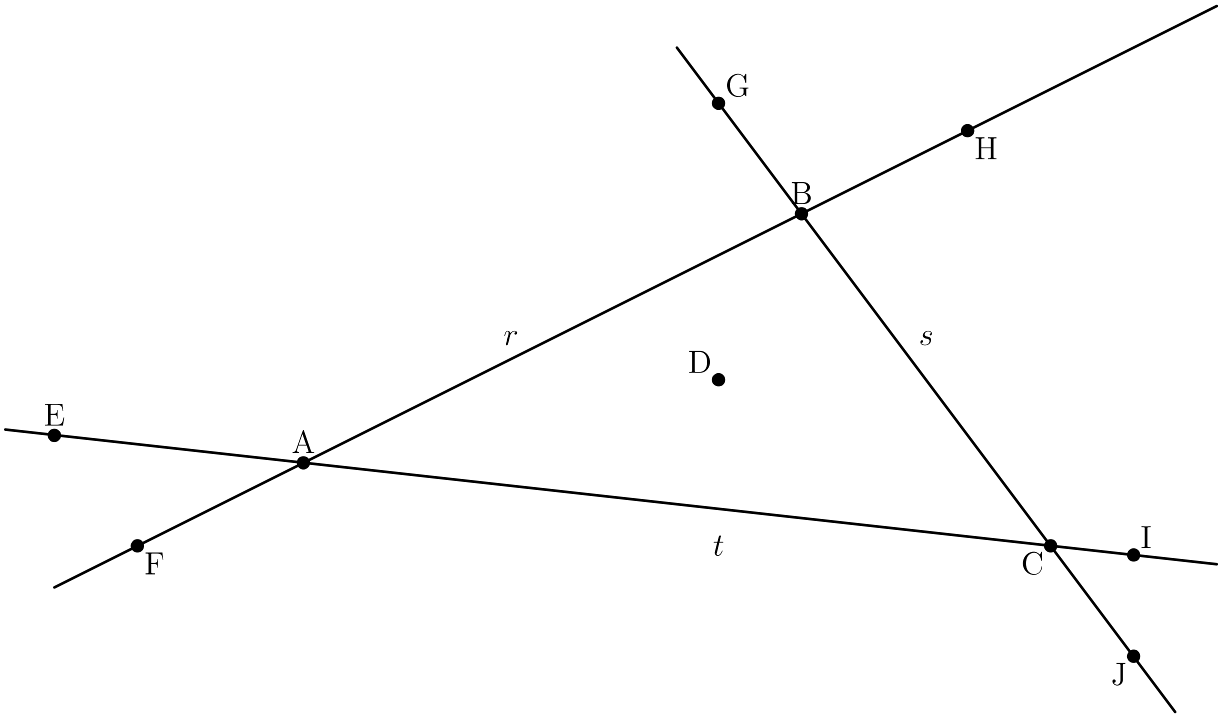
Dados dos puntos diferentes, solo hay una recta que pase por ellos. Por eso decimos que una recta queda definida por dos puntos. Podemos nombrar una recta uniendo los nombres de dos puntos por los que pasa, en cualquier orden.

Ejemplo 2: a la derecha representamos las rectas AB y CD.



Enunciados

Observando la figura, di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.



① $A \in r$	② $E \notin s$	③ $C \in s$	④ $J \in r$	⑤ $G \in r$
⑥ $H \notin s$	⑦ $E \in r$	⑧ $I \in t$	⑨ $J \in s$	⑩ D ∈ s

⑪ El punto A pertenece a la recta que pasa por C y E.

⑫ El punto F pertenece a la recta que pasa por G y J.

⑬ El punto B no pertenece a la recta que pasa por A y H.

⑭ Los puntos D y G están en el mismo semiplano respecto a *r*.

⑮ Los puntos A y H están en el mismo semiplano respecto a *s*.

⑯ Los puntos E y F están en distinto semiplano respecto a *s*.

⑰ Los puntos F y J están en el mismo semiplano respecto a *t*.

⑱ Los puntos D y G están en el mismo semiplano respecto a *r*.

⑲ Los puntos J y H están en distinto semiplano respecto a *t*.

⑳ Los puntos A y H están en el mismo semiplano respecto a *s*.

㉑ Los puntos C y G están en el mismo semiplano respecto a *r*.

㉒ Los puntos F y H están en el mismo semiplano respecto a *t*.

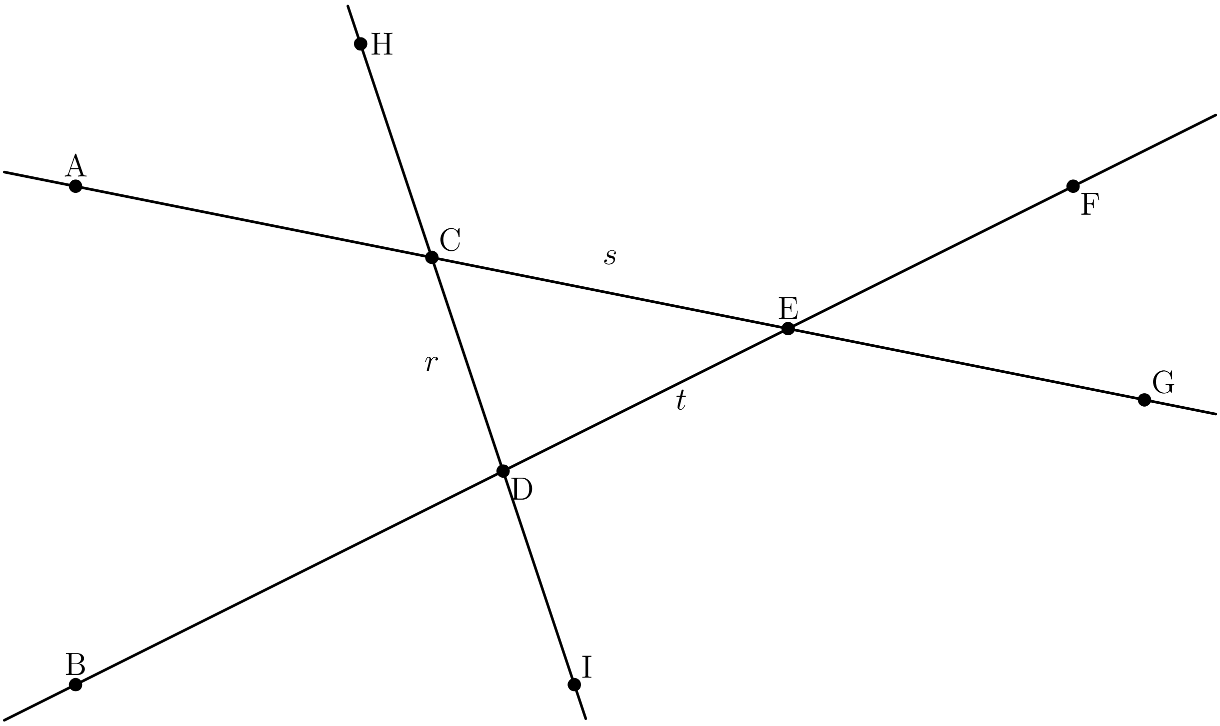
㉓ Los puntos B, G y H están en el mismo semiplano respecto a *t*.

㉔ La recta que pasa por F y A es la misma que pasa por B y H.

㉕ La recta que pasa por C y J es la misma que pasa por E y A.

Enunciados

Observando la figura, di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.



①	D $\in$ s	②	I $\notin$ s	③	G $\in$ r	④	I $\notin$ t	⑤	H $\in$ r
⑥	G $\notin$ r	⑦	B $\in$ t	⑧	D $\notin$ s	⑨	A $\in$ t	⑩	F $\notin$ t

⑪ El punto A no pertenece a la recta que pasa por E y G.

⑫ El punto H pertenece a la recta que pasa por C y D.

⑬ El punto B no pertenece a la recta que pasa por E y F.

⑭ Los puntos H y F están en el mismo semiplano respecto a s.

⑮ Los puntos I y C están en distinto semiplano respecto a t.

⑯ Los puntos I y F están en distinto semiplano respecto a s.

⑰ Los puntos A y B están en distinto semiplano respecto a r.

⑱ Los puntos H y F están en el mismo semiplano respecto a s.

⑲ Los puntos G y H están en distinto semiplano respecto a t.

⑳ Los puntos B y D están en el mismo semiplano respecto a s.

㉑ Los puntos F y G están en distinto semiplano respecto a r.

㉒ Los puntos C y H están en el mismo semiplano respecto a t.

㉓ Los puntos E, F y G están en el mismo semiplano respecto a r.

㉔ La recta que pasa por H y C es la misma que pasa por B y D.

㉕ La recta que pasa por A y E es la misma que pasa por C y G.

Enunciados

Dados los puntos A=(–10,6), B=(10,–2), C=(–6,–4), D=(–3,5), E=(4,–3), F=(7,6), G=(0,2), H=(–5,–1), I=(5,0), J=(6,3), K=(–4,2), L=(–5,4), M=(8,4) y N=(3,5):

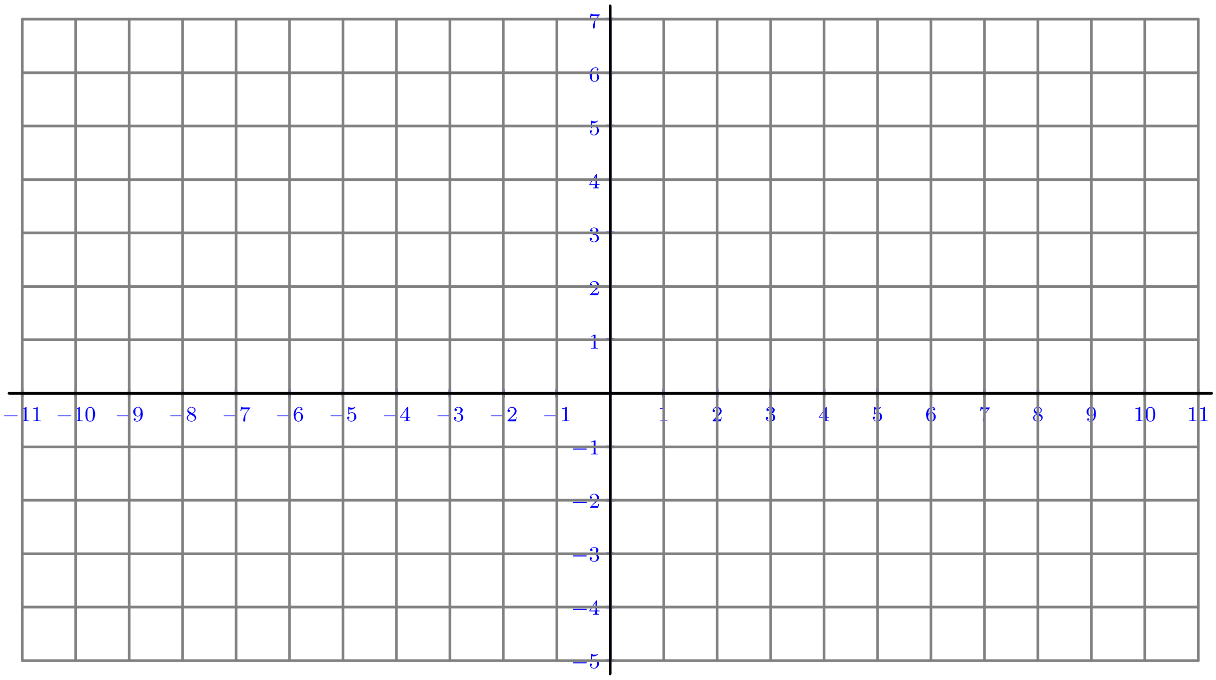
① a) Representa gráficamente los puntos, escribiendo también sus nombres, en unos ejes de coordenadas.

b) Con la ayuda de una regla, representa las siguientes rectas, escribiendo también sus nombres:

La recta *r* que pasa por A y B.

La recta *s* que pasa por C y D.

La recta *t* que pasa por E y F.



Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

② $N \in r$	③ $N \notin s$	④ $K \in s$	⑤ $J \in t$	⑥ $G \in r$
⑦ $H \notin s$	⑧ $J \in r$	⑨ $M \in t$	⑩ $L \in r$	⑪ $L \in s$

⑫ Los puntos C y H están en el mismo semiplano respecto a *r*.

⑬ Los puntos C y H están en el mismo semiplano respecto a *t*.

⑭ Los puntos L y G están en distinto semiplano respecto a *s*.

⑮ Los puntos M y N están en el mismo semiplano respecto a *t*.

⑯ Los puntos D y N están en el mismo semiplano respecto a *r*.

⑰ Los puntos K y M están en distinto semiplano respecto a *t*.

⑱ Los puntos A y L están en el mismo semiplano respecto a *t*.

⑲ Los puntos M y E están en el mismo semiplano respecto a *r*.

⑳ Los puntos G y B están en el mismo semiplano respecto a *t*.

Enunciados

Dados los puntos A=(–3,–2), B=(3,2), C=(–1,3), D=(1,–3), E=(–7,–1), F=(5,–4), G=(9,–5), H=(–6,–4), I=(–11,0), J=(6,4), K=(–5,4), L=(–9,5), M=(7,1), N=(11,0) y O=(0,0):

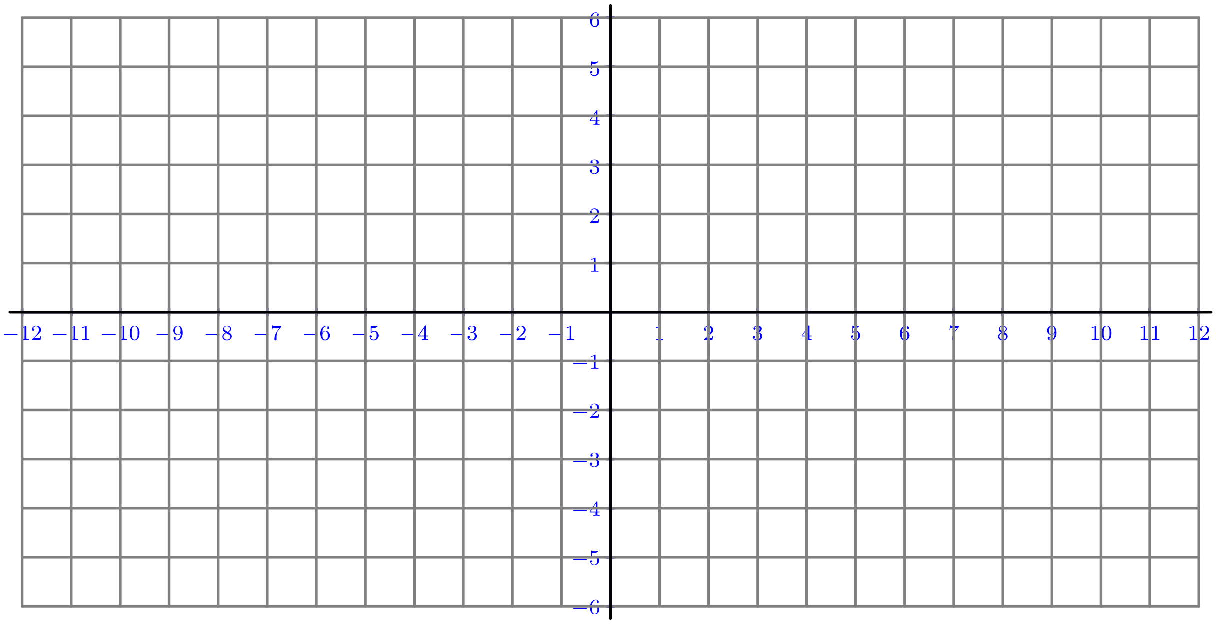
① a) Representa gráficamente los puntos, escribiendo también sus nombres, en unos ejes de coordenadas.

b) Con la ayuda de una regla, representa las siguientes rectas, escribiendo también sus nombres:

La recta *r* que pasa por L y N.

La recta *s* que pasa por I y G.

La recta *t* que pasa por H y J.



Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

② $C \in r$	③ $M \notin r$	④ $D \notin s$	⑤ $E \in s$	⑥ $O \in t$
⑦ $A \notin t$	⑧ $K \in r$	⑨ $F \in s$	⑩ $B \in t$	⑪ $O \in r$

⑫ Los puntos A y J están en el mismo semiplano respecto a *r*.

⑬ Los puntos L y E están en el mismo semiplano respecto a *t*.

⑭ Los puntos H y C están en distinto semiplano respecto a *s*.

⑮ Los puntos M y N están en el mismo semiplano respecto a *t*.

⑯ Los puntos D y J están en el mismo semiplano respecto a *r*.

⑰ Los puntos G y C están en distinto semiplano respecto a *t*.

⑱ Los puntos J y M están en el mismo semiplano respecto a *s*.

⑲ Los puntos I y O están en distinto semiplano respecto a *r*.

⑳ Los puntos G y K están en el mismo semiplano respecto a *t*.

Posición relativa de dos rectas en el plano

Llamamos **posición relativa** de dos objetos al modo en que están situados uno respecto a otro, sin importar su posición absoluta.

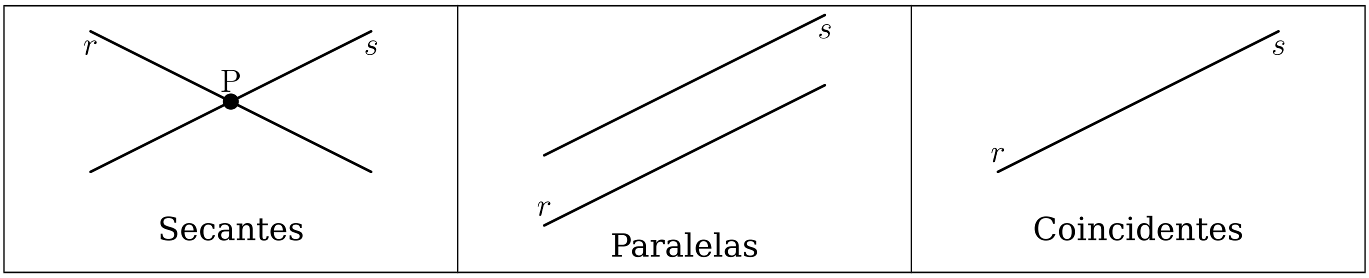
Dos rectas en el plano pueden estar situadas entre sí de tres maneras:

- **Secantes**, cuando tienen un solo punto en común. El punto se llama la intersección de las dos rectas. También se puede decir que las rectas **se cortan**.
- **Paralelas**, cuando no tienen ningún punto en común. Recuerda que las rectas tienen longitud infinita, así que cuando decimos que dos rectas son paralelas, también tiene que ocurrir que por mucho que prolonguemos la parte dibujada, las rectas no se cortarán (otra manera de decir que no tienen ningún punto en común).
- **Coincidentes**, cuando todos sus puntos son comunes. Es otra manera de decir que son la misma recta. Te puede parecer una posibilidad absurda, pero en matemáticas siempre hay que considerar cuando se trabaja con dos entidades (números, puntos, rectas...) la posibilidad que sean la misma entidad.

Notación para las posiciones relativas

Si llamamos r y s a dos rectas, podemos usar algunos símbolos para indicar su posición relativa.

- Para indicar que son secantes no hay un símbolo establecido, pero se puede escribir con el símbolo de «intersección» (que es «$\cap$») que tienen un punto en común; así: $r \cap s = \{ \text{P} \}$.
- Para indicar que son paralelas se usa el símbolo «$\parallel$»: $r \parallel s$.
- Si son coincidentes es que son la misma recta y nos vale perfectamente el símbolo de igualdad: $r = s$.

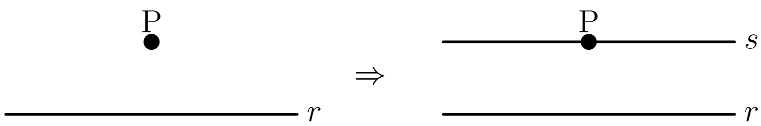


Secantes | Paralelas | Coincidentes

Propiedad de las rectas paralelas

Por un punto que no pertenezca a una recta se puede trazar una recta paralela a ella y solamente una.

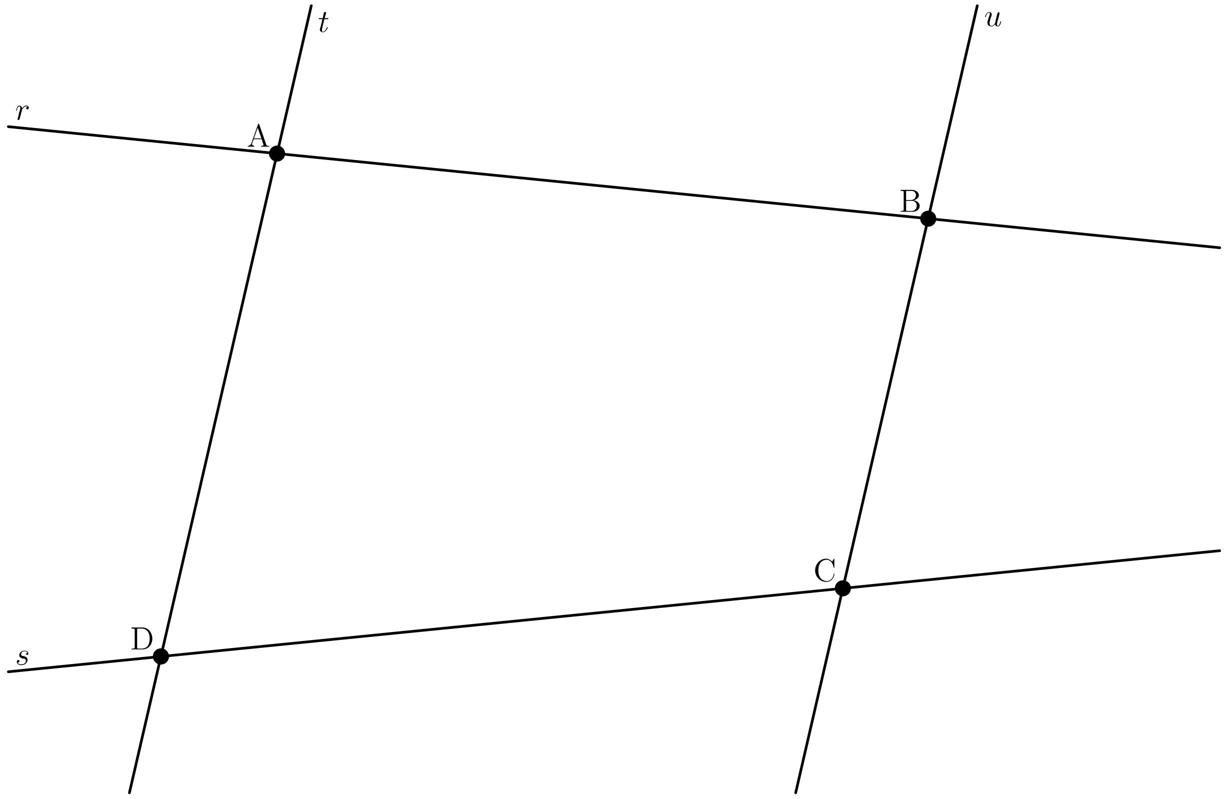
Podemos escribir la propiedad de otra manera, y así será más fácil entender la representación gráfica: si P es un punto y r es una recta de manera que $\text{P} \notin r$, solo existe una recta s que verifica que $\text{P} \in s$ y $r \parallel s$.



Esta propiedad se conoce como el **axioma de las paralelas**. Se encontraba, con un enunciado equivalente, en los *Elementos* de Euclides. Los intentos (fallidos) por demostrarlo lógicamente a partir de otras definiciones dieron lugar a las geometrías no euclídeas, en las que esta propiedad no se verifica.

Enunciados

Observando la figura, di cuál es la posición relativa de cada par de rectas.



① r y t

② s y u

③ t y u

④ r y s

⑤ r y la recta AB

⑥ u y la recta AD

⑦ La recta AC y la recta DB

⑧ u y la recta AC

⑨ s y la recta DC

⑩ r y u

⑪ La recta AD y la recta BC

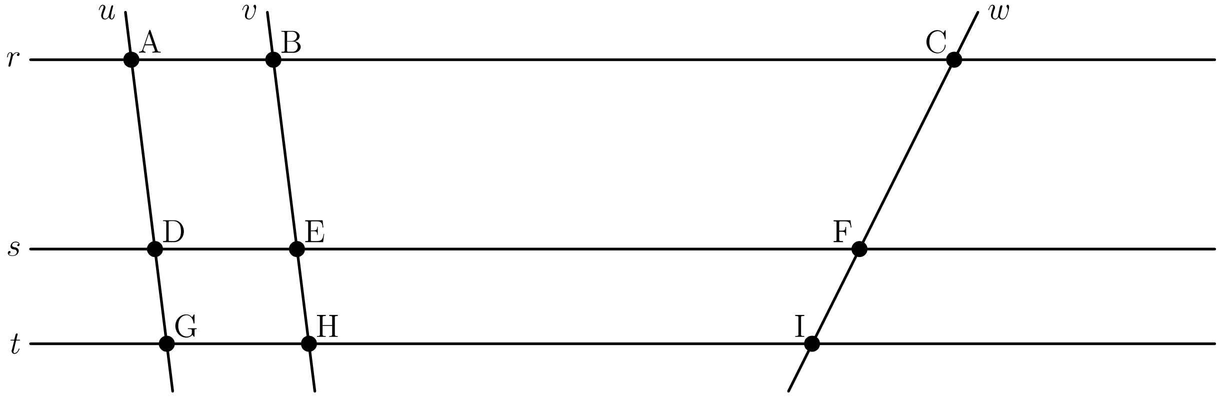
⑫ t y la recta CA

⑬ t y la recta AD

⑭ s y t

Enunciados

Observando la figura, di cuál es la posición relativa de cada par de rectas.



① r y s

② r y t

③ s y t

④ r y u

⑤ r y v

⑥ r y w

⑦ s y u

⑧ s y v

⑨ s y w

⑩ t y u

⑪ t y v

⑫ t y w

⑬ u y v

⑭ u y w

⑮ v y w

⑯ La recta r y la recta BC

⑰ La recta w y la recta FI

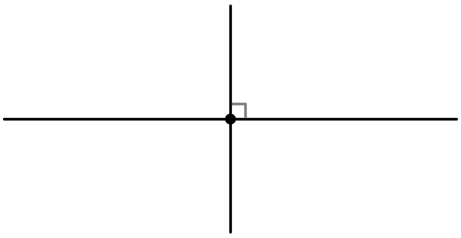
⑱ La recta AE y la recta HC

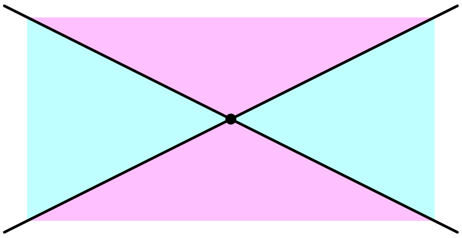
⑲ La recta DE y la recta BC

⑳ La recta DB y la recta EI

Rectas perpendiculares

Dos rectas secantes son perpendiculares cuando dividen el plano en cuatro regiones que tienen exactamente la misma forma. Se presenta en la imagen de abajo a la izquierda. Para indicar gráficamente que las rectas son perpendiculares, aunque el dibujo no sea perfecto, usamos algún símbolo como «⌜», «⌝», «⌞» o «⌟» en algún lugar cerca del punto de corte de las rectas; con un símbolo es suficiente.





Si dos rectas secantes no son perpendiculares, dividen el plano en regiones iguales dos a dos, pero diferentes entre sí. Se presenta en la imagen de arriba a la derecha; se han usado dos colores para indicar las regiones que son iguales entre sí: la región de arriba es igual que la de abajo y la región de la izquierda es igual que la de la derecha.

Otras definiciones

Existen otras definiciones equivalentes de rectas perpendiculares. Cuando estudiamos los ángulos veremos otra posible definición.

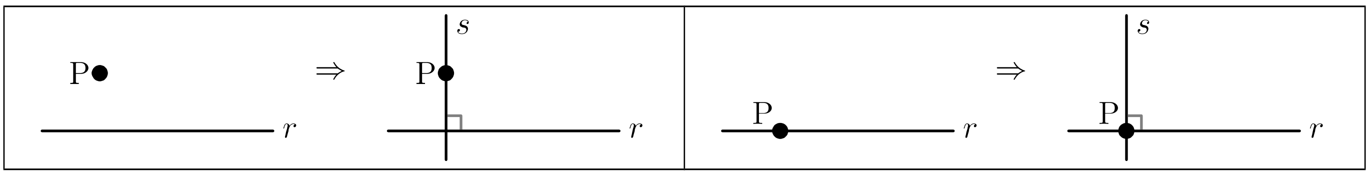
Notación para las rectas perpendiculares

Si llamamos *r* y *s* a dos rectas, para indicar que son perpendiculares se usa el símbolo «⊥»: $r \perp s$.

Propiedad de las rectas perpendiculares

Dados una recta y un punto cualesquiera, solo se puede trazar una recta perpendicualar a la recta dada y que pase por el punto dado.

Podemos escribir la propiedad de otra manera, y así será más fácil entender la representación gráfica: si P es un punto y *r* es una recta, solo existe una recta *s* que verifica que $P \in s$ y $r \perp s$. Es indiferente que el punto P pertenezca a la recta *r* o no pertenezca.



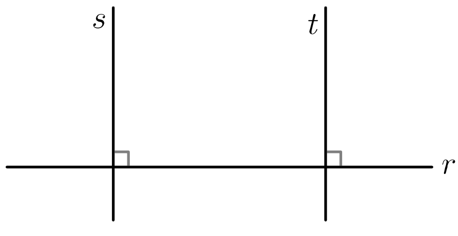
Otra propiedad de las rectas perpendiculares

Si dos rectas son perpendiculares a una tercera recta, las rectas son paralelas o coincidentes.

Se puede escribir con símbolos; fíjate en que el significado es el mismo, pero todo es más conciso e internacional con símbolos:

Si $r \perp s$ y $r \perp t$, entonces o bien $s \parallel t$ o bien $s = t$.

A la derecha ves una de las posibilidades de esta propiedad.

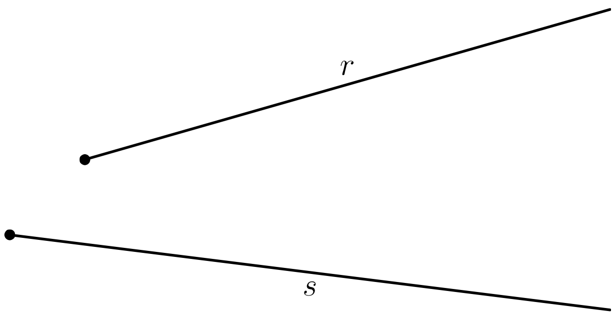


Semirrectas

- Dada una recta y un punto de ella, una semirrecta es el conjunto de puntos de la recta que están desde el punto elegido hacia uno de los lados de la recta.
- Ejemplo 1: los puntos de la semirrecta están en azul y con trazo más grueso:

- El punto elegido de la recta se llama **origen** de la semirrecta.
- Casi siempre se considera que el origen de la semirrecta pertenece a ella.
- Las semirrectas se suelen nombrar con letras minúsculas.

  Ejemplo 2: se muestran las semirrectas r y s:



- Una semirrecta también se puede nombrar uniendo el nombre del punto origen con el nombre de un punto cualquiera de la semirrecta.

  Ejemplo 3: se muestra la semirrecta QA:

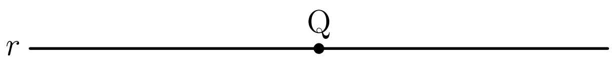
- Las semirrectas tienen dimensión 1.

Propiedad

Cualquier punto de una recta define dos semirrectas.

Ejemplo 4

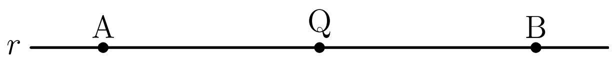
Dada la recta r elegimos un punto cualquiera Q:



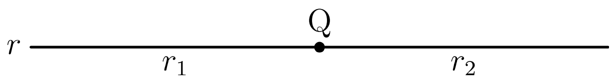
Vemos que podemos considerar dos semirrectas; tal como hemos representado la recta r, las semirrectas están una a la izquierda y otra a la derecha.

En matemáticas es muy importante elegir bien la notación, es decir, la manera de escribir los conceptos. En este caso, hay varias opciones para nombrar las dos semirrectas.

- Una opción es tomar un punto de cada semirrecta y usarlos para nombrarlas; por ejemplo: semirrecta QA y semirrecta QB:



- Otra opción es usar para las dos semirrectas el mismo nombre pero distinguirlas con subíndices, como r_1 y r_2 (se lee «erre sub uno» y «erre sub dos»):



Segmentos

- ✱ Un segmento es una porción de una recta, comprendida entre dos puntos de ella, ambos incluidos.
- ✱ Ejemplo 1. Los puntos del segmento están en azul y con trazo más grueso:

- ✱ Los puntos se llaman **extremos** del segmento.
- ✱ Los segmentos se nombran uniendo los nombres de los extremos, en cualquier orden.
- ✱ Ejemplo 2: se muestra el segmento AB, que también se llama segmento BA:

- ✱ Los segmentos tienen dimensión 1.

Longitud de un segmento

- ✱ La longitud de un segmento es la distancia entre sus extremos.
- ✱ La longitud de un segmento casi siempre se considera positiva; cuando haya una excepción a este convenio, la verás bien explicada.
- ✱ La longitud del segmento AB se suele escribir «$\overline{AB}$», aunque algunos textos pueden usar otras notaciones.
- ✱ Es habitual usar la letra «d» para referirse a «distancia» entre dos elementos geométricos; con esa notación, tenemos que

$$\boxed{\overline{AB} = d(A,B)}$$

Es una manera simbólica de decir «la longitud del segmento AB es la distancia entre A y B».

Segmentos degenerados

A veces en matemáticas, y muy a menudo en informática, es necesario considerar casos que, a primera vista, parecen absurdos.

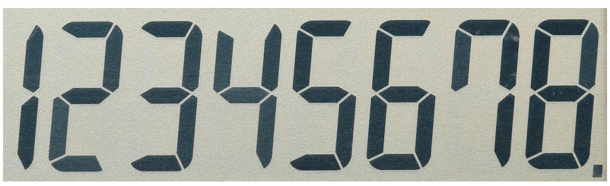
En el caso de un segmento, nos podríamos plantear qué ocurriría si los dos extremos fueran el mismo punto: ¿qué sentido tendría el segmento AA? El segmento se reduciría al único punto A, claro está, y eso no es lo que hemos definido como segmento; si es necesario, podemos llamarlo «segmento degenerado».

Habría que considerar $\overline{AA} = 0$, ya que la distancia de un punto a sí mismo es cero: $d(A,A) = 0$.

Aunque parezca raro, este tipo de situaciones hay que tenerlo en cuenta en muchas ocasiones. En matemáticas no suele dar problemas, pero no manejar correctamente estos casos puede ocasionar errores en los programas de ordenador.

Segmentos en electrónica

En muchos aparatos de electrónica se utilizan pantallas formadas por segmentos; por ejemplo, para representar un dígito es suficiente usar siete segmentos:



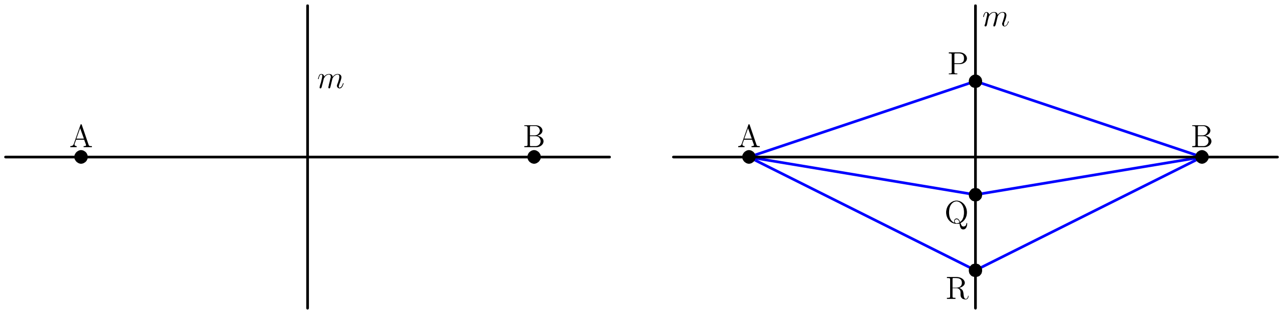
Punto medio de un segmento

- El punto medio de un segmento es el único punto del segmento que está a la misma distancia de los dos extremos.
- Se dice que el punto medio de un segmento **equidista** de los extremos.
- **Ejemplo 1**. El punto medio del segmento AB es M:

- Si llamamos M al punto medio del segmento AB, se verifica que $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{MB}}$.

Mediatriz de un segmento

- La recta mediatriz de un segmento, o sencillamente la mediatriz de un segmento, es el conjunto de puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.
- **Ejemplo 2**. La recta *m* es la mediatriz del segmento AB:



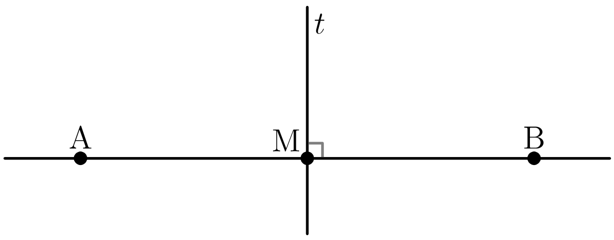
Si P, Q y R son puntos de *m*, se verifica $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$, $\overline{\mathrm{QA}} = \overline{\mathrm{QB}}$ y $\overline{\mathrm{RA}} = \overline{\mathrm{RB}}$.

Propiedad de la mediatriz de un segmento

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio del segmento.

Ejemplo 3

Consideramos el segmento AB, del que averiguamos el punto medio, que llamamos M. La mediatriz del segmento AB, que llamamos *t*, es perpendicular al segmento AB y pasa por el punto M.



Otras notaciones

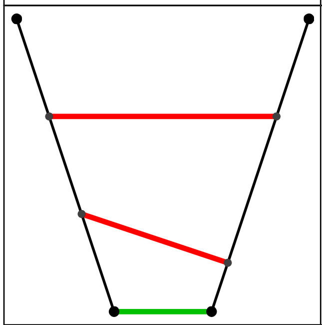
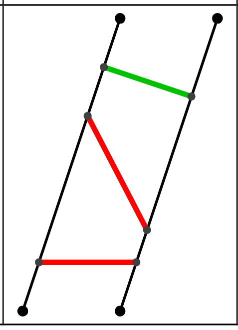
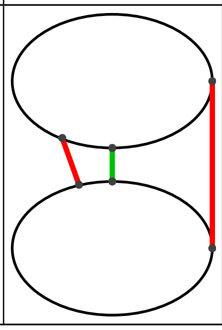
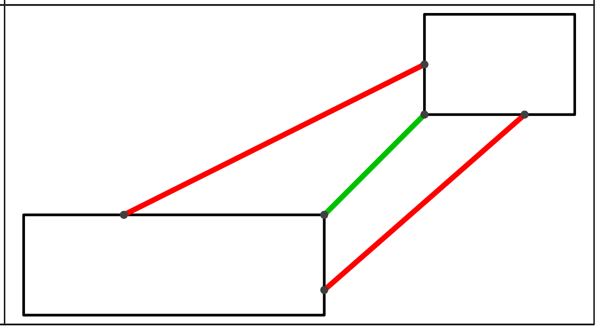
Cuando las construcciones geométricas se van complicando porque contienen cada vez más elementos, la manera de nombrar los puntos, segmentos y rectas es muy importante. La notación debe ser clara. Por ejemplo, podríamos haber llamado M al punto medio del segmento y *m* a la mediatriz, y estaría bien porque una letra es mayúscula y otra minúscula, pero puede inducir a error, sobre todo si hay que decirlo en voz alta. Si hay varios segmentos diferentes, podríamos llamar al punto medio del segmento AB M_{AB} y a la mediatriz t_{AB}, al punto medio del segmento QR M_{QR} y a la mediatriz t_{QR}, etcétera.

Distancia entre dos figuras

La definición general de distancia entre dos figuras es «la menor de las distancias entre un punto de cada figura». En esta definición la palabra clave es «menor».

Ejemplos

En estos ejemplos hemos marcado en verde el segmento que define la distancia entre dos figuras y en rojo otros segmentos que unen puntos de las dos figuras, pero cuya distancia entre ellos es mayor y por tanto no señala la distancia.

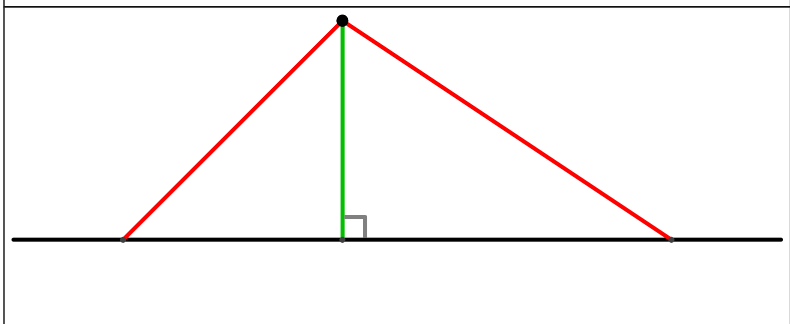
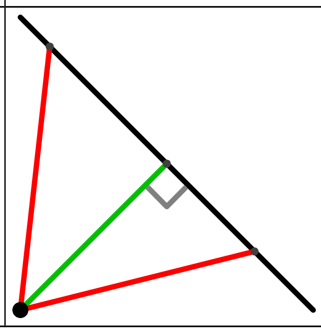
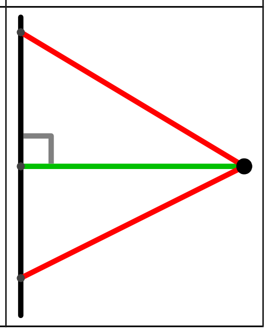
Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
			

Distancia de un punto a una recta

Según la definición anterior, la distancia de un punto a una recta viene definida por la longitud del segmento más corto que une el punto con algún punto de la recta. Se puede demostrar que el segmento que define la distancia debe ser perpendicular a la recta.

Ejemplos

En estos ejemplos hemos marcado en verde el segmento que define la distancia entre el punto y la recta y en rojo otros segmentos que no señalan la distancia.

Ejemplo 5	Ejemplo 6	Ejemplo 7
		

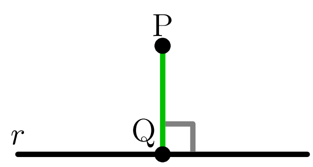
Notación

Si P es un punto y r es una recta, se puede escribir la distancia de P a r como d(P,r)

Caso particular

- ✱ La distancia de un punto de una recta a la recta es 0.
- ✱ Escrito simbólicamente: $P \in r \Rightarrow d(P,r) = 0$

Proyección de un punto sobre una recta



El punto de corte de una recta con el segmento que define la distancia de un punto a la recta se llama proyección del punto sobre la recta. En la figura de la derecha, Q es la proyección de P sobre r.

Distancia entre dos rectas

* La distancia entre dos rectas depende de su posición relativa.
* Si r y s son dos rectas, podemos escribir su distancia como $d(r,s)$.

Distancia entre rectas coincidentes

* Si dos rectas son coincidentes, la distancia entre ellas es 0.
* Motivo: cualquier punto de una recta pertenece a la otra.
* Simbólicamente: $r = s \Rightarrow d(r,s) = 0$.

Distancia entre rectas secantes

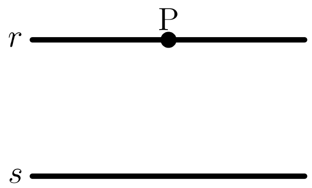
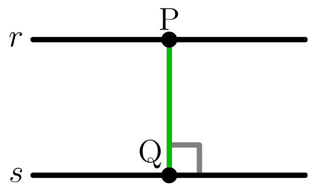
* Si dos rectas son secantes, la distancia entre ellas es 0.
* Motivo: hay un punto de una recta que pertenece a la otra, el punto de corte de las dos rectas.
* Simbólicamente: $r \cap s = \{P\} \Rightarrow d(r,s) = 0$.

Distancia entre rectas paralelas

Si dos rectas son paralelas, la distancia entre ellas es igual a la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la proyección de ese punto sobre la otra recta.

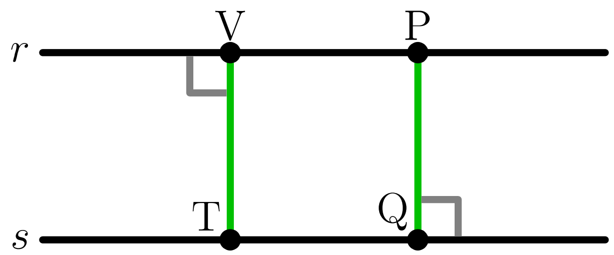
Ejemplo

Veamos paso a paso un ejemplo para entender este método:

Paso 1	Paso 2	Paso 3
		
Nos dan dos rectas paralelas, r y s.	Elegimos un punto cualquiera de una de las dos rectas: $P \in r$.	Averiguamos la proyección de P sobre s: el punto Q.

Entonces, la distancia entre r y s es la distancia entre los puntos P y Q, es decir, la longitud del segmento PQ: $d(r,s) = d(P,Q) = \overline{PQ}$.

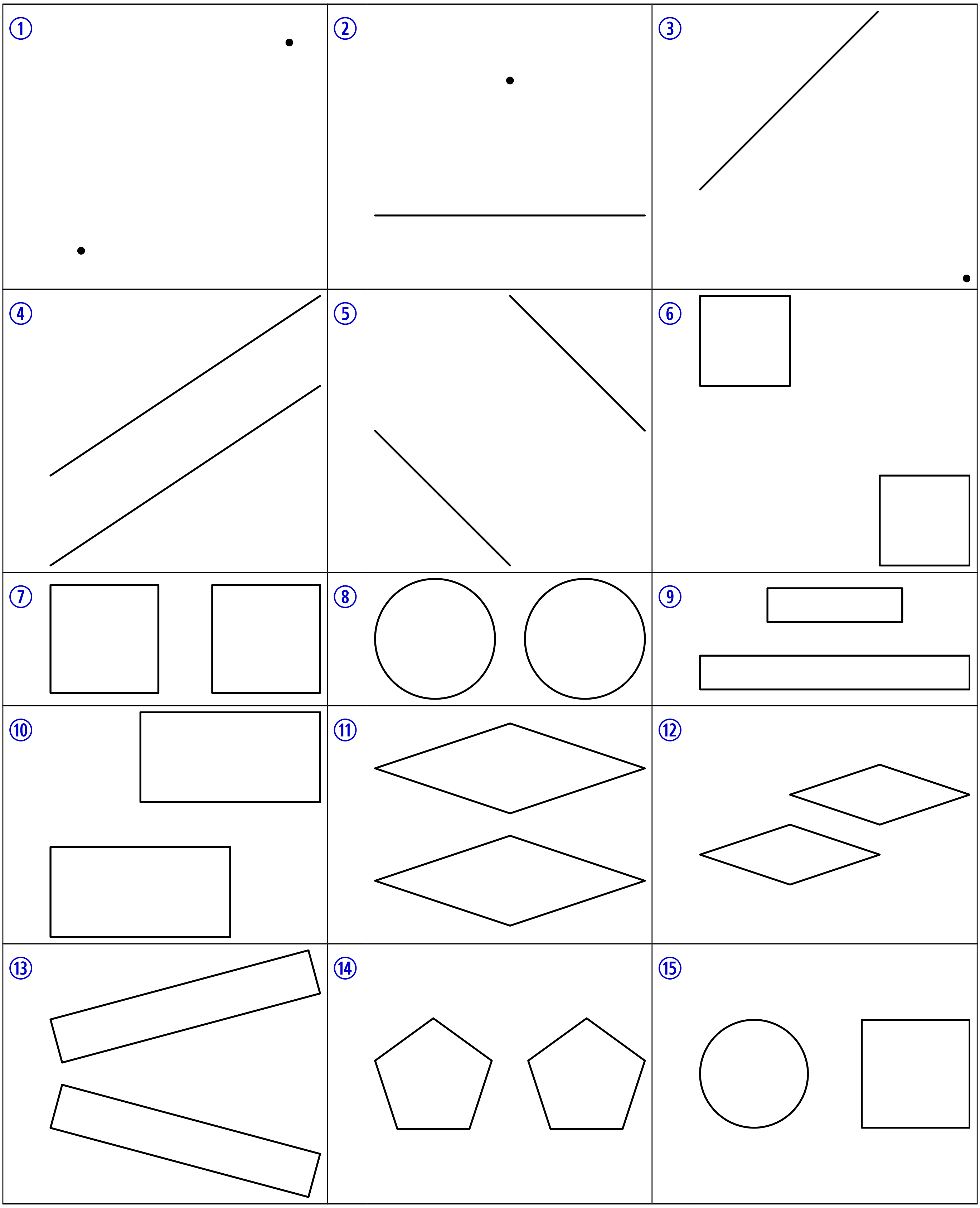
Si en vez de elegir el punto P de la recta r hubieramos elegido el punto T de la recta s, la proyección de T sobre la recta r sería el punto V y obtendríamos la misma distancia:



Observa que $d(r,s) = d(P,Q) = (T,V)$.

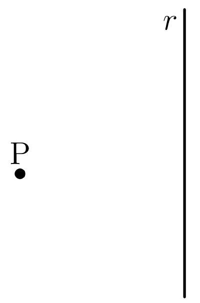
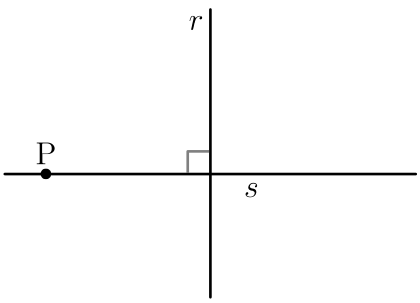
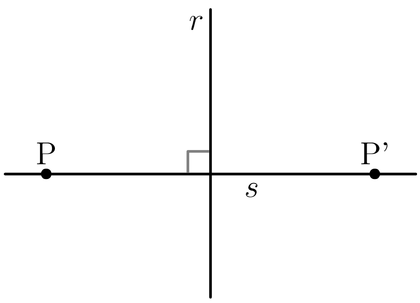
Enunciados

Dibuja el segmento que permite calcular la distancia que hay entre las dos figuras que aparecen en cada ejercicio. En algunos ejercicios puede haber más de una solución, intenta dibujar la que te parezca más «centrada».



Simétrico de un punto respecto a una recta

✱ Dados un punto P y una recta *r*, vemos el proceso que lleva hasta la obtención del punto simétrico de P respecto a *r*. Llamaremos P' (se lee «pe prima») al punto simétrico, que es una notación muy habitual.

Paso 1	Paso 2	Paso 3
		
Nos dan un punto P y una recta *r*.	Trazamos la recta *s*, perpendicular a *r* que pasa por P.	El punto P' pertenece a la recta *s* y verifica d(P',r) = d(P,r).

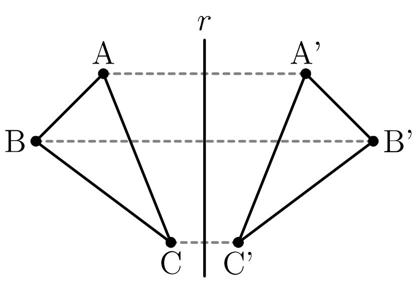
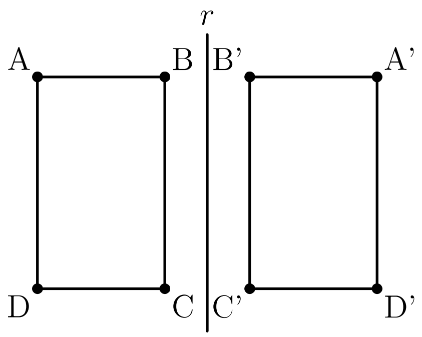
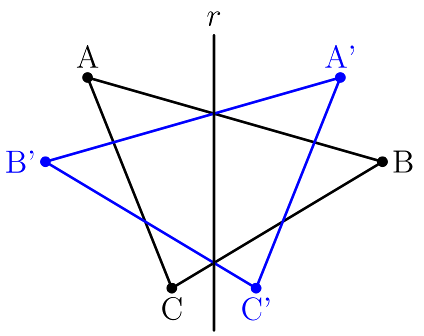
✱ Si el punto P no pertenece a la recta, P y P' están en distinto semiplano respecto a la recta.

✱ Si el punto P pertenece a la recta, su simétrico es el propio punto P.

✱ El punto simétrico de P' respecto a *r* es el punto P.

Simétrica de una figura respecto a una recta

Para construir la figura simétrica de una figura respecto a una recta hay que representar todos los puntos simétricos respecto a la recta de la figura original. Normalmente solo averiguamos los más importantes y luego los unimos.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		

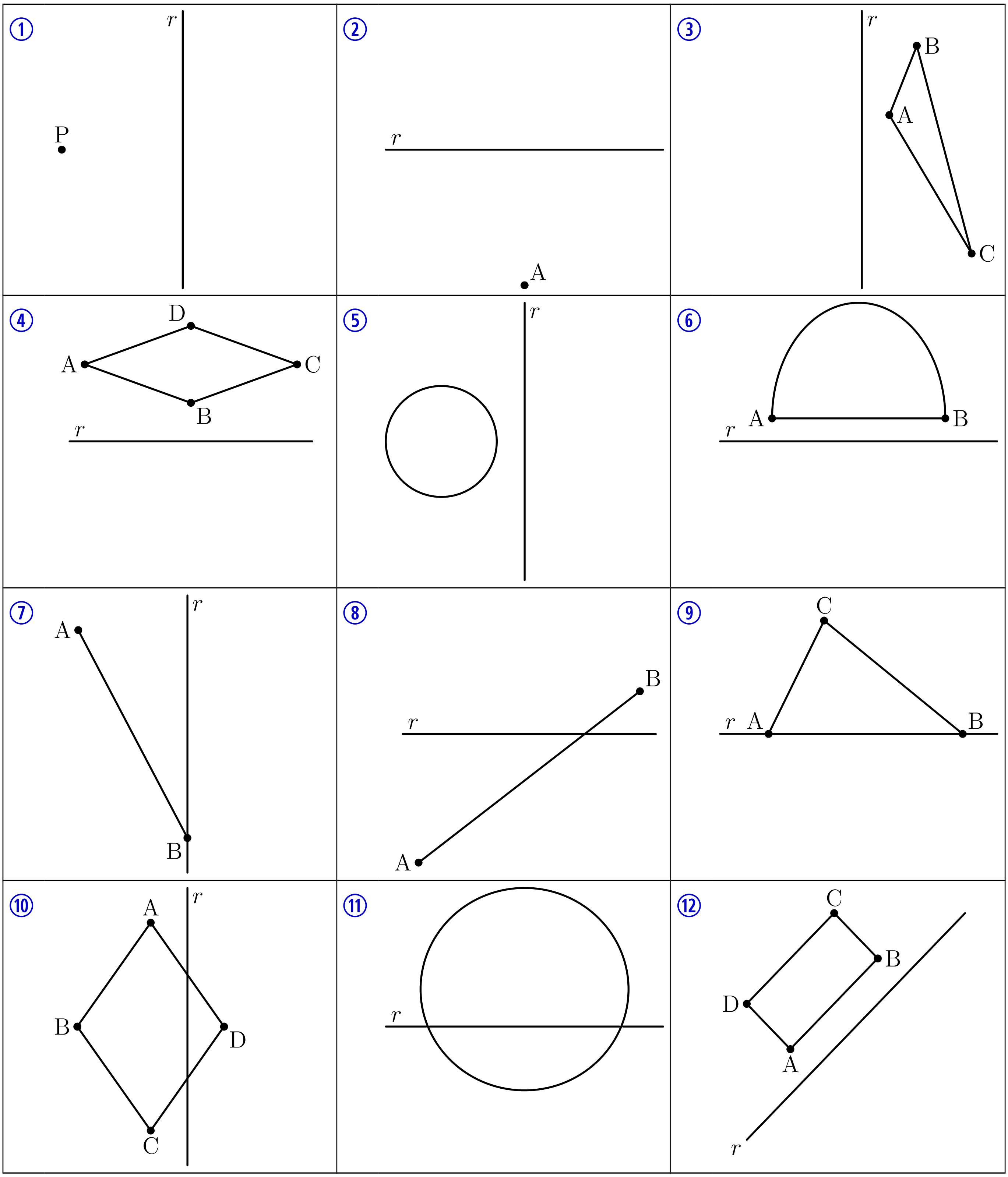
✱ En el ejemplo 1 vemos que el triángulo simétrico del ABC es el triángulo A'B'C'. Hemos señalado en gris punteado las líneas auxiliares que permiten averiguar los puntos simétricos de A, B y C.

✱ En el ejemplo 2 vemos que la figura simétrica del rectángulo ABCD es otro rectángulo que parece igual, pero se han invertido las posiciones de los vértices. No hemos marcado las líneas auxiliares para no complicar el dibujo.

✱ En el ejemplo 3 vemos un caso difícil: la recta atraviesa la figura original. Para distinguir mejor las figuras, la original está en color negro y su simétrica en color azul. Observa que hay dos puntos de la recta que están en las dos figuras, porque son los puntos simétricos de sí mismos.

Enunciados

Dibuja la figura simétrica respecto a la recta *r* de la figura dada en cada ejercicio. Señala los puntos simétricos de todos los puntos indicados usando para ellos el nombre del punto original añadiéndoles el carácter «'».



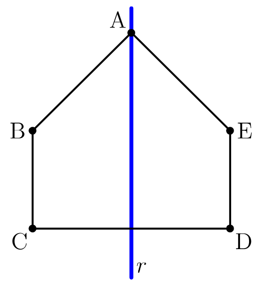
Eje de simetría de una figura

Se dice que una recta es un eje de simetría de una figura cuando la figura simétrica respecto a la recta de la figura original es la misma figura.

Otra manera, muy gráfica y clásica, de explicarlo es que si doblamos el plano según la recta, coincidirán exactamente las partes de la figura que hay en cada semiplano definido por la recta.

Ejemplo 1

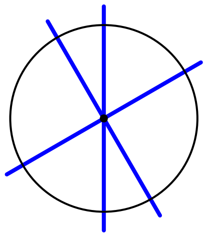
- La figura de la derecha tiene como eje de simetría la recta *r*.
- El punto simétrico de A respecto a *r* es el propio punto A.
- Los puntos B y E son uno el simétrico del otro respecto a *r*.
- Los puntos C y D son uno el simétrico del otro respecto a *r*.
- Si dobláramos el plano según la recta *r*, los puntos B y E coincidirían, los puntos C y D coincidirían y el punto A quedaría igual, por pertenecer a la recta.

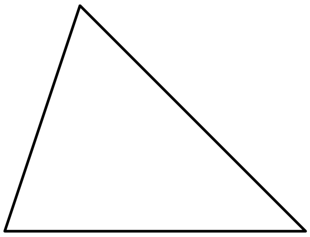


Número de ejes de simetría

Una figura puede tener cualquier número de ejes de simetría, desde no tener ninguno hasta tener infinitos.

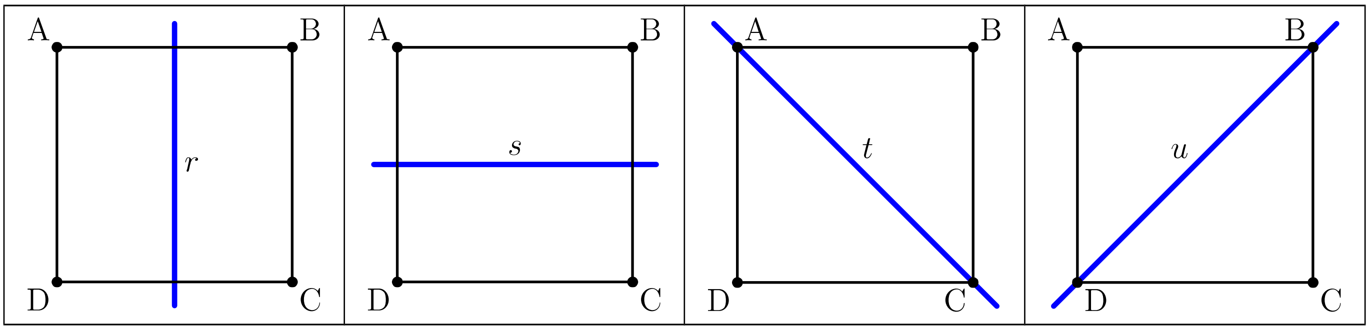
- **Ejemplo 2**. El triángulo de la derecha no tiene ningún eje de simetría.
- **Ejemplo 3**. Cualquier recta que pase por el centro de una circunferencia es un eje de simetría de la circunferencia.





Ejemplo 4

Los cuadrados tienen cuatro ejes de simetría.



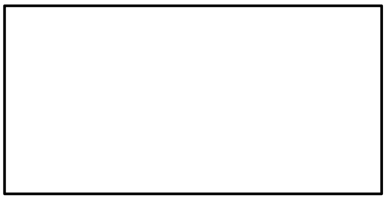
- Respecto a la recta *r*, los puntos A y B son simétricos entre sí y los puntos D y C son simétricos entre sí.
- Respecto a la recta *s*, los puntos A y D son simétricos entre sí y los puntos B y C son simétricos entre sí.
- Respecto a la recta *t*, los puntos B y D son simétricos entre sí y los puntos A y C son simétricos de sí mismos.
- Respecto a la recta *u*, los puntos A y C son simétricos entre sí y los puntos B y D son simétricos de sí mismos.

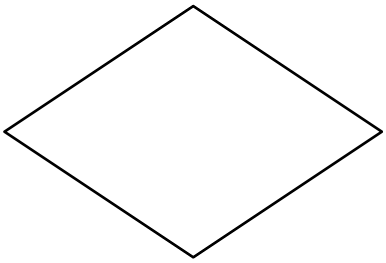
Utilización de los ejes de simetría

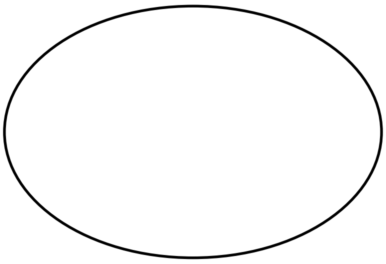
El uso de los ejes de simetría de las figuras permite en muchas ocasiones simplificar los cálculos de los perímetros y las áreas de las figuras.

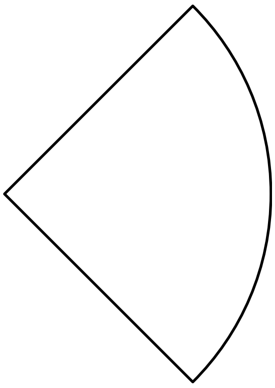
Enunciados

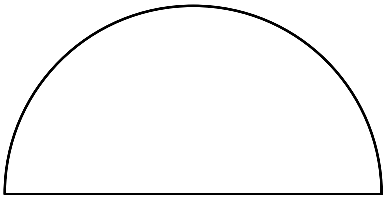
Representa todos los ejes de coordenadas de las siguientes figuras. Con casi todas las figuras puedes ver su nombre, para que te vayas familiarizando con ellas, puesto que algunas las estudiaremos a continuación.

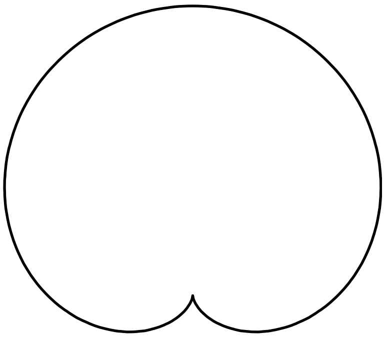
①

Rectángulo

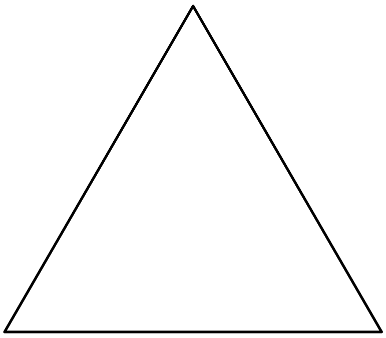
②

Rombo

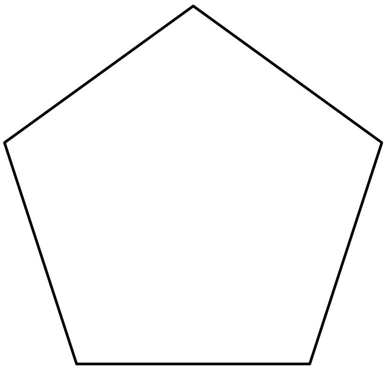
③

Elipse

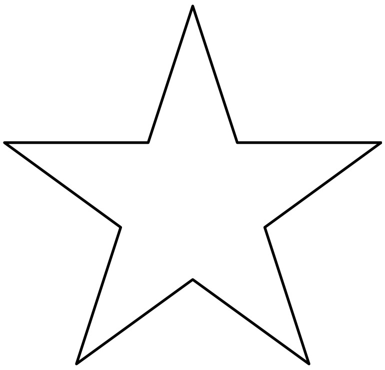
④

Sector circular

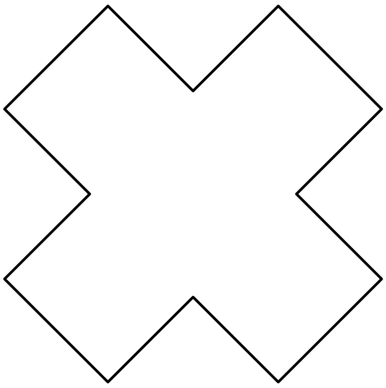
⑤

Segmento circular

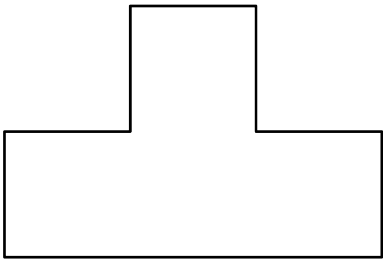
⑥

Cardiode

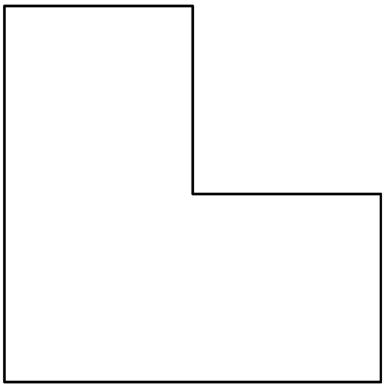
⑦

Triángulo equilátero

⑧

Pentágono regular

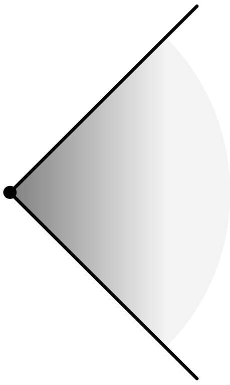
⑨

Pentágono estrellado

⑩


⑪


⑫


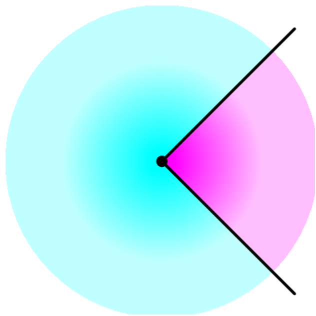
Definición de ángulo



- Un ángulo es la **región** del plano delimitada por dos semirrectas que tienen el mismo punto origen.
- Las dos semirrectas se llaman **lados** del ángulo.
- El punto origen de las dos semirrectas se llama **vértice** del ángulo.
- Un ángulo ocupa una extensión infinita.
- Los ángulos son de dimensión 2, es posible medir superficies dentro de ellos.

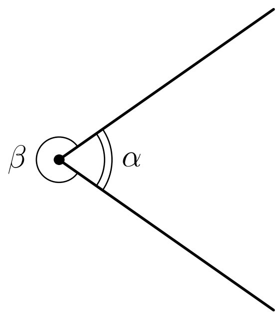
Propiedad

- Dos semirrectas con el mismo punto origen determinan dos ángulos.
- Ejemplo 1. En esta imagen aparecen los dos ángulos representados con diferentes colores:

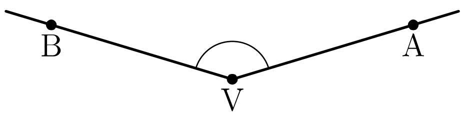


Notación

- Como dos semirrectas con el mismo origen determinan dos ángulos, es muy importante cuando se trabaja con ángulos escribirlos de modo que no queden dudas sobre de cuál de ellos se trata.
- Es muy habitual dibujar un pequeño arco cerca del vértice para indicar el ángulo. El arco puede ser doble o triple si eso ayuda a distinguir mejor el ángulo.
- Muchas veces se nombran los ángulos con letras griegas minúsculas.
- Ejemplo 2. En la imagen de la derecha hemos representado el ángulo que hemos llamado α con un arco doble y el ángulo que hemos llamado β con un arco simple.

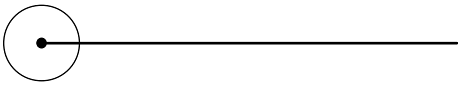


- Cuando no hay ninguna duda sobre cuál de los dos ángulos se trata, es posible utilizar otras notaciones; en cada ocasión se elige la más adecuada.
- Ejemplo 3. En la imagen de más abajo hemos marcado un ángulo que puede escribirse de todas estas maneras: $\widehat{\mathrm{V}}$, $\widehat{\mathrm{AVB}}$, $\widehat{\mathrm{BVA}}$, $\angle(\mathrm{AVB})$, $\angle(\mathrm{BVA})$. Observa que el nombre del vértice siempre se escribe en el centro.



Ángulo completo

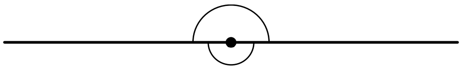
- Una sola semirrecta define dos ángulos:
  - El ángulo nulo, que es la región del plano que coincide con la semirrecta.
  - El ángulo completo, que es el plano completo.
- En esta imagen solo se marca el ángulo completo (el ángulo nulo es imposible de marcar):



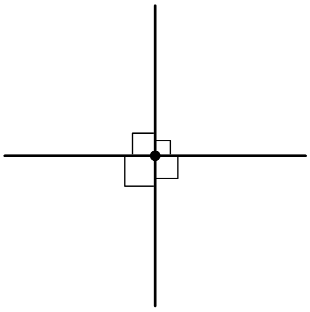
- El concepto y el dibujo te pueden parecer un poco raros, pero el ángulo completo describe lo que haces con tu cuerpo cuando das una vuelta completa y te quedas mirando hacia el mismo punto que antes de dar la vuelta. En muchos deportes, como baloncesto, patinaje o esquí, se llama hacer un *tres sesenta*; pronto verás por qué se llaman así.

Ángulo llano

- Dos semirrectas que tengan el mismo punto origen y que estén en la misma recta determinan dos ángulos iguales; cada uno es un ángulo llano.
- En esta imagen se ven los dos ángulos llanos, cada uno con una marca:

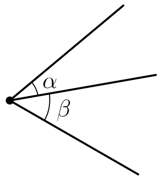


Ángulo recto



- Si dos rectas secantes determinan cuatro ángulos iguales, cada uno de ellos se llama un ángulo recto.
- Para señalar un ángulo recto, en vez de usar un pequeño arco se utiliza algún símbolo como «⌜», «⌝», «⌞» o «⌟».
- En la imagen de la derecha se ven cuatro ángulos rectos, cada uno con su marca.
- Cuando dos rectas secantes se cortan determinando cuatro ángulos rectos, las rectas son perperdiculares.

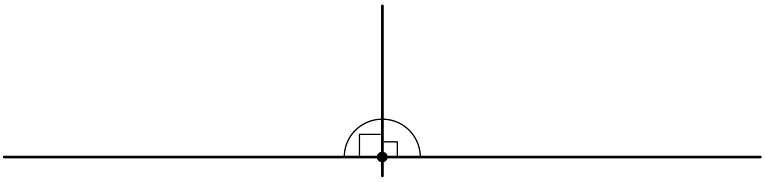
Ángulos contiguos



- Dos ángulos son contiguos cuando tienen el mismo vértice y comparten un lado. Dicho de otra manera: están uno a continuación del otro.
- Ejemplo: los ángulos α y β de la figura de la derecha son contiguos.

Relaciones entre los ángulos completo, llano y recto

- Dos ángulos llanos contiguos forman un ángulo completo.
- Cuatro ángulos rectos contiguos forman un ángulo completo.
- Dos ángulos rectos contiguos forman un ángulo llano. Como se ve aquí:



Amplitud de un ángulo

- La amplitud de un ángulo es la separación entre sus lados.
- Ejemplo: cuando estás de pie con las piernas completamente juntas, la separación entre ellas es nula, lo que corresponde con el ángulo nulo; pero si comienzas a abrir las piernas, las separas entre sí: eso es la **amplitud** del ángulo que forman tus piernas. Algunas personas las pueden abrir tanto que llegan a formar un ángulo llano y unas pocas muy entrenadas incluso consiguen abrirlas algo más (*oversplit*).

Medida de la amplitud de un ángulo

Es tan importante medir la amplitud de un ángulo que cuando un ejercicio o problema pide «calcula el ángulo que...», realmente lo que está pidiendo es «calcula la **amplitud** del ángulo que...»; es decir, normalmente no se distingue entre un ángulo y la medida de su amplitud.

Unidad de medida de ángulos

- La unidad de medida de ángulos del Sistema Internacional es el **radián**. En este curso se define y se comienza a utilizar en el nivel 5.
- La unidad de medida de ángulos más popular, perfectamente integrada en todas las ciencias y que usaremos este curso, es el **grado sexageximal**. Cuando no se puede confundir con otro tipo de grado (como los centígrados, por ejemplo), basta decir «grado», sin especificar más.

Definición de grado sexagesimal

- Se define que un ángulo completo mide 360 grados sexagesimales.
- El símbolo de grado sexagesimal es «°»; no debe ser confundido con el símbolo de ordinal masculino, que es «º» (llamado «o volada»).
- Por tanto: ángulo completo = 360°.
- Esta definición se remonta hasta hace tanto tiempo que no hay constancia histórica ni arqueológica del momento en que se hizo. Se cree que se empezó a usar en Mesopotamia.
- Se barajan dos posibles motivos de la elección del número 360:
  - Se aproxima al número de días que tiene un año; como la Tierra da una vuelta completa a su órbita alrededor del Sol en un año, 1° correspondería con el movimiento de la Tierra en un día.
  - Es un número con muchos divisores, lo que facilita su uso.

Correspondencias importantes

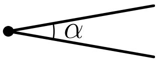
Debes dominar las medidas de tres ángulos que ya hemos definido:

Ángulo	Medida	Motivo
Completo	360°	Por definición
Llano	180°	Un ángulo llano es la mitad de un ángulo completo
Recto	90°	Un ángulo recto es la mitad de un ángulo llano

Submúltiplos del grado sexagesimal

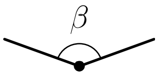
El minuto y el segundo sexagesimales. Los estudiaremos en el nivel 2 de este curso.

Ángulo agudo



- ✱ Un ángulo agudo es que mide más que el nulo y menos que el recto.
- ✱ Si α es un ángulo agudo, se verifica que $0° < \alpha < 90°$.

Ángulo obtuso

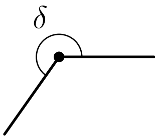


- ✱ Un ángulo obtuso es que mide más que el recto y menos que el llano.
- ✱ Si β es un ángulo obtuso, se verifica que $90° < \beta < 180°$.

Ángulo convexo

- ✱ Un ángulo es convexo cuando la región del plano que define es una figura convexa.
- ✱ Todos los ángulos agudos y obtusos son convexos.
- ✱ El ángulo nulo, el recto y el llano son ángulos convexos.
- ✱ Si γ es un ángulo convexo, se verifica que $0° \leqslant \gamma \leqslant 180°$. Observa el uso del símbolo «⩽», que se lee «menor o igual»; también se puede escribir «≤».

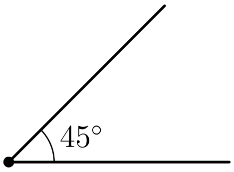
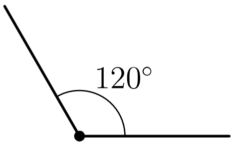
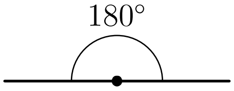
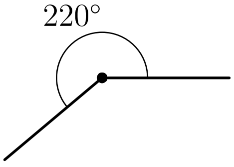
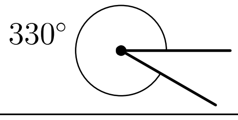
Ángulo cóncavo



- ✱ Un ángulo es cóncavo cuando la región del plano que define es una figura cóncava.
- ✱ Un ángulo cóncavo mide más que el llano y menos que el completo.
- ✱ Si δ es un ángulo convexo, se verifica que $180° < \delta < 360°$.

Ejercicio resuelto

Dados los siguientes ángulos, rellena la tabla; la representación gráfica que se pide es aproximada y en las demás columnas hay que responder «sí» o «no».

	Ángulo	Representación	Agudo	Obtuso	Convexo	Cóncavo
①	45°		sí	no	sí	no
②	120°		no	sí	sí	no
③	180°		no	no	sí	no
④	220°		no	no	no	sí
⑤	300°		no	no	no	sí

Enunciados

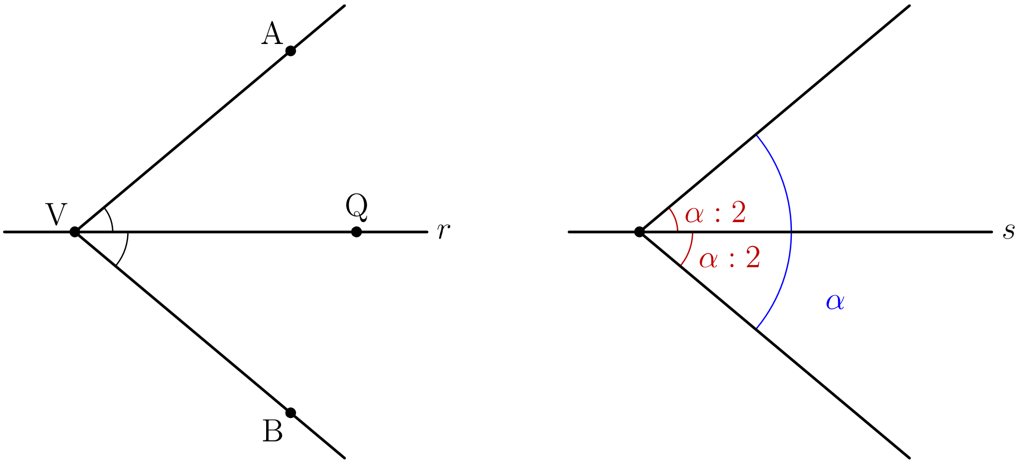
Dados los siguientes ángulos, rellena la tabla; la representación gráfica que se pide es aproximada y en las demás columnas hay que responder «sí» o «no».

	Ángulo	Representación	Agudo	Obtuso	Convexo	Cóncavo
①	60°					
②	90°					
③	135°					
④	200°					
⑤	270°					
⑥	300°					
⑦	100°					
⑧	225°					
⑨	340°					
⑩	30°					
⑪	160°					

Recta bisectriz de un ángulo

✱ Es la recta que divide al ángulo en dos ángulos iguales, es decir, de la misma amplitud.

✱ Ejemplo 1: en la figura de abajo a la izquierda, la recta *r* es la bisectriz del ángulo $\widehat{AVB}$ porque lo divide en los dos ángulos iguales $\widehat{AVQ}$ y $\widehat{QVB}$.

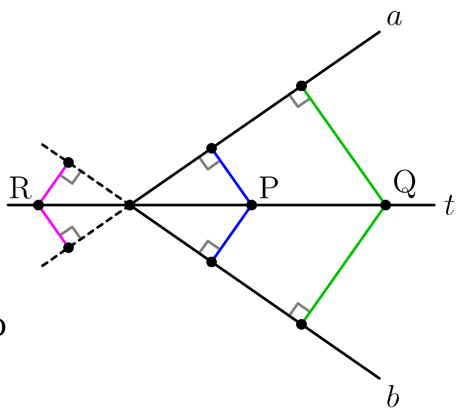


✱ Ejemplo 2: en la figura de arriba a la derecha vemos que la recta *s* es la bisectriz del ángulo α porque lo divide en los dos ángulos iguales de amplitud α:2.

Propiedad

Los puntos de la recta bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo.

Ejemplo 3



✱ La recta *t* es la bisectriz del ángulo de lados *a* y *b*.

✱ Los puntos P, Q y R pertenecen a la recta *t*.

✱ Las distancias de P, Q y R a *a* y *b* verifican:

■ d(P,a) = d(P,b) (en color azul).

■ d(Q,a) = d(Q,b) (en color verde).

■ d(R,a) = d(R,b) (en color magenta).

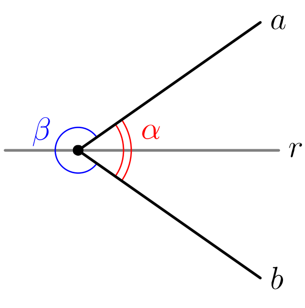
✱ Para marcar las distancias de R a *a* y a *b* ha habido que prolongar las semirrectas *a* y *b* (marcadas con línea punteada).

Propiedad

Los dos ángulos determinados por dos semirrectas de origen común tienen la misma recta bisectriz.

Ejemplo 4

La recta *r* es la bisectriz de los ángulos α y β, determinados por las semirrectas *a* y *b*.



Otros ángulos

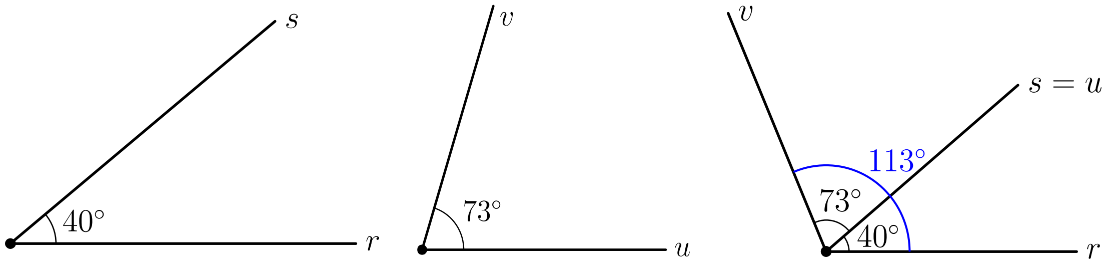
Además de los ángulos vistos hasta ahora, también existen ángulos negativos y ángulos mayores de 360°; en este curso se utilizan en el nivel 4 y superiores. Hasta entonces, nos puede ocurrir que una suma de ángulos dé mayor que 360°, pero no lo vamos a representar.

Suma de ángulos

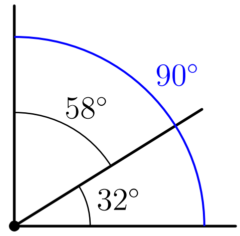
- ✱ La suma de ángulos se refiere a la suma de sus amplitudes; se calcula como la suma de otros números cualesquiera.
- ✱ **Ejemplo 1**: 40° + 73° = 113°
- ✱ El equivalente gráfico de la suma de ángulos es dibujarlos de modo que sean consecutivos y considerar el ángulo definido por las semirrectas de los extremos.

Ejemplo 2

- ✱ Para sumar los ángulos 40° y 73°, los representamos.
- ✱ El ángulo 40° está definido por las semirrectas r y s.
- ✱ El ángulo 73° está definido por las semirrectas u y v.
- ✱ Representamos los dos ángulos de modo que sean consecutivos haciendo coincidir los vértices y la semirrecta s con la semirrecta u.
- ✱ El ángulo suma de 40° y 73° queda determinado por las semirrectas r y v.

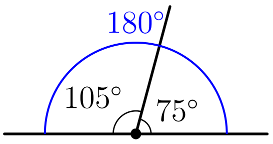


Ángulos complementarios



- ✱ Dos ángulos son complementarios cuando su suma es un ángulo recto.
- ✱ Ejemplo 3: los ángulos 42° y 48° son complementarios porque 42° + 48° = 90°.

Ángulos suplementarios



- ✱ Dos ángulos son suplementarios cuando su suma es un ángulo llano.
- ✱ Ejemplo 4: los ángulos 75° y 105° son suplementarios porque 75° + 105° = 180°.

Ejercicio resuelto

Averigua el ángulo complementario y el suplementario del ángulo 60°.

Resolución

Complementario: 90° – 60° = 30°

Suplementario: 180° – 60° = 120°

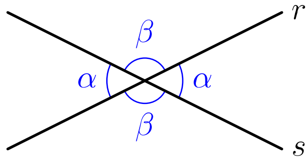
Solución

El complementario es 30° y el suplementario es 120°

Ángulos opuestos por el vértice

Cuando dos rectas se cortan, definen cuatro ángulos convexos que son iguales dos a dos. Los ángulos que son iguales se llaman opuestos por el vértice.

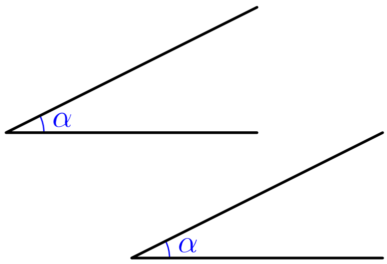
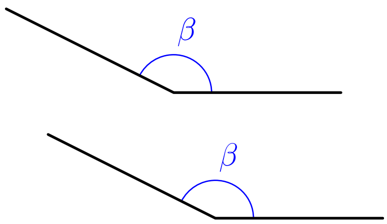
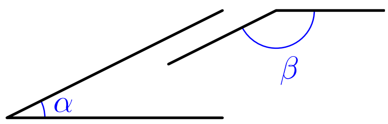
Ejemplo 1



* Las rectas r y s definen cuatro ángulos convexos.
* Los ángulos α son iguales por opuestos por el vértice.
* Los ángulos β son iguales por opuestos por el vértice.

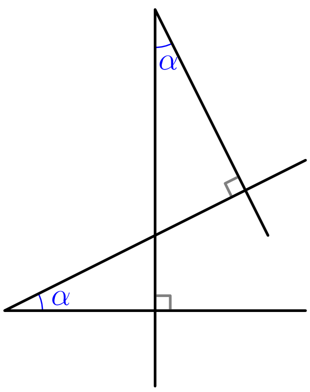
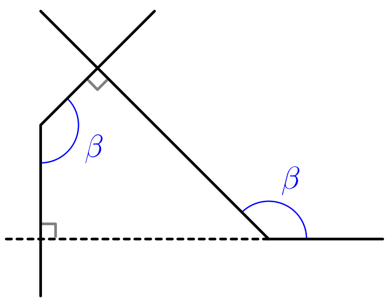
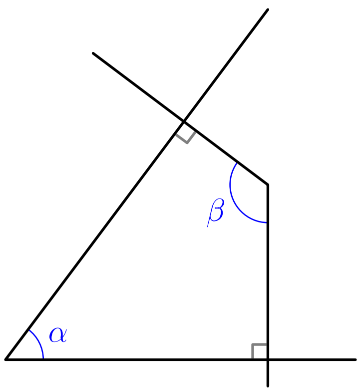
Ángulos de lados paralelos

* Si las semirrectas que definen los lados de dos ángulos son paralelas, los ángulos pueden ser iguales o suplementarios.
* Si los dos ángulos son agudos u obtusos, serán iguales.
* Si un ángulo es agudo y el otro es obtuso, serán suplementarios.

Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
		
Agudos e iguales	Obtusos e iguales	Suplementarios

Ángulos de lados perpendiculares

* Si las semirrectas que definen los lados de dos ángulos son perpendiculares, los ángulos pueden ser iguales o suplementarios.
* Si los dos ángulos son agudos u obtusos, serán iguales.
* Si un ángulo es agudo y el otro es obtuso, serán suplementarios.

Ejemplo 5	Ejemplo 6	Ejemplo 7
		
Agudos e iguales	Obtusos e iguales	Suplementarios

Ángulos entre rectas paralelas y una secante

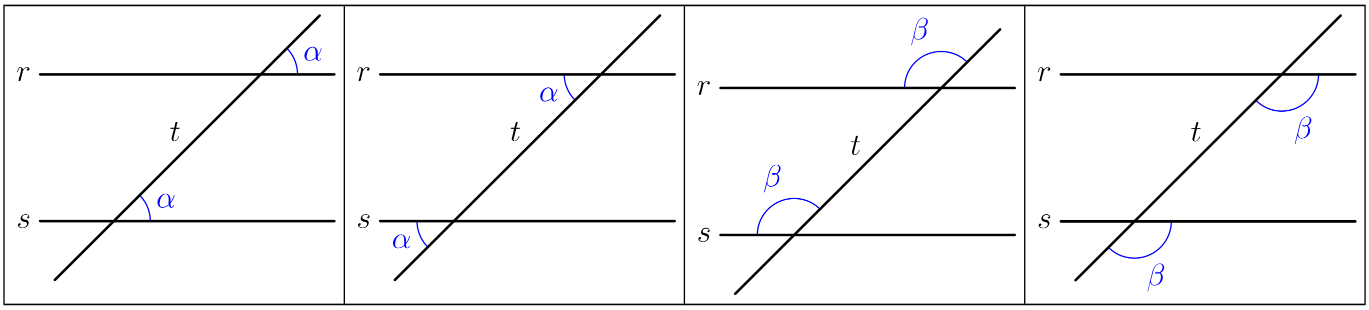
Si dos o más rectas paralelas se cortan con una recta, aparecen una serie de ángulos iguales en distintas posiciones, que reciben distintos nombres.

Ángulos correspondientes

Están en la misma posición respecto a la recta secante y cada paralela

Ejemplo 1

- ✱ Las rectas *r* y *s* son paralelas y la recta *t* corta a las dos.
- ✱ Los ángulos α son iguales por correspondientes.
- ✱ Los ángulos β son iguales por correspondientes.

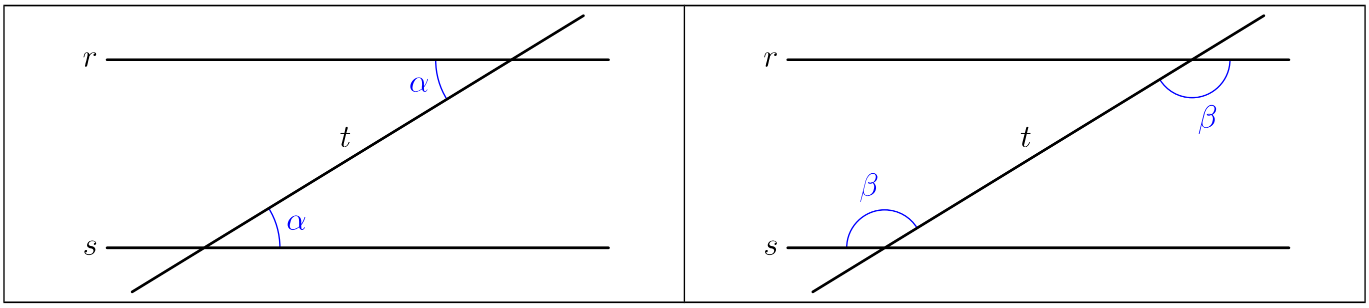


Ángulos alternos internos

Están a distintos lados respecto a la recta secante y entre las paralelas.

Ejemplo 2

- ✱ Las rectas *r* y *s* son paralelas y la recta *t* corta a las dos.
- ✱ Los ángulos α son iguales por alternos internos.
- ✱ Los ángulos β son iguales por alternos internos.

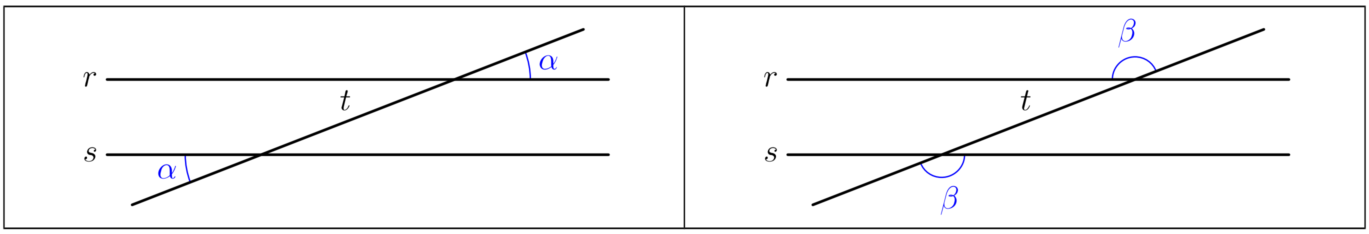


Ángulos alternos externos

Están a distintos lados respecto a la recta secante y hacia fuera de las paralelas.

Ejemplo 3

- ✱ Las rectas *r* y *s* son paralelas y la recta *t* corta a las dos.
- ✱ Los ángulos α son iguales por alternos externos.
- ✱ Los ángulos β son iguales por alternos externos.



Técnicas para averiguar ángulos

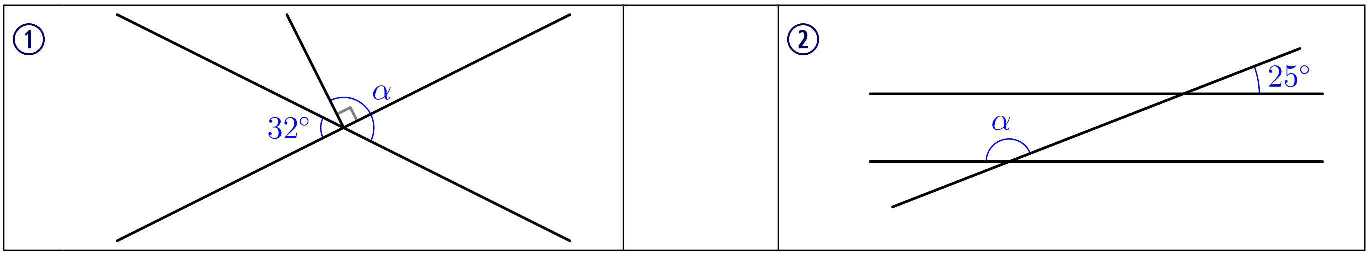
Entre definiciones y propiedades, disponemos de varios métodos que nos ayudan a averiguar valores de ángulos desconocidos:

* Ángulos complementarios.
* Ángulos suplementarios.
* Ángulos opuestos por el vértice.
* Ángulos de lados paralelos.
* Ángulos de lados perpendiculares.
* Ángulos correspondientes.
* Ángulos alternos internos.
* Ángulos alternos externos.

Como siempre ocurre, habrá que utilizar con habilidad estos métodos, quizá junto a otros, para resolver problemas.

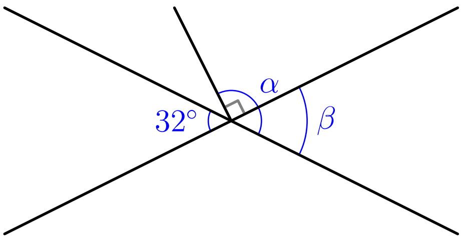
Enunciados de problemas

Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras:



Resolución 1

Vemos que α es la suma de un ángulo recto y otro ángulo, que llamamos β:



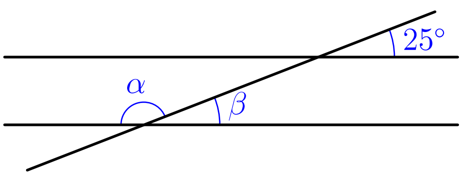
Como β es el opuesto por el vértice de un ángulo de 32°, β = 32°

Por tanto, α = 90° + β = 90° + 32° = 122°

Solución: α = 122°

Resolución 2

Vemos que α es el suplementario de un ángulo, que llamamos β:



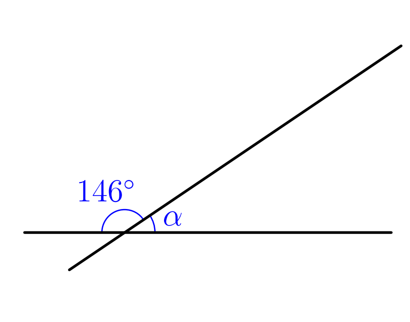
Como β es el correspondiente de un ángulo de 25°, β = 25°

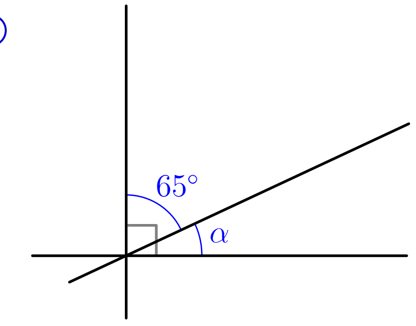
Por tanto, α = 180° – β = 180° – 25° = 155°

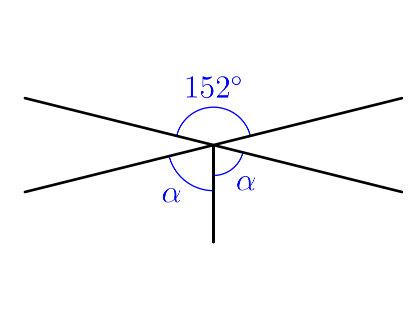
Solución: α = 155°

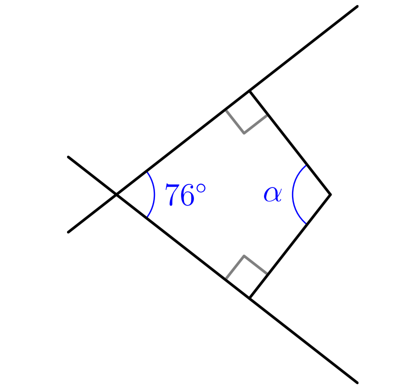
Enunciados

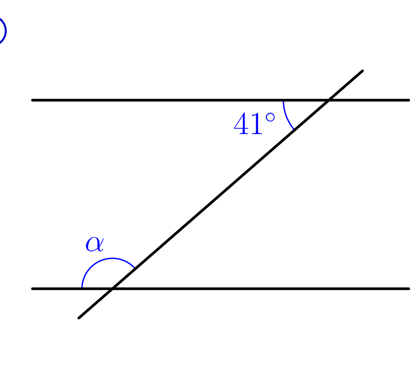
Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras:

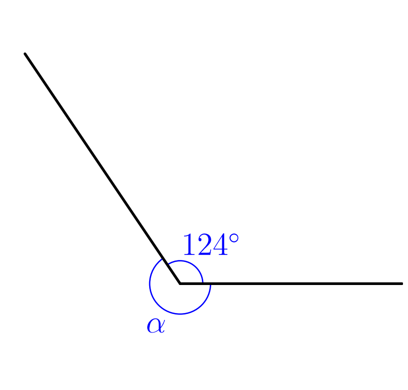
①


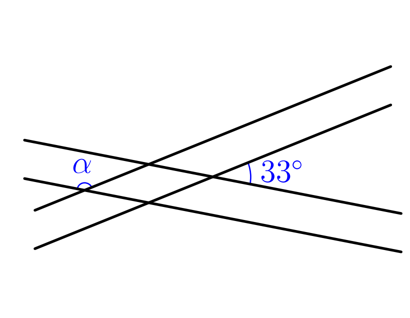
②


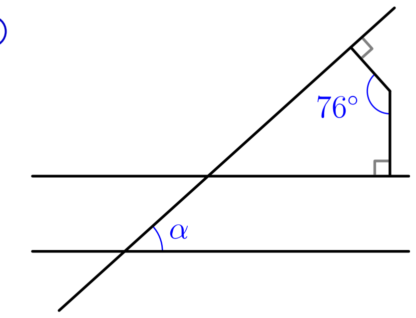
③


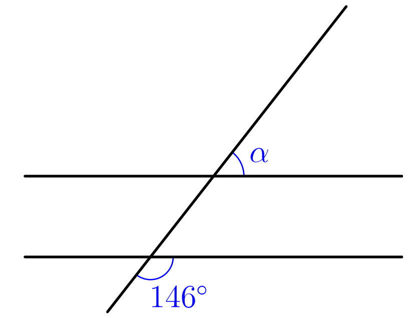
④


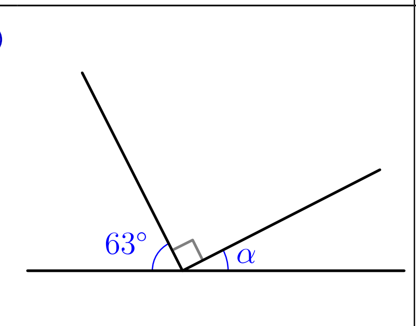
⑤


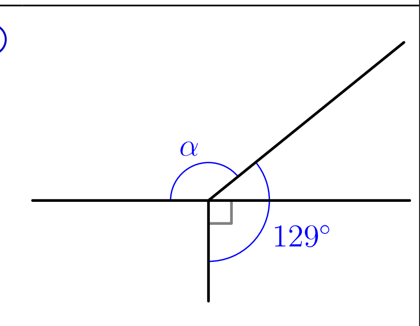
⑥


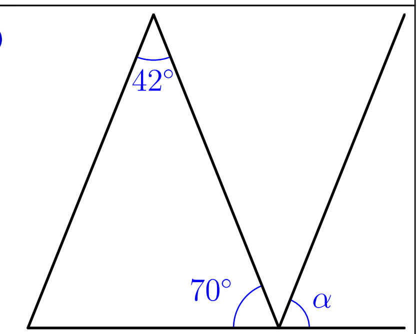
⑦


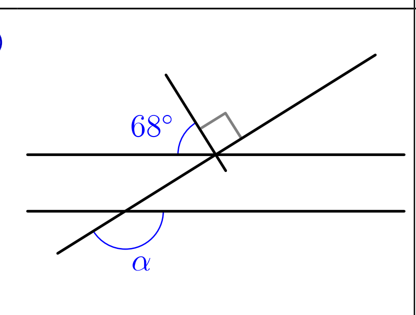
⑧


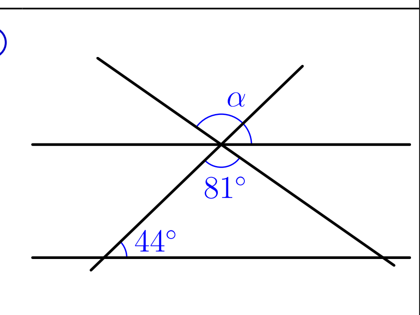
⑨


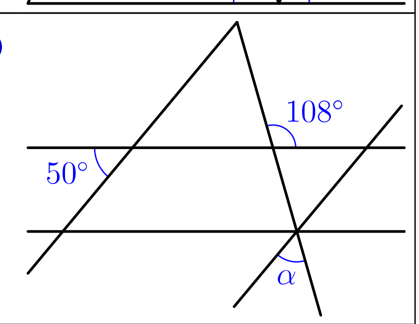
⑩


⑪


⑫


⑬


⑭


⑮


Triángulo

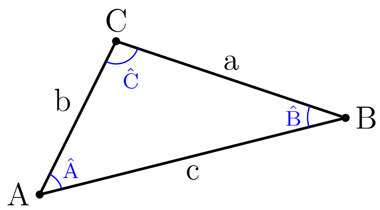
- Un triángulo es la región del plano delimitada por tres segmentos que tienen un extremo común diferente cada dos segmentos.
- Los segmentos que determinan el triángulo se llaman **lados** del triángulo.
- Los extremos de los segmentos se llaman **vértices** del triángulo.
- Los ángulos determinados por las semirrectas que contienen a dos lados e incluyen al triángulo se llaman **ángulos** del triángulo; a veces se les llama **ángulos internos** del triángulo. Coinciden los vértices de los ángulos con los vértices del triángulo.
- Los triángulos tienen tres lados, tres vértices y tres ángulos.

Notación

- Los vértices, como son puntos, se suelen nombrar con letras mayúsculas.
- El triángulo se nombra uniendo los nombres de los vértices.
- Los lados se suelen nombrar, además del nombre del segmento, con letras minúsculas. Muchas veces no se distingue entre el lado, que es un segmento, y la longitud del lado, que es una magnitud; hay que distinguirlo por el contexto.
- Los ángulos se pueden nombrar con cualquiera de las notaciones sobre ángulos, la que mejor convenga.
- Una notación muy habitual, aunque no obligatoria, es nombrar los lados con la misma letra que el vértice opuesto, pero minúscula, y los ángulos con el nombre del vértice con el signo «^» (acento circunflejo) sobre la letra.

Ejemplo 1

En el triángulo de la derecha hemos usado esta notación:



- Los vértices se llaman A, B y C.
- El triángulo se llama ABC.
- Los lados se llaman a=BC, b=AC y c=AB.
- Los ángulos se llaman $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

Propiedad 1

- Siempre se verifica que si un lado es mayor que otro, su ángulo opuesto también es mayor que el ángulo opuesto al otro lado.
- Una manera más corta de decir la propiedad es «a lado mayor se le opone ángulo mayor».
- Simbólicamente, con la notación del ejemplo (1),: $c > a \Rightarrow \hat{C} > \hat{A}$

Propiedad 2

El lado mayor del triángulo siempre es menor que la suma de los otros dos.

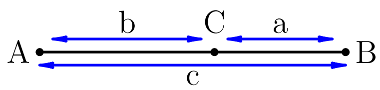
Ejemplo 2

En la figura del ejemplo (1) el lado mayor es c y se verifica $c < a + b$.

Triángulo degenerado

Si se pretende construir un triángulo usando tres segmentos de modo que el mayor de ellos sea igual a la suma de los otros dos, el resultado será solamente un segmento. Llamamos a ese segmento triángulo degenerado.

Ejemplo 3. Se ve un triángulo degenerado; $c = a + b$.



Suma de los ángulos de un triángulo

La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°.

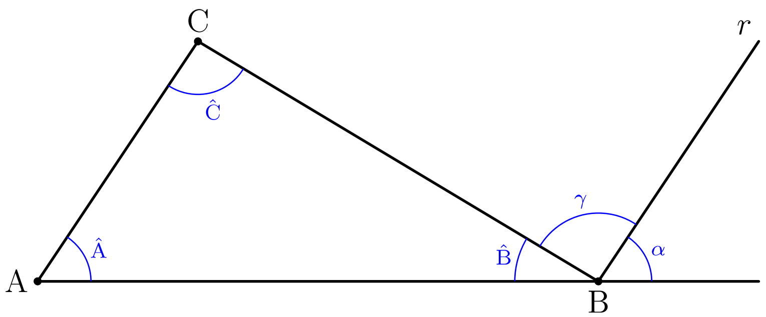
Demostración

Consideramos un triángulo ABC y llamamos a sus ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

Prolongamos el lado AB hacia la derecha.

Trazamos una semirrecta *r* con origen en B que sea paralela al lado AC.

Llamamos α y γ a los dos ángulos indicados.



Se verifica que

- ✱ $\alpha = \hat{A}$ por correspondientes.
- ✱ $\gamma = \hat{C}$ por alternos internos.
- ✱ $\alpha + \hat{B} + \gamma = 180°$ porque son consecutivos y completan un ángulo llano.

Por tanto, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \alpha + \hat{B} + \gamma = 180°$.

Aplicación

Esta propiedad permite calcular el valor de un ángulo de un triángulo conocidos los otros dos.

Ejemplo detallado

Enunciado: calcula el valor del ángulo desconocido de un triángulo sabiendo que los otros dos ángulos tienen unas amplitudes de 43° y 102°.

Resolución

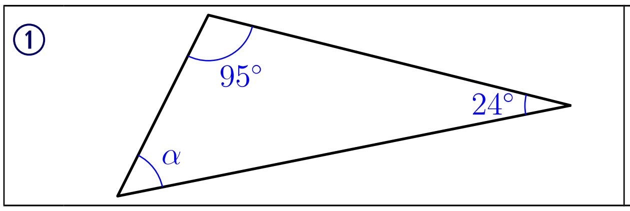
Los dos ángulos conocidos suman 43° + 102° = 145°.

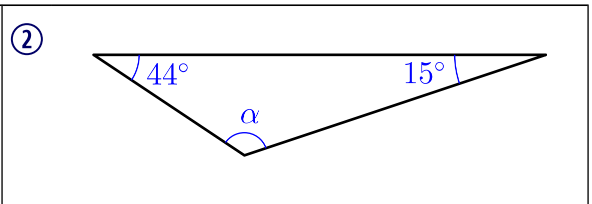
Lo que falta hasta 180° es el valor del tercer ángulo: 180° – 145° = 35°

Solución: 35°

Ejercicios resueltos

Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras:





Resolución 1

α = 180° – 95° – 24° = 61°

Resolución 2

α = 180° – 44° – 15° = 121°

Clasificaciones de un triángulo

Los triángulos se pueden clasificar de dos maneras diferentes:

- Según las longitudes de sus lados.
- Según las amplitudes de sus ángulos.

Por tanto, cada triángulo recibirá dos calificativos, uno por sus lados y otro por sus ángulos.

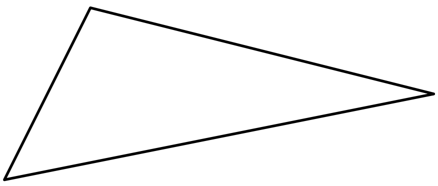
Clasificación por los lados

Según sean los lados de un triángulo, este puede ser:

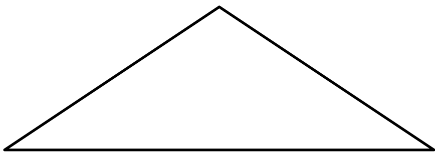
- **Escaleno**: tiene los tres lados de diferentes longitudes.
- **Isósceles**: tiene al menos dos lados de la misma longitud.
- **Equilátero**: sus tres lados tienen la misma longitud.

Ejemplos

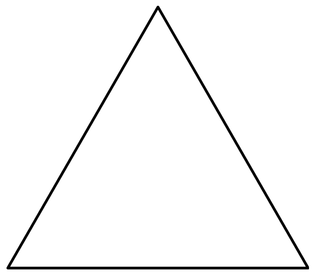
Vemos un ejemplo de cada una de las posibilidades:



Escaleno



Isósceles

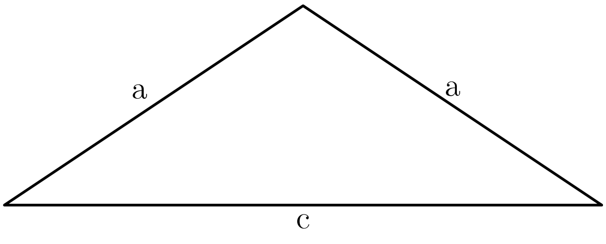


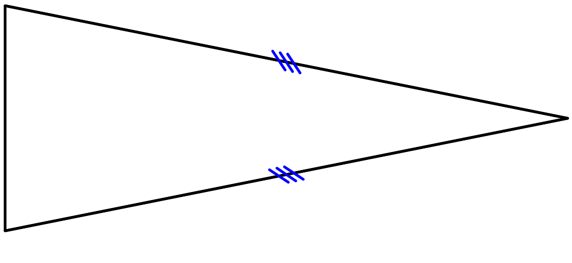
Equilátero

Precaución

Si nos guiamos solamente por una figura dibujada, podemos equivocarnos al decidir si dos lados son iguales o no. Por eso, hay que guiarse por lo que diga el enunciado y no tomar por iguales dos lados si no se dice explicitamente que lo son.

Para poder informar mediante una figura que dos lados son iguales se puede usar la misma letra para los dos (ejemplo de la izquierda) o bien alguna marca igual en los lados (ejemplo de la derecha).





Un error común

En muchos textos se define, erróneamente, el triángulo isósceles como el triángulo que tiene dos lados iguales y **uno desigual**. Realmente, el triángulo equilátero es un caso particular de triángulo isósceles.

Si definiéramos mal el concepto de triángulo isósceles, la solución del problema «¿cuál es el triángulo isósceles de perímetro 3 m que tiene mayor área?» sería «ninguno», cuando la solución correcta es «el triángulo equilátero que tiene los lados de 1 m». Aprenderás en el nivel 6 a resolver este bonito problema.

Clasificaciones de un triángulo

Los triángulos se pueden clasificar de dos maneras diferentes:

- Según las longitudes de sus lados.
- Según las amplitudes de sus ángulos.

Por tanto, cada triángulo recibirá dos calificativos, uno por sus lados y otro por sus ángulos.

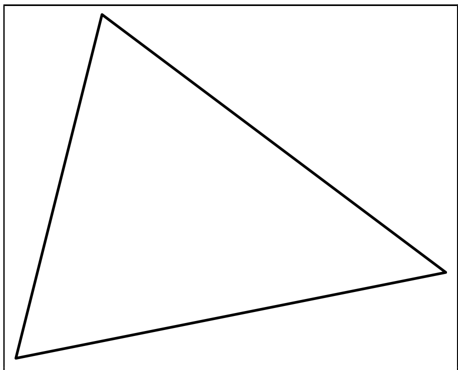
Clasificación por los ángulos

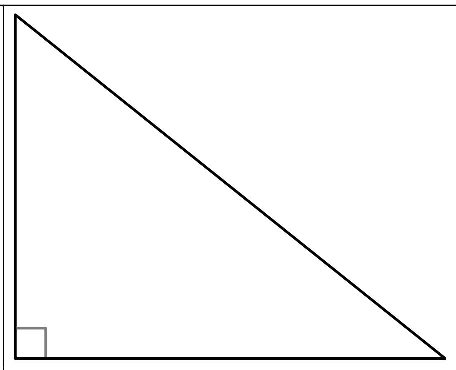
Según sean los ángulos de un triángulo, este puede ser:

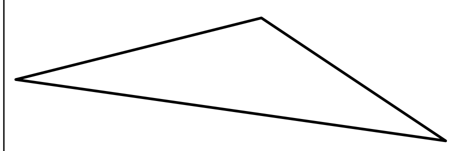
- **Acutángulo**: tiene los tres ángulos agudos.
- **Rectángulo**: tiene un ángulo recto.
- **Obtusángulo**: tiene un ángulo obtuso.

Ejemplos

Vemos un ejemplo de cada una de las posibilidades:


Acutángulo


Rectángulo


Obtusángulo

Precaución

Si nos guiamos solamente por una figura dibujada, podemos equivocarnos al decidir si uno de los ángulos es recto o no. Por eso, hay que guiarse por lo que diga el enunciado o bien asegurarse de que en la figura aparece la marca de ángulo recto.

Propiedad

Un triángulo no puede tener dos ángulos rectos.

Demostración

Si tuviera dos ángulos rectos, la suma de los tres ángulos sería mayor que 180°.

Propiedad

Un triángulo no puede tener dos ángulos obtusos.

Demostración

Si tuviera dos ángulos obtusos, la suma de los tres ángulos sería mayor que 180°.

Observación

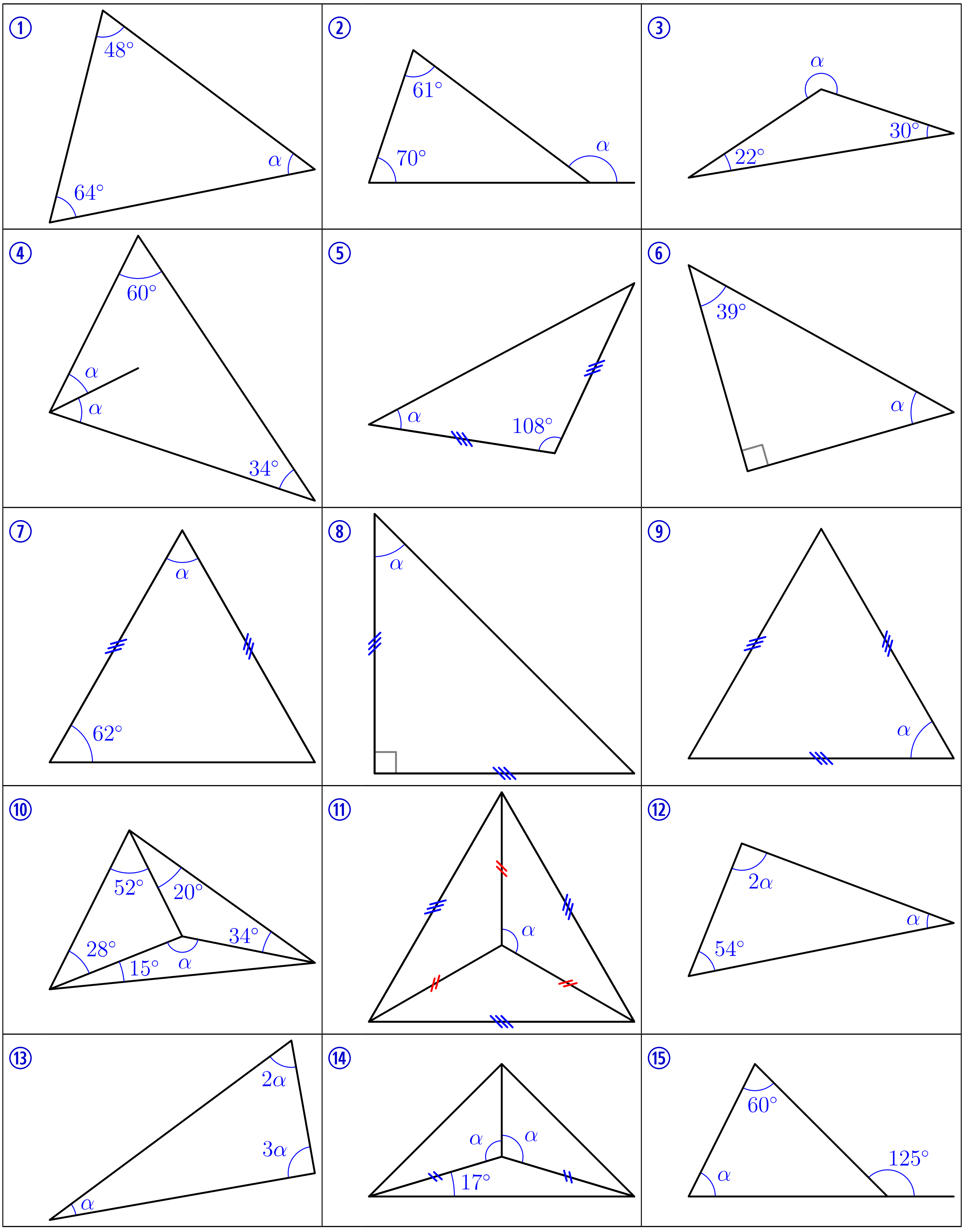
Las dos propiedades se han demostrado mediante el método de reducción al absurdo.

Clasificación por los ángulos conocidos los lados

Si conocemos las longitudes de los tres lados de un triángulo, podemos clasificar el triángulo por sus ángulos. Veremos el metodo cuando estudiemos, dentro de poco, el teorema de Pitágoras.

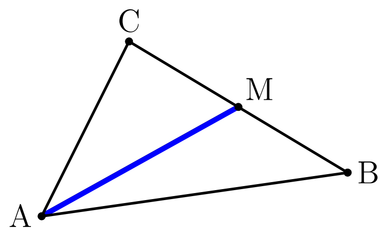
Enunciados

Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras:



Medianas

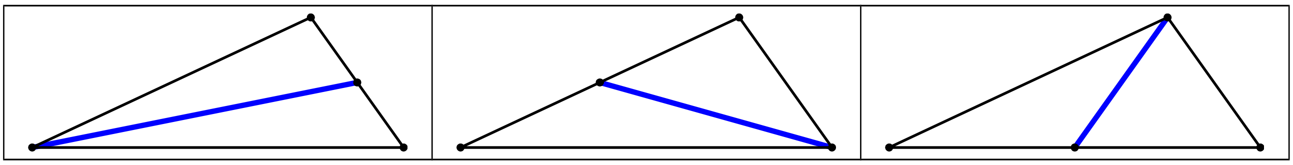
✱ Una mediana de un triángulo es un segmento que tiene como extremos un vértice y el punto medio del lado opuesto al vértice.



✱ **Ejemplo 1**. A la derecha se ve el triángulo ABC. Si llamamos M al punto medio del lado BC, la mediana correspondiente al vértice A es el segmento AM, marcado en azul.

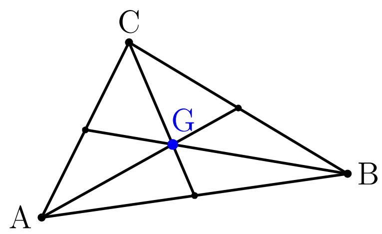
✱ Todos los triángulos tienen tres medianas, una por cada vértice.

✱ **Ejemplo 2**. Vemos las tres medianas de un triángulo:



Baricentro

✱ Propiedad: las tres medianas de un triángulo siempre se cortan en un punto.



✱ Definición: se llama baricentro al punto de corte de las tres medianas de un triángulo.

✱ **Ejemplo 3**. A la derecha se ve el triángulo ABC y sus tres medianas. Hemos llamado G al baricentro.

Propiedad matemática del baricentro

El baricentro divide cada mediana en dos segmentos, con esta propiedad:

✱ El segmento que va desde el baricentro al vértice mide el doble que el segmento que va desde el baricentro hasta el punto medio del lado opuesto.

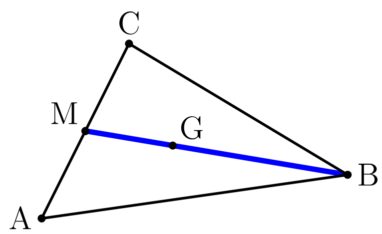
Como consecuencia, también se verifica que:

✱ El segmento que va desde el baricentro al vértice mide dos tercios de la longitud de la mediana.

✱ El segmento que va desde el baricentro al punto medio del lado opuesto mide un tercio de la longitud de la mediana.

Ejemplo 4

A la derecha se ve el triángulo ABC, la mediana correspondiente al vértice B y el baricentro, G.



Se verifica:

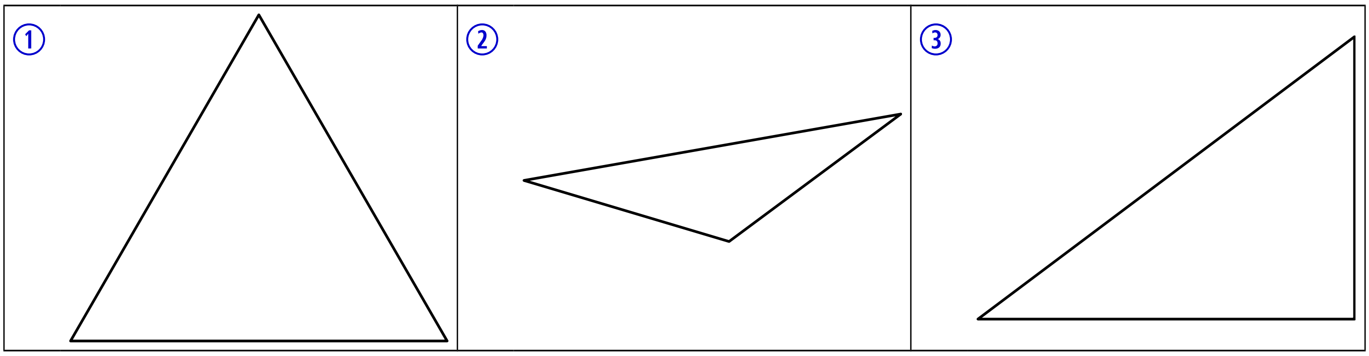
(a) $\overline{GB} = 2 \cdot \overline{GM}$ (b) $\overline{GB} = \frac{2}{3} \cdot \overline{MB}$ (c) $\overline{GM} = \frac{1}{3} \cdot \overline{MB}$

Propiedad física del baricentro

El baricentro de un triángulo es su **centro de masas** o **centro de gravedad**, lo que significa que si fabricaras un triángulo de un material homogéneo, lo podrías sostener en equilibrio sobre un dedo puesto en el baricentro. La costumbre de llamar «G» al baricentro proviene de la letra inicial de «gravedad».

Enunciados

Dibuja las medianas de los siguientes triángulos y marca el baricentro.



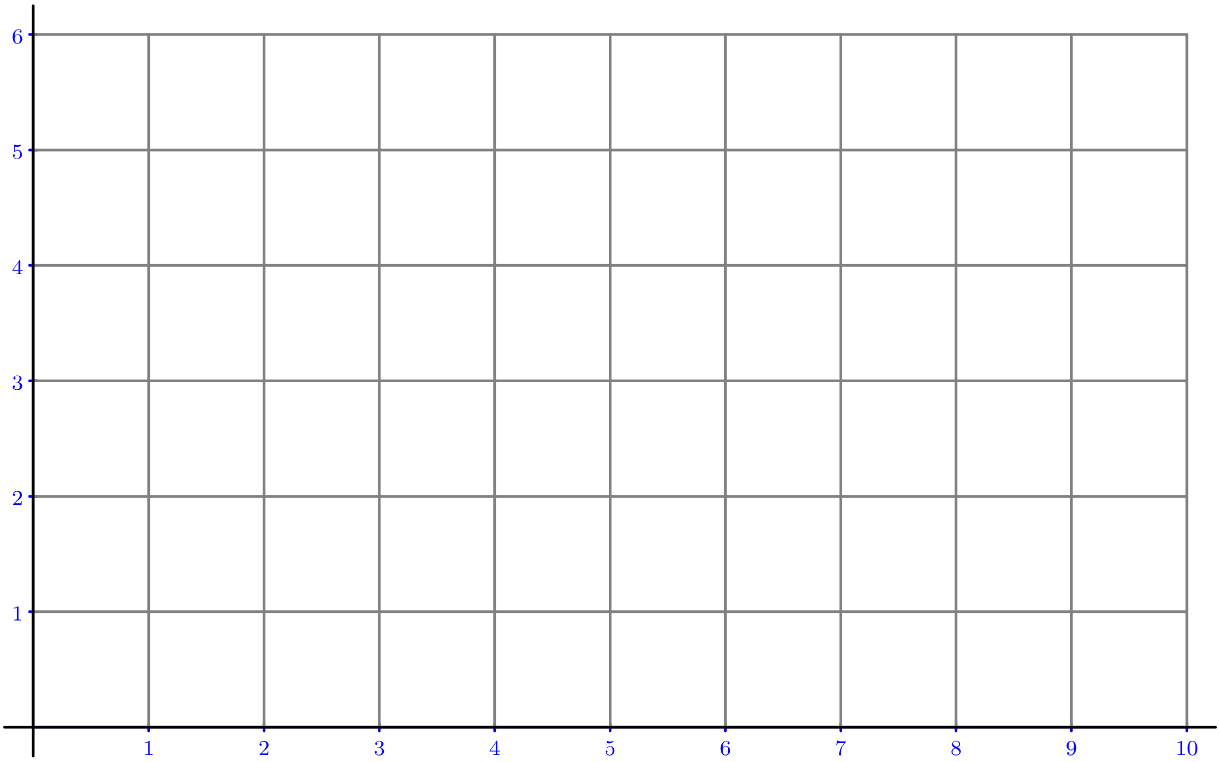
Enunciados

Dados los puntos A=(1,1), B=(9,3), C=(5,5):

④ a) Representa gráficamente los puntos y, con la ayuda de una regla, representa las medianas del triángulo ABC.

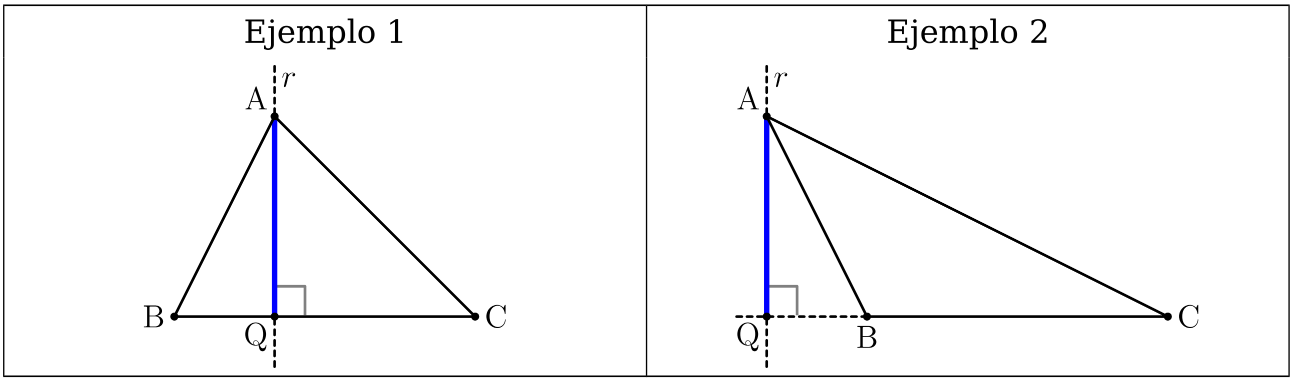
b) Di cuáles son las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo ABC. Indicación: son todas números naturales.

c) Di cuáles son las coordenadas del baricentro del triángulo ABC. Indicación: las dos son números naturales.



Alturas

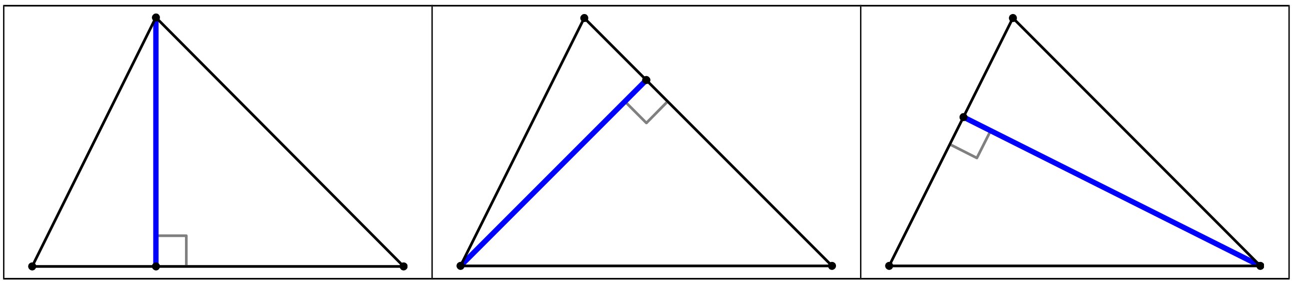
- ✱ Una altura de un triángulo es un segmento que tiene un extremo en un vértice y el otro en el punto de corte de dos rectas: la recta que pasa por el vértice y es perpendicular al lado y la recta que contiene al lado opuesto al vértice.
- ✱ **Ejemplos**. Consideramos el triángulo ABC. Llamamos *r* a la recta que pasa por A y es perpendicular al lado BC; llamamos Q al punto de corte de la recta *r* con la recta que contiene al lado BC. La altura correspondiente al vértice A es el segmento AQ, marcado en azul.



Observa que en un ejemplo el punto Q está en el lado BC y en el otro ejemplo el punto Q está en la prolongación del lado BC.

- ■ Nota: el punto Q es el que hemos llamado anteriormente proyección del punto A sobre la recta que contiene al lado BC.

- ✱ Todos los triángulos tienen tres alturas, una por cada vértice.
- ✱ **Ejemplo 3**. Vemos las tres alturas de un triángulo:

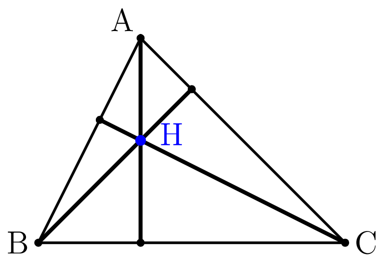


Propiedad de la altura

La longitud de la altura es igual a la distancia del vértice al lado opuesto.

Ortocentro

- ✱ Propiedad: las rectas que contienen a las tres alturas de un triángulo siempre se cortan en un punto.
- ✱ Definición: se llama ortocentro al punto de corte de las rectas que contienen a las alturas de un triángulo.
- ✱ **Ejemplo 4**. A la derecha se ve el triángulo ABC y sus tres alturas. Hemos llamado H al ortocentro.

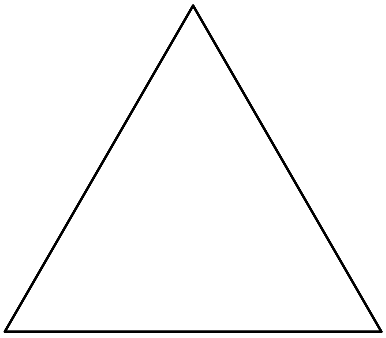
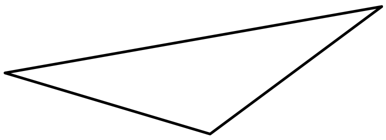
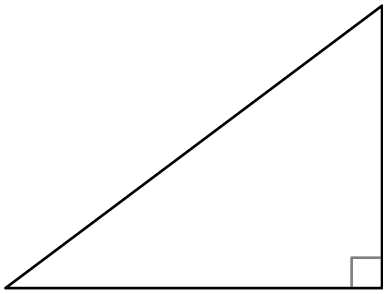


Posición del ortocentro

- ✱ Si el triángulo es acutángulo, el ortocentro está en el interior del triángulo.
- ✱ Si el triángulo es rectángulo, el ortocentro es el vértice del ángulo recto.
- ✱ Si el triángulo es obtusángulo, el ortocentro está en el exterior del triángulo.

Enunciados

Dibuja las alturas de los siguientes triángulos y marca el ortocentro.

①	②	③
		

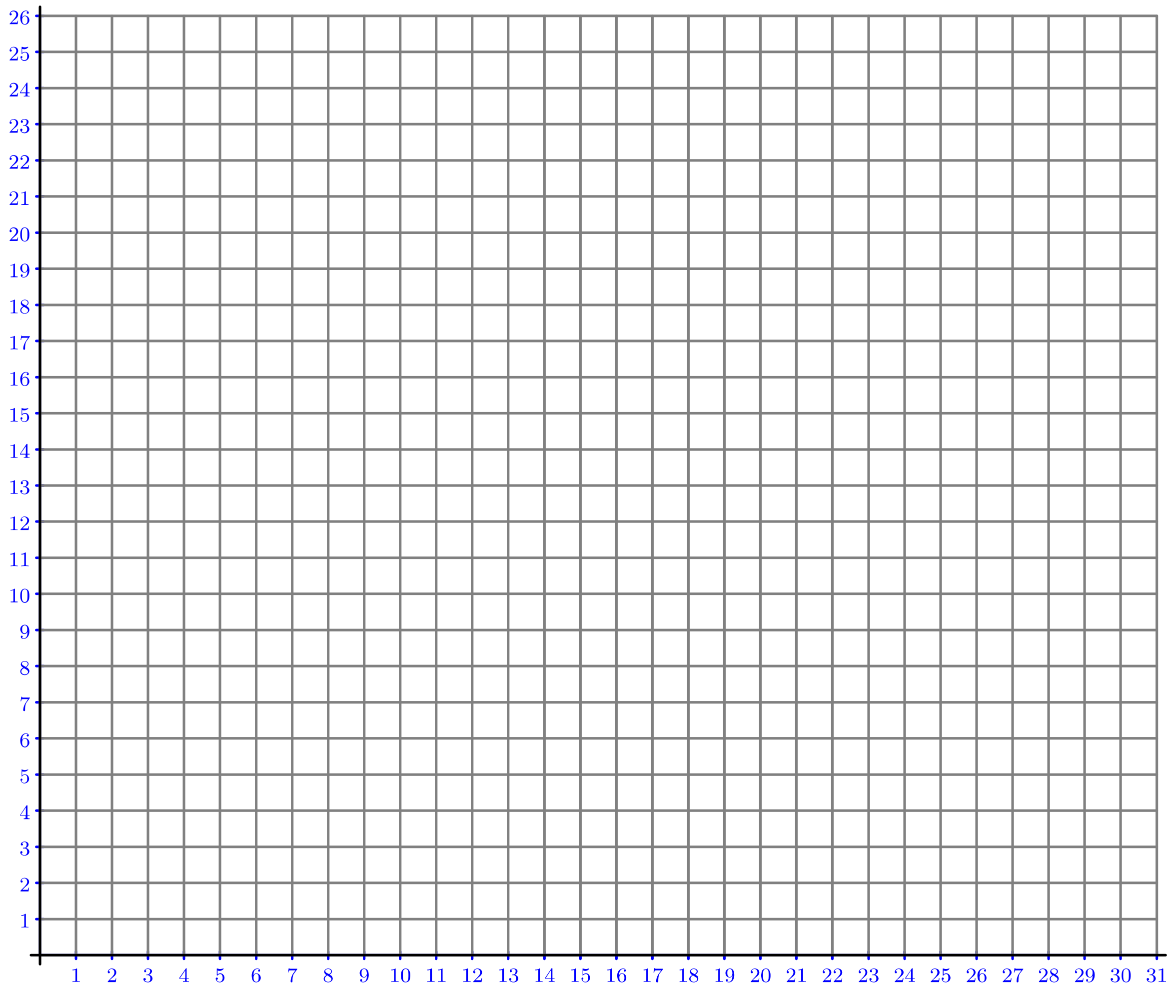
Enunciados

Dados los puntos A=(2,1), B=(30,5), C=(20,25):

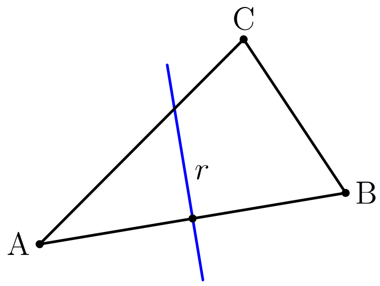
④ a) Representa gráficamente los puntos y, con la ayuda de una regla, representa las alturas del triángulo ABC.

b) Di cuáles son las coordenadas de los puntos de corte de las alturas con los lados del triángulo ABC. Indicación: son todas números naturales.

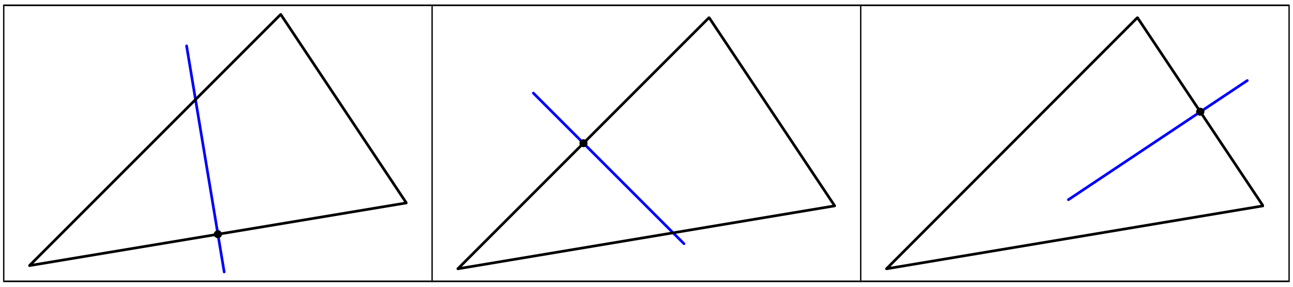
c) Di cuáles son las coordenadas del ortocentro del triángulo ABC. Indicación: las dos son números naturales.



Mediatrices



- Una mediatriz de un triángulo es la recta mediatriz de uno de sus lados.
- **Ejemplo 1**. Consideramos el triángulo ABC. La recta *r* es la mediatriz del segmento AB, luego es la mediatriz del triángulo correspondiente al lado AB.
- Todos los triángulos tienen tres mediatrices, una por cada lado.
- **Ejemplo 2**. Vemos las tres mediatrices de un triángulo:

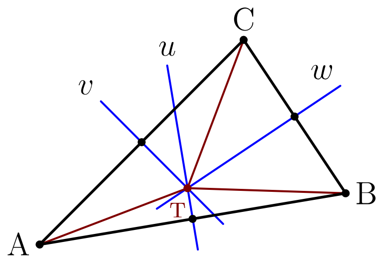


Propiedad de las mediatrices

Las tres mediatrices de un triángulo siempre se cortan en un punto.

Demostración

Consideramos el triángulo ABC y llamamos *u* a la mediatriz del lado AB, *v* a la mediatriz del lado AC y *w* a la mediatriz del lado BC.



Las rectas *u* y *v* se cortan en un punto que llamamos T y se verifica que:

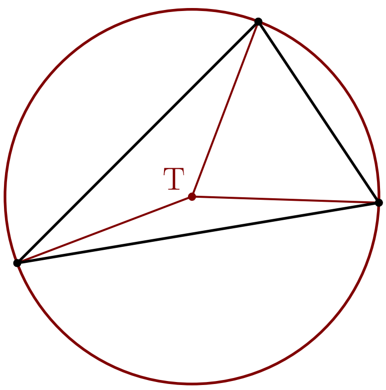
- d(T,A) = d(T,B) por ser T un punto de *u*.
- d(T,A) = d(T,C) por ser T un punto de *v*.

Por tanto d(T,B) = d(T,C) y T debe pertenecer a *w*.

Circuncentro

- Se llama circuncentro al punto de corte de las mediatrices de un triángulo.
- **Ejemplo 3**. En la demostración anterior se ve el triángulo ABC, sus tres mediatrices y el circuncentro, que hemos llamado T.

Propiedad del circuncentro



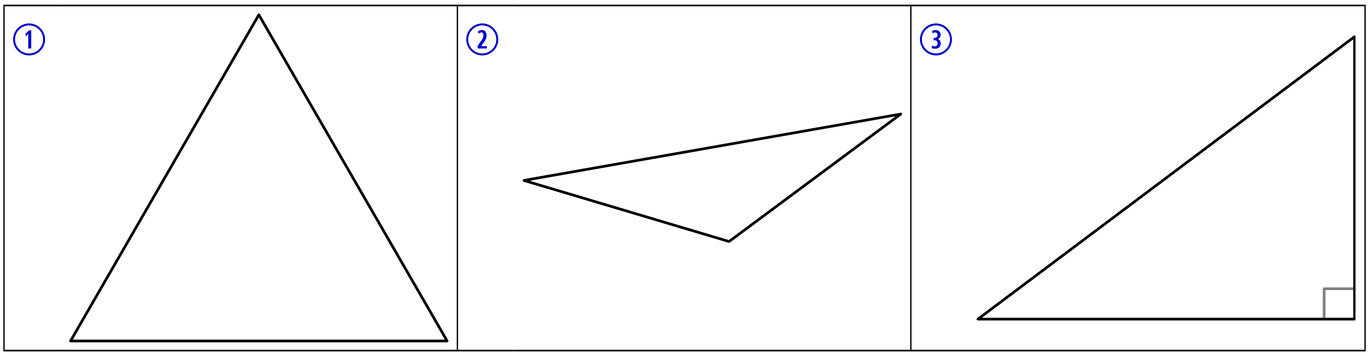
El circuncentro de un triángulo es el centro de una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo, llamada circunferencia circunscrita al triángulo.

Posición del circuncentro

- Si el triángulo es acutángulo, el circuncentro está en el interior del triángulo.
- Si el triángulo es rectángulo, el circuncentro es el punto medio del lado opuesto al vértice del ángulo recto.
- Si el triángulo es obtusángulo, el circuncentro está en el exterior del triángulo.

Enunciados

Dibuja las mediatrices de los siguientes triángulos y marca el circuncentro.



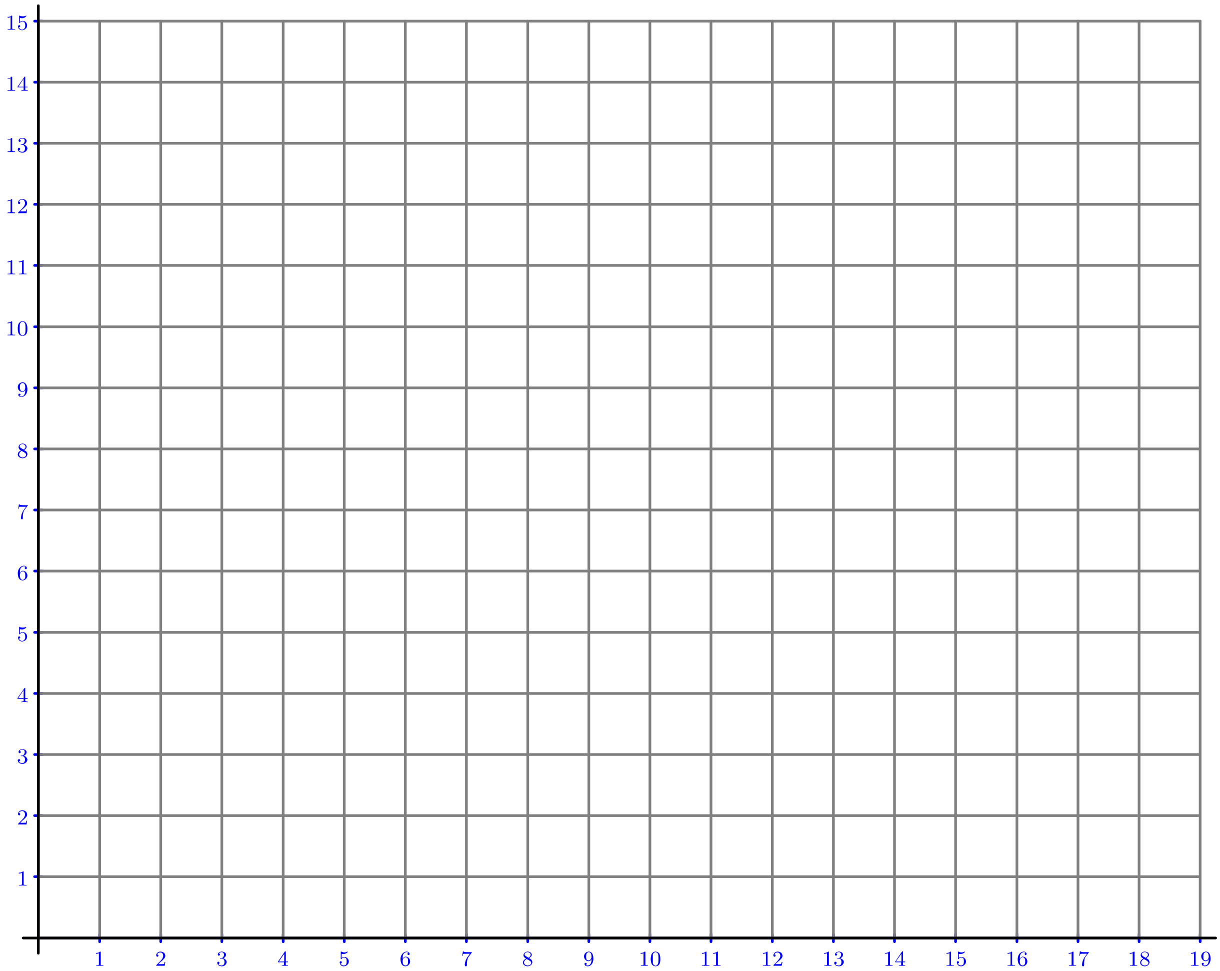
Enunciados

Dados los puntos A=(2,0), B=(0,14), C=(18,8):

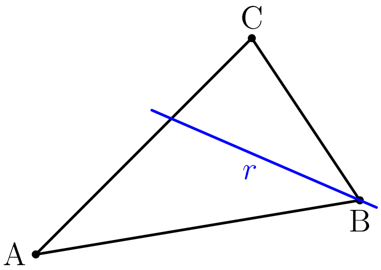
④ a) Representa gráficamente los puntos y, con la ayuda de una regla, representa las mediatrices del triángulo ABC.

b) Di cuáles son las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo ABC. Indicación: son todas números naturales.

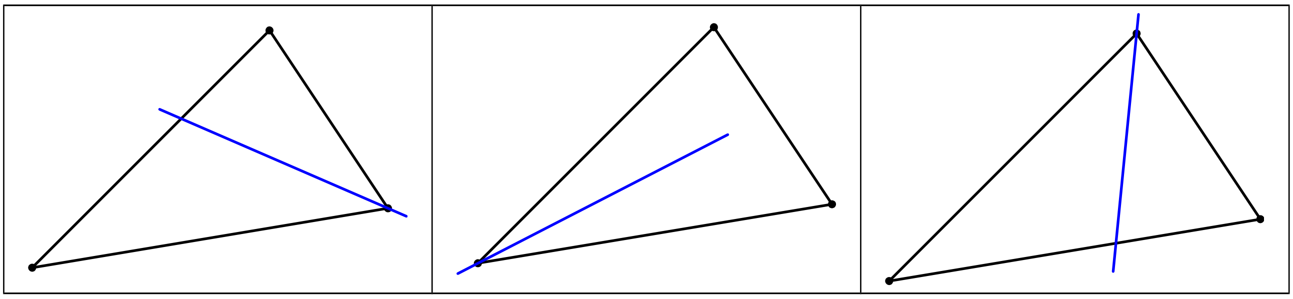
c) Di cuáles son las coordenadas del circuncentro del triángulo ABC. Indicación: las dos son números naturales.



Bisectrices



- Una bisectriz de un triángulo es la recta bisectriz de uno de sus ángulos.
- **Ejemplo 1**. Consideramos el triángulo ABC. La recta r es la bisectriz del ángulo ABC, luego es la bisectriz del triángulo correspondiente al vértice B.
- Todos los triángulos tienen tres bisectrices, una por cada ángulo o por cada vértice.
- **Ejemplo 2**. Vemos las tres bisectrices de un triángulo:

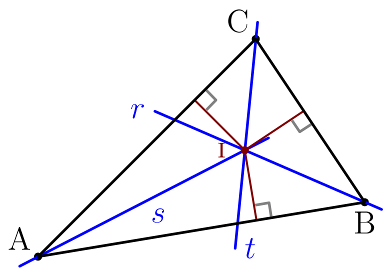


Propiedad de las bisectrices

Las tres bisectrices de un triángulo siempre se cortan en un punto.

Demostración

Consideramos el triángulo ABC y llamamos r a la bisectriz del ángulo en B, s a la bisectriz del ángulo en A y t a bisectriz del ángulo en C.



Las rectas r y s se cortan en un punto que llamamos I y se verifica que:

- d(I,AB) = d(I,BC) por ser I un punto de r.
- d(I,AB) = d(I,AC) por ser I un punto de s.

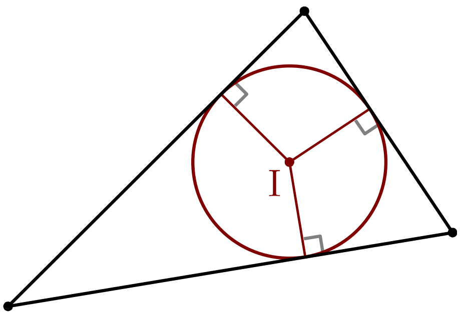
Por tanto d(I,BC) = d(I,AC) e I debe pertenecer a t.

Incentro

- Se llama incentro al punto de corte de las bisectrices de un triángulo.
- **Ejemplo 3**. En la demostración anterior se ve el triángulo ABC, sus tres bisectrices y el incentro, que hemos llamado I.
- El incentro siempre se encuentra en el interior del triángulo.

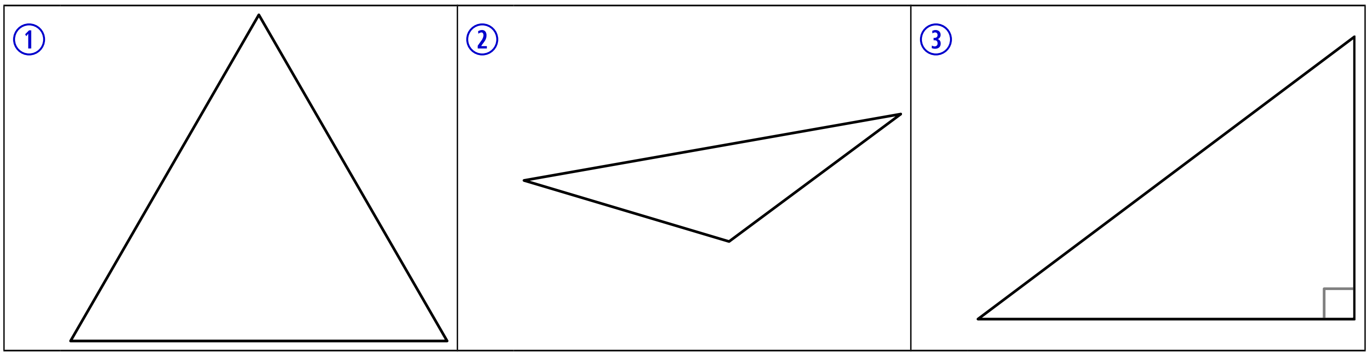
Propiedad del incentro

El incentro de un triángulo es el centro de una circunferencia completamente interior al triángulo y que toca a los tres lados, llamada circunferencia inscrita en el triángulo.



Enunciados

Dibuja las bisectrices de los siguientes triángulos y marca el incentro.

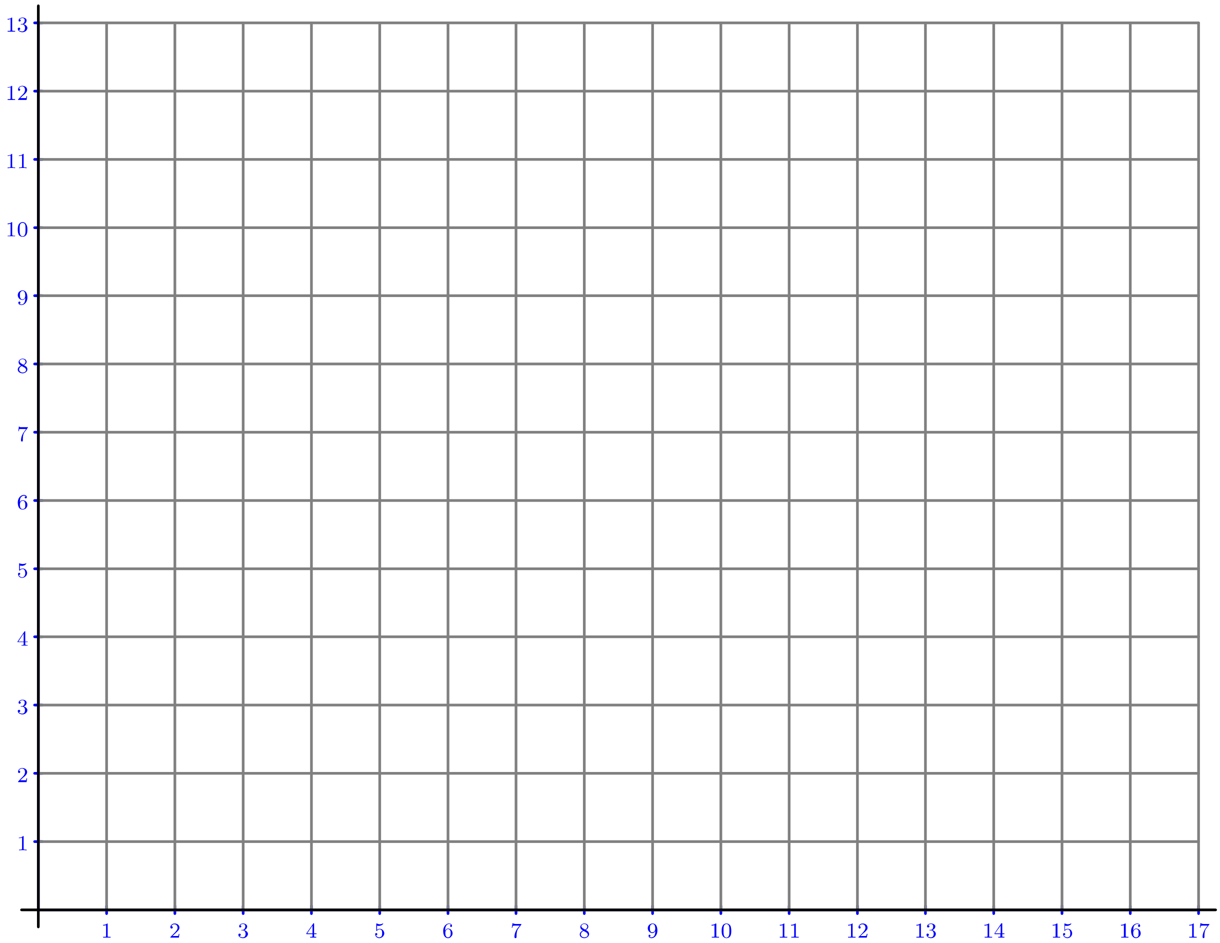


Enunciados

Dados los puntos A=(0,0), B=(7,0), C=(16,12):

④ a) Representa gráficamente los puntos y, con la ayuda de una regla, representa las bisectrices del triángulo ABC.

b) Di cuáles son las coordenadas del circuncentro del triángulo ABC. Indicación: las dos son números naturales.



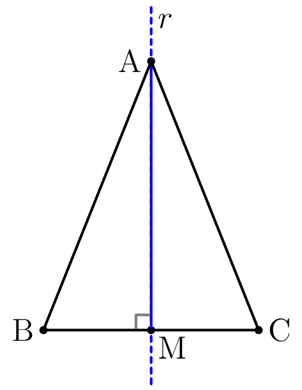
Coincidencias en los triángulos isósceles

- ✱ En un triángulo isósceles la altura correspondiente al vértice común a los dos lados iguales coincide con la mediana de ese vértice.
- ✱ En un triángulo isósceles la bisectriz correspondiente al vértice común a los dos lados iguales coincide con la mediatriz del lado opuesto a ese vértice.
- ✱ En un triángulo isósceles la bisectriz correspondiente al vértice común a los dos lados iguales contiene a la mediana de ese vértice.

Ejemplo 1

El triángulo ABC de la figura de la derecha es un triángulo isósceles porque $\overline{AB} = \overline{AC}$. Llamamos M al punto medio del segmento BC y *r* a la recta que pasa por A y por M. Se verifica:

- ✱ El segmento AM es la altura correspondiente al vértice A y la mediana correspondiente al vértice A.
- ✱ La recta *r* es la bisectriz del ángulo en A y la mediatriz del segmento BC.
- ✱ La recta *r* contiene al segmento AM.



Coincidencias en los triángulos equiláteros

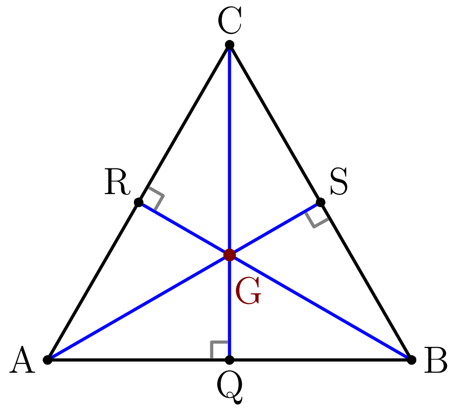
Los triángulos equiláteros presentan en cada vértice todas las coincidencias correspondientes a los lados iguales de un triángulo isósceles, pero además, se verifican otras propiedades:

- ✱ En un triángulo equilátero todas las alturas y todas las medianas tienen la misma longitud.
- ✱ En un triángulo equilátero coinciden el baricentro, el ortocentro, el circuncentro y el incentro.

Ejemplo 2

El triángulo ABC de la figura de la derecha es un triángulo equilátero. Llamamos Q, R y S a los puntos medios de los lados y G al punto de corte de las medianas. Se verifica:

- ✱ Los segmentos AS, BR y CQ son alturas y medianas y todos miden lo mismo:
  $\overline{AS} = \overline{BR} = \overline{CQ}$
- ✱ El punto G es el baricentro, el ortocentro, el circuncentro y el incentro del triángulo ABC.



Medianas y baricentro

- Las medianas son segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.
- Las tres medianas se cortan en un punto llamado baricentro.
- El baricentro es el centro de masas del triángulo.
- El prefijo bar- proviene del griego βάρος («baros», que significa pesadez o gravedad).

Alturas y ortocentro

- Las alturas son segmentos que parten de un vértice y cortan perpendicularmente a la recta que contiene al lado opuesto, donde tienen el otro extremo.
- Las tres alturas se cortan en un punto llamado ortocentro.
- El prefijo orto- proviene del griego ὀρθός («ortos», que significa derecho o recto); en matemáticas significa «perpendicular».

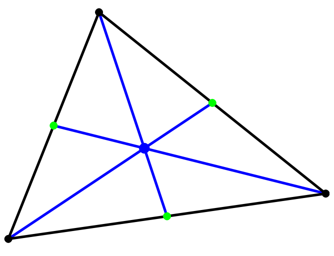
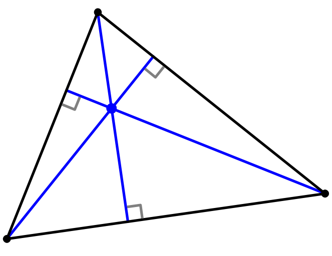
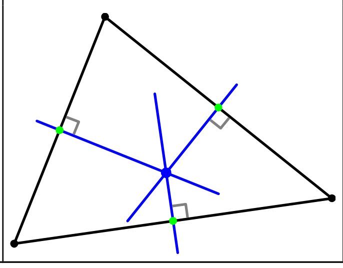
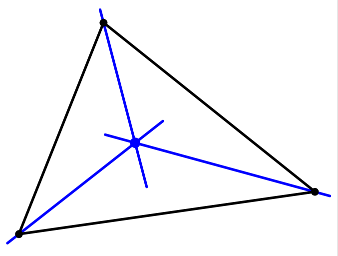
Mediatrices y circuncentro

- Las mediatrices de un triángulo son las mediatrices de sus lados.
- Las tres mediatrices se cortan en un punto llamado circuncentro.
- El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, de ahí recibe el nombre.

Bisectrices e incentro

- Las bisectrices de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos.
- Las tres bisectrices se cortan en un punto llamado incentro.
- El incentro es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, de ahí recibe el nombre.

Ejemplos

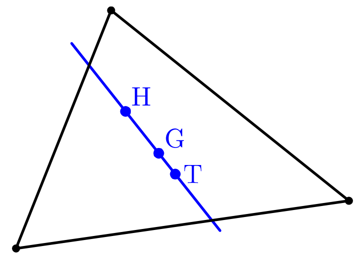
Medianas y baricentro	Alturas y ortocentro	Mediatrices y circuncentro	Bisectrices e incentro
			

Recta de Euler

El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) demostró en 1765 que en cualquier triángulo el baricentro, el ortocentro y el circuncentro siempre están en la misma recta. En su honor, esta recta se llama recta de Euler.

Ejemplo

En la ilustración se señalan el baricentro (G), el ortocentro (H) y el circuncentro (T) del triángulo de los ejemplos anteriores, unidos mediante la recta de Euler.



Resolución de problemas de geometría

A este nivel de enseñanza, la geometría debe ser muy visual, de modo que una buena representación gráfica de los problemas es una ayuda imprescindible. Si el enunciado del problema no incluye un dibujo, debes hacerlo. No hace falta que el dibujo sea perfecto, pero cuanto más aproximado sea, más te ayudará.

Métodos de resolución

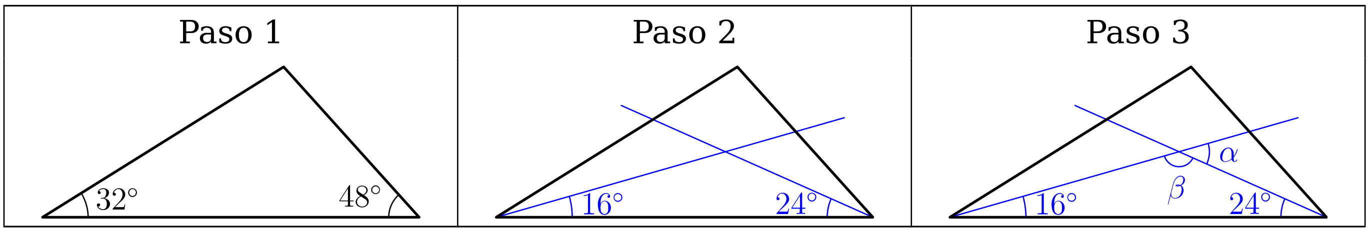
Hay dos técnicas muy útiles en la resolución de problemas de geometría:

- Imaginar el problema resuelto. Consiste en suponer que el problema se puede resolver y dibujarlo ya resuelto antes de hacer los cálculos. Por ejemplo, si el problema pide dibujar un triángulo con ciertas condiciones, empezar por hacer el dibujo de cómo podría ser el triángulo.
- Trazar líneas auxiliares. Consiste en añadir al dibujo que venga en el enunciado o en el que hemos hecho nosotros alguna línea más que nos ayude a relacionar los datos con la incógnita. Por ejemplo, alguna línea paralela a otra o descomponer un triángulo en dos más pequeños.

Enunciado

Los valores de dos ángulos de un triángulo son 32° y 48°. Calcula el menor de los ángulos que forman las bisectrices de esos ángulos.

Resolución



- Paso 1: dibujamos el triángulo lo mejor posible. Da igual la posición del triángulo y de sus ángulos, eso no influye en la resolución.
- Paso 2: dibujamos las bisectrices de los ángulos; no tiene por qué ser un dibujo perfecto.
- Paso 3: marcamos el ángulo que nos piden, que llamamos α, y también un ángulo auxiliar, que llamamos β, que nos servirá para resolver el problema.

Como los ángulos 16°, 24° y β son los tres ángulos de un triángulo, suman 180°, por lo que $\beta = 180° - 16° - 24° = 140°$

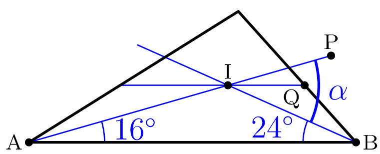
Como α y β forman un ángulo llano, suman 180°, así que $\alpha = 180° - 140° = 40°$

Solución: 40°

Resolución alternativa

Casi siempre hay varias maneras de resolver los problemas, por eso debes dedicar un tiempo a buscar distintas posibilidades y luego decidirte por la que más te guste. También hay distintas formas de escribir las resoluciones.

Podríamos haber nombrado algunos puntos, trazado una línea paralela auxiliar y ver el ángulo pedido como la suma de dos ángulos:

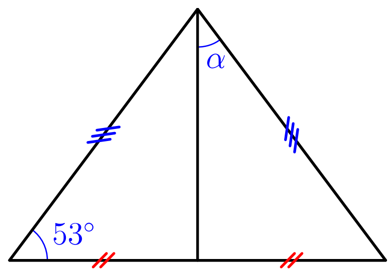


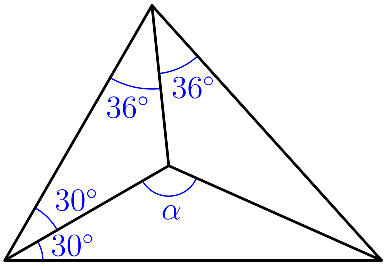
$$\alpha = \widehat{PIQ}+\widehat{QIB} = 16° + 24° = 40°$$

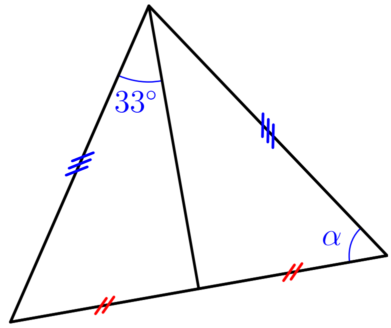
Solución: 40°

Enunciados

Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras:

①


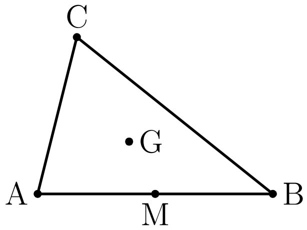
②


③


④ En el triángulo ABC de la figura se verifica:

- G es el baricentro del triángulo
- $\overline{AM} = \overline{MB}$
- $\overline{CM} = 12$ m

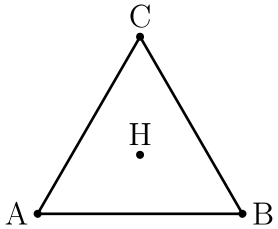
Calcula $\overline{CG}$.



⑤ En el triángulo ABC de la figura se verifica:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$
- H es el ortocentro del triángulo
- $\overline{AH} = 5$ m

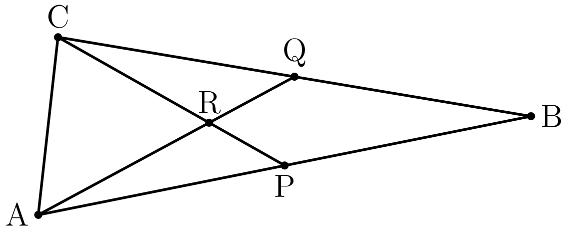
Calcula $\overline{BH}$.



⑥ En el triángulo ABC de la figura se verifica:

- $\overline{AP} = \overline{BP}$
- $\overline{CQ} = \overline{BQ}$
- $\overline{AR} = 14$ m

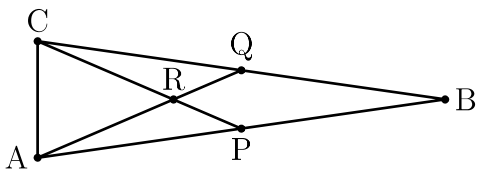
Calcula $\overline{RQ}$.



⑦ En el triángulo ABC de la figura se verifica:

- $\overline{AP} = \overline{PB} = \overline{CQ} = \overline{QB}$
- $\overline{CR} = 22$ m

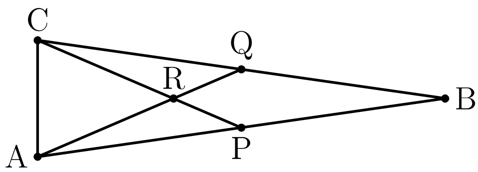
Calcula $\overline{RQ}$.



⑧ En el triángulo ABC de la figura se verifica:

- $\overline{AP} = \overline{PB} = \overline{CQ} = \overline{QB}$
- $\overline{AR} = 14$ m

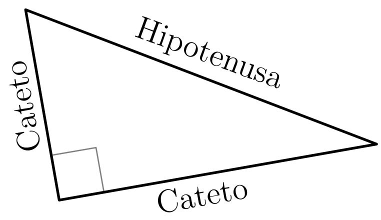
Calcula $\overline{CP}$.



⑨ Calcula la longitud de las alturas de un triángulo equilátero sabiendo que la distancia del incentro del triángulo a uno de sus vértices es 4 m.

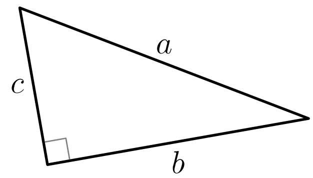
⑩ Si se unen los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero se obtienen cuatro triángulos más pequeños, cuyas alturas miden 9 m. Calcula la longitud de las medianas del triángulo original.

Nombres de los lados de un triángulo rectángulo



- En un triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**. La palabra procede del griego ὑποτείνουσα, palabra que se compone de hipó (debajo) y téino (estirar).
- En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos**. La palabra procede del griego κάθετος (perpendicular).

Teorema de Pitágoras



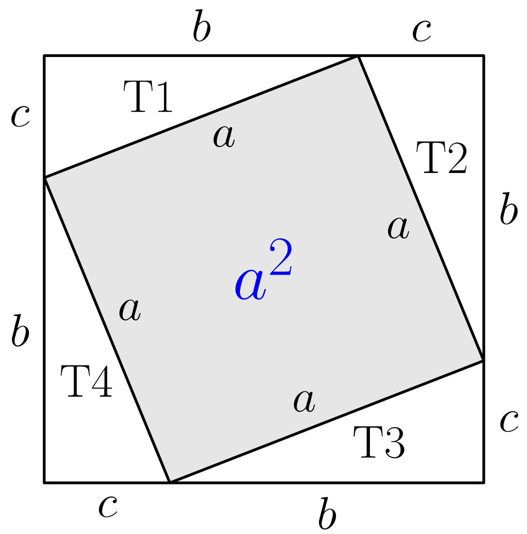
- Enunciado con palabras: en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
- Enunciado con símbolos: si en un triángulo rectángulo llamamos a a la hipotenusa y b y c a los catetos, se verifica $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$.

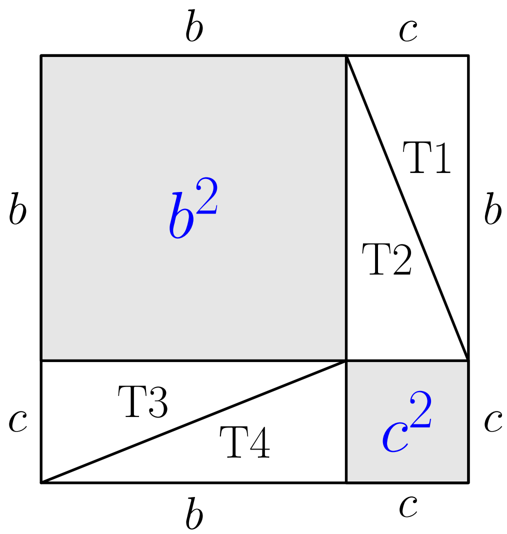
Demostración

Hay más de trescientas demostraciones del teorema de Pitágoras. Elegimos una particularmente fácil de entender.

Llamamos a a la hipotenusa y b y c a los catetos de un triángulo rectángulo.

Dibujamos dos veces un cuadrado que tenga de lado b+c, como se indica:





En la figura de la izquierda aparece cuatro veces el triángulo original (T1, T2, T3 y T4) y además un cuadrado de lado a; tendrás que comprobar tú mismo que los ángulos son rectos. En la figura de la derecha además de los cuatro triángulos aparecen dos cuadrados de lados b y c. Por tanto, $a^2 = b^2 + c^2$.

Importancia del teorema

Este teorema es sumamente importante porque se utiliza muy a menudo en matemáticas y en física. En algunas ocasiones se le ha llamado el puente de los asnos, para indicar que quien no lo cruzara no estaba capacitado para seguir adelante con las matemáticas. Así que dedícale el tiempo que necesites para dominarlo.

Cálculo de la hipotensusa

La primera aplicación del teorema de Pitágoras es calcular la longitud de la hipotenusa conocidas las longitudes de los catetos.

El teorema de Pitágoras enunciado con símbolos

Si en un triángulo rectángulo llamamos a a la longitud de la hipotenusa y b y c a las de los catetos, se verifica $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$.

Ejercicio 1

Enunciado: calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 metros y 8 metros.

Comentario: en el enunciado no hay dibujo ni nombres, así que podemos hacer un dibujo aproximado si nos puede ayudar y podemos asignar nombres a la hipotenusa y a los catetos, si queremos; pero en este ejercicio lo único que merece la pena es asignar un nombre a la hipotenusa. Como los catetos se miden en metros, obtendremos la hipotenusa también en metros.

Resolución

Llamamos a a la longitud de la hipotenusa.

Por el teorema de Pitágoras, $a^2 = 6^2 + 8^2$

Hacemos las operaciones del segundo miembro: $a^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Sabemos que a es positivo y su cuadrado es 100, luego $a = \sqrt{100} = 10$

Solución: 10 m

Ejercicio 2

Enunciado: calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 metros y 4 metros. Da el resultado en metros redondeando a la décima.

Comentario: este ejercicio no tiene solución exacta, pero el enunciado nos pide una aproximación concreta, así que hay que respetarla; tendremos que usar el método de cálculo de la raíz cuadrada que vimos en la parte Aritmética.

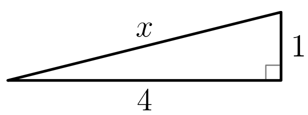
Resolución

Llamamos a a la longitud de la hipotenusa.

$a^2 = 7^2 + 4^2 = 49 + 16 = 65 \Rightarrow a = \sqrt{65} = 8{,}1$

Solución: 8,1 m

Ejercicio 3



Enunciado: calcula el valor de x en la figura adjunta.

Comentario: como en este ejercicio no hay unidades, responderemos sin unidades; como tampoco piden una precisión determinada, daremos la que nos parezca oportuna. No tenemos que asignar ningún nombre, porque ya viene dado. Sabemos que podemos aplicar el teorema de Pitágoras porque vemos la marca del ángulo recto y deducimos que x es la hipotensusa.

Resolución

$x^2 = 1^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17 \Rightarrow a = \sqrt{17} = 4{,}12$

Solución: 4,12

Cálculo de un cateto

Podemos utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de un cateto conocidas la longitud de la hipotenusa y la longitud del otro cateto.

Para este uso, es más conveniente escribir en el primer miembro los cuadrados de los catetos y en el segundo el cuadrado de la hipotenusa, así:

Si en un triángulo rectángulo llamamos a a la longitud de la hipotenusa y b y c a las de los catetos, se verifica $\boldsymbol{b^2 + c^2 = a^2}$.

Ejercicio 1

Enunciado: calcula la longitud del cateto desconocido de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 15 metros y un cateto mide 12 metros.

Comentario: en el enunciado no hay dibujo ni nombres, así que podemos hacer un dibujo aproximado si nos puede ayudar y podemos asignar nombres a la hipotenusa y a los catetos, si queremos; pero en este ejercicio lo único que merece la pena es asignar un nombre al cateto desconocido. Como los datos vienen en metros, obtendremos el resultado también en metros.

Resolución

Llamamos b a la longitud del cateto desconocido.

Por el teorema de Pitágoras, $b^2 + 12^2 = 15^2$

Hacemos las operaciones y colocamos todos los números en el segundo miembro:

$b^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow b^2 + 144 = 225 \Rightarrow b^2 = 225 - 144 = 81$

Sabemos que b es positivo y su cuadrado es 81, luego $b = \sqrt{81} = 9$

Solución: 9 m

Ejercicio 2

Enunciado: calcula la longitud del cateto desconocido de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 8,2 metros y un cateto mide 5,3 metros. Da el resultado en metros redondeando a la décima.

Comentario: este ejercicio no tiene solución exacta, pero el enunciado nos pide una aproximación concreta, así que hay que respetarla; tendremos que usar el método de cálculo de la raíz cuadrada que vimos en la parte Aritmética.

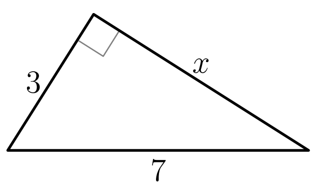
Resolución

Llamamos b a la longitud del cateto desconocido.

$b^2 + 5{,}3^2 = 8{,}2^2 \Rightarrow b^2 = 8{,}2^2 - 5{,}3^2 = 39{,}15 \Rightarrow b = \sqrt{39{,}15} = 6{,}3$

Solución: 6,3 m

Ejercicio 3



Enunciado: calcula el valor de x en la figura adjunta.

Comentario: como en este ejercicio no hay unidades, responderemos sin unidades; como tampoco piden una precisión determinada, daremos la que nos parezca oportuna. No tenemos que asignar ningún nombre, porque ya viene dado. Sabemos que podemos aplicar el teorema de Pitágoras porque vemos la marca del ángulo recto y deducimos que x es un cateto.

Resolución

$x^2 + 3^2 = 7^2 \Rightarrow x^2 = 7^2 - 3^2 = 40 \Rightarrow x = \sqrt{40} = 6{,}32$

Solución: 6,32

Cálculo de la hipotenusa

① Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 metros y 4 metros.

② Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 metros y 12 metros.

③ Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 28 centímetros y 96 centímetros.

④ Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 28 centímetros y 45 centímetros.

⑤ Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 48 centímetros y 55 centímetros.

⑥ Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2,8 centímetros y 3,9 centímetros. Da el resultado en centímetros redondeando a la décima.

⑦ Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 11 centímetros y 14 centímetros. Da el resultado en centímetros redondeando a la décima.

⑧ Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 32 centímetros y 29 centímetros. Da el resultado en centímetros redondeando a la unidad.

Cálculo de un cateto

⑨ Calcula la longitud del cateto desconocido de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 26 metros y un cateto mide 24 metros.

⑩ Calcula la longitud del cateto desconocido de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 61 metros y un cateto mide 60 metros.

⑪ Calcula la longitud del cateto desconocido de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 29 centímetros y un cateto mide 21 centímetros.

⑫ Calcula la longitud del cateto desconocido de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 65 centímetros y un cateto mide 56 centímetros.

⑬ Calcula la longitud del cateto desconocido de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 85 centímetros y un cateto mide 84 centímetros.

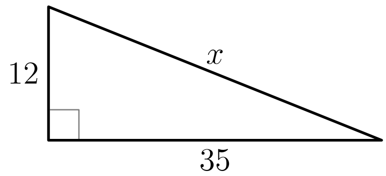
⑭ Calcula la longitud del cateto desconocido de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 9,3 metros y un cateto mide 4,4 metros. Da el resultado en metros redondeando a la décima.

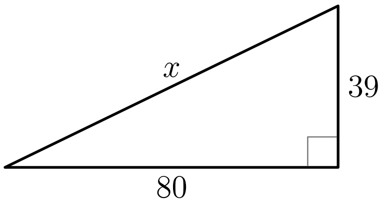
⑮ Calcula la longitud del cateto desconocido de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 18 metros y un cateto mide 7 metros. Da el resultado en metros redondeando a la décima.

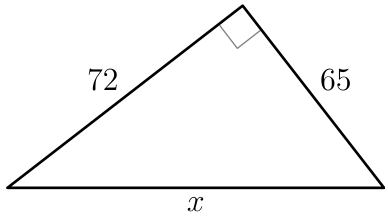
⑯ Calcula la longitud del cateto desconocido de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 32 metros y un cateto mide 13 metros. Da el resultado en metros redondeando a la unidad.

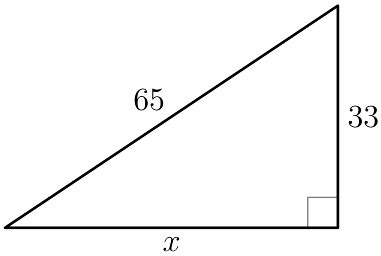
Enunciados

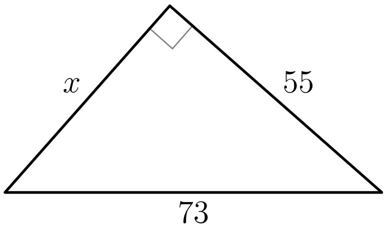
Calcula el valor de x en cada una de las siguientes figuras. Los resultados que no sean exactos debes darlos redondeando a la décima.

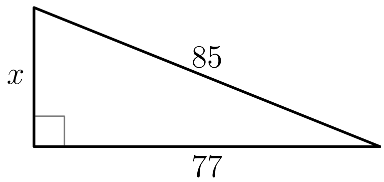
① 

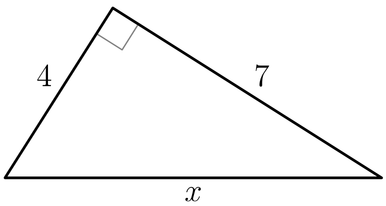
② 

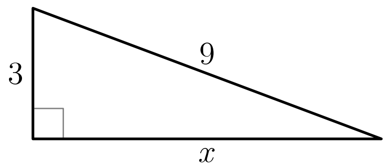
③ 

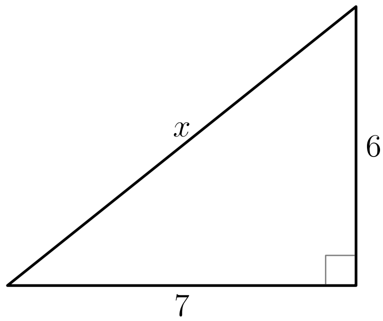
④ 

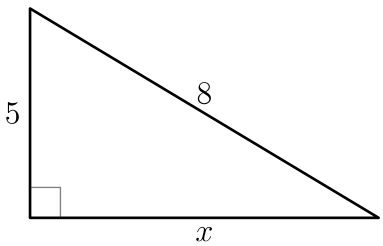
⑤ 

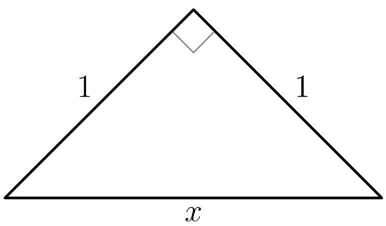
⑥ 

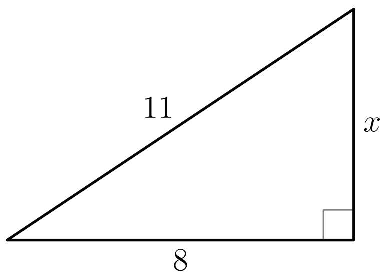
⑦ 

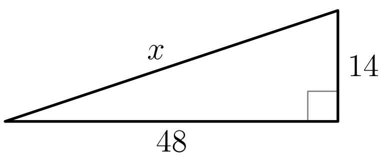
⑧ 

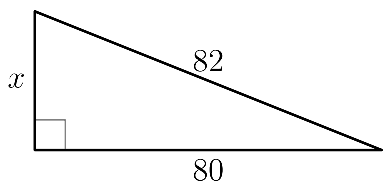
⑨ 

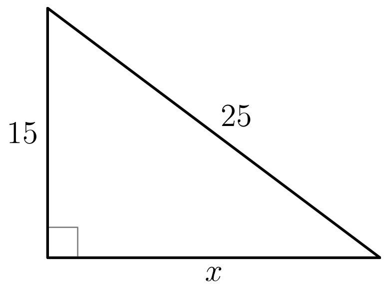
⑩ 

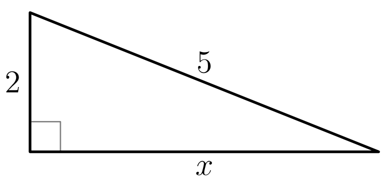
⑪ 

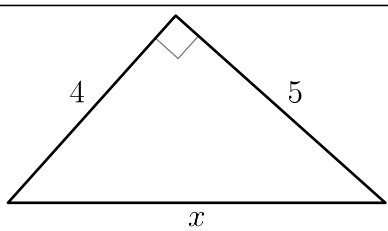
⑫ 

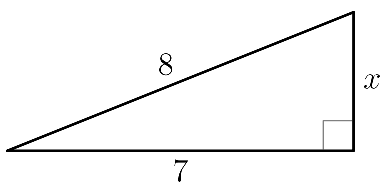
⑬ 

⑭ 

⑮ 

⑯ 

⑰ 

⑱ 

Resolución de problemas usando el teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras solo se puede usar en triángulos rectángulos, pero es fácil que aparezcan triángulos rectángulos al resolver problemas, porque las rectas perpendiculares son muy útiles y se trazan en muchas situaciones de la vida ordinaria.

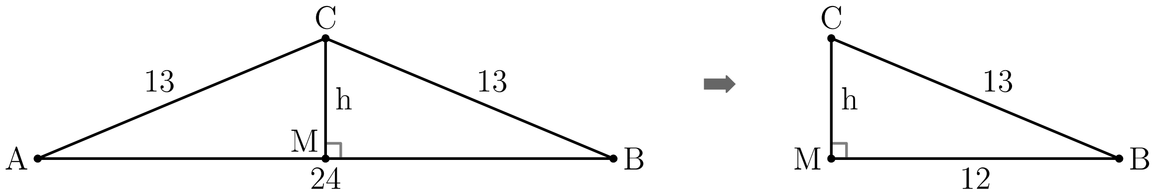
Problema 1

Enunciado: los lados de un triángulo miden 13 metros, 13 metros y 24 metros. Calcula la longitud de la altura correspondiente al vértice común a los dos lados iguales.

Comentario: en el enunciado no hay dibujo ni nombres, así que nos ayudaremos de un dibujo y asignaremos nombres a los elementos que necesitemos. Como los datos vienen en metros, obtendremos el resultado también en metros.

Resolución

Llamamos ABC al triángulo, M al punto medio del segmento BC y h a la longitud de la altura pedida (dibujo de abajo a la izquierda).



Como el triángulo es isósceles, sabemos que el segmento CM es altura y mediana, por lo que el triángulo MCB es un triángulo rectángulo y $\overline{\text{MB}}$ = 24 : 2 = 12. Esto nos permite trabajar en el triángulo MCB (dibujo de arriba a la derecha).

Por el teorema de Pitágoras, $h^2 + 12^2 = 13^2$

Averiguamos h: $h^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow h = \sqrt{25} = 5$

Solución: 5 m

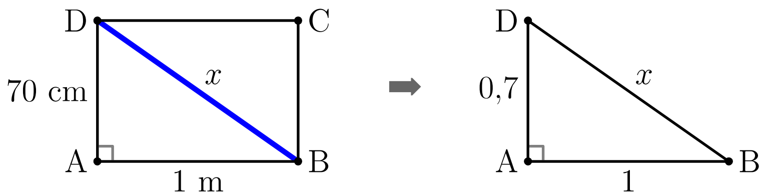
Problema 2

Enunciado: una caja tiene 1 metro de largo y 70 centímetros de ancho. Queremos llevar en ella una pieza recta y fina, apoyada en el suelo de la caja. ¿Cuál es la longitud máxima de la pieza que podemos llevar?

Comentario: asumimos que las cajas son rectangulares y que la longitud máxima que obtendremos es teórica y luego en la realidad podría haber diferencias.

Resolución

Hacemos un dibujo del fondo de la caja y llamamos x a la longitud pedida.



El triángulo ABD es rectángulo; para poder aplicar el teorema de Pitágoras hay que usar la misma unidad para todas las medidas, así que 70 cm = 0,7 m y hacemos el problema en metros. Damos una precisión que nos parece adecuada.

$x^2 = 1^2 + 0{,}7^2 = 1{,}49 \Rightarrow x = \sqrt{1{,}49} = 1{,}22$

Solución: 1,22 m

Enunciados

① Calcula la longitud de las alturas de un triángulo equilátero de 2 metros de lado. Da el resultado en metros redondeando a la décima.

② Dos postes de 22 metros de altura están clavados verticalmente con una separación de 60 metros. Se ata una cuerda bien tensa desde el punto más alto de un poste hasta el punto medio del otro. Calcula la longitud de la cuerda.

③ Un palo de madera de 1 metro de longitud está apoyado en una pared y en el suelo. La distancia del suelo al punto de apoyo en la pared es 80 centímetros. Calcula la distancia entre la pared y el punto de apoyo en el suelo. Da el resultado en centímetros.

④ Un barco está amarrado a un puerto mediante una cuerda de 13 metros. Si la diferencia de altura entre el barco y el punto de amarre es de 5 metros, ¿cuál es la distancia máxima que se podrá alejar el barco del muelle?

⑤ Una persona está haciendo un vídeo con un dron. El dron se traslada 65 metros en una dirección y luego 72 metros en una dirección perpendicular a la que llevaba. ¿A qué distancia de la persona se encuentra ahora el dron?

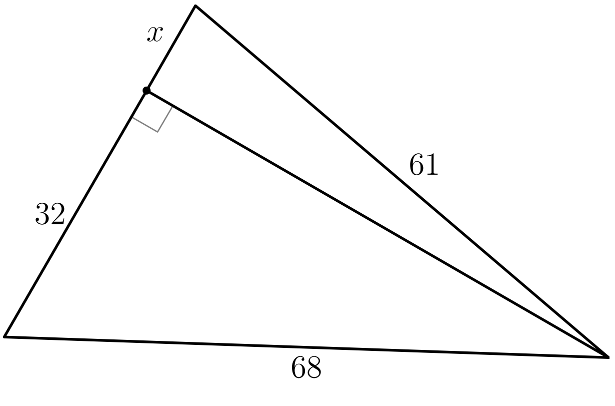
⑥ Un globo aeroestático está atado a un punto del suelo mediante una cuerda de 890 metros. Cuando la cuerda está completamente tensa y el globo está a 390 metros de altura, ¿cuál es la distancia entre el extremo de la cuerda que está en el suelo y el punto del suelo que está justo debajo del globo?

⑦ Un gusano sale de un agujero del suelo y avanza 35 metros. Se encuentra un árbol y trepa hasta los 12 metros de altura. ¿A qué distancia del agujero está ahora?

⑧ Un barco velero tiene un palo mayor de 25 metros de altura. Está fijado mediante una cuerda de 20 metros al punto más avanzado del barco (proa) y con una cuerda de 24 metros al punto más atrasado (popa). Calcula la distancia entre la proa y la popa (eslora).

⑨ Si atamos una cuerda de 41 metros de longitud al punto más alto de una torre y la mantenemos tensa, nos quedamos a 9 metros de la base de la torre. Si la cuerda midiera 50 metros, ¿a qué distancia de la base nos quedaríamos?

⑩ Calcula el valor de x en la siguiente figura:



El recíproco del teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras afirma que si un triángulo es rectángulo, el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados menores. La afirmación **recíproca** del teorema también es cierta. Esto es:

Si en un triángulo se verifica que el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados menores, el triángulo es rectángulo.

Ejemplo

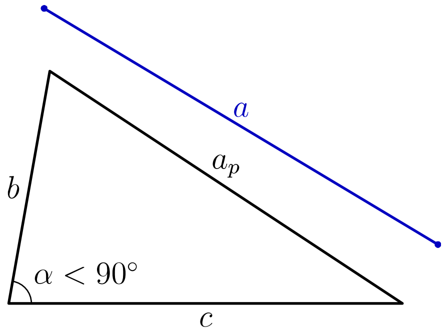
Si los lados de un triángulo miden 36, 77 y 85 unidades (no importa qué unidad concreta usemos), el triángulo es rectángulo, porque:

* El lado mayor es 85; $85^2 = 7225$
* Los lados menores son 36 y 77; $36^2 + 77^2 = 1296 + 5929 = 7225$

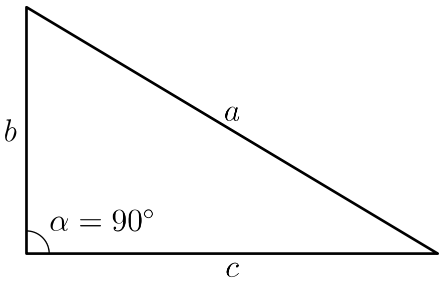
Se verifica que $85^2 = 36^2 + 77^2$

Clasificación por los ángulos conocidos los lados

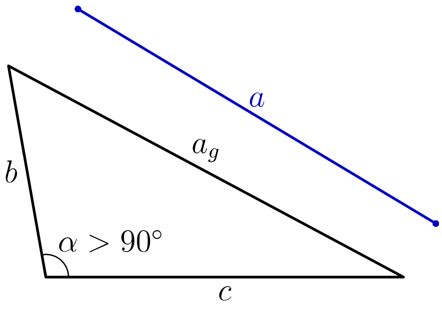
Recordando el teorema de Pitágoras y ayudándose un poco de la intuición, es muy fácil recordar el criterio para clasificar un triángulo por sus ángulos conocidos sus lados. Lo ilustramos con tres triángulos que tengan exactamente iguales los dos lados menores, que llamaremos b y c, y que se diferencien solamente en el lado mayor, que llamaremos a en el caso del triángulo rectángulo, a_p en el triángulo acutángulo («p» de «pequeño») y a_g en el triángulo obtusángulo («g» de «grande»).



Triángulo acutángulo
$a_p^2 < b^2 + c^2$
$\alpha < 90°$



Triángulo rectángulo
$a^2 = b^2 + c^2$
$\alpha = 90°$



Triángulo obtusángulo
$a_g^2 > b^2 + c^2$
$\alpha > 90°$

Intuitivamente se ve que cuando aumenta el valor del lado mayor, también aumenta el valor del ángulo opuesto; y cuando disminuye el valor del lado mayor, también disminuye el valor del ángulo opuesto (y viceversa).

Reglas para la clasificación

* Los triángulos equiláteros son acutángulos porque sus ángulos miden 60°.
* En un triángulo escaleno, llamamos a al lado mayor y b y c a los otros dos.
  - $a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow$ el triángulo es obtusángulo.
  - $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ el triángulo es rectángulo.
  - $a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow$ el triángulo es acutángulo.
* En un triángulo isósceles,
  - Si hay dos lados mayores que el tercero, el triángulo es acutángulo.
  - Si hay dos lados menores que el tercero, se aplica la misma regla que en los triángulos escalenos.

Enunciados

Clasifica por sus lados y por sus ángulos los siguientes triángulos, dadas las longitudes de sus lados:

① 12, 9 y 8. ② 39, 80 y 89. ③ 5, 3 y 7. ④ 7, 7, y 7.

⑤ 9, 9 y 2. ⑥ 3, 5 y 3. ⑦ 10, 8 y 2. ⑧ 23, 8 y 11.

Resoluciones

① Lado mayor: 12; $12^2 = 144$; lados menores: 9 y 8; $9^2 + 8^2 = 145$.

Se verifica $12^2 < 9^2 + 8^2$

Solución: triángulo escaleno acutángulo.

② Lado mayor: 89; $89^2 = 7921$; lados menores: 39 y 80; $39^2 + 80^2 = 7921$.

Se verifica $89^2 = 39^2 + 80^2$

Solución: triángulo escaleno rectángulo.

③ Lado mayor: 7; $7^2 = 49$; lados menores: 3 y 6; $3^2 + 6^2 = 45$.

Se verifica $7^2 > 3^2 + 6^2$

Solución: triángulo escaleno obtusángulo.

④ Tiene los tres lados iguales.

Solución: triángulo equilátero acutángulo.

⑤ Dos lados mayores: 9; un lado menor: 2.

Solución: triángulo isósceles acutángulo.

⑥ Un lado mayor: 5; $5^2 = 25$; dos lados menores: 3; $3^2 + 3^2 = 18$.

Se verifica $5^2 > 3^2 + 3^2$

Solución: triángulo isósceles obtusángulo.

⑦ Lado mayor: 10; lados menores: 8 y 2.

Se verifica $10 = 8 + 2$

Solución: triángulo degenerado.

⑧ Lado mayor: 23; lados menores: 8 y 11.

Se verifica $23 > 8 + 11$

Solución: el triángulo no existe.

Enunciados

Clasifica por sus lados y por sus ángulos los siguientes triángulos, dadas las longitudes de sus lados:

① 4, 5 y 3.

② 5, 12 y 14.

③ 10, 8 y 5.

④ 9, 9 y 9.

⑤ 7, 25 y 24.

⑥ 8, 8 y 1.

⑦ 5, 5 y 8.

⑧ 4, 4 y 9.

⑨ 16, 30 y 34.

⑩ 2, 2 y 2.

⑪ 8, 9 y 10.

⑫ 10, 10 y 15.

⑬ 10, 10 y 7.

⑭ 1, 2 y 3.

⑮ 17, 8 y 15.

⑯ 21, 20 y 10.

⑰ 10, 26 y 24.

⑱ 12, 15 y 10.

⑲ 33, 4 y 8.

⑳ 11, 10 y 9.

㉑ 132, 132 y 132.

㉒ 5, 5 y 10.

㉓ 3, 7 y 9.

㉔ 8, 8 y 11.

㉕ 13, 11 y 10.

㉖ 696, 697 y 985.

Cálculo del perímetro

Para calcular el perímetro de un triángulo basta sumar las longitudes de sus tres lados. Se debe usar la misma unidad de medida para los tres.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 5 metros, 8 metros y 12 metros.

Comentario: como todos los datos están en metros, obtendremos el resultado en metros.

Resolución

$5 + 8 + 12 = 25$. Solución: 25 m

Ejemplo 2

Enunciado: calcula el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 0,3 decámetros, 2 metros y 130 centímetros.

Comentario: no piden el resultado en una unidad concreta, así que podemos elegir la que nos convenga.

Resolución

$0{,}3\,\text{dam} + 2\,\text{m} + 130\,\text{cm} = 3\,\text{m} + 2\,\text{m} + 1{,}3\,\text{m} = 6{,}3\,\text{m}$. Solución: 6,3 m

Ejemplo 3

Enunciado: calcula el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 18, 13 y 9.

Comentario: como no nos dan ninguna unidad, damos el resultado sin unidad. En estos problemas se asume que es indiferente qué unidad de longitud se use.

Resolución

$18 + 13 + 9 = 40$. Solución: 40

Ejemplo 4

Enunciado: calcula el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 30, 3 y 8.

Resolución: como $30 > 3 + 8$, el problema no tiene solución.

Casos particulares

- Si el triángulo es equilátero, los tres lados miden lo mismo y por tanto para calcular el perímetro basta multiplicar por 3 la longitud de un lado, que es un método más corto que escribir tres veces el mismo número.
- Si un triángulo es isósceles, tiene dos lados iguales y podemos multiplicar por 2 la longitud de los lados iguales en el cálculo del perímetro.

Ejemplo 5

Enunciado: calcula el perímetro de un triángulo equilátero de lado 7 metros.

Resolución

$3 \cdot 7 = 21$. Solución: 21 m

Ejemplo 6

Enunciado: calcula el perímetro de un triángulo isósceles que tiene dos lados de 13 metros y uno de 7 metros.

Resolución

$2 \cdot 13 + 7 = 26 + 7 = 33$. Solución: 33 m

Cálculo del área

✱ Para calcular el área de un triángulo hay que conocer la longitud de uno de los lados y la de la altura correspondiente a ese lado. Es costumbre llamar «base» al lado conocido. La fórmula es:

$$\boxed{\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} : 2}$$

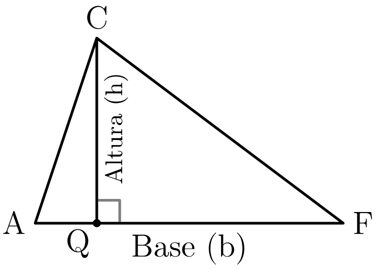
Se puede expresar simbólicamente: llamamos «A» al área del triángulo, «b» a la longitud de uno de los lados y «h» a la longitud de la altura correspondiente.

Entonces $\mathbf{A = bh : 2}$.

En el triángulo AFC de la derecha, consideramos:

Base = b = $\overline{\text{AF}}$

Altura = h = $\overline{\text{CQ}}$



Ejemplo 1

Enunciado: calcula el área de un triángulo que tiene un lado de 8 metros sabiendo que la altura correspondiente a ese lado mide 5 metros.

Comentario: como los datos vienen en metros, obtendremos el resultado en metros cuadrados.

Resolución: $8 \cdot 5 : 2 = 40 : 2 = 20$. Solución: $20\,\text{m}^2$

Elección de la base y la altura

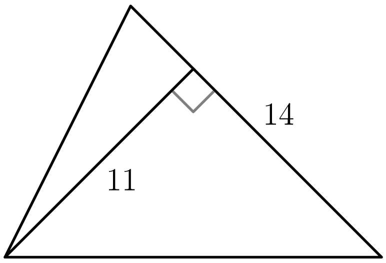
Lo que llamamos «base» del triángulo realmente no es más que uno cualquiera de los lados. Aunque lo más común es dibujar el triángulo con la base horizontal, la altura vertical y un vértice en la parte superior, realmente la posición es indiferente.

Ejemplo 2

Enunciado: calcula el área de un triángulo de la figura.

Comentario: como los datos vienen sin unidad, podemos dar el resultado sin unidad o bien usar «u²» para indicar que son unidades de superficie. En la figura se aprecia que podemos tomar 14 como base y 11 como altura.

Resolución: $14 \cdot 11 : 2 = 7 \cdot 11 = 77$. Solución: $77\,\text{u}^2$



Área del triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo los catetos son perpendiculares, así que podemos tomar uno de ellos como la base y el otro como la altura. Según hemos visto antes, como la posición no importa, podemos tomar como base cualquiera de los dos.

Ejemplo 3

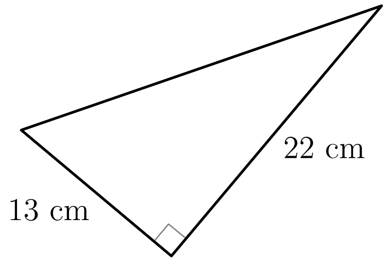
Enunciado: calcula el área de un triángulo de la figura.

Comentario: se ve que el triángulo es rectángulo y los datos son las longitudes de los catetos.

Resolución:

$13 \cdot 22 : 2 = 13 \cdot 11 = 143$.

Solución: $143\,\text{cm}^2$



Nota: aunque no hemos respetado el orden de las operaciones, sabemos que en estos casos el resultado es el mismo y hemos hecho más sencillo el cálculo.

Demostración de la fórmula del área

La demostración de la fórmula del área del triángulo se basa en la fórmula del área de un rectángulo, que en este curso se explica en el tema siguiente. Sin embargo, la fórmula del área del rectángulo es tan sencilla y tan intuitiva que no va presentar ninguna dificultad.

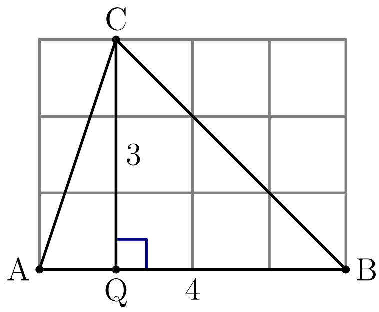
En vez de presentar una demostración muy abstracta, vamos a ilustrar la idea de la demostración con algunos casos particulares. Será tarea tuya pensar que es posible pasar de los casos particulares al caso general.

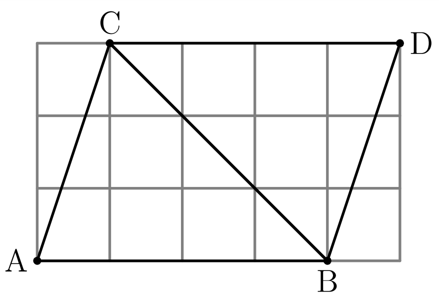
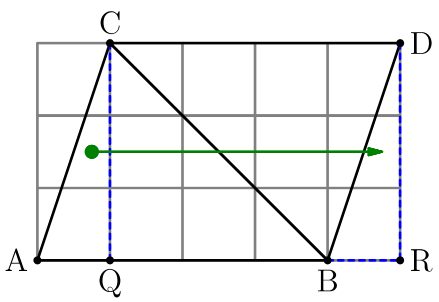
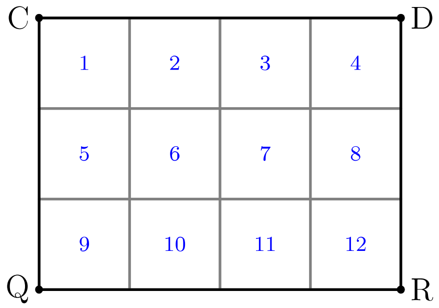
Ejemplo con un triángulo acutángulo

Supongamos un triángulo acutángulo que tenga base 4 unidades y altura 3 unidades.

La fórmula nos dice que su área es $4 \cdot 3 : 2 = 6\,\text{u}^2$. Vamos a visualizar esas 6 unidades cuadradas.

A la derecha vemos un ejemplo de un triángulo así: $\overline{AB} = 4$, $\overline{CQ} = 3$. Si le dedicas un rato, seguro que puedes llegar a visualizar que el triángulo ocupa 6 cuadraditos, pero vamos a demostrarlo más fácilmente en tres pasos:

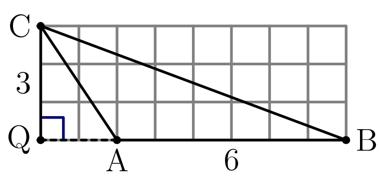


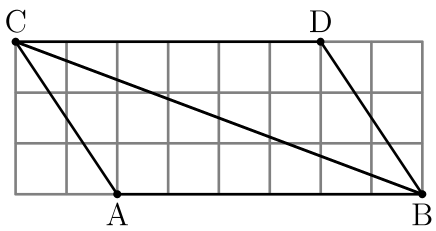
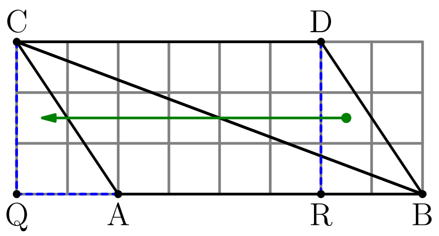
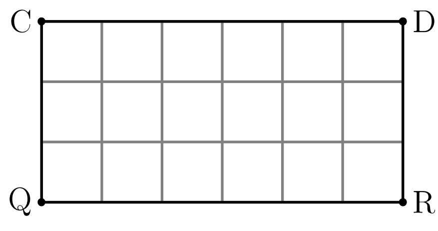
Paso 1	Paso 2	Paso 3
		
Repetimos el triángulo ABC hacia la derecha e invertido, trazando el triángulo CBD. La figura ABDC tiene el **doble** del área que ABC.	Trasladamos el triángulo AQC a la posición BRD; la figura ABDC tiene la **misma** área que la figura QCDR.	La figura QCDR, que es un rectángulo, tiene base 4 y altura 3, como el triángulo ABC. El área de QCDR es **12** unidades cuadradas (4 · 3).

Ejemplo con un triángulo obtusángulo

Supongamos un triángulo obtusángulo que tenga base 6 unidades y altura 3 unidades, como el ABC de la derecha.

La fórmula nos dice que su área es $6 \cdot 3 : 2 = 9\,\text{u}^2$. Vamos a visualizar esas 9 unidades cuadradas usando las ideas y los pasos del ejemplo anterior:



Ejercicios de cálculo de perímetro y área

Es posible calcular el perímetro y el área de un triángulo conocidos los tres lados, pero en el caso general es preciso utilizar técnicas que se comienzan a estudiar este curso en el nivel 3.

Por eso, para que puedas hacer ejercicios en este nivel, será preciso que en el enunciado los datos sean las longitudes de los tres lados y la de una de las alturas.

Cuando el triángulo es un triángulo rectángulo, disponemos ya de información adicional (el teorema de Pitágoras y que los catetos son perpendiculares), por lo que los enunciados darán menos información que en el caso general.

Ejercicio 1

Enunciado: calcula el perímetro y el área de un triángulo cuyos lados miden 8 metros, 29 metros y 35 metros sabiendo que la altura correspondiente al lado menor mide 21 metros.

Resolución

Perímetro = 8 + 29 + 35 = 72 m; área = 8 · 21 : 2 = 84 m²

Solución: perímetro: 72 m; área: 84 m²

Ejercicio 2

Enunciado: calcula el perímetro y el área de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 106 metros y uno de los catetos mide 56 metros.

Resolución

Llamamos x a la longitud del cateto desconocido.

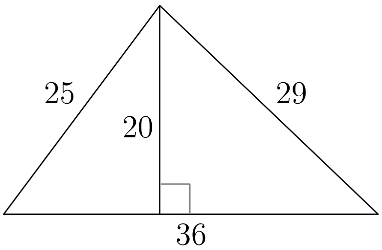
$x^2 + 56^2 = 106^2 \Rightarrow x^2 = 106^2 - 56^2 = 11\,236 - 3163 = 8100 \Rightarrow x = \sqrt{8100} = 90$

Perímetro = 56 + 90 + 106 = 252 m; área = 90 · 56 : 2 = 2520 m²

Solución: perímetro: 252 m; área: 2520 m²

Ejercicio 3

Enunciado: calcula el perímetro y el área del triángulo de la figura.



Comentario: en la figura podemos ver las longitudes de los lados y la de una de las alturas; como no aparecen dimensiones, podemos dar la solución también sin dimensiones o bien usando los símbolos «u» y «u²».

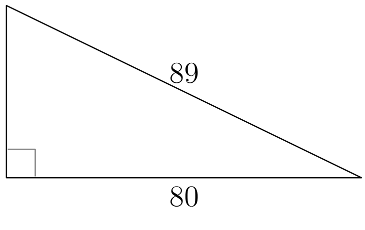
Resolución

Perímetro = 25 + 29 + 36 = 90; área = 36 · 20 : 2 = 360

Solución: perímetro: 90 u; área: 360 u²

Ejercicio 4

Enunciado: calcula el perímetro y el área del triángulo de la figura.



Resolución

Llamamos x a la longitud del cateto desconocido.

$x^2 + 80^2 = 89^2 \Rightarrow x^2 = 89^2 - 80^2 = 1521 \Rightarrow x = \sqrt{1521} = 39$

Perímetro = 39 + 80 + 89 = 208; área = 80 · 39 : 2 = 1560

Solución: perímetro: 208 u; área: 1560 u²

Enunciados

Calcula el perímetro y el área de los siguientes triángulos. Da el resultado en la misma unidad de medida que el enunciado.

Triángulos acutángulos u obtusángulos

① Los lados miden 13, 14 y 15 metros y la altura correspondiente al lado mediano mide 12 metros.

② Los lados miden 6, 25 y 29 metros y la altura correspondiente al lado menor mide 20 metros.

③ Los lados miden 33, 34 y 65 metros y la altura correspondiente al lado menor mide 16 metros.

④ Los lados miden 7, 15 y 20 centímetros y la altura correspondiente al lado menor mide 12 centímetros.

⑤ Los lados miden 4, 51 y 53 metros y la altura correspondiente al lado menor mide 45 metros.

⑥ Los lados miden 39, 25 y 16 metros y la altura correspondiente al lado menor mide 12 metros.

⑦ Los lados miden 13, 40 y 51 metros y la altura correspondiente al lado menor mide 24 metros.

⑧ Los lados miden 10, 17 y 21 centímetros y la altura correspondiente al lado mayor mide 8 centímetros.

⑨ Los lados miden 25, 145 y 150 centímetros y la altura correspondiente al lado mayor mide 24 centímetros.

⑩ Los lados miden 3, 26 y 25 metros y la altura correspondiente al lado menor mide 24 metros.

Triángulos rectángulos

⑪ Los catetos miden 8 y 15 metros.

⑫ Los catetos miden 36 y 77 centímetros.

⑬ Los catetos miden 20 y 21 metros.

⑭ La hipotenusa mide 61 metros y un cateto mide 11 metros.

⑮ La hipotenusa mide 25 centímetros y un cateto mide 24 centímetros.

⑯ La hipotenusa mide 58 metros y un cateto mide 42 metros.

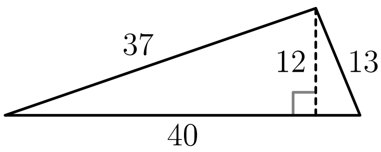
⑰ Los catetos miden 13 y 84 metros.

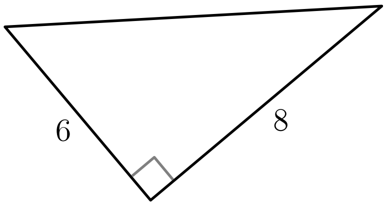
⑱ La hipotenusa mide 68 metros y un cateto mide 32 metros.

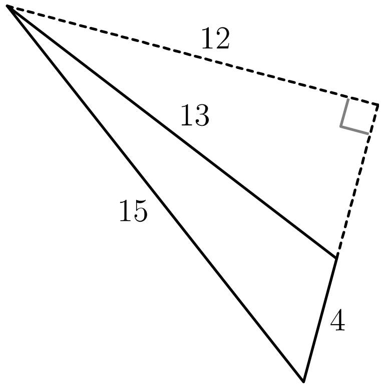
⑲ Los catetos miden 18 y 80 metros.

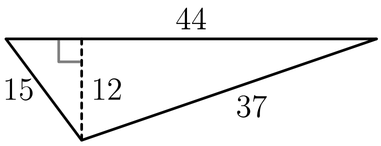
Enunciados

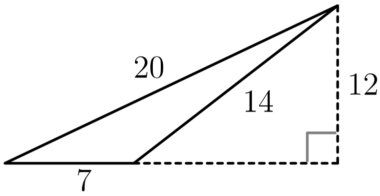
Calcula el perímetro y el área de los siguientes triángulos.

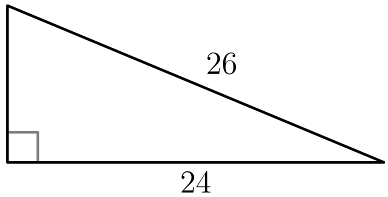
①


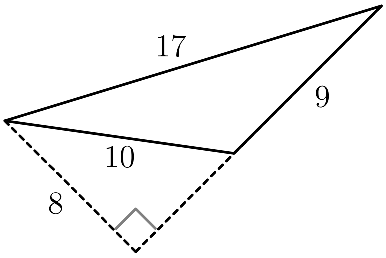
②


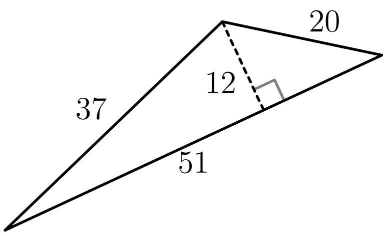
③


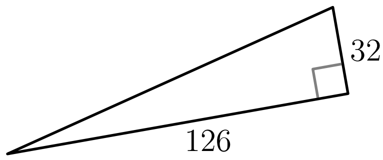
④


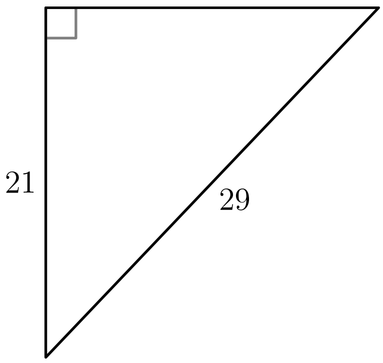
⑤


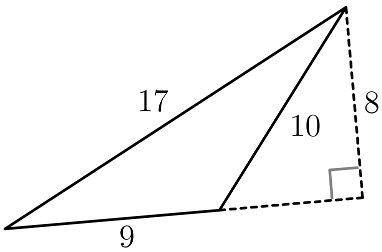
⑥


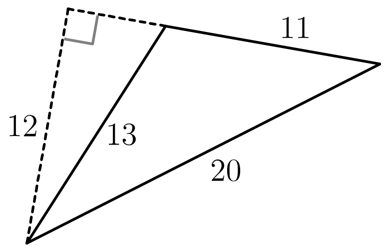
⑦


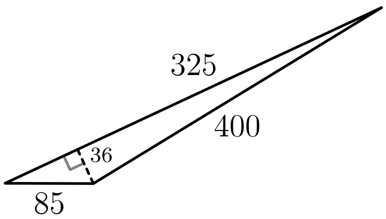
⑧


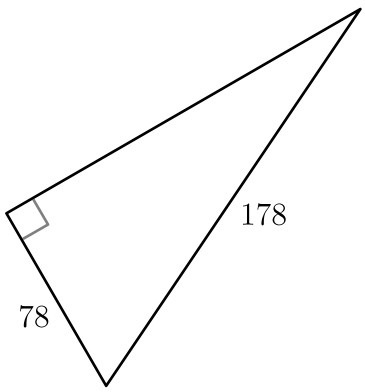
⑨


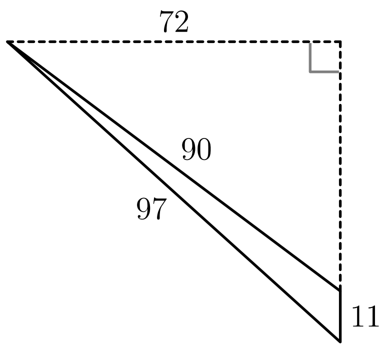
⑩


⑪


⑫


⑬


⑭


⑮


Enunciados

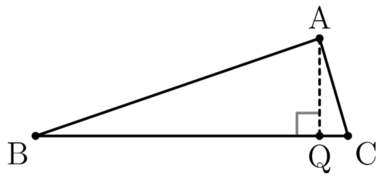
① Calcula el perímetro y el área de un triángulo cuyos lados miden 13, 13 y 10 metros.

② Calcula el área de un triángulo equilátero de 2 metros de lado. Da la solución en metros cuadrados redondeando a la décima.

③ Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles con dos lados iguales de 15 metros sabiendo que la altura que pasa por el vértice donde se unen los dos lados iguales mide 9 metros.

④ Calcula el perímetro y el área del triángulo ABC de la figura sabiendo que

$\overline{AQ} = 24\,\text{m}$, $\overline{AC} = 25\,\text{m}$, $\overline{BQ} = 70\,\text{m}$



⑤ Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo de 1320 metros cuadrados de área sabiendo que uno de sus catetos mide 55 metros.

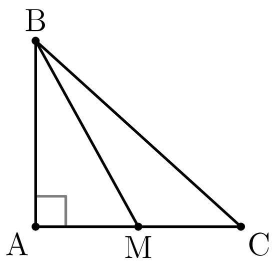
⑥ Del triángulo rectángulo ABC de la figura se conocen estos datos:

$\overline{AB} = 65\,\text{m}$, $\overline{BC} = 97\,\text{m}$, $\overline{AM} = \overline{MC}$.

Se pide:

(a) El área del triángulo ABM

(b) El área del triángulo BMC



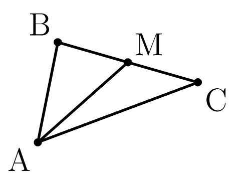
⑦ Calcula el área de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 1 metro y uno de los catetos mide 6 decímetros. Da el resultado en decímetros cuadrados.

⑧ Calcula la longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que los catetos miden 15 y 20 metros.

⑨ Del triángulo ABC de la figura se sabe:

- El segmento AM es una mediana
- El área del triángulo AMB es 13 metros cuadrados.

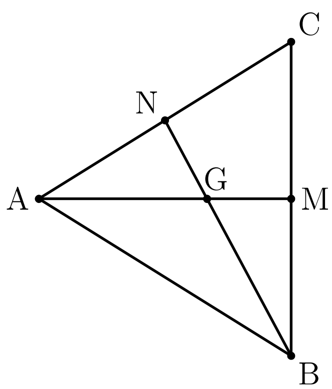
Averigua el área del triángulo ACM.



⑩ Del triángulo ABC de la figura se sabe:

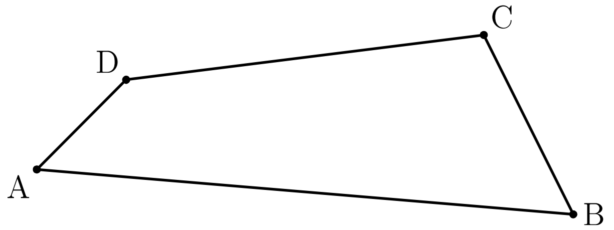
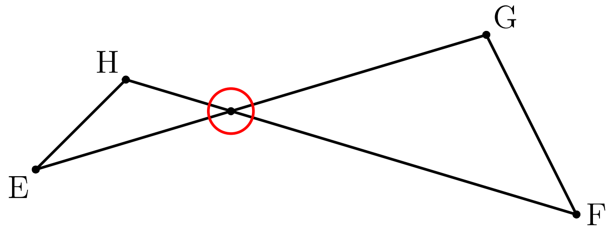
- AM = 45 m
- AB = AC = 53 m
- AM y BN son medianas

Calcula el área del triángulo BGM.

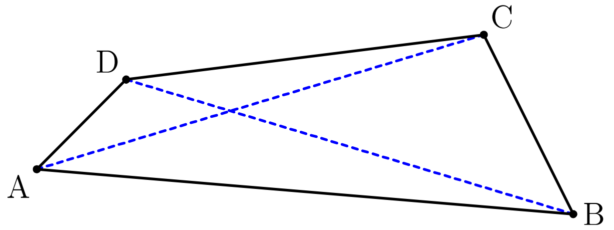
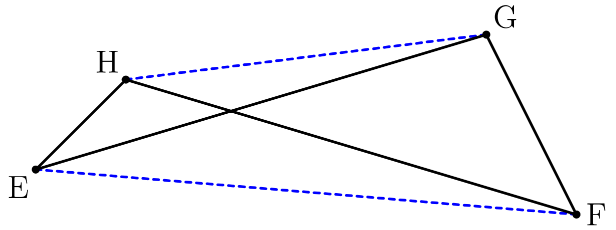


Cuadrilátero

* Un cuadrilátero es la región del plano delimitada por cuatro segmentos que tienen un extremo común diferente cada dos segmentos.
* Si los segmentos no tienen más puntos de corte que los extremos, el cuadrilátero se llama **simple**; los cuadriláteros simples son los más habituales en matemáticas y los únicos que trataremos este curso.
* Si los segmentos tienen algún punto de corte además de los extremos, el cuadrilátero se llama **complejo**. Si hubiera que trabajar con algún cuadrilátero complejo, lo descompondríamos en dos triángulos.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
	
Los segmentos AB, BC, CD y AD delimitan un cuadrilátero simple, ya que sus únicos puntos de corte son los extremos A, B, C y D.	Los segmentos EG, GF, FH y HE delimitan un cuadrilátero complejo, ya que EG y HF se cortan en un punto que no es un extremo.

* Los segmentos se llaman **lados** del cuadrilátero.
* Los extremos de los segmentos se llaman **vértices** del cuadrilátero.
* Los ángulos determinados por las semirrectas que contienen a dos lados y se orientan hacia el interior del cuadrilátero se llaman **ángulos** del cuadrilátero; a veces se les llama **ángulos internos** del cuadrilátero. Coinciden los vértices de los ángulos con los vértices del cuadrilátero.
* Los segmentos que unen dos vértices no consecutivos se llaman **diagonales** del cuadrilátero.

Ejemplo 3	Ejemplo 4
	
Los segmentos AC y BD son las diagonales del cuadrilátero determinado por los segmentos AB, BC, CD y AD.	Los segmentos HG y EF son las diagonales del cuadrilátero determinado por los segmentos EG, GF, FH y HE.

* Los cuadriláteros tienen cuatro vértices, cuatro lados, cuatro ángulos y dos diagonales.

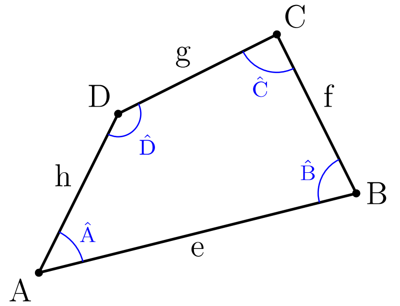
Notación de los cuadriláteros

- Los vértices, como son puntos, se suelen nombrar con letras mayúsculas.
- El cuadrilátero se nombra uniendo los nombres de los vértices consecutivos; el orden en que se colocan los vértices es crucial, pueden nombrarse partiendo de cualquier vértice y en el sentido de las agujas del reloj o al revés, pero siempre hay que nombrar seguidos los vértices consecutivos.
- Los lados se suelen nombrar, además del nombre del segmento, con letras minúsculas. Muchas veces no se distingue entre el lado, que es un segmento, y la longitud del lado, que es una magnitud; hay que distinguirlo por el contexto.
- Los ángulos se pueden nombrar con cualquiera de las notaciones sobre ángulos, la que mejor convenga.
- Una notación muy habitual, aunque no obligatoria, es nombrar los ángulos con el nombre del vértice con el signo «^» (acento circunflejo) sobre la letra.

Ejemplo 1

En el cuadrilátero de la ilustración hemos usado esta notación:

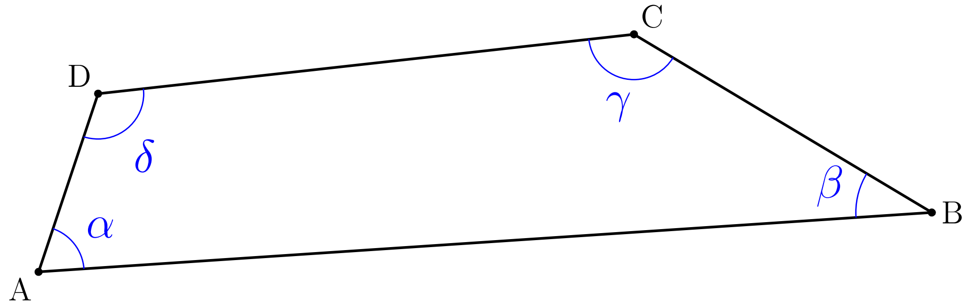
- Los vértices se llaman A, B, C y D.
- El cuadrilátero se llama ABCD, pero podría nombrarse también ADCB, BCDA, BADC, etc.
- Los lados se llaman e=AB, f=BC, g=CD y h=DA.
- Los ángulos se llaman $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$.



Ejemplo 2

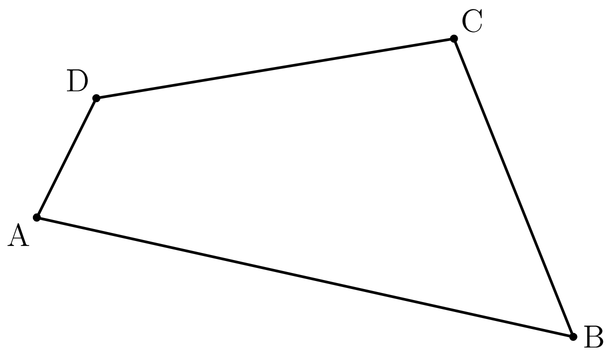
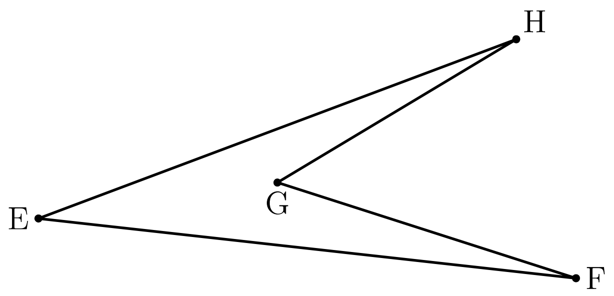
En el cuadrilátero de la ilustración hemos usado esta notación:

- Los vértices se llaman A, B, C y D.
- El cuadrilátero se llama ABCD, pero podría nombrarse también ADCB, BCDA, BADC, etc.
- No hemos nombrado los lados, así que hay que referirse a ellos por sus nombres originales: AB, BC, CD y DA.
- Para los ángulos hemos usado cuatro letras griegas minúsculas.



Cuadriláteros convexos y cóncavos

✱ Un cuadrilátero (simple, como todos los que usaremos este curso) puede ser convexo o cóncavo según la definición general de figura convexa o cóncava.

<table>
<tr><td>Ejemplo 1</td><td>Ejemplo 2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>El cuadrilátero ABCD es convexo.</td><td>El cuadrilátero EFGH es cóncavo.</td></tr>
</table>

✱ Además de la definición general de figura convexa y cóncava, en el caso de los cuadriláteros es equivalente decir esto:

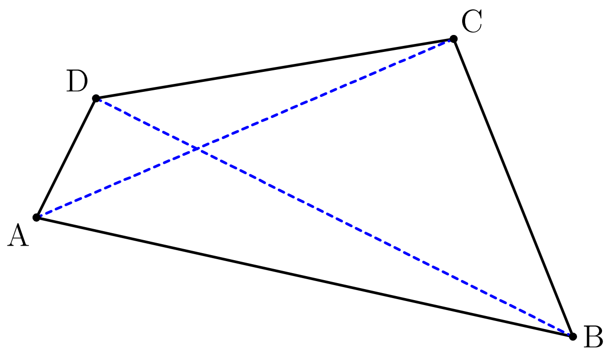
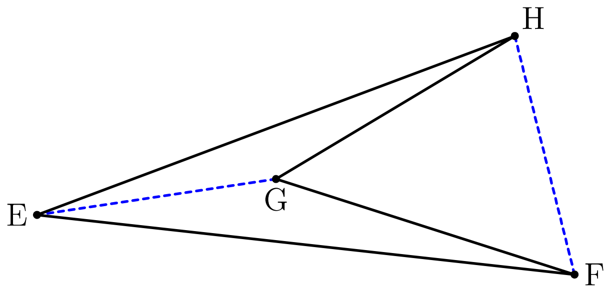
- Un cuadrilátero es convexo cuando todos sus ángulos con convexos.
- Un cuadrilátero es cóncavo cuando uno de sus ángulos es cóncavo.

Propiedades

✱ En un cuadrilátero convexo las diagonales están en su interior.

✱ En un cuadrilátero cóncavo, una de la diagonales está en el interior y la otra en el exterior.

Ejemplos

<table>
<tr><td>Ejemplo 3</td><td>Ejemplo 4</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Las dos diagonales del cuadrilátero ABCD están en el interior.</td><td>La diagonal EG está en el interior y la diagonal HF en el exterior.</td></tr>
</table>

Suma de los ángulos de un cuadrilátero

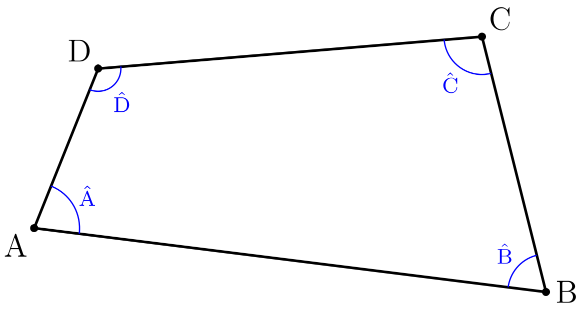
La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°.

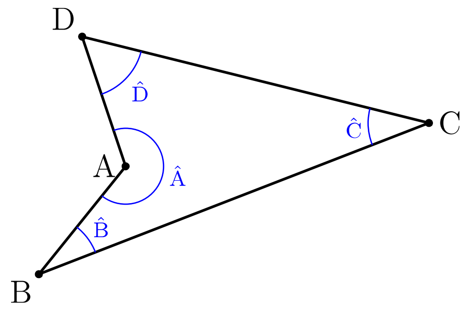
Demostración

La idea de la demostración es dividir el cuadrilátero en dos triángulos y usar la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°.

La demostración es válida tanto para cuadriláteros convexos como para cuadriláteros cóncavos.

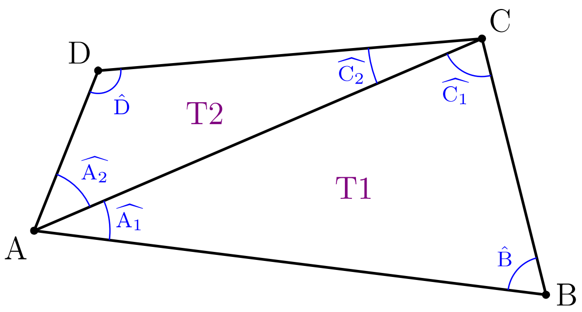
Consideramos el cuadrilátero ABCD y llamamos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$ a sus ángulos:

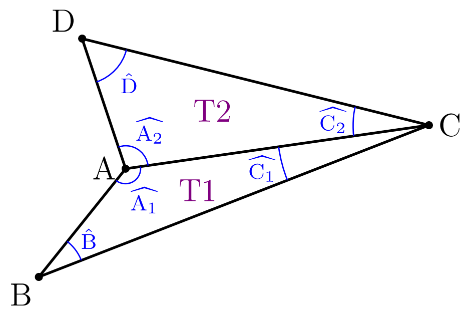




Hay que demostrar que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$

Trazamos la diagonal AC, que descompone el cuadrilátero en los dos triángulos ABC (T1) y ACD (T2); usamos una notación para los ángulos de los triángulos que los relacione fácilmente con los ángulos del cuadrilátero:





Observamos que $\hat{A}=\widehat{A_1}+\widehat{A_2}$ y $\hat{C}=\widehat{C_1}+\widehat{C_2}$

En el triángulo ABC (T1) se verifica $\widehat{A_1}+\hat{B}+\widehat{C_1}=180^\circ$

En el triángulo ACD (T2) se verifica $\widehat{A_2}+\hat{D}+\widehat{C_2}=180^\circ$

Si sumamos las dos igualdades anteriores, obtenemos una nueva igualdad:

$\widehat{A_1}+\hat{B}+\widehat{C_1}+\widehat{A_2}+\hat{D}+\widehat{C_2}=180^\circ+180^\circ$

Si cambiamos el orden de los sumandos y hacemos la operación del segundo miembro obtenemos:

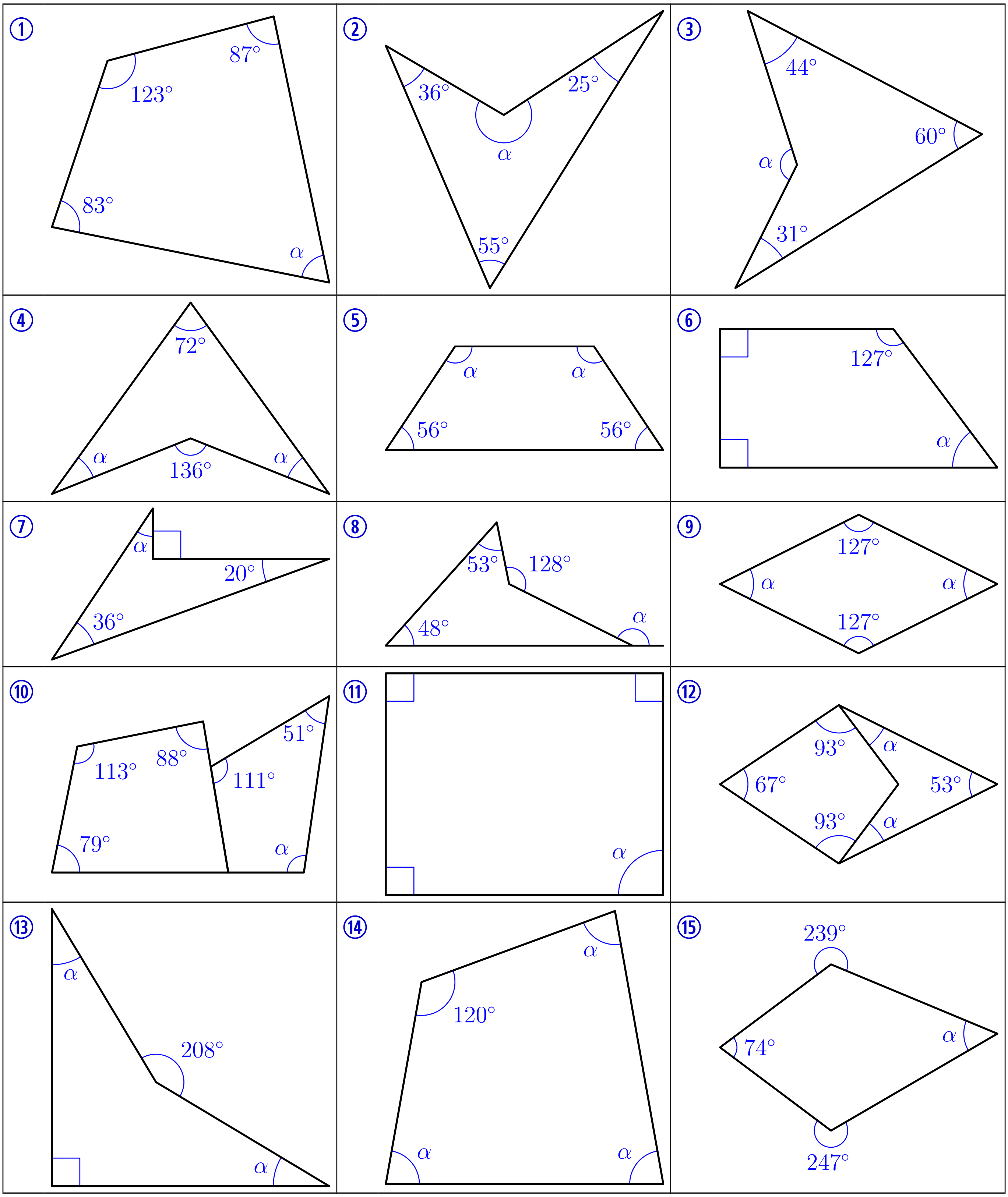
$\widehat{A_1}+\widehat{A_2}+\hat{B}+\widehat{C_1}+\widehat{C_2}+\hat{D}=360^\circ$

Usando las relaciones establecidas más arriba:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$

Enunciados

Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras:



Clasificación de los cuadriláteros

Para facilitar el estudio de los cuadriláteros y el cálculo de sus perímetros y áreas es conveniente clasificarlos, porque según algunas de sus carecterísticas, tienen distintas propiedades útiles.

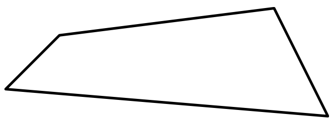
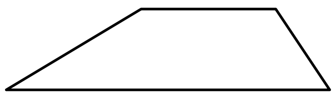
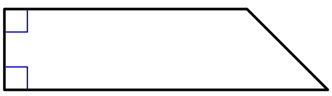
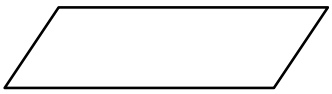
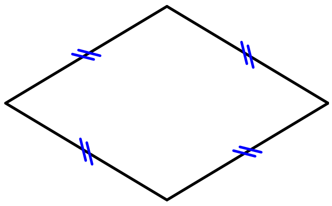
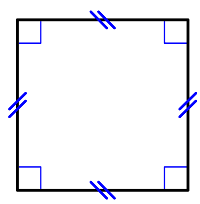
- ✱ Si un cuadrilátero no tiene ninguna pareja de lados paralelos, se llama **trapezoide**. Es el cuadrilátero más general que hay y no tiene ninguna propiedad especial, pero podría tener dos parejas de lados iguales, un ángulo recto, dos ángulos rectos o alguna otra característica interesante.
- ✱ Si un cuadrilátero tiene al menos una pareja de lados paralelos, se llama **trapecio**. Hay algún tipo particular de trapecio:
  - ■ Si un trapecio tiene iguales los lados que no son paralelos, se llama **trapecio isósceles**.
  - ■ Si un trapecio tiene dos ángulos rectos, se llama **trapecio rectángulo**.
- ✱ Si un cuadrilátero tiene dos parejas de lados paralelos, se llama **paralelogramo**. Hay algún tipo especial de paralelogramo:
  - ■ Si un paralelogramo tiene cuatro ángulos rectos, se llama **rectángulo**.
  - ■ Si un paralelogramo tiene los cuatro lados iguales, se llama **rombo**.
  - ■ Si un paralelogramo es a la vez rectángulo y rombo, se llama **cuadrado**.

Propiedades

Las definiciones anteriores tienen la consecuencia de que muchos cuadriláteros cumplen varias a la vez. Normalmente se intenta nombrar un cuadrilátero con la definición más particular que cumpla, pero eso no quiere decir que pierda el nombre que recibe por una definición más general.

- ✱ Todos los cuadrados son rombos.
- ✱ Todos los cuadrados son rectángulos.
- ✱ Todos los cuadrados son paralelogramos.
- ✱ Todos los rombos son paralelogramos.
- ✱ Todos los rectángulos son paralelogramos.
- ✱ Todos los paralelogramos son trapecios.

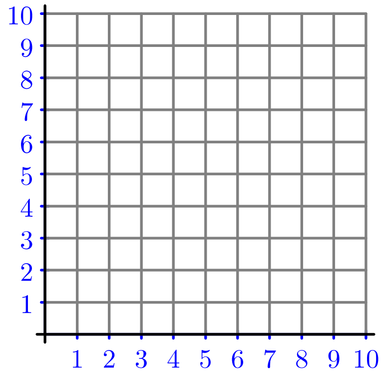
Ejemplos

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
			
Trapezoide	Trapecio	Trapecio isósceles	Trapecio rectángulo
Ejemplo 5	Ejemplo 6	Ejemplo 7	Ejemplo 8
			
Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado

Enunciados

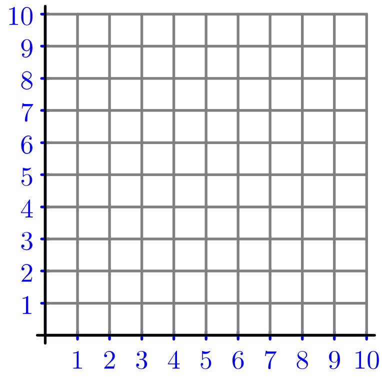
Representa gráficamente los siguientes cuadriláteros especificados mediante las coordenadas de sus vértices, que están escritos en el orden correcto. Después usa la palabra o palabras más específicas que puedas para nombrar los cuadriláteros.

①



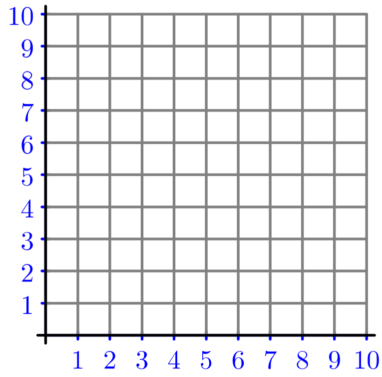
(1,1) (9,1) (9,9) (1,9)

②



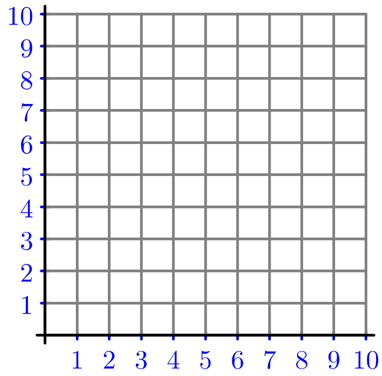
(3,0) (9,6) (6,9) (0,3)

③



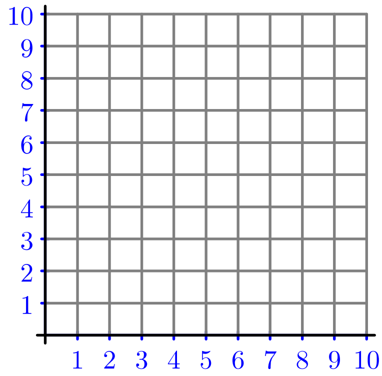
(5,1) (8,5) (5,9) (2,5)

④



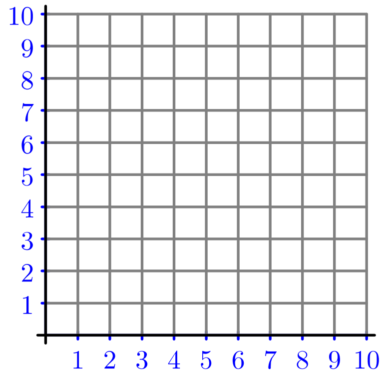
(8,10) (8,3) (2,1) (2,10)

⑤



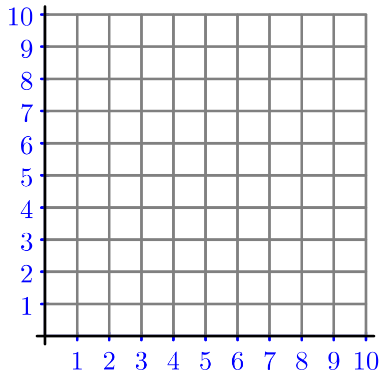
(1,1) (10,2) (8,7) (3,6)

⑥



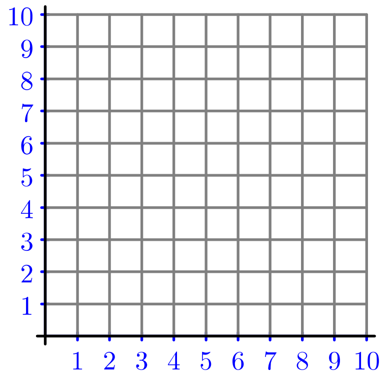
(2,9) (8,8) (8,1) (2,2)

⑦



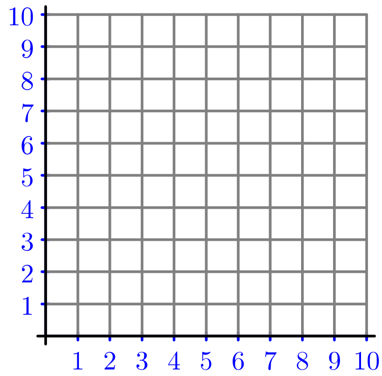
(2,5) (6,9) (10,5) (6,1)

⑧



(4,9) (6,9) (9,2) (1,2)

⑨



(1,0) (1,10) (9,8) (9,5)

Enunciados

Juzga con las palabras «verdadero» o «falso» las siguientes afirmaciones. Asegúrate de tener pensado un motivo para tomar la decisión.

① Todos los cuadrados son trapecios.

② Todos los paralelogramos tienen cuatro lados iguales.

③ Todos los rombos tienen dos ángulos rectos.

④ Algún cuadrilátero tiene dos ángulos cóncavos.

⑤ Si un cuadrilátero tiene tres ángulos rectos, es un rectángulo.

⑥ Algún trapezoide tiene un ángulo recto.

⑦ Ningún rectángulo tiene los cuatro lados iguales.

⑧ Todos los rectángulos son cuadrados.

⑨ Todos los paralelogramos son rombos.

⑩ Los rombos no pueden tener ángulos rectos.

⑪ Si un cuadrilátero tiene dos ángulos rectos, es un rectángulo.

⑫ Si un cuadrilátero tiene tres lados iguales, es un rombo.

⑬ Las diagonales de un cuadrilátero siempre se cortan en un punto.

⑭ Los ángulos de un trapecio rectángulo son todos rectos.

⑮ Un trapecio isósceles no puede ser un paralelogramo.

⑯ Algún rombo es un trapecio rectángulo.

⑰ Un cuadrilátero no puede tener tres ángulos iguales y el cuarto diferente.

⑱ Cualquier diagonal de un cuadrilátero convexo divide al cuadrilátero en dos triángulos.

⑲ Si se unen los puntos medios de los lados de un cuadrado se obtiene un cuadrado.

⑳ Si se unen dos triángulos equiláteros iguales por uno de sus lados y luego se suprime ese lado, se obtiene un rombo.

㉑ Cuando se traza la diagonal de un cuadrado, este queda dividido en dos triángulos isósceles.

㉒ Si se unen los puntos medios de los lados de un rombo se obtiene un rombo.

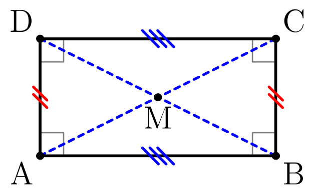
㉓ Si se unen dos triángulos rectángulos isósceles iguales por la hipotenusa y luego se suprime esta, se obtiene un cuadrado.

El rectángulo

- ✱ El rectángulo tiene los cuatro ángulos rectos.
- ✱ El rectángulo tiene los lados iguales dos a dos.
- ✱ Las dos diagonales del rectángulo miden lo mismo.
- ✱ Las diagonales del rectángulo se cortan en el punto medio; esta es una propiedad general de todos los paralelogramos.

Ejemplo 1

- ✱ El cuadrilátero ABCD de la figura de la derecha es un rectángulo.
- ✱ Sus cuatro ángulos son rectos.
- ✱ Los lados son iguales dos a dos: $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = \overline{DA}$
- ✱ Las diagonales AC y BD se cortan en el punto medio M: $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{BM} = \overline{MD}$



Dimensiones de un rectángulo

Un rectángulo queda perfectamente determinado por las dos longitudes de sus lados. Las dos longitudes se llaman **dimensiones del rectángulo**. También nos podemos referir a ellas como altura y anchura, base y altura o con otras palabras diferentes que sean adecuadas al contexto; pero el rectángulo no cambia por usar unas palabras u otras, ni por cambiarlo de posición.

Perímetro de un rectángulo

Si llamamos a y b a las dos dimensiones del rectángulo, el perímetro se calcula sumando los cuatro lados, pero dos de ellos miden a y otros dos miden b, así que la manera más sencilla de calcular el perímetro es:

$$\boxed{\text{Perímetro} = 2 \cdot (a + b)}$$

Área de un rectángulo

El área de un rectángulo se calcula multiplicando sus dos dimensiones, como se deduce de la definición de área. Si llamamos a y b a las dos dimensiones del rectángulo:

$$\boxed{\text{Área} = a \cdot b}$$

Ejemplo 2

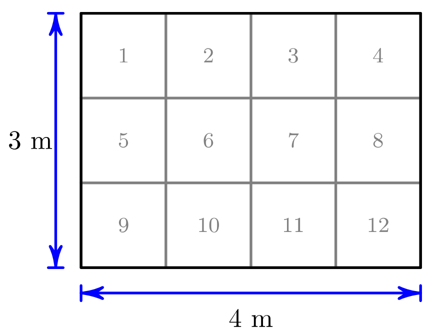
Enunciado: calcula el perímetro y el área de un rectángulo de dimensiones 3 metros y 4 metros.

Comentario: como los datos están en metros, obtendremos el perímetro en metros y el área en metros cuadrados.

Resolución

Perímetro $= 2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$; área $= 3 \cdot 4 = 12$

Solución: perímetro: 14 m, área: 12 m²



Enunciados

Calcula el perímetro y el área de los siguientes rectángulos. Da el resultado en la misma unidad de medida que el enunciado.

① Sus dimensiones son 15 metros y 8 metros.

② Sus dimensiones son 22 centímetros y 13 centímetros.

③ Sus dimensiones son 7 kilómetros y 12 kilómetros.

④ Sus dimensiones son 34 metros y 10 metros.

⑤ Sus dimensiones son 29 milímetros y 6 milímetros.

⑥ Sus dimensiones son 38 metros y 5 metros.

⑦ Sus dimensiones son 19 metros y 7 metros.

⑧ Sus dimensiones son 21 centímetros y 19 centímetros.

⑨ Sus dimensiones son 13 metros y 19 metros.

⑩ Sus dimensiones son 4,2 metros y 5,9 metros.

⑪ Sus dimensiones son 7,1 centímetros y 1,7 centímetros.

⑫ Sus dimensiones son 0,25 metros y 0,8 metros.

⑬ Sus dimensiones son 1,9 hectómetros y 0,7 hectómetros.

⑭ Sus dimensiones son 22 metros y 0,5 metros.

⑮ Sus dimensiones son 250 milímetros y 100 milímetros.

Enunciados

⑯ Calcula el área de un rectángulo cuyas dimensiones son 0,2 kilómetros y 0,3 kilómetros. Da el resultado en hectómetros cuadrados.

⑰ Calcula el área de un rectángulo cuyas dimensiones son 40 decímetros y 50 decímetros. Da el resultado en metros cuadrados.

⑱ Calcula el perímetro de un rectángulo cuyas dimensiones son 300 metros y 20 decámetros. Da el resultado en kilómetros.

⑲ Calcula el perímetro de un rectángulo cuyas dimensiones son 0,8 metros y 0,6 metros. Da el resultado en decímetros.

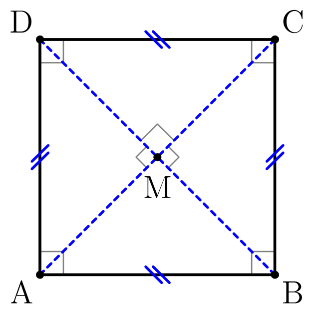
⑳ Calcula el área de un rectángulo cuyas dimensiones son 0,002 kilómetros y 300 milímetros. Da el resultado en metros cuadrados.

㉑ Calcula el perímetro de un rectángulo cuyas dimensiones son 550 metros y 820 metros. Da el resultado en hectómetros.

El cuadrado

- El cuadrado tiene los cuatro ángulos rectos.
- El cuadrado tiene los cuatro lados iguales.
- Las dos diagonales del cuadrado miden lo mismo; esta es una propiedad general de todos los rectángulos.
- Las diagonales del cuadrado se cortan en el punto medio; esta es una propiedad general de todos los paralelogramos.
- Las diagonales del cuadrado se cortan perpendicularmente; esta es una propiedad general de todos los rombos.

Ejemplo 1



- El cuadrilátero ABCD de la figura de la derecha es un cuadrado.
- Sus cuatro ángulos son rectos.
- Los cuatro lados son iguales: $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{BC} = \overline{DA}$
- Las diagonales AC y BD se cortan perpendicularmente en el punto medio M: $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{BM} = \overline{MD}$

Lado del cuadrado

Un cuadrado queda perfectamente determinado por la longitud de su lado.

Perímetro de un cuadrado

Si llamamos a a la longitud del lado del cuadrado, el perímetro del cuadrado se calcula sumando los cuatro lados, pero como los cuatro miden lo mismo, la manera más sencilla de calcular el perímetro es:

$$\boxed{\text{Perímetro} = 4 \cdot a}$$

Área de un cuadrado

El área de un cuadrado se calcula como la de cualquier rectángulo, pero como el cuadrado es un rectángulo con las dos dimensiones iguales, basta elevar al cuadrado la longitud del lado. Precisamente, este es el origen histórico de llamar «elevar al cuadrado» a calcular una potencia de exponente 2. Si llamamos a a la longitud del lado del cuadrado:

$$\boxed{\text{Área} = a^2}$$

Ejemplo 2

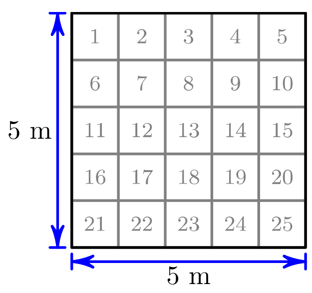
Enunciado: calcula el perímetro y el área de un cuadrado de 5 metros de lado.

Comentario: como el dato está en metros, obtendremos el perímetro en metros y el área en metros cuadrados.

Resolución

Perímetro = $4 \cdot 5 = 20$; área = $5^2 = 25$

Solución: perímetro: 20 m, área: 25 m²



Enunciados

Calcula el perímetro y el área de los siguientes cuadrados. Da el resultado en la misma unidad de medida que el enunciado.

① Su lado mide 7 metros.

② Su lado mide 12 metros.

③ Su lado mide 25 centímetros.

④ Su lado mide 14 kilómetros.

⑤ Su lado mide 13 decímetros.

⑥ Su lado mide 10 metros.

⑦ Su lado mide 33 milímetros.

⑧ Su lado mide 345 metros.

⑨ Su lado mide 29 metros.

⑩ Su lado mide 2,5 hectómetros.

⑪ Su lado mide 3,2 metros.

⑫ Su lado mide 1,7 decímetros.

⑬ Su lado mide 0,72 centímetros.

⑭ Su lado mide 12,1 milímetros.

⑮ Su lado mide 8,8 metros.

Enunciados

⑯ Calcula el área de un cuadrado cuyo lado mide 100 metros. Da el resultado en hectómetros cuadrados.

⑰ Calcula el perímetro de un cuadrado cuyo lado mide 250 metros. Da el resultado en kilómetros.

⑱ Calcula el área de un cuadrado cuyo lado mide 20 centímetros. Da el resultado en decímetros cuadrados.

⑲ Calcula el perímetro de un cuadrado cuyo lado mide 5 metros. Da el resultado en decámetros.

⑳ Calcula el área de un cuadrado cuyo lado mide 250 centímetros. Da el resultado en decímetros cuadrados.

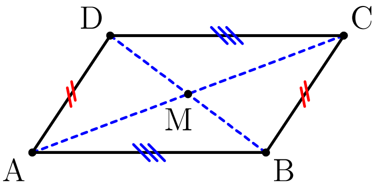
㉑ Calcula el perímetro de un cuadrado cuyo lado mide 4,25 decámetros. Da el resultado en hectómetros.

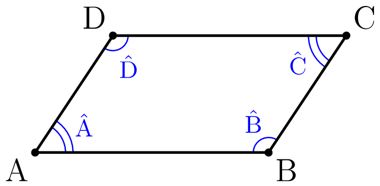
El paralelogramo

- ✱ El paralelogramo tiene los lados paralelos e iguales dos a dos.
- ✱ El paralelogramo tiene los ángulos opuestos iguales.
- ✱ Las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto medio.

Ejemplo

- ✱ El cuadrilátero ABCD de las figuras es un paralelogramo.





- ✱ Los lados son paralelos e iguales dos a dos:
  AB ∥ CD, BC ∥ DA, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = \overline{DA}$
- ✱ Sus ángulos opuestos son iguales: $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$
- ✱ Las diagonales AC y BD se cortan en el punto medio M: $\overline{AM} = \overline{MC}$, $\overline{BM} = \overline{MD}$

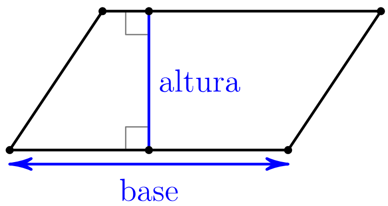
Perímetro de un paralelogramo

Para calcular el perímetro de un paralelogramo hay que conocer las longitudes de sus dos lados; si las llamamos p y q, la manera más sencilla de hacerlo es:

$$\boxed{\text{Perímetro} = 2 \cdot (p + q)}$$

Área de un paralelogramo

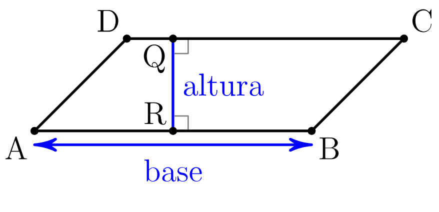
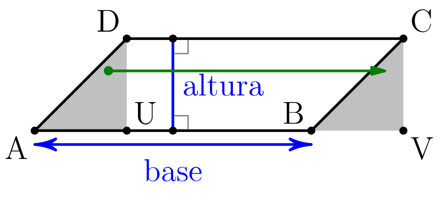
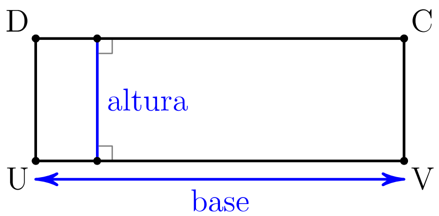
Para calcular el área de un paralelogramo hay que conocer uno de los lados, que en ese momento se denomina **base**, y la distancia entre ese lado y el lado paralelo, que se llama **altura** del paralelogramo. Observa que hay dos posibilidades de elección de base y altura.



Si llamamos b a la longitud de la base y h a la altura, se verifica:

$$\boxed{\text{Área} = b \cdot h}$$

Demostración

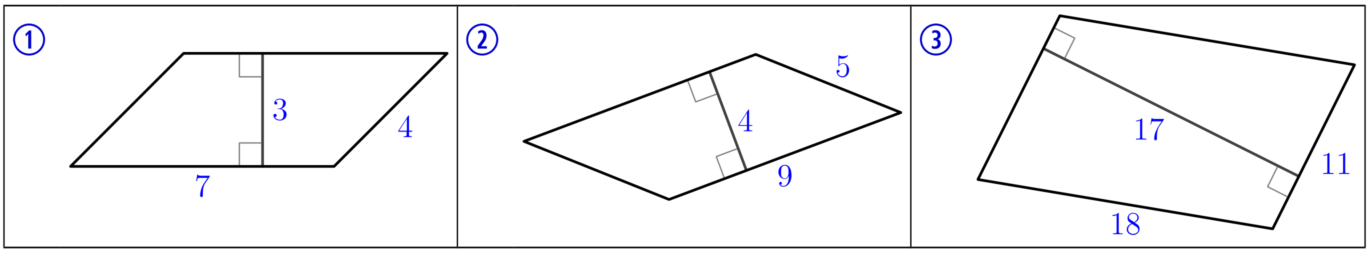
Paso 1	Paso 2	Paso 3
		
Consideramos el paralelogramo ABCD. Tomamos como base el lado AB y como altura el segmento QR.	Trasladamos el triángulo ADU a la posición BCV; la figura ABDC tiene la **misma** área que la figura UDCV.	La figura UDCV, que es un rectángulo, tiene las mismas base y altura que el paralelogramo original.

Cálculo de perímetro y área de paralelogramos

Para calcular el perímetro y el área de un paralelogramo es necesario conocer las longitudes de los dos lados, la longitud de una de las alturas y saber a qué lado corresponde la altura.

Enunciados

Calcula el perímetro y el área de los siguientes paralelogramos. Todas las medidas están en metros.



Resoluciones

① Perímetro = 2 · (4 + 7) = 2 · 11 = 22; área = 7 · 3 = 21

Solución: perímetro: 22 m, área: 21 m²

② Perímetro = 2 · (9 + 5) = 2 · 14 = 28; área = 9 · 4 = 36

Solución: perímetro: 28 m, área: 36 m²

③ Perímetro = 2 · (18 + 11) = 2 · 29 = 58; área = 11 · 17 = 187

Solución: perímetro: 58 m, área: 187 m²

Enunciado

④ Calcula el perímetro y el área de un paralelogramo sabiendo que sus lados miden 35 decímetros y 5 metros y que la altura correspondiente al lado mayor mide 285 centímetros.

Comentarios

- ✱ Como el enunciado no incorpora una ilustración, podemos hacer una si nos parece conveniente o no hacerla.
- ✱ Como el enunciado no pide el resultado en ninguna unidad en concreto, podemos hacerlo en la unidad y la precisión que nos interese.
- ✱ Es importante observar que en el enunciado se utilizan tres unidades diferentes, pero las operaciones se deben hacer con una única unidad.

Resolución

Los lados miden 3,5 m y 5 m. El lado mayor mide 5 m.

La altura correspondiente al lado de 5 m mide 2,85 m.

Perímetro = 2 · (3,5 + 5) = 2 · 8,5 = 17

Área = 5 · 2,85 = 14,25

Solución: perímetro: 17 m, área: 14,25 m²

Enunciados

Calcula el perímetro y el área de los siguientes paralelogramos. Da el resultado en la misma unidad de medida que el enunciado.

① Sus dimensiones son 13 metros y 8 metros y la altura correspondiente al lado mayor mide 8 metros.

② Sus dimensiones son 4 metros y 15 metros y la altura correspondiente al lado menor mide 12 metros.

③ Sus dimensiones son 20 centímetros y 17 centímetros y la altura correspondiente al lado mayor mide 16 centímetros.

④ Sus dimensiones son 9 kilómetros y 30 kilómetros y la altura correspondiente al lado menor mide 20 kilómetros.

⑤ Sus dimensiones son 25 metros y 4 metros y la altura correspondiente al lado mayor mide 3 metros.

⑥ Sus dimensiones son 10 metros y 15 metros y la altura correspondiente al lado menor mide 13 metros.

⑦ Sus dimensiones son 16 milímetros y 10 milímetros y la altura correspondiente al lado mayor mide 8 milímetros.

⑧ Sus dimensiones son 1,3 hectómetros y 2,1 hectómetros y la altura correspondiente al lado menor mide 1 hectómetro.

⑨ Sus dimensiones son 1,8 metros y 2,3 metros y la altura correspondiente al lado mayor mide 1,5 metros.

⑩ Sus dimensiones son 3,5 metros y 8,8 metros y la altura correspondiente al lado menor mide 6,8 metros.

Enunciados

⑪ Calcula el área de un paralelogramo cuyas dimensiones son 0,23 decámetros y 13 metros sabiendo que la altura que corresponde al lado mayor mide 0,8 decámetros. Da el resultado en metros cuadrados.

⑫ Calcula el perímetro de un paralelogramo cuyas dimensiones son 0,51 kilómetros y 23 decámetros sabiendo que la altura que corresponde al lado menor mide 3 hectómetros. Da el resultado en hectómetros.

⑬ Calcula el área de un paralelogramo cuyas dimensiones son 1200 milímetros y 3 metros sabiendo que la altura que corresponde al lado menor mide 0,034 hectómetros. Da el resultado en metros cuadrados.

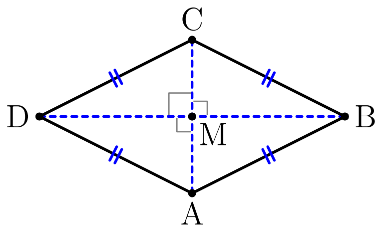
⑭ Calcula el perímetro de un paralelogramo cuyas dimensiones son 32 centímetros y 28 centímetros sabiendo que la altura que corresponde al lado mayor mide 21 centímetros. Da el resultado en metros.

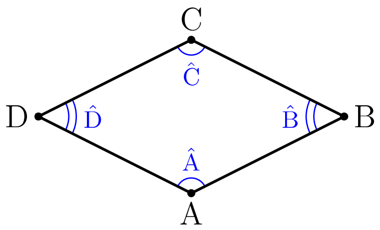
El rombo

- El rombo tiene los cuatro lados iguales.
- El rombo tiene varias propiedades comunes a todos los paralelogramos:
  - Tiene los lados paralelos dos a dos.
  - Tiene los ángulos opuestos iguales.
  - Sus diagonales se cortan en el punto medio.
- Las diagonales del rombo se cortan perpendicularmente. Esta propiedad la comparte con algunos otros cuadriláteros.

Ejemplo

- El cuadrilátero ABCD de las figuras es un rombo.





- Los cuatro lados son iguales: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$.
- Los lados son paralelos dos a dos: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$.
- Sus ángulos opuestos son iguales: $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$.
- Las diagonales AC y BD se cortan en el punto medio M: $\overline{AM} = \overline{MC}$, $\overline{BM} = \overline{MD}$.
- Las diagonales son perpendiculares: $AC \perp BD$.

Perímetro de un rombo

Si llamamos a a la longitud del lado del rombo, el perímetro del rombo se calcula sumando los cuatro lados, pero como los cuatro miden lo mismo, la manera más sencilla de calcular el perímetro es:

$$\boxed{\text{Perímetro} = 4 \cdot a}$$

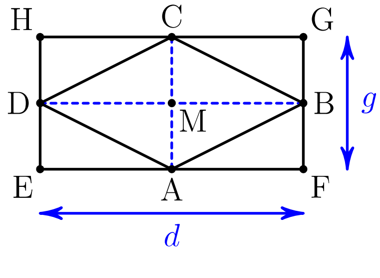
Área de un rombo

- Se puede calcular el área de un rombo como la de cualquier paralelogramo si se conocen la longitud de un lado y la de la altura correspondiente a ese lado.
- Además del método general, se puede calcular el área de un rombo conocidas las longitudes de las diagonales: si llamamos d y g a las longitudes de las diagonales, se verifica:

$$\boxed{\text{Área} = d \cdot g : 2}$$

Demostración

El rombo ABCD tiene la mitad del área del rectángulo EFGH, ya que el rombo está formado por cuatro triángulos iguales (como el AMB) y el rectángulo por ocho triángulos iguales. El área del rectángulo es $d \cdot g$, luego la del rombo es $d \cdot g : 2$.



Propiedad del rombo

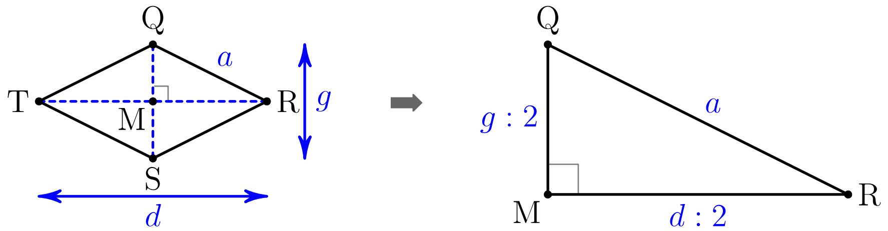
- El rombo tiene una propiedad que relaciona las longitudes de las diagonales y la longitud del lado.
- Si llamamos a a la longitud del lado y d y g a las longitudes de las diagonales, se verifica:

$$\boxed{a^2 = (d:2)^2 + (g:2)^2}$$

Demostración

Consideramos el rombo QRST, de lado $a = \overline{\mathrm{QR}}$ y diagonales $d = \overline{\mathrm{TR}}$ y $g = \overline{\mathrm{QS}}$.

Llamamos M al punto de corte de las dos diagonales.



El triángulo QMR es un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa mide a y los catetos miden $d:2$ y $g:2$. Por el teorema de Pitágoras, $a^2 = (d:2)^2 + (g:2)^2$.

Ejercicio resuelto

Enunciado: calcula el perímetro y el área de un rombo cuyas diagonales miden 72 metros y 154 metros.

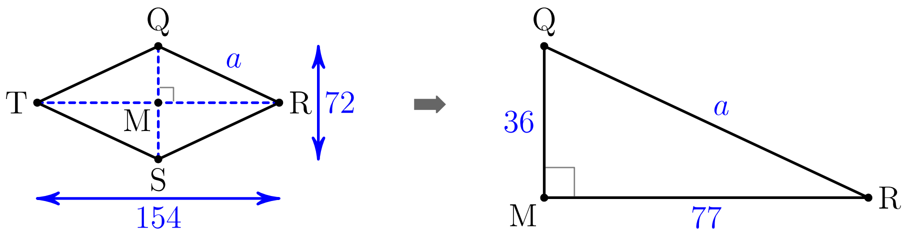
Comentario: podríamos calcular inmediatamente el área, ya que conocemos las dos diagonales, pero para calcular el perímetro necesitamos calcular el lado. Podemos hacer el cálculo en el orden que deseemos.

Resolución

Consideramos el rombo QRST, de lado $a = \overline{\mathrm{QR}}$.

Conocemos las diagonales $d = \overline{\mathrm{TR}} = 154$ y $g = \overline{\mathrm{QS}} = 72$.

Llamamos M al punto medio de las diagonales.



El triángulo QMR es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $154:2=77$ y $72:2=36$ y la hipotenusa es el lado del rombo.

$a^2 = 77^2 + 36^2 = 5929 + 1296 = 7225 \Rightarrow a = \sqrt{7225} = 85$

Perímetro $= 4 \cdot a = 4 \cdot 85 = 340$

Área $= d \cdot g : 2 = 154 \cdot 72 : 2 = 77 \cdot 72 = 5544$

Solución: perímetro: 340 m; área: 5544 m²

Enunciados

Calcula el perímetro y el área de los siguientes rombos. Da el resultado en la misma unidad de medida que el enunciado.

① Sus diagonales miden 6 metros y 8 metros.

② Sus diagonales miden 10 metros y 24 metros.

③ Sus diagonales miden 63 kilómetros y 60 kilómetros.

④ Sus diagonales miden 32 metros y 126 metros.

⑤ Sus diagonales miden 70 centímetros y 24 centímetros.

⑥ Sus diagonales miden 16 metros y 30 metros.

⑦ Sus diagonales miden 80 metros y 18 metros.

⑧ Sus diagonales miden 90 milímetros y 56 milímetros.

⑨ Sus diagonales miden 160 metros y 78 metros.

⑩ Sus diagonales miden 336 metros y 52 metros.

⑪ Sus diagonales miden 28 decámetros y 96 decámetros.

⑫ Sus diagonales miden 1,8 metros y 8 metros.

⑬ Sus diagonales miden 1,2 metros y 0,22 metros.

⑭ Sus diagonales miden 11 decímetros y 9,6 decímetros.

⑮ Sus diagonales miden 4 metros y 7,5 metros.

Enunciados

⑯ Calcula el área de un rombo cuyas diagonales miden 180 decímetros y 2,4 decámetros. Da el resultado en metros cuadrados.

⑰ Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 38 metros y 36 decámetros. Da el resultado en metros.

⑱ Calcula el área de un rombo cuyas diagonales miden 6,2 decámetros y 9,6 hectómetros. Da el resultado en metros cuadrados.

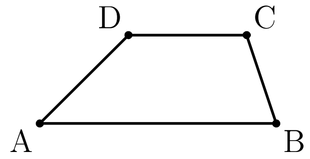
⑲ Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 2 hectómetros y 99 decámetros. Da el resultado en metros.

⑳ Calcula el área de un rombo cuyas diagonales miden 580 decímetros y 84 decámetros. Da el resultado en metros cuadrados.

㉑ Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 12 decámetros y 182 metros. Da el resultado en metros.

El trapecio

El trapecio tiene dos lados paralelos, que se llaman **bases**.



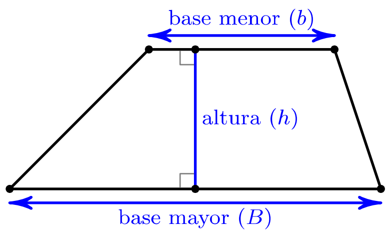
Ejemplo

- ✱ El cuadrilátero ABCD de la figura es un trapecio.
- ✱ Tiene dos lados paralelos: AB ∥ CD.

Perímetro de un trapecio

Para calcular el perímetro de un trapecio hay que conocer las longitudes de sus cuatro lados, como con cualquier cuadrilátero sin propiedades adicionales.

Área de un trapecio



Para calcular el área de un trapecio hay que conocer las longitudes de sus **bases** y la distancia entre ellas, que se llama **altura** del trapecio.

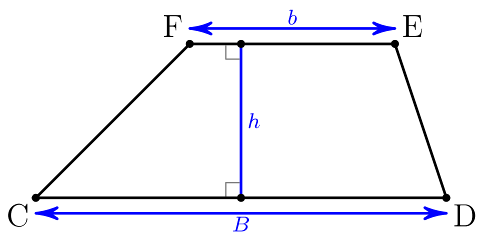
Como las dos bases de un trapecio suelen tener distinta longitud, se acostumbra denominar B a la longitud de la mayor y b a la longitud de la menor. Si, además, llamamos h a la altura, se verifica:

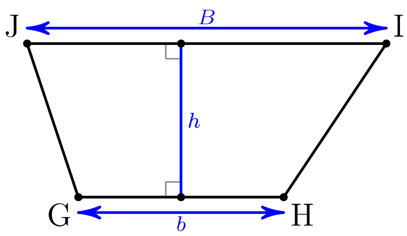
$$\boxed{\text{Área} = (B + b) : 2 \cdot h}$$

La fórmula anterior se suele expresar como «el área de un trapecio es igual a la semisuma de las bases multiplicada por la altura»; el motivo es que la división entre 2 de la suma de las bases se llama semisuma.

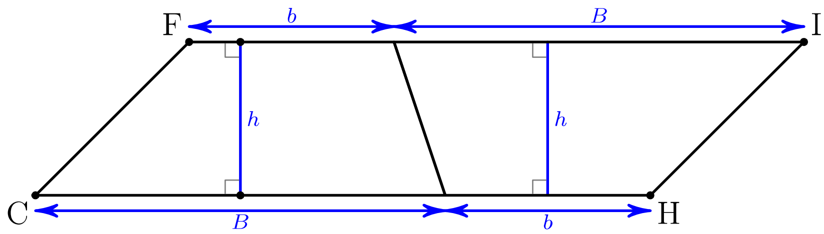
Demostración

Consideramos el trapecio CDEF, llamamos $B = \overline{\text{CD}}$ y $b = \overline{\text{EF}}$ a las bases y h a la altura. Copiamos el trapecio CDEF al trapecio GHIJ, pero trasladándolo a la derecha y girándolo 180°: el vértice C se convierte en el vértice I, el D en el J, el E en el G y el F en el H.





Si unimos el trapecio CDEF con el trapecio GHIJ a lo largo del lado ED = JG, obtenemos el paralelogramo CHIF:



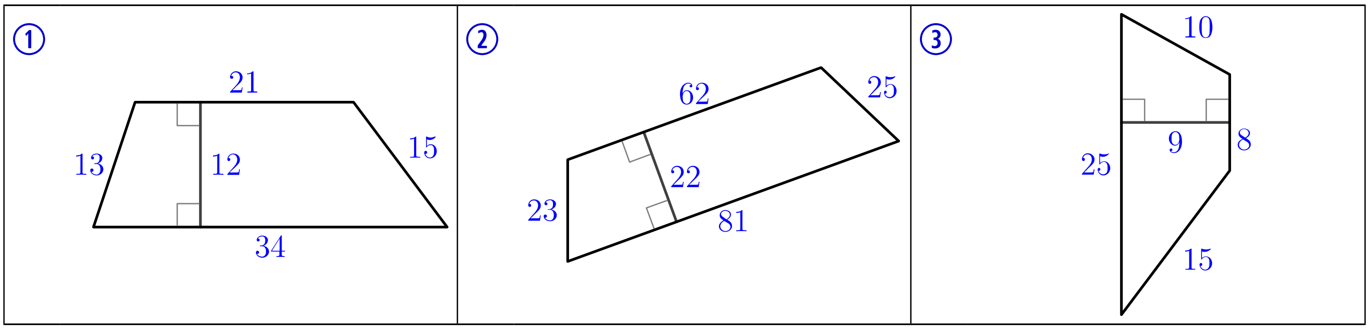
Una base del paralelogramo CHIF es $B + b$ y le corresponde una altura h, de modo que el área del paralelogramo CHIF es $(B + b) \cdot h$. El área del trapecio CDEF es la mitad del área del paralelogramo CHIF, por tanto el área del trapecio CDEF es $(B + b) \cdot h : 2$, que se suele escribir $(B + b) : 2 \cdot h$.

Cálculo de perímetro y área de trapecios

Para calcular el perímetro y el área de un trapecio es necesario conocer las longitudes de los cuatro lados y la longitud de la altura.

Enunciados

Calcula el perímetro y el área de los siguientes trapecios. Todas las medidas están en metros.



Resoluciones

① Perímetro = 34 + 15 + 21 + 13 = 83

Área = (34 + 21) : 2 · 12 = 55 : 2 · 12 = 27,5 · 12 = 330

También se podría calcular así: área = (34 + 21) · 12 : 2 = 55 · 6 = 330

Solución: perímetro: 83 m, área: 330 m²

② Perímetro = 81 + 25 + 62 + 23 = 191

Área = (81 + 62) : 2 · 22 = 143 : 2 · 22 = 71,5 · 22 = 1573

También se podría calcular así: área = (81 + 62) · 22 : 2 = 143 · 11 = 1573

Solución: perímetro: 143 m, área: 1573 m²

③ Perímetro = 15 + 8 + 10 + 25 = 58

Área = (25 + 8) : 2 · 9 = 33 : 2 · 9 = 16,5 · 9 = 148,5

Solución: perímetro: 58 m, área: 148,5 m²

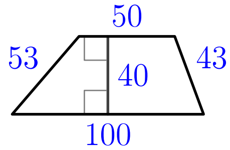
Enunciado

④ Calcula el perímetro y el área de un trapecio tal que sus bases miden 1 hectómetro y 5 decámetros, los otros dos lados miden 53 metros y 43 metros y que la altura mide 4 decámetros. Da el resultado en metros y metros cuadrados.

Comentarios

- ✱ Como el enunciado no incorpora una ilustración, podemos hacer una si nos parece conveniente o no hacerla.
- ✱ Es importante observar que en el enunciado se utilizan tres unidades diferentes, pero las operaciones se deben hacer con una única unidad.

Resolución



Perímetro = 100 + 43 + 50 + 53 = 246

Área = (100 + 50) : 2 · 40 = 150 : 2 · 40 = 75 · 40 = 3000

También se podría calcular así: área = (100 + 50) · 40 : 2 = 150 · 20 = 3000

Solución: perímetro: 246 m, área: 3000 m²

Enunciados

Calcula el perímetro y el área de los siguientes trapecios. Da el resultado en la misma unidad de medida que el enunciado.

① Sus bases miden 30 metros y 9 metros, los otros dos lados miden 20 metros y 13 metros y la altura mide 12 metros.

② Sus bases miden 20 metros y 3 metros, los otros dos lados miden 26 metros y 25 metros y la altura mide 24 metros.

③ Sus bases miden 22 metros y 8 metros, los otros dos lados miden 15 metros y 13 metros y la altura mide 12 metros.

④ Sus bases miden 50 metros y 13 metros, los otros dos lados miden 65 metros y 61 metros y la altura mide 60 metros.

⑤ Sus bases miden 60 metros y 9 metros, los otros dos lados miden 20 metros y 37 metros y la altura mide 12 metros.

⑥ Sus bases miden 60 metros y 12 metros, los otros dos lados miden 35 metros y 29 metros y la altura mide 21 metros.

⑦ Sus bases miden 52 metros y 8 metros, los otros dos lados miden 15 metros y 37 metros y la altura mide 12 metros.

⑧ Sus bases miden 50 metros y 8 metros, los otros dos lados miden 45 metros y 39 metros y la altura mide 36 metros.

⑨ Sus bases miden 130 metros y 42 metros, los otros dos lados miden 75 metros y 53 metros y la altura mide 45 metros.

⑩ Sus bases miden 50 metros y 3 metros, los otros dos lados miden 68 metros y 61 metros y la altura mide 60 metros.

⑪ Sus bases miden 80 metros y 44 metros, los otros dos lados miden 25 metros y 29 metros y la altura mide 20 metros.

⑫ Sus bases miden 400 metros y 52 metros, los otros dos lados miden 305 metros y 73 metros y la altura mide 55 metros.

⑬ Sus bases miden 68 metros y 11 metros, los otros dos lados miden 82 metros y 89 metros y la altura mide 80 metros.

Enunciados

⑭ Calcula el área de un trapecio cuyas bases miden 4 hectómetros y 5,5 decámetros y la altura mide 1 hectómetro. Da el resultado en metros cuadrados.

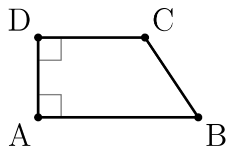
⑮ Calcula el área de un trapecio cuyas bases miden 2200 metros y 800 metros y la altura mide 1000 metros. Da el resultado en kilómetros cuadrados.

⑯ Calcula el área de un trapecio cuyas bases miden 2300 metros y 1700 metros y la altura mide 5 kilómetros. Da el resultado en kilómetros cuadrados.

El trapecio rectángulo

* El trapecio rectángulo tiene dos lados paralelos, que se llaman **bases**.
* El trapecio rectángulo tiene dos ángulos consecutivos rectos.
* La altura del trapecio rectángulo coincide con uno de los lados que no son paralelos.

Ejemplo



* El cuadrilátero ABCD de la figura es un trapecio rectángulo.
* Tiene dos lados paralelos: AB ∥ CD.
* Los ángulos en los vértices A y D son ángulos rectos.
* La altura es la longitud del lado AD.

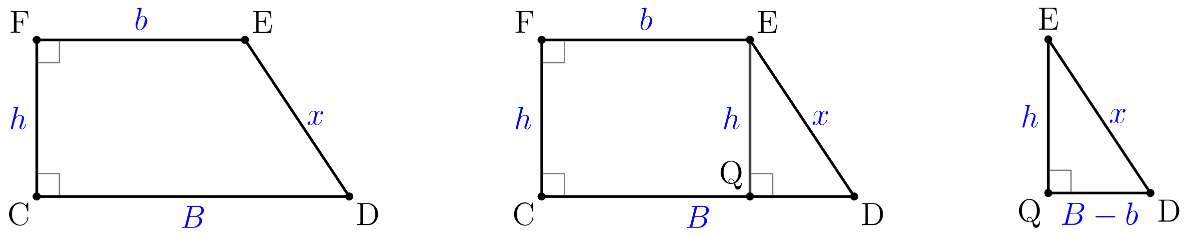
Propiedad

* En un trapecio rectángulo hay una relación entre las dos bases, la altura y la longitud del lado que no forma ningún ángulo recto.
* Si llamamos B y b a las bases, h a la altura y x a la longitud del lado que no forma ángulos rectos, se verifica:

$$\boxed{x^2 = h^2 + (B - b)^2}$$

Demostración

Consideramos el trapecio CDEF; llamamos $B = \overline{\text{CD}}$ y $b = \overline{\text{EF}}$ a las bases, $h = \overline{\text{FC}}$ a la altura y $x = \overline{\text{DE}}$ a la longitud del lado que no forma ángulos rectos.



Obtenemos el punto Q como la proyección del punto E sobre el segmento CD y afirmamos que $\overline{\text{EQ}} = h$ y $\overline{\text{QD}} = B - b$.

Como el triángulo QED es un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa mide x, un cateto mide h y el otro cateto mide $B - b$, se puede aplicar el teorema de Pitágoras para obtener $x^2 = h^2 + (B - b)^2$.

Ejemplo de uso de trapecios rectángulos

Al menos hay cuatro países que utilizan algún trapecio rectángulo en sus banderas:

			
Bahamas (dos de color aguamarina)	Mozambique (verdeazulado y amarillo)	S. Tomé y Príncipe (dos de color verde)	Vanuato (color rojo y color verde)

Cálculo de perímetro y área de trapecios rectángulos

Para calcular el perímetro y el área de un trapecio rectángulo podemos utilizar la relación entre las bases, la altura y el lado que no es perpendicular a ningún otro para calcular algún valor necesario que no nos den como dato en el enunciado.

Enunciados

① Calcula el perímetro y el área de un trapecio rectángulo sabiendo que sus bases miden 60 y 32 y el lado menor de los otros dos mide 45.

② Calcula el perímetro y el área de un trapecio rectángulo sabiendo que sus bases miden 92 y 44 y el lado mayor de los otros dos mide 73.

Comentarios

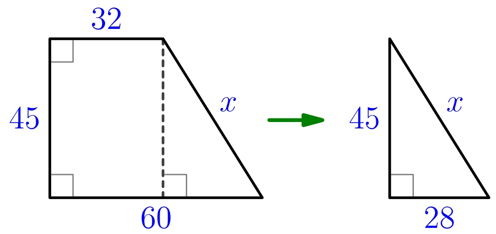
✱ Aunque el enunciado no lo dé ni lo pida, es útil hacer un dibujo aproximado, ya que ayuda a recordar la propiedad que relaciona los lados de un trapecio rectángulo.

✱ De los dos lados que no son bases del trapecio rectángulo, el menor es la altura, ya que es la distancia más corta entre las bases.

✱ Como el enunciado viene sin unidades, usaremos los símbolos «u» y «u²».

Resoluciones

① Llamamos x a la longitud del lado desconocido.



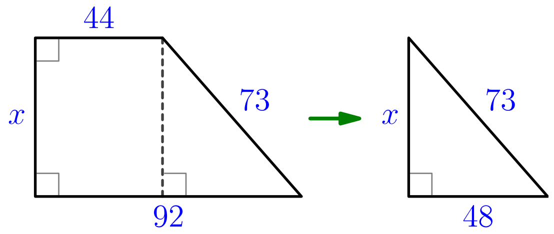
$60 - 32 = 28$; $x^2 = 28^2 + 45^2 = 2809 \Rightarrow x = \sqrt{2809} = 53$

Perímetro = 60 + 53 + 32 + 45 = 190

Área = (60 + 32) : 2 · 45 = 92 : 2 · 45 = 46 · 45 = 2070

Solución: perímetro: 190 u, área: 2070 u²

② Llamamos x a la longitud del lado desconocido.



$92 - 44 = 48$; $x^2 + 48^2 = 73^2 \Rightarrow x^2 = 73^2 - 48^2 = 3025 \Rightarrow x = \sqrt{3025} = 55$

Perímetro = 92 + 73 + 44 + 55 = 264

Área = (92 + 44) : 2 · 55 = 136 : 2 · 55 = 68 · 55 = 3740

Solución: perímetro: 264 u, área: 3740 u²

Enunciados

Calcula el perímetro y el área de los siguientes trapecios rectángulos. Todas las medidas están en metros.

① Sus bases miden 13 y 10; el lado menor de los otros dos mide 4.

② Sus bases miden 20 y 15; el lado mayor de los otros dos mide 13.

③ Sus bases miden 70 y 59; el lado menor de los otros dos mide 60.

④ Sus bases miden 120 y 107; el lado mayor de los otros dos mide 85.

⑤ Sus bases miden 100 y 84; el lado menor de los otros dos mide 63.

⑥ Sus bases miden 20 y 12; el lado mayor de los otros dos mide 10.

⑦ Sus bases miden 50 y 15 ; el lado menor de los otros dos mide 12.

⑧ Sus bases miden 110 y 65; el lado mayor de los otros dos mide 53.

⑨ Sus bases miden 140 y 104; el lado menor de los otros dos mide 77.

⑩ Sus bases miden 100 y 80; el lado mayor de los otros dos mide 29.

⑪ Sus bases miden 140 y 107; el lado menor de los otros dos mide 56.

⑫ Sus bases miden 60 y 51; el lado mayor de los otros dos mide 41.

⑬ Sus bases miden 60 y 48; el lado menor de los otros dos mide 35.

⑭ Sus bases miden 160 y 95; el lado mayor de los otros dos mide 97.

⑮ Sus bases miden 30 y 21; el lado menor de los otros dos mide 12.

⑯ Sus bases miden 98 y 77; el lado mayor de los otros dos mide 29.

⑰ Sus bases miden 440 y 400; el lado menor de los otros dos mide 399.

⑱ Sus bases miden 110 y 92 ; el lado mayor de los otros dos mide 82.

⑲ Sus bases miden 336 y 200; el lado menor de los otros dos mide 273.

⑳ Sus bases miden 100 y 85; el lado mayor de los otros dos mide 113.

㉑ Sus bases miden 200 y 116; el lado menor de los otros dos mide 187.

㉒ Sus bases miden 232 y 141; el lado mayor de los otros dos mide 109.

㉓ Sus bases miden 200 y 101; el lado menor de los otros dos mide 20.

㉔ Sus bases miden 600 y 209; el lado mayor de los otros dos mide 409.

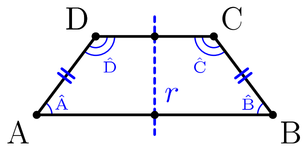
㉕ Sus bases miden 206 y 140; el lado menor de los otros dos mide 112.

㉖ Sus bases miden 320 y 201; el lado mayor de los otros dos mide 169.

El trapecio isósceles

- ✱ El trapecio isósceles tiene dos lados paralelos, que se llaman **bases**.
- ✱ El trapecio isósceles tiene iguales los dos lados que no son las bases.
- ✱ La recta que pasa por los puntos medios de las bases es un eje de simetría.
- ✱ El trapecio isósceles tiene los ángulos iguales dos a dos.

Ejemplo



- ✱ El cuadrilátero ABCD de la figura es un trapecio isósceles.
- ✱ Tiene dos lados paralelos: AB ∥ CD.
- ✱ Los otros dos lados son iguales: $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{DA}}$.
- ✱ La recta *r* que pasa por los puntos medios de AB y CD es el eje de simetría.
- ✱ Los ángulos son iguales dos a dos: $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}}$, $\hat{\mathrm{C}} = \hat{\mathrm{D}}$.

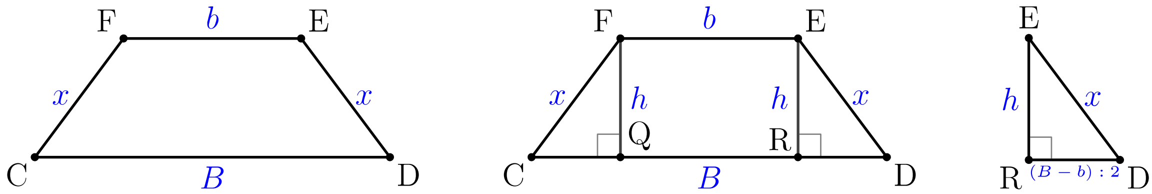
Propiedad

- ✱ En un trapecio isósceles hay una relación entre los lados y la altura.
- ✱ Si llamamos B y b a las bases, h a la altura y x al la longitud de cada lado que no es ninguna de las bases, se verifica:

$$\boxed{x^2 = h^2 + ((B - b) : 2)^2}$$

Demostración

Consideramos el trapecio CDEF; llamamos $x = \overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{CF}}$ a la longitud de cada lado que no es ninguna de las bases y $B = \overline{\mathrm{CD}}$ y $b = \overline{\mathrm{EF}}$ a las bases.



Obtenemos el punto Q como la proyección del punto F sobre el segmento CD y el punto R como la proyección del punto E sobre el segmento CD.

Si llamamos h a la altura del trapecio, es claro que $\overline{\mathrm{FQ}} = \overline{\mathrm{ER}} = h$.

También se verifica $\overline{\mathrm{CQ}} = \overline{\mathrm{RD}}$ y $\overline{\mathrm{QR}} = b$. Por tanto, $\overline{\mathrm{RD}} = (B - b) : 2$.

Como el triángulo RED es un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa mide x, un cateto mide h y el otro cateto mide $(B - b) : 2$, se puede aplicar el teorema de Pitágoras para obtener $x^2 = h^2 + ((B - b) : 2)^2$.

Ejemplo de uso de trapecios isósceles

Al menos hay dos países que utilizan algún trapecio isósceles en sus banderas:

	
Antigua y Barbuda (trapecio azul)	Kuwait (trapecio negro)

Cálculo de perímetro y área de trapecios isósceles

Para calcular el perímetro y el área de un trapecio isósceles podemos utilizar la relación entre los lados y la altura para calcular algún valor necesario que no nos den como dato en el enunciado.

Enunciados

① Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles sabiendo que sus bases miden 92 y 50 y los otros dos lados miden 29 cada uno.

② Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles sabiendo que sus bases miden 90 y 72 y la altura mide 40.

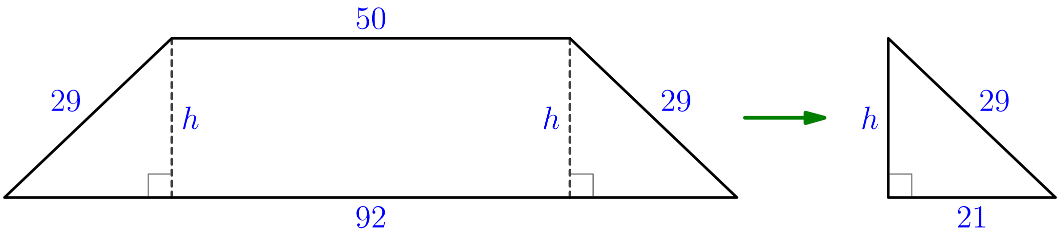
Comentarios

✱ Aunque el enunciado no lo dé ni lo pida, es útil hacer un dibujo aproximado, ya que ayuda a recordar la propiedad que relaciona los lados y la altura de un trapecio isósceles.

✱ Como el enunciado viene sin unidades, usaremos los símbolos «u» y «u²».

Resoluciones

① Llamamos h a la longitud de la altura.



(92 – 50) : 2 = 42 : 2 = 21

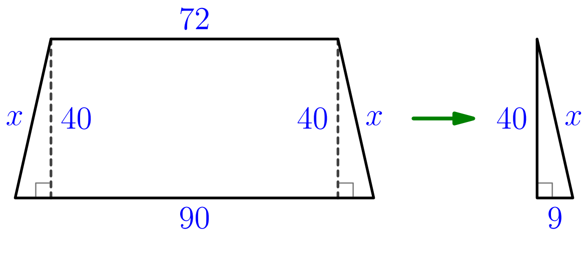
$h^2 + 21^2 = 29^2 \Rightarrow h^2 = 29^2 - 21^2 = 841 - 441 = 400 \Rightarrow h = \sqrt{400} = 20$

Perímetro = 92 + 2 · 29 + 50 = 200

Área = (92 + 50) : 2 · 20 = 142 : 2 · 20 = 71 · 20 = 1420

Solución: perímetro: 200 u, área: 1420 u²

② Llamamos x a la longitud del lado desconocido.



(90 – 72) : 2 = 18 : 2 = 9

$x^2 = 40^2 + 9^2 = 1600 + 81 = 1681 \Rightarrow x = \sqrt{1681} = 41$

Perímetro = 90 + 2 · 41 + 72 = 244

Área = (90 + 72) : 2 · 40 = 162 : 2 · 40 = 81 · 40 = 3240

Solución: perímetro: 244 u, área: 3240 u²

Enunciados

Calcula el perímetro y el área de los siguientes trapecios isósceles. Todas las medidas están en metros.

① Sus bases miden 18 y 10 y los otros dos lados miden 5 cada uno.

② Sus bases miden 24 y 12 y la altura mide 8.

③ Sus bases miden 30 y 6 y los otros dos lados miden 13 cada uno.

④ Sus bases miden 60 y 36 y la altura mide 9.

⑤ Sus bases miden 22 y 40 y los otros dos lados miden 41 cada uno.

⑥ Sus bases miden 90 y 26 y la altura mide 126.

⑦ Sus bases miden 100 y 78 y los otros dos lados miden 61 cada uno.

⑧ Sus bases miden 44 y 68 y la altura mide 35.

⑨ Sus bases miden 200 y 46 y los otros dos lados miden 85 cada uno.

⑩ Sus bases miden 280 y 56 y la altura mide 66.

⑪ Sus bases miden 200 y 2 y los otros dos lados miden 101 cada uno.

⑫ Sus bases miden 470 y 96 y la altura mide 84.

⑬ Sus bases miden 108 y 290 y los otros dos lados miden 109 cada uno.

⑭ Sus bases miden 237 y 93 y la altura mide 65.

⑮ Sus bases miden 340 y 102 y los otros dos lados miden 169 cada uno.

⑯ Sus bases miden 210 y 98 y la altura mide 33.

⑰ Sus bases miden 60 y 20 y los otros dos lados miden 29 cada uno.

⑱ Sus bases miden 750 y 204 y la altura mide 136.

⑲ Sus bases miden 1000 y 202 y los otros dos lados miden 401 cada uno.

⑳ Sus bases miden 32 y 200 y la altura mide 13.

㉑ Sus bases miden 800 y 18 y los otros dos lados miden 409 cada uno.

㉒ Sus bases miden 60 y 36 y la altura mide 35.

㉓ Sus bases miden 300 y 76 y los otros dos lados miden 113 cada uno.

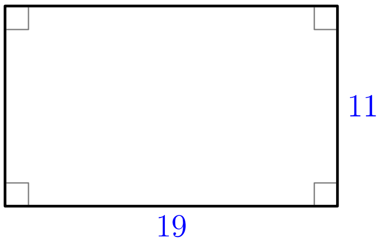
㉔ Sus bases miden 70 y 14 y la altura mide 45.

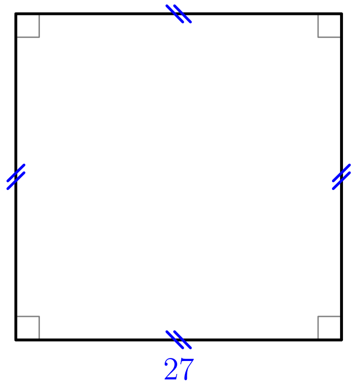
㉕ Sus bases miden 22 y 70 y los otros dos lados miden 26 cada uno.

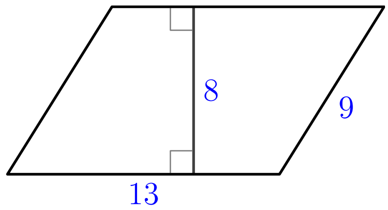
㉖ Sus bases miden 44 y 100 y la altura mide 96.

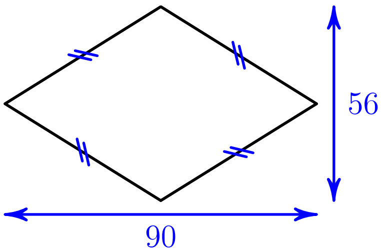
Enunciados

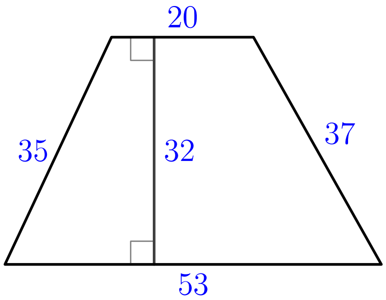
Di el nombre más específico de estos cuadriláteros y calcula su perímetro y su área. Todas las medidas están en metros.

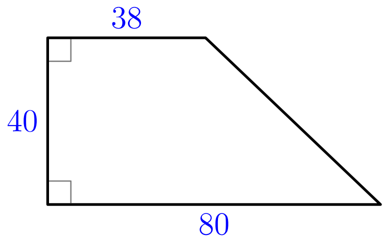
①


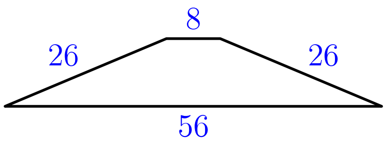
②


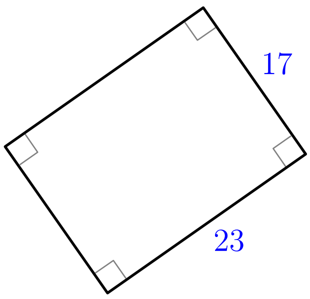
③


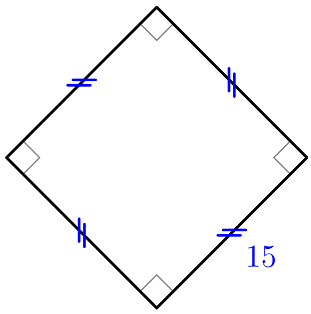
④


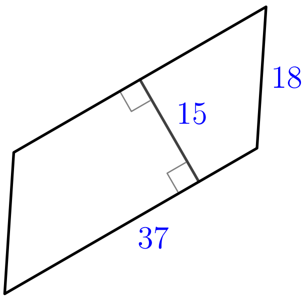
⑤


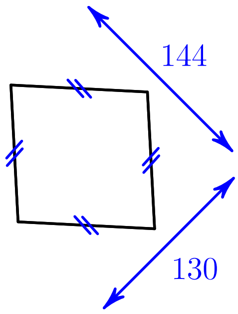
⑥


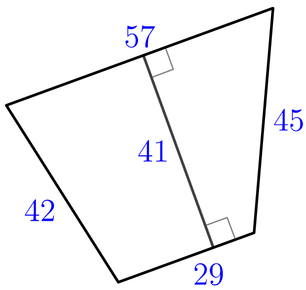
⑦


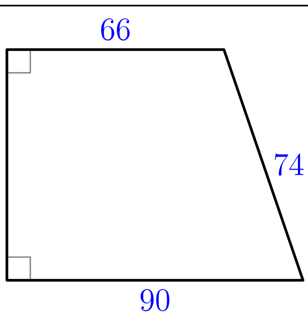
⑧


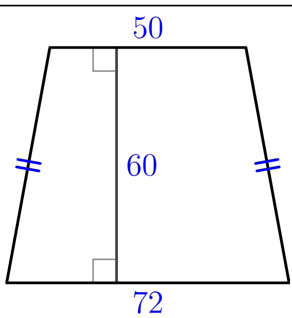
⑨


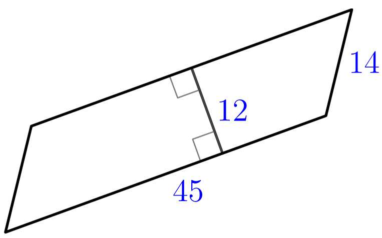
⑩


⑪


⑫


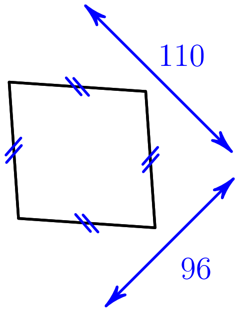
⑬


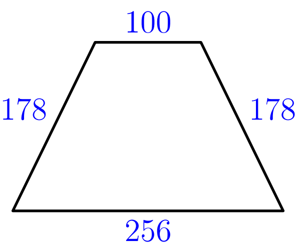
⑭


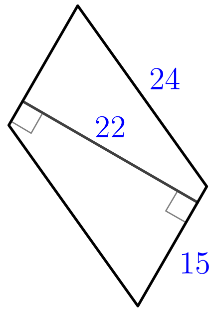
⑮


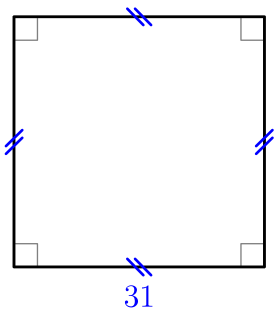
Enunciados

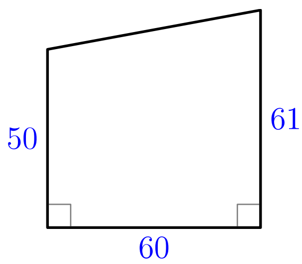
Di el nombre más específico de estos cuadriláteros y calcula su perímetro y su área. Todas las medidas están en metros.

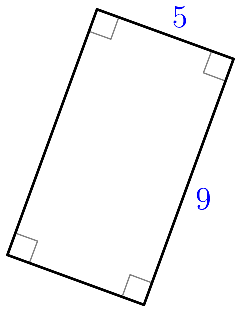
①


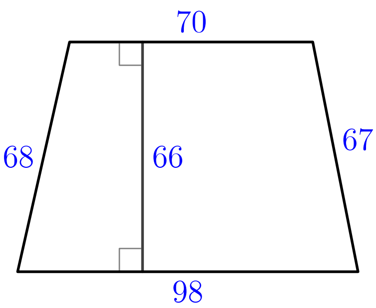
②


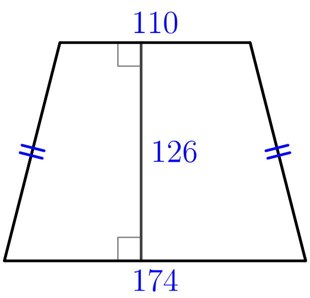
③


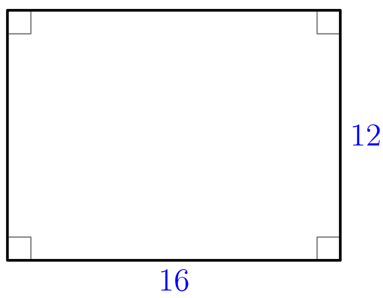
④


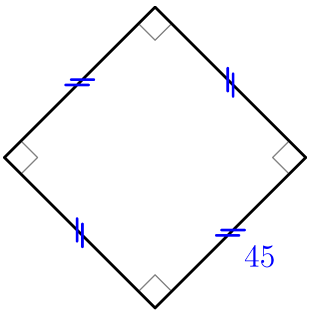
⑤


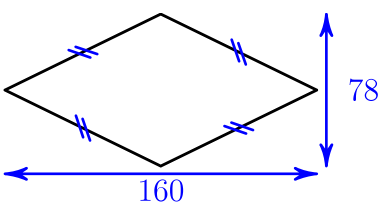
⑥


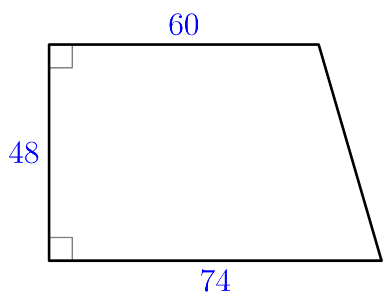
⑦


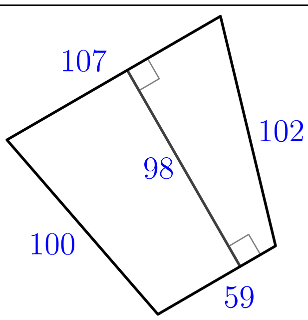
⑧


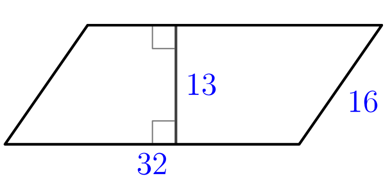
⑨


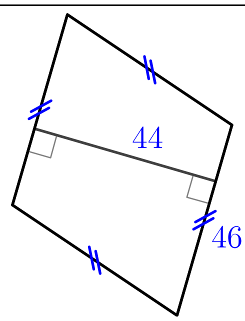
⑩


⑪


⑫


⑬


⑭


⑮


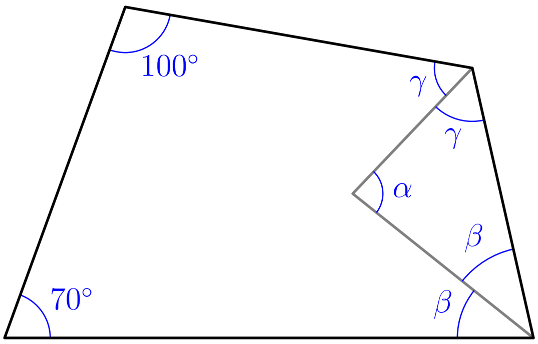
Enunciados

① Calcula el área de un cuadrado sabiendo que su perímetro es 24 metros.

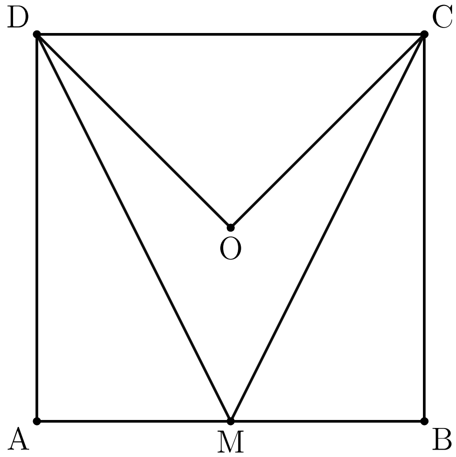
② Calcula la altura de un rombo sabiendo que sus diagonales miden 160 metros y 120 metros.

③ Las dimensiones de un rectángulo son 80 metros y 84 metros. Calcula la distancia entre un vértice y el centro del rectángulo.

④ Calcula el valor del ángulo α en la siguiente figura:

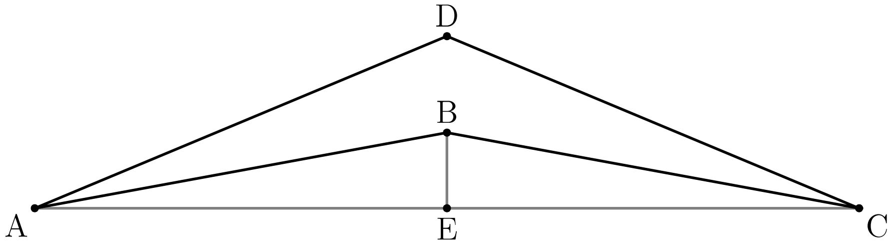


⑤ Si ABCD es un cuadrado de 20 decímetros de lado, M es el punto medio de AB y O es el centro del cuadrado calcula el área (en decímetros cuadrados) del cuadrilátero DMCO de esta figura:



⑥ Calcula el perímetro y el área del cuadrilátero ABCD de la figura sabiendo que

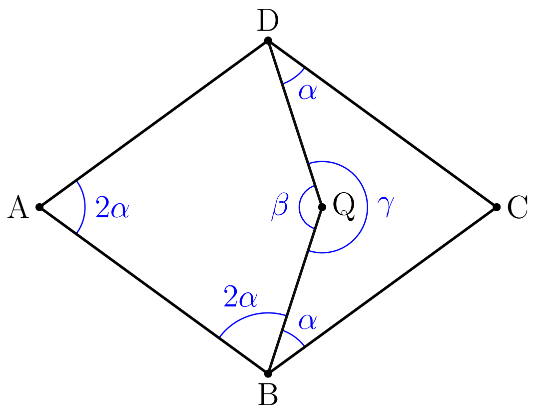
- Las diagonales miden 120 m y 14 m
- $\overline{BE} = 11$ m
- La recta que pasa por E y D es el eje de simetría



Enunciados

① Calcula el área del cuadrilátero que se obtiene uniendo consecutivamente los puntos medios de un cuadrado de 8 metros de lado.

② El rombo ABCD de la figura es un invento muy particular del matemático británico Roger Penrose (nacido en 1931). Mediante el punto Q, el rombo ABCD se divide en los cuadriláteros ABQD y BQDC.

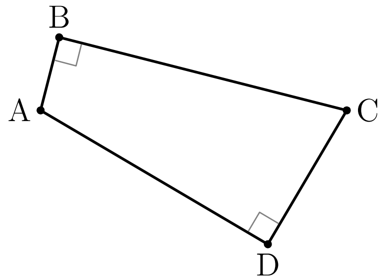


Se pide:

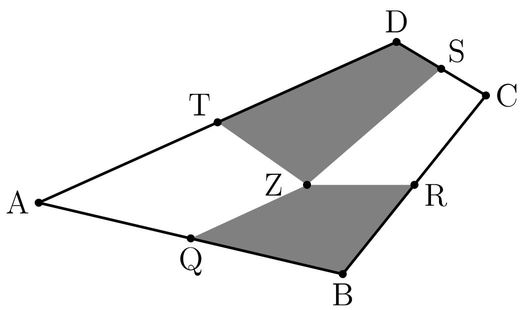
a) Calcula el valor de los ángulos α, β y γ

b) Calcula el valor de las divisiones $\beta : \alpha$ y $\gamma : \alpha$

③ Calcula el perímetro y el área del cuadrilátero ABCD de la figura conociendo estas medidas: $\overline{AB} = 16$, $\overline{AC} = 65$, $\overline{AD} = 56$.



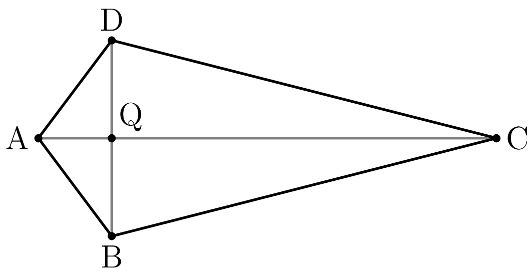
④ El cuadrilátero ABCD de la figura es un cuadrilátero cualquiera, sin ninguna propiedad particular. Los puntos Q, R, S y T son los puntos medios de los lados. El punto Z es un punto cualquiera del interior del cuadrilátero. Sabiendo que la suma de las áreas de los cuadriláteros TZSD y QZRB es 113 metros cuadrados, calcula la suma de las áreas de los cuadriláteros ATZQ y SZRC.



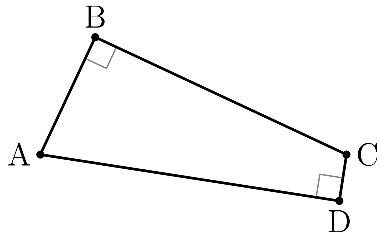
Enunciados

① Calcula el perímetro y el área de un rectángulo sabiendo que uno de sus lados mide 55 metros y cada diagonal mide 75 metros.

② Calcula el perímetro y el área del cuadrilátero ABCD de la figura sabiendo que sus diagonales miden 32 metros y 75 metros y que el segmento AQ mide 12 metros.

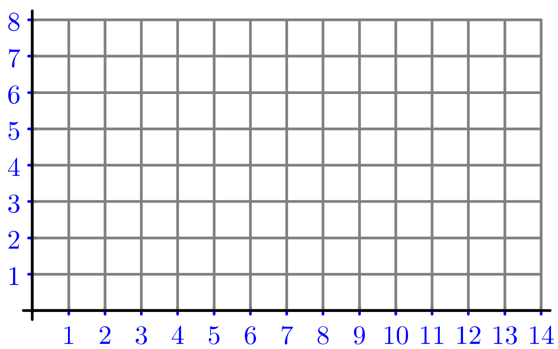


③ Calcula el perímetro y el área del cuadrilátero ABCD de la figura conociendo estas medidas: $\overline{AB} = 36$, $\overline{BC} = 77$, $\overline{AD} = 84$.



④ El teorema de Varignon se llama así en honor del matemático francés Pierre Varignon (1654-1722). Afirma que en cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo cuya área es la mitad de la del cuadrilátero original. La demostración no se puede hacer con los conocimientos del nivel 1, pero sí se puede comprobar la validez del teorema con un ejemplo.

a) Representa gráficamente el cuadrilátero que tiene los vértices en los puntos A=(0,6), B=(8,8), C=(14,6) y D=(8,0). Representa gráficamente el cuadrilátero QRST que se obtiene uniendo consecutivamente los puntos medios del cuadrilátero ABCD y comprueba que es un paralelogramo.



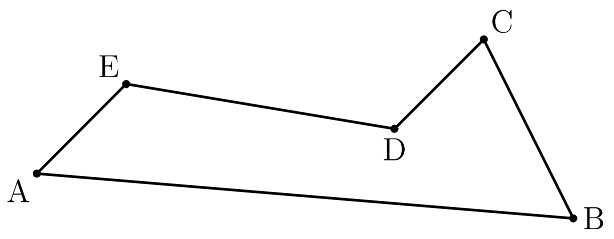
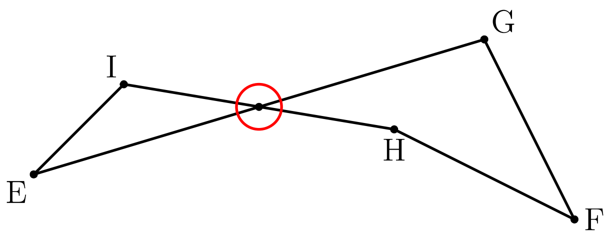
b) Calcula el área del cuadrilátero ABCD.

c) Calcula el área del paralelogramo QRST.

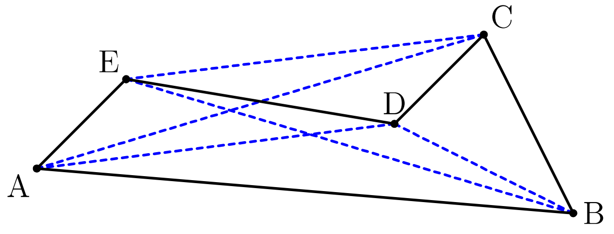
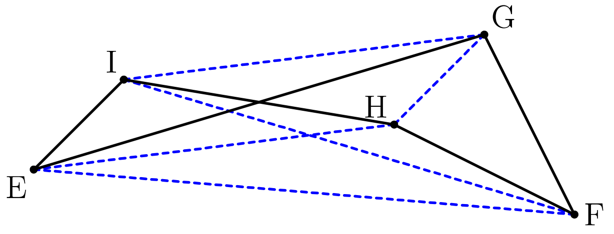
d) Compueba que el área de ABCD es el doble que la de QRST.

Polígono

- ✱ Un polígono es la región del plano delimitada por tres o más segmentos que tienen un extremo común diferente cada dos segmentos.
- ✱ Si los segmentos no tienen más puntos de corte que los extremos, el polígono se llama **simple**; los polígonos simples son los más habituales en matemáticas y los únicos que trataremos este curso.
- ✱ Si los segmentos tienen algún punto de corte además de los extremos, el polígono se llama **complejo**. Si hubiera que trabajar con algún polígono complejo, lo descompondríamos en otras figuras simples.

Ejemplo 1	Ejemplo 2
	
Los segmentos AB, BC, CD, DE y EA delimitan un polígono simple, ya que sus únicos puntos de corte son los extremos A, B, C, D y E.	Los segmentos EG, GF, FH, HI y EI delimitan un polígono complejo, ya que EG y HI se cortan en un punto que no es un extremo.

- ✱ Los segmentos se llaman **lados** del polígono.
- ✱ Los extremos de los segmentos se llaman **vértices** del polígono.
- ✱ Los ángulos determinados por las semirrectas que contienen a dos lados y se orientan hacia el interior del polígono se llaman **ángulos** del polígono; a veces se les llama **ángulos internos** del polígono. Coinciden los vértices de los ángulos con los vértices del polígono.
- ✱ Los segmentos que unen dos vértices no consecutivos se llaman **diagonales** del polígono.

Ejemplo 3	Ejemplo 4
	
Los segmentos AC, AD, BD, BE y CE son las diagonales del polígono determinado por los segmentos AB, BC, CD, DE y EA.	Los segmentos EF, EH, FI, GH y GI son las diagonales del polígono determinado por los segmentos EG, GF, FH, HI y EI.

- ✱ Los polígonos tienen el mismo número de lados que de vértices y de ángulos.

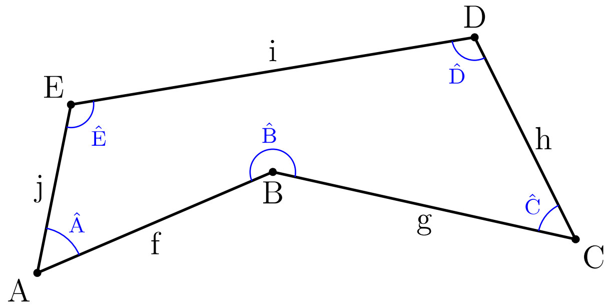
Notación de los polígonos

- Los vértices, como son puntos, se suelen nombrar con letras mayúsculas.
- El polígono se nombra uniendo los nombres de los vértices consecutivos; el orden en que se colocan los vértices es crucial, pueden nombrarse partiendo de cualquier vértice y en el sentido de las agujas del reloj o al revés, pero siempre hay que nombrar seguidos los vértices consecutivos. Cuando el polígono tiene un número demasiado alto de vértices, no resulta práctico nombrarlo a partir de los vértices; en ese caso, se le puede nombrar con alguna letra.
- Los lados se suelen nombrar, además del nombre del segmento, con letras minúsculas. Muchas veces no se distingue entre el lado, que es un segmento, y la longitud del lado, que es una magnitud; hay que distinguirlo por el contexto.
- Los ángulos se pueden nombrar con cualquiera de las notaciones sobre ángulos, la que mejor convenga.
- Una notación muy habitual, aunque no obligatoria, es nombrar los ángulos con el nombre del vértice con el signo «^» (acento circunflejo) sobre la letra.

Ejemplo 1

En el polígono de la ilustración hemos usado esta notación:

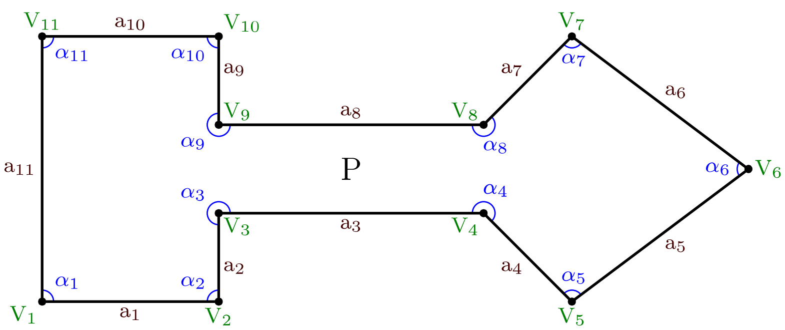
- Los vértices se llaman A, B, C, D y E.
- El polígono se llama ABCDE, pero podría nombrarse también AEDCB, BCDEA, BADEC, etc.
- Los lados se llaman f=AB, g=BC, h=CD, i=DE y j=EA.
- Los ángulos se llaman $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ y $\hat{E}$.



Ejemplo 2

Como el polígono de la ilustración tiene muchos vértices, hemos usado una notación usando subíndices:

- El polígono se llama P (el nombre está aproximadamente en el centro).
- Los vértices se llaman V_1, V_2, V_3, etc. (en verde); los lados se llaman a_1, a_2, a_3, etc. (en rojo); los ángulos se llaman α_1, α_2, α_3, etc (en azul).

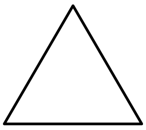
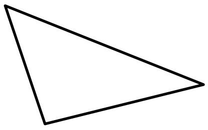
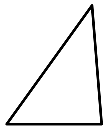
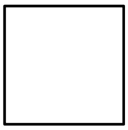
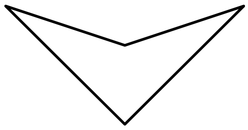
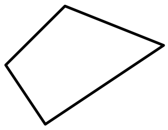
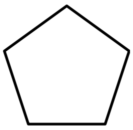
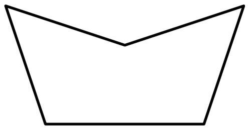
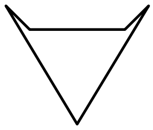
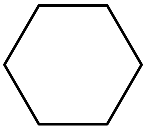
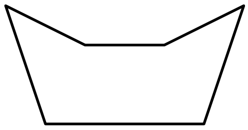
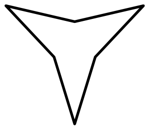
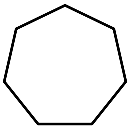
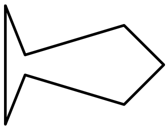
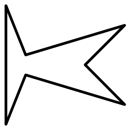
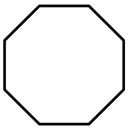
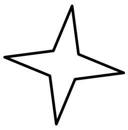
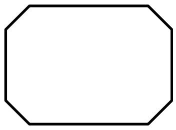


Nombres de los polígonos

* Los polígonos reciben nombres según el número de lados que tienen, número que coincide con el número de ángulos.
* Los nombres de los polígonos provienen de palabras griegas.
* La propia palabra «polígono» proviene del griego πολύ (polus, «varios») y γωνος (gonos, «ańgulos»).

Los primeros nombres

En esta tabla vemos los nombres de los polígonos con menor número de lados y algún ejemplo de ellos.

Número de lados	Nombre(s)	Ejemplos		
3	Triángulo			
4	Cuadrilátero			
5	Pentágono			
6	Hexágono			
7	Heptágono			
8	Octógono Octágono			

Siguientes nombres

En esta tabla vemos los nombres de los siguientes polígonos:

Número de lados	Nombres	Número de lados	Nombre	Número de lados	Nombres
9	Eneágono Nonágono	10	Decágono	11	Endecágono Undecágono

Reglas para nombrar polígonos

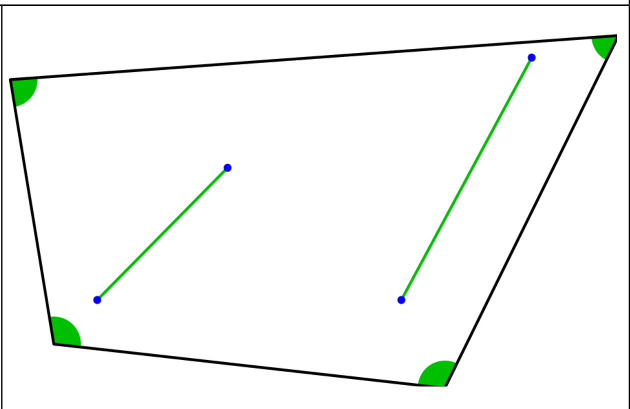
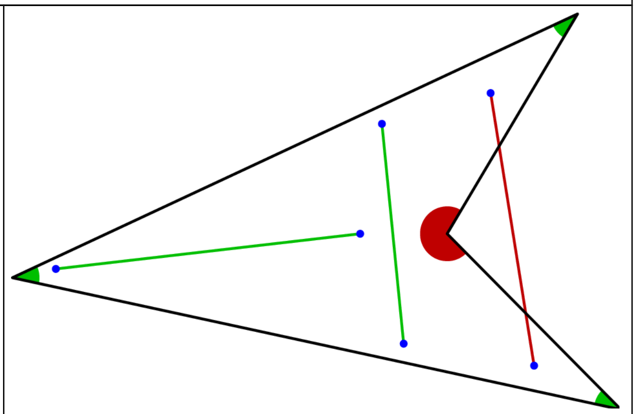
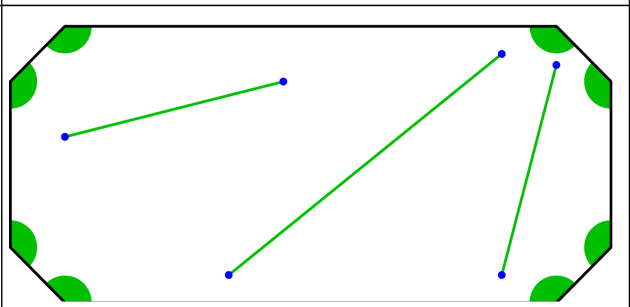
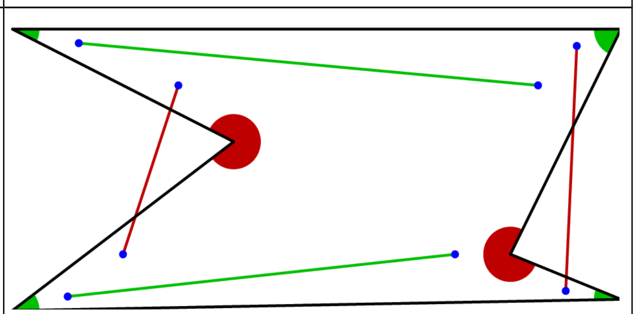
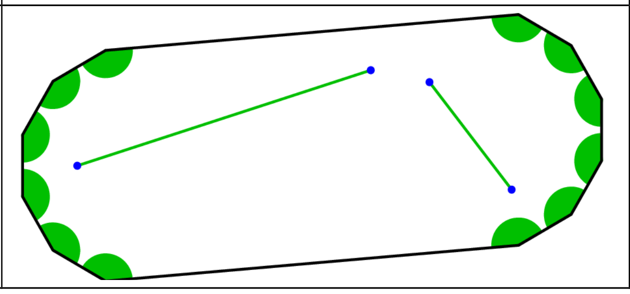
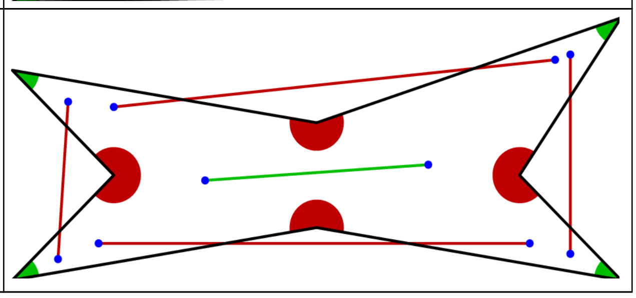
Existen reglas para nombrar los siguientes polígonos, pero son de poco uso porque si el número de lados es elevado es más sencillo usar ese número que recordar el nombre; por ejemplo, en vez de decir «triacontágono» podemos decir «poligono de 30 lados».

Polígonos convexos y cóncavos

- ✱ Un polígono (simple, como todos los que usaremos este curso) puede ser convexo o cóncavo según la definición general de figura convexa o cóncava.
- ✱ Además de la definición general de figura convexa y cóncava, en el caso de los polígonos es equivalente decir esto:
  - ■ Un polígono es convexo cuando todos sus ángulos con convexos.
  - ■ Un polígono es cóncavo cuando uno de sus ángulos es cóncavo.

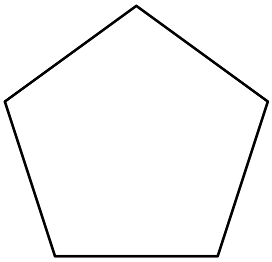
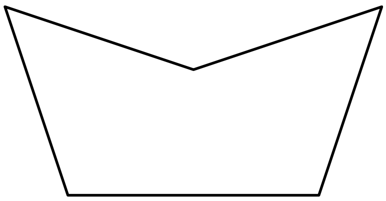
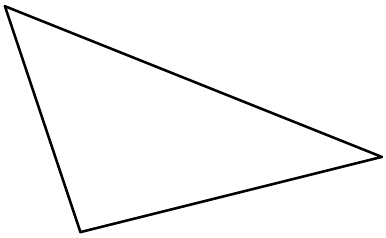
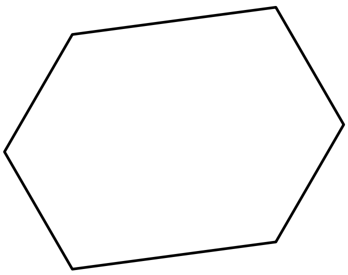
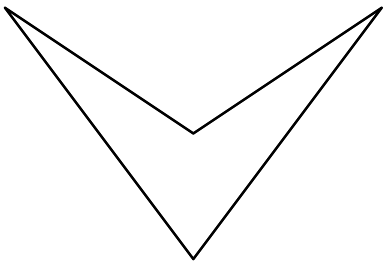
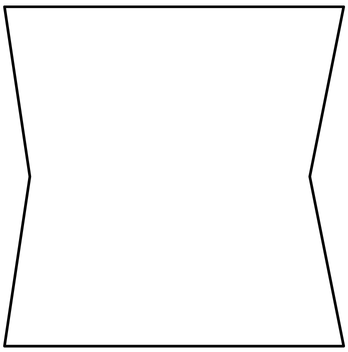
Ejemplos

- ✱ En los siguientes ejemplos hemos marcado en verde los ángulos convexos y en rojo los cóncavos.
- ✱ También hemos señalado en verde algunos segmentos con los dos extremos en el interior del polígono que están totalmente contenidos en el polígono y en rojo algunos que no están totalmente contenidos.
- ✱ Así se ilustra la equivalencia de las dos definiciones para el concepto de polígono convexo y las dos definiciones para el concepto de polígono cóncavo.
- ✱ Se puede observar que cerca de cada ángulo cóncavo del polígono se puede trazar algún segmento con extremos en el polígono que no está completamente contenido en el polígono.

Polígonos convexos		Polígonos cóncavos	
①		②	
③		④	
⑤		⑥	

Enunciados

Dibuja las diagonales de estos polígonos y contesta a las preguntas.

①		a) ¿Cómo se llama el polígono? b) ¿Cuántas diagonales tiene? c) ¿Cuántos ángulos obtusos tiene? d) ¿Cuántos ángulos cóncavos tiene? e) ¿Es un polígono convexo o cóncavo?
②		a) ¿Cómo se llama el polígono? b) ¿Cuántas diagonales tiene? c) ¿Cuántos ángulos obtusos tiene? d) ¿Cuántos ángulos cóncavos tiene? e) ¿Es un polígono convexo o cóncavo?
③		a) ¿Cómo se llama el polígono? b) ¿Cuántas diagonales tiene? c) ¿Cuántos ángulos obtusos tiene? d) ¿Cuántos ángulos cóncavos tiene? e) ¿Es un polígono convexo o cóncavo?
④		a) ¿Cómo se llama el polígono? b) ¿Cuántas diagonales tiene? c) ¿Cuántos ángulos obtusos tiene? d) ¿Cuántos ángulos cóncavos tiene? e) ¿Es un polígono convexo o cóncavo?
⑤		a) ¿Cómo se llama el polígono? b) ¿Cuántas diagonales tiene? c) ¿Cuántos ángulos obtusos tiene? d) ¿Cuántos ángulos cóncavos tiene? e) ¿Es un polígono convexo o cóncavo?
⑥		a) ¿Cómo se llama el polígono? b) ¿Cuántas diagonales tiene? c) ¿Cuántos ángulos obtusos tiene? d) ¿Cuántos ángulos cóncavos tiene? e) ¿Es un polígono convexo o cóncavo?

Suma de los ángulos de un polígono

Si un polígono tiene n lados, la suma de sus ángulos es $180° \cdot (n–2)$.

Ejercicio resuelto 1

Enunciado: calcula la suma de los ángulos de un hexágono.

Resolución

Un hexágono tiene 6 lados, de modo que aplicamos la fórmula para n=6.

Si llamamos S a la suma pedida,

$S = 180° \cdot (n–2) = 180° \cdot (6–2) = 180° \cdot 4 = 720°$

Solución: 720°

Ejercicio resuelto 2

Enunciado: un heptágono tiene 6 ángulos de 140°; calcula el valor del ángulo desconocido.

Resolución

Un hexágono tiene 7 lados, de modo que aplicamos la fórmula para n=7.

Si llamamos S a la suma de todos los ángulos,

$S = 180° \cdot (n–2) = 180° \cdot (7–2) = 180° \cdot 5 = 900°$

Los 6 ángulos de 140° suman $6 \cdot 140° = 840°$

Por tanto el ángulo que falta mide $900° – 840° = 60°$

Solución: 60°

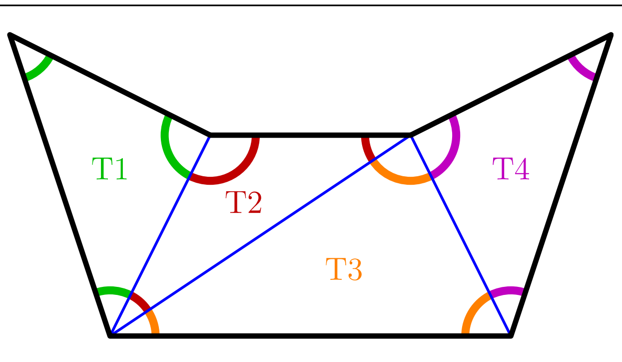
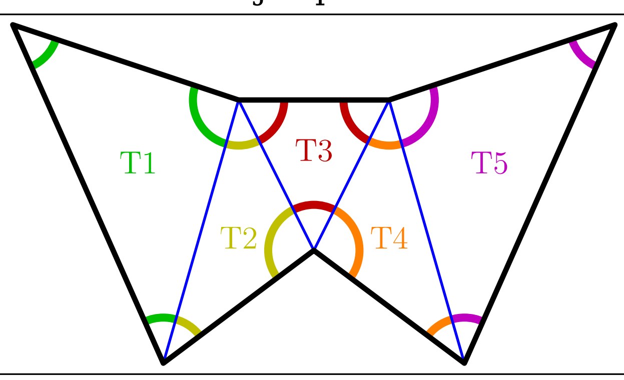
Idea de la demostración

La demostración tiene algunos aspectos que no se tratan en la educación secundaria, pero la idea principal de la demostración se puede entender perfectamente:

- Paso 1: cualquier polígono de n lados se puede descomponer en n–2 triángulos de modo que la suma de los ángulos de los triángulos coincide con la suma de los ángulos del polígono.
- Paso 2: como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, la suma de los ángulos de n–2 triángulos es $180° \cdot (n–2)$.

Ejemplos del paso 1

Vemos dos ejemplos de polígonos descompuestos tal como afirma el paso 1:

Ejemplo 1	Ejemplo 2
	
Un polígono de 6 lados descompuesto en 4 triángulos (T1, T2, T3 y T4).	Un polígono de 7 lados descompuesto en 5 triángulos (T1, T2, T3, T4 y T5).

Enunciados

① Calcula la suma de todos los ángulos de un polígono de 12 lados.

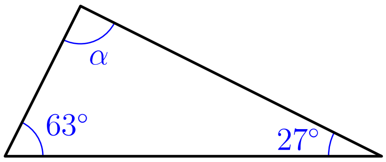
② Un pentágono tiene cuatro ángulos de 100°. Calcula el valor del quinto.

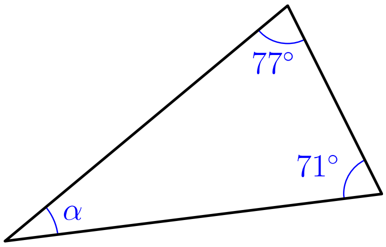
③ Un octógono tiene todos los ángulos iguales. Calcula cuánto vale cada uno.

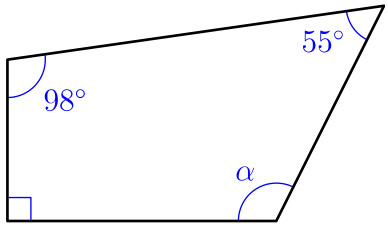
④ Un hexágono tiene tres ángulos que miden 140° cada uno. Sabiendo que los otros tres ángulos miden lo mismo entre sí, calcula cuánto mide cada uno de los ángulos desconocidos.

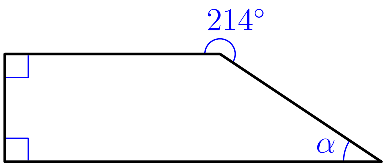
Enunciados

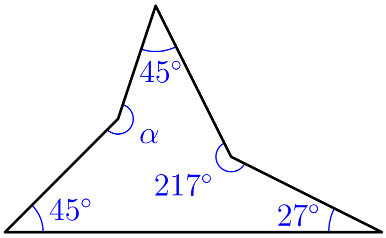
Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras:

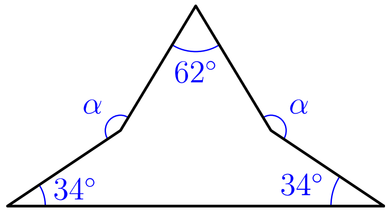
⑤


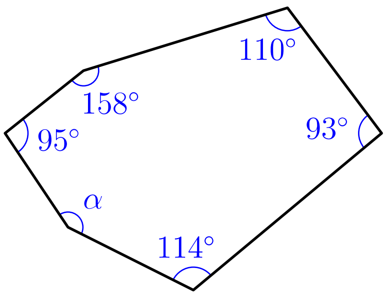
⑥


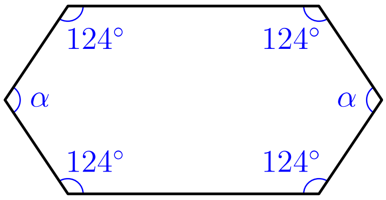
⑦


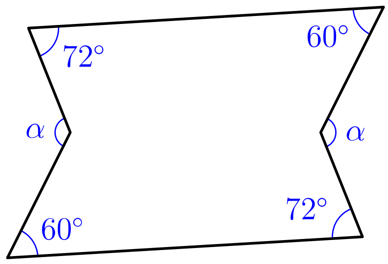
⑧


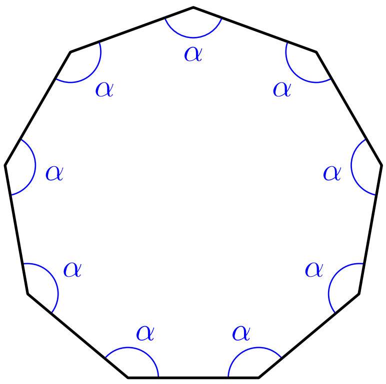
⑨


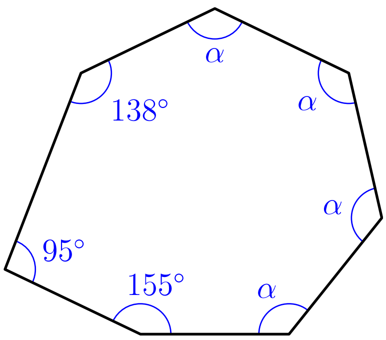
⑩


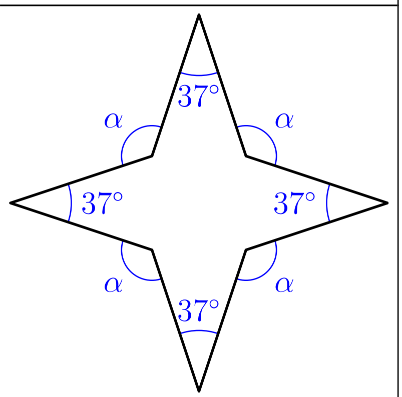
⑪


⑫


⑬


⑭


⑮


⑯


Perímetro y área de un polígono

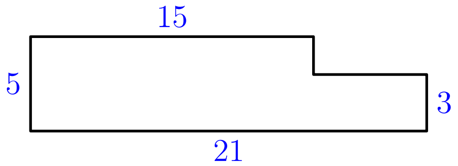
En general, no hay ninguna fórmula que permita calcular directamente el perímetro o el área de un polígono. Las fórmulas que hay son aplicables solo a algunos casos concretos.

Por eso, cuando se plantea el problema de calcular el perímetro o el área de un polígono hay que utilizar el ingenio para descomponer el polígono en polígonos más sencillos para los que sí existan fórmulas.

Cuando un problema de este tipo se puede resolver, normalmente se puede resolver correctamente de varias maneras, así que es importante dedicar un rato a pensar las posibilidades antes de proceder al cálculo.

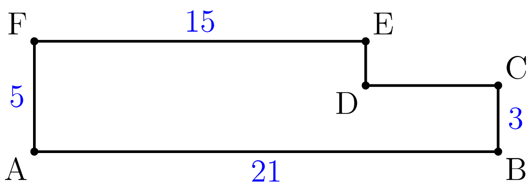
Problema resuelto

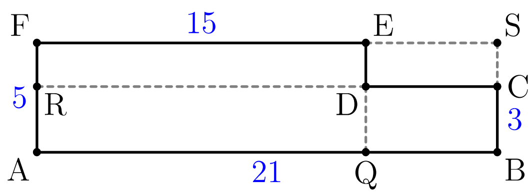
Enunciado: calcula el perímetro y el área del siguiente polígono:



Comentarios

- ✱ En este tipo de problemas hay que asumir que se cumplen ciertas propiedades aunque no estén explícitamente indicadas en el enunciado, ni en el texto ni en el dibujo. Por ejemplo, hay que asumir que todos los ángulos que aparecen son rectos; si no lo fueran, la solución dependería del valor de los ángulos.
- ✱ Hay que considerar que las medidas vienen dadas entre los puntos más cercanos al número. Si fuera de otra manera, el enunciado debería especificarlo.
- ✱ Si es necesario, se pueden poner nombres a los elementos de la figura y trazar líneas auxiliares. Para clarificar la explicación, añadimos elementos:





Resolución

Podemos ver que $\overline{DC} = \overline{ES} = \overline{AB} - \overline{FE}$; $\overline{DE} = \overline{CS} = \overline{AF} - \overline{BC}$; $\overline{FS} = \overline{AB}$; $\overline{AF} = \overline{BS}$.

Hay varias maneras de calcular el perímetro:

- ✱ Sumando todos los lados: Perímetro = $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{FE} + \overline{FA}$
- ✱ Observando que tiene el mismo perímetro que el rectángulo ABSF:

  Perímetro = $2 \cdot (21 + 5) = 2 \cdot 26 = 52$

Hay varias maneras de calcular el área:

- ✱ Sumando las áreas de dos rectángulos (AQEF y QBCD, por ejemplo).
- ✱ Sumando las áreas de tres rectángulos (AQDR, RDEF y QBCD).
- ✱ Restando las áreas de los rectángulos ABSF y CDES:

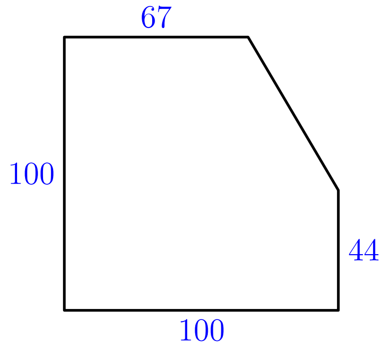
  Área = $21 \cdot 5 - (21 - 15) \cdot (5 - 3) = 60 - 6 \cdot 2 = 60 - 12 = 48$

Solución: perímetro = 52 u, área = 48 u²

Enunciados

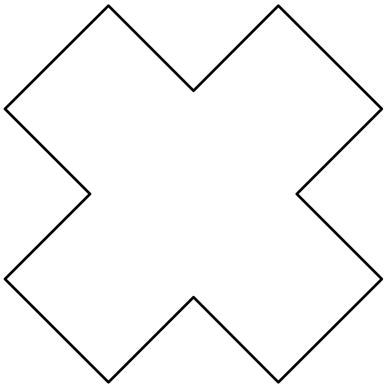
Calcula el perímetro y el área de los siguientes polígonos. Todas las medidas están en metros.

①



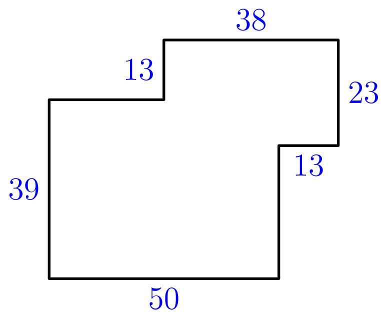
El polígono tiene tres ángulos rectos

②



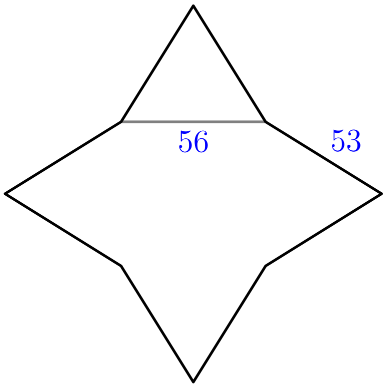
Todos los lados miden 3; todos los ángulos son rectos

③



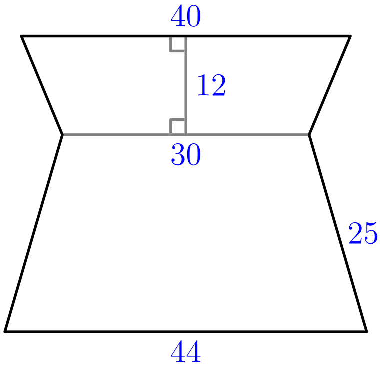
Todos los ángulos son rectos

④



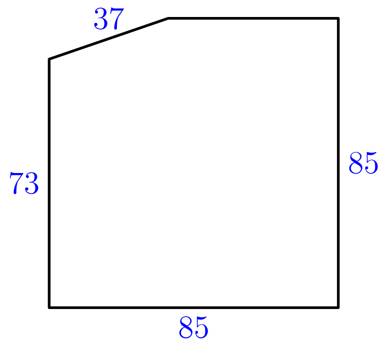
El polígono tiene cuatro ejes de simetría

⑤



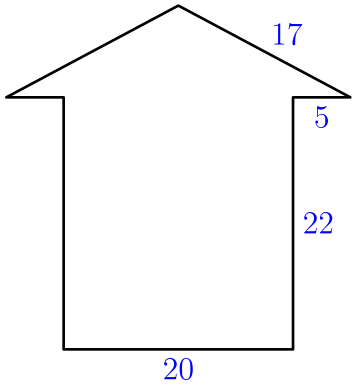
El polígono tiene dos lados paralelos

⑥



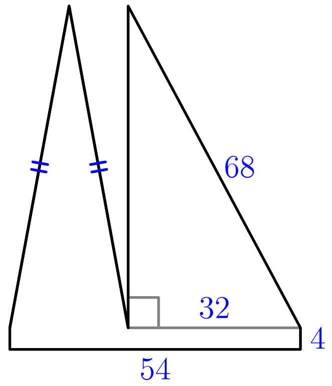
El polígono tiene tres ángulos rectos

⑦



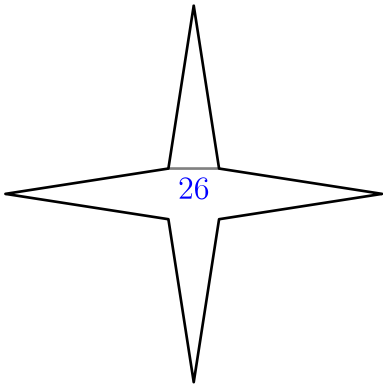
El polígono tiene dos ángulos rectos y un eje de simetría

⑧



Los dos vértices superiores están a la misma distancia del lado inferior

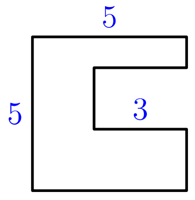
⑨



El polígono tiene cuatro ejes de simetría; la distancia entre los vértices más alejados es 194

Enunciado

⑩ Calcula el perímetro del polígono de la figura de la derecha. Las medidas están en metros; todos los ángulos son rectos.

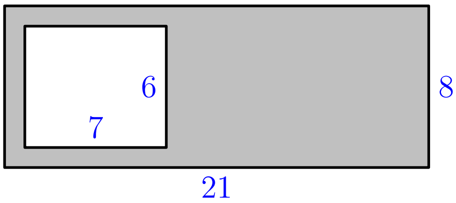


Perímetro y área de figuras con segmentos como lados

Existen muchas figuras importantes en la tecnología que no encajan en la definición de polígonos, pero tienen como lados segmentos rectos; son aquellas que presentan agujeros. A estas figuras también se les pueden aplicar las técnicas de descomposición aplicables a los polígonos.

Problema resuelto

Enunciado: calcula el perímetro y el área de la siguiente figura:



Comentarios

- Si una figura tiene agujeros, es importante que quede claro en el enunciado; por eso se ha optado en este ejemplo por sombrear la figura en cuestión.
- Aunque la matemática admite un estudio abstracto, puedes pensar en situaciones reales en las que se puede dar una figura como la del enunciado. Un ejemplo: la planta de una vivienda que tiene un patio interior.
- En este tipo de problemas hay que asumir que se cumplen ciertas propiedades aunque no estén explícitamente indicadas en el enunciado, ni en el texto ni en el dibujo. Por ejemplo, hay que asumir que todos los ángulos que aparecen son rectos; si no lo fueran, la solución dependería del valor de los ángulos.
- Hay que considerar que las medidas vienen dadas entre los puntos más cercanos al número. Si fuera de otra manera, el enunciado debería especificarlo.

Resolución

Observamos que el perímetro consiste en la **suma** de los perímetros de dos rectángulos: el exterior y el interior.

Perímetro $= 2 \cdot (21 + 8) + 2 \cdot (7 + 6) = 2 \cdot 29 + 2 \cdot 13 = 58 + 26 = 84$

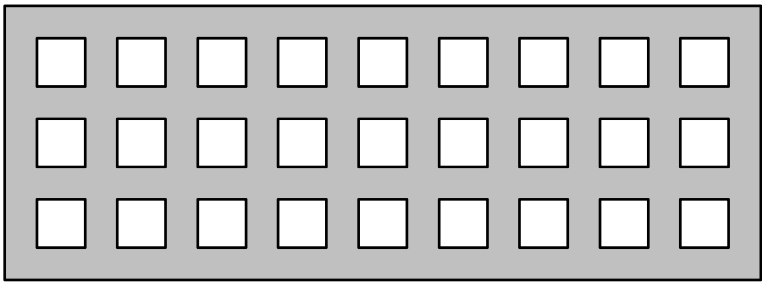
Observamos que el área consiste en la **diferencia** de las áreas de dos rectángulos: el exterior y el interior.

Área $= 21 \cdot 8 - 7 \cdot 6 = 168 - 42 = 126$

Solución: perímetro $= 84\,\text{u}$, área $= 126\,\text{u}^2$

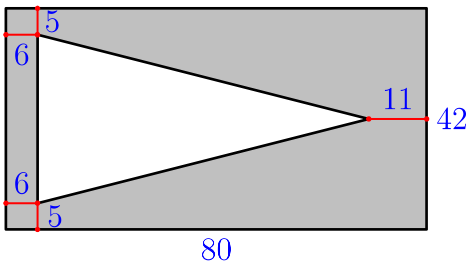
Enunciados

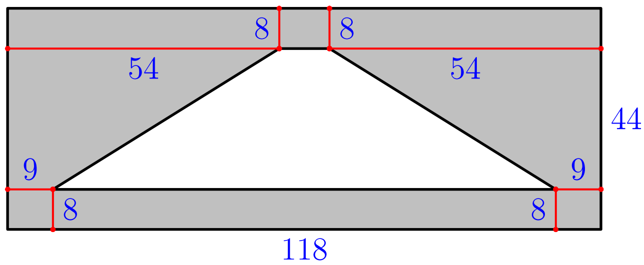
① Las dimensiones de una plancha rectangular de metal son 137 centímetros y 17 centímetros. Para aligerarla sin que pierda mucha resistencia se le recortan 27 cuadrados de 3 centímetros de lado. Calcula el perímetro y el área de la figura resultante.



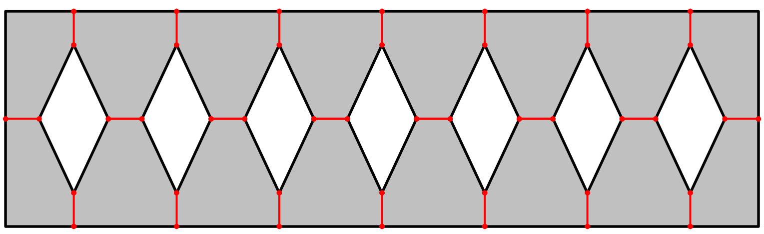
② Las dimensiones de una pieza de cartón pluma son 40 centímetros y 30 centímetros. Para poder colgarla de una pared se le recortan cerca de cada esquina un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 centímetros y 3 centímetros. Calcula el perímetro y el área de la figura resultante.

③ Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras. Todas las medidas están en metros.

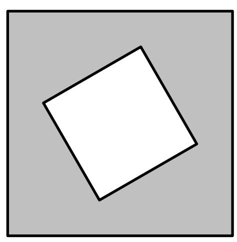
a) 

b) 

④ De una plancha de madera rectangular cuyas medidas son 784 milímetros y 224 milímetros se recortan siete rombos tal como indica la ilustración. Calcula el perímetro y el área de la figura resultante teniendo en cuenta que todos los segmentos marcados en rojo miden 35 milímetros.

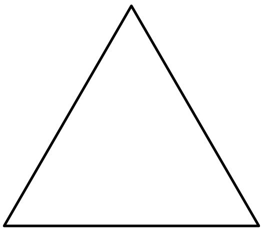
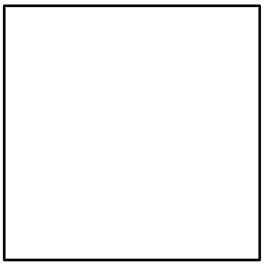
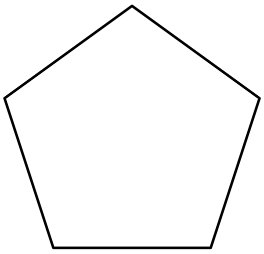
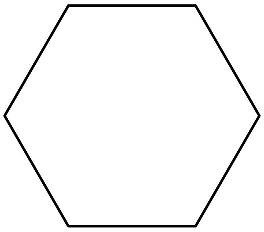
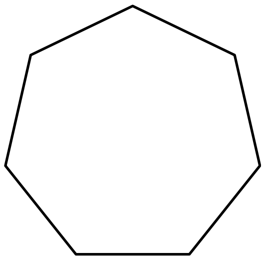


⑤ Calcula el área de la figura adjunta sabiendo que su perímetro mide 204 metros y que el lado del cuadrado exterior mide el doble que el lado del cuadrado interior.



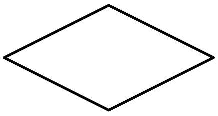
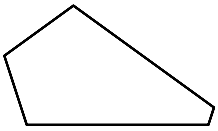
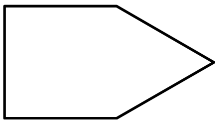
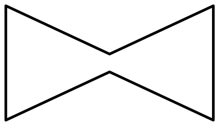
Polígonos regulares

Un polígono regular es el que tiene todos los lados iguales y todos los ángulos iguales. Vemos los que tienen menor número de lados:

Tres lados	Cuatro lados	Cinco lados	Seis lados	Siete lados
				
Triángulo equilátero	Cuadrado	Pentágono regular	Hexágono regular	Heptágono regular

Observación

Hay que resaltar que para que un polígono realmente sea regular debe tener iguales tanto los lados como los ángulos. Esto es así porque de tener los lados iguales no se deduce que deba tener los ańgulos iguales, y viceversa (aunque en el polígono de tres lados sí sea equivalente, pero es el único caso).

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6
					

- Ejemplo 1: un rectángulo que no sea cuadrado tiene los cuatro ángulos iguales, pero no tiene los cuatro lados iguales; luego no es un polígono regular.
- Ejemplo 2: un rombo que no sea cuadrado tiene los cuatro lados iguales, pero no tiene los cuatro ángulos iguales; luego no es un polígono regular.
- Ejemplo 3: este pentágono no es un pentágono regular porque, aunque tiene los cinco ángulos iguales, no tiene los cinco lados iguales.
- Ejemplo 4: este pentágono no es un pentágono regular porque, aunque tiene los cinco lados iguales, no tiene los cinco ángulos iguales.
- Ejemplo 5: este hexágono no es un hexágono regular porque, aunque tiene los seis ángulos iguales, no tiene los seis lados iguales.
- Ejemplo 6: este hexágono no es un hexágono regular porque, aunque tiene los seis lados iguales, no tiene los seis ángulos iguales.

Polígono equilátero

Un polígono equilátero es el que tiene todos los lados iguales.

Polígono equiangular

Un polígono equiangular es el que tiene todos los ángulos iguales.

Propiedad

Los polígonos regulares son polígonos equiláteros y equiangulares.

Importancia de los polígonos regulares

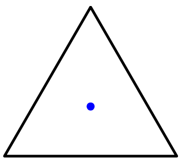
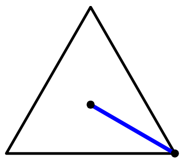
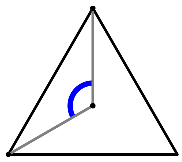
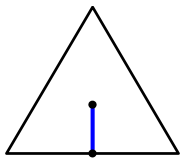
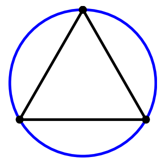
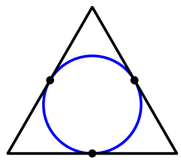
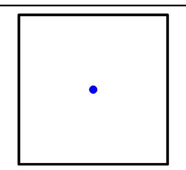
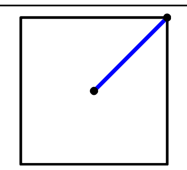
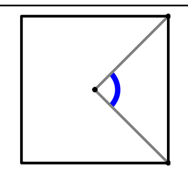
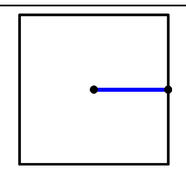
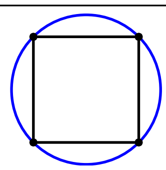
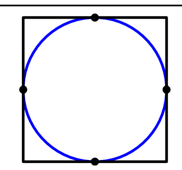
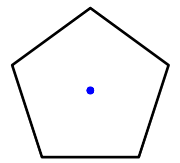
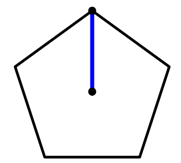
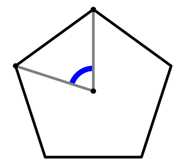
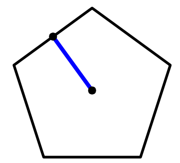
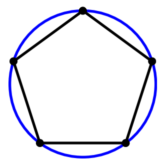
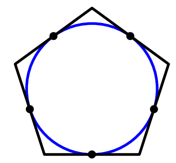
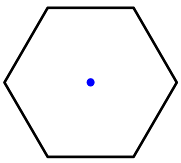
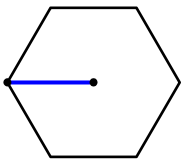
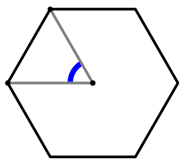
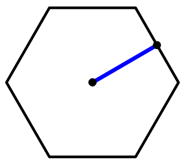
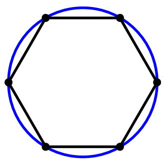
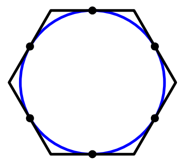
Los polígonos regulares tienen muchas propiedades interesantes; se usan en varias situaciones de la vida usual, han proporcionado inspiración en muchas áreas de las matemáticas y conectan la geometría con otras ramas de la matemática.

Elementos de los polígonos regulares

* El **centro** es el único punto que equidista de todos los vértices.
* El **radio** es el segmento que une el centro con un vértice.
* El **ángulo central** tiene el vértice en el centro y sus lados son dos radios consecutivos.
* La **apotema** es el segmento que une el centro del polígono con el centro de un lado. La palabra proviene del griego ἀποτιθέναι (apotithénai, «bajar»).
* Todas las rectas que contienen a las apotemas son ejes de simetría.
* Todas las rectas que contienen el centro y dos vértices son ejes de simetría.
* La **circunferencia circunscrita** al polígono es la circunferencia que pasa por todos los vértices. Coinciden el centro del polígono y el centro de la circunferencia circunscrita; coinciden el radio del polígono y el radio de la circunferencia circunscrita.
* La **circunferencia inscrita** en el polígono es la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados. Coinciden el centro del polígono y el centro de la circunferencia inscrita; el radio de la circunferencia inscrita es la apotema del polígono.
* Un polígono regular de n lados tiene n radios, n ángulos centrales, n apotemas y n ejes de simetría.

Ejemplos

Se muestran en color azul algunos elementos de los polígonos regulares con menor número de lados:

n	Centro	Radio	Ángulo central	Apotema	Circunferencia circunscrita	Circunferencia inscrita
3						
4						
5						
6						

Cálculo de los ángulos de un polígono regular

Sabemos que la suma de los ángulos de un polígono de n lados es $180° \cdot (n-2)$.

Sabemos, por definición, que un polígono regular tiene todos los ángulos iguales.

Por tanto, cada ángulo de un polígono regular de n lados mide

$$\boxed{\text{Ángulo} = 180° \cdot (n-2) : n}$$

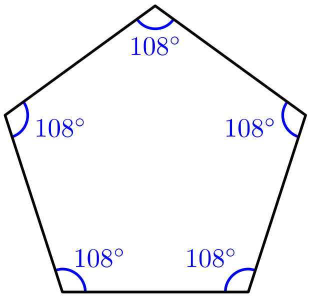
Ejemplo 1

Enunciado: calcula el valor de los ángulos de un pentágono regular y dibuja una representación aproximada.

Resolución

Un pentágono regular tiene 5 lados, así que aplicamos la fórmula con $n = 5$.

Ángulo $= 180° \cdot (5-2) : 5 = 180° \cdot 3 : 5 = 3 \cdot 36° = 108°$

Representación: 

Solución: 108°

Observación: para hacer la operación es más cómodo dividir antes de multiplicar; no es el orden de cálculo establecido, pero en este caso el resultado es el mismo.

Cálculo de los ángulos centrales de un polígono regular

Un polígono regular de n lados tiene n ángulos centrales, todos iguales, que suman 360°; por tanto, cada uno mide

$$\boxed{\text{Ángulo central} = 360° : n}$$

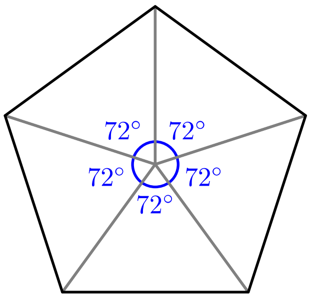
Ejemplo 2

Enunciado: calcula el valor de los ángulos centrales de un pentágono regular y dibuja una representación aproximada.

Resolución

Un pentágono regular tiene 5 lados, así que aplicamos la fórmula con $n = 5$.

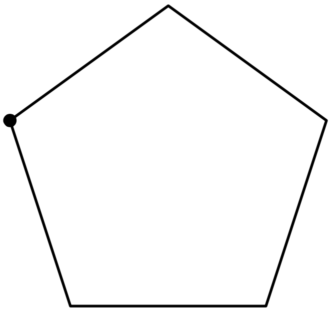
Ángulo central $= 360° : 5 = 72°$

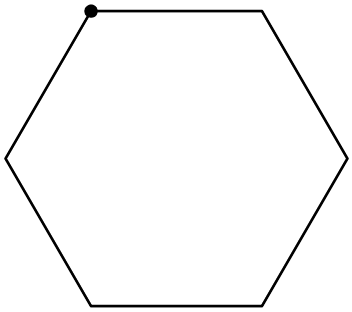
Representación: 

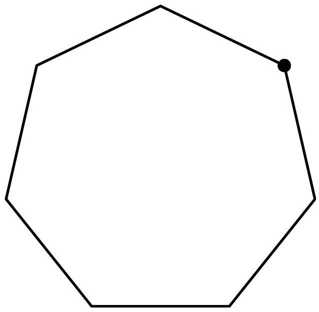
Solución: 72°

Enunciados

① Dibuja las diagonales que parten del vértice señalado en cada uno de los siguientes polígonos regulares:

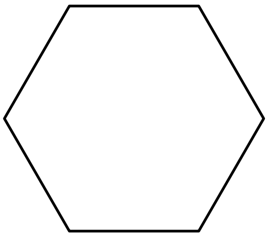
a) 

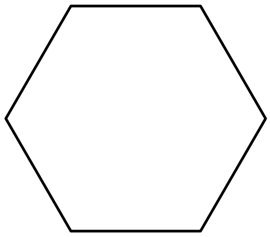
b) 

c) 

② a) Calcula el valor de cada ángulo de un hexágono regular y haz un dibujo aproximado.

b) Calcula el valor de cada ángulo central de un hexágono regular y haz un dibujo aproximado.

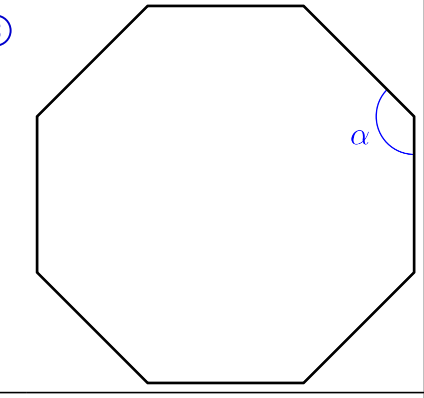
a) 

b) 

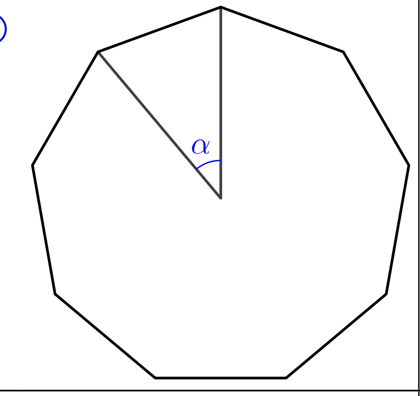
Enunciados

Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras sabiendo que todos los polígonos que aparecen son polígonos regulares:

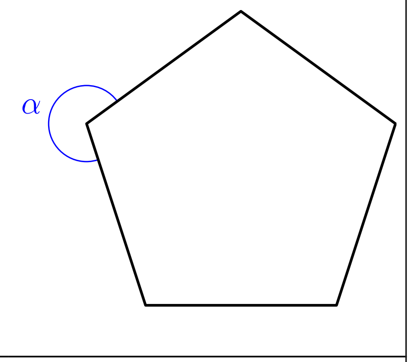
③



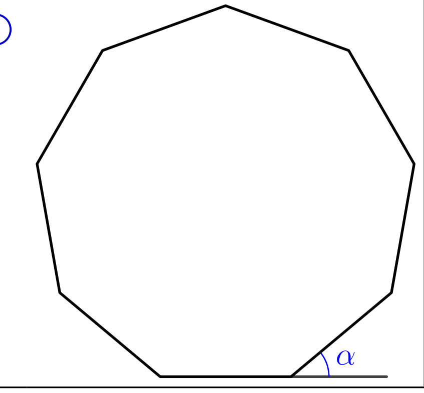
④



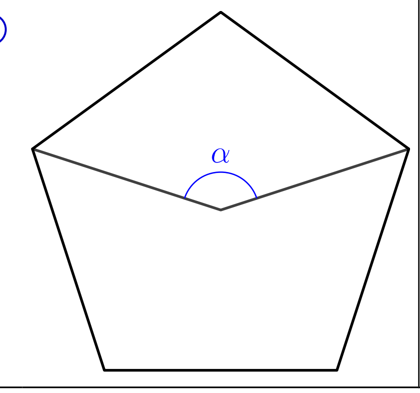
⑤



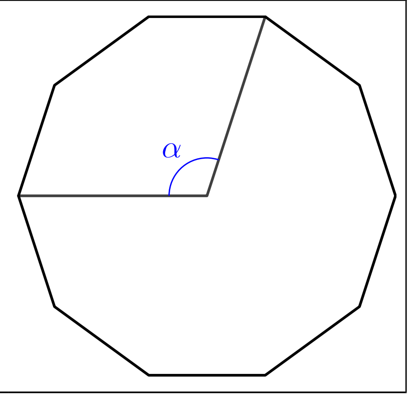
⑥



⑦



⑧



Enunciados

① Calcula el menor ángulo que forman una apotema y un radio de un pentágono regular.

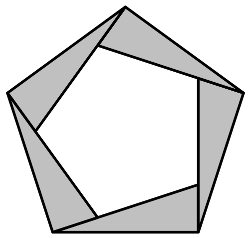
② Calcula cuántos ejes de simetría de un polígono regular de veinte lados pasan por dos vértices.

③ Calcula cuántos ejes de simetría de un polígono regular de trece lados pasan por dos vértices.

④ Calcula el menor ángulo que determinan un lado de un eneágono y la menor de las diagonales que parten de uno de los vértices por los que pasa ese lado.

⑤ Calcula el menor ángulo que determinan las dos diagonales de un pentágono regular que parten del mismo vértice.

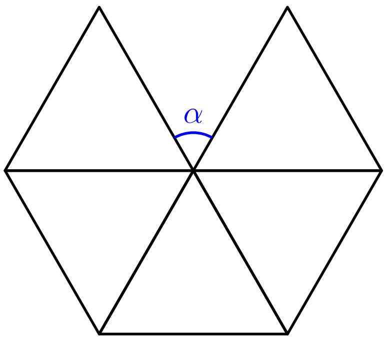
⑥ El logotipo de la Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (Federación de Entidades para la Enseñanza de las Matemáticas en Cataluña) está formado por cinco triángulos rectángulos que al unirse dan lugar a un pentágono regular interno y otro externo, tal como se ve en la ilustración. Calcula la amplitud de los ángulos agudos de los triángulos.



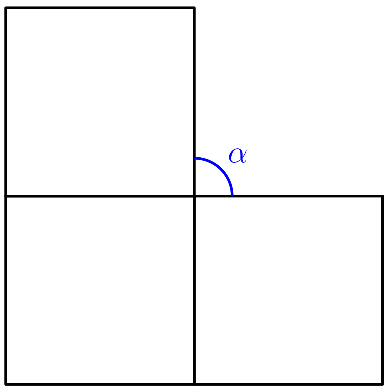
Enunciados

Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras sabiendo que todos los polígonos que aparecen son polígonos regulares:

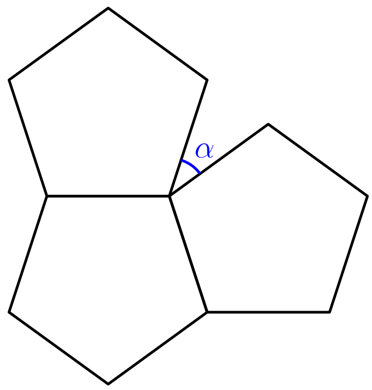
⑦



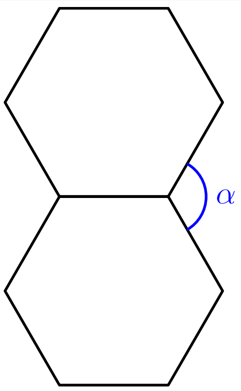
⑧



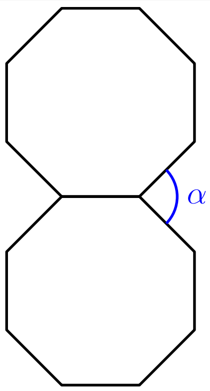
⑨



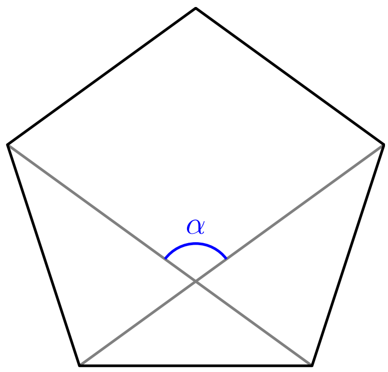
⑩



⑪



⑫



Perímetro de un polígono regular

Como todos los lados de un polígono regular miden lo mismo, para calcular el perímetro basta multiplicar el número de lados por lo que mide el lado.

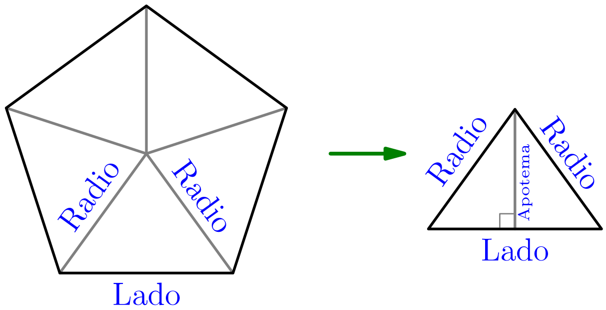
$$\boxed{\text{Perímetro} = (\text{numero de lados}) \cdot (\text{longitud del lado})}$$

Ejemplo 1

Enunciado: calcula el perímetro de un polígono regular de 13 lados sabiendo que el lado mide 7 metros.

Resolución: perímetro = 13 · 7 = 91. Solución: 91 m

Área de un polígono regular



Para calcular el área de un polígono regular se divide el polígono en triángulos isósceles iguales dibujando todos los radios y se multiplica el número de triángulos por el área de un triángulo.

La base de todos los triángulos es el lado del polígono regular y la altura es la apotema del polígono. Por tanto, el área de cada triángulo es el producto del lado por la apotema dividido entre 2.

Área = (Número de triángulos) · (área de cada triángulo) =
= (Número de lados) · (longitud del lado) · apotema : 2 =
= perímetro · apotema : 2

Llegamos a la fórmula final:

$$\boxed{\text{Área} = \text{perímetro} \cdot \text{apotema} : 2}$$

Cálculo de la apotema

Conocido el número de lados de un polígono regular y la longitud del lado, es posible calcular la longitud de la apotema; pero para hacerlo en el caso general hay que utilizar conocimientos que estudiaremos en el nivel 4. En algunos casos particulares se puede calcular usando el teorema de Pitágoras, pero eso lo trabajaremos en el nivel 3, ayudándonos de la calculadora para hacerlo con precisión.

Por estos motivos, para hacer ejercicios en este nivel los enunciados darán la longitud de la apotema, aunque no sea realmente necesario darla.

Ejemplo 2

Enunciado: calcula el área de un pentágono regular sabiendo que el lado mide 3 metros y la apotema mide 2,1 metros.

Resolución:

Perímetro = 5 · 3 = 15. Área = 15 · 2,1 : 2 = 15,75

Solución: 15,75 m^2

Observación

Si llamamos n al número de lados, d a la longitud del lado y a a la longitud de la apotema, la fórmula «área = $n \cdot d \cdot a : 2$» puede ser muy cómoda de usar.

Enunciados

Calcula el perímetro y el área de los siguientes polígonos regulares.

① Tiene 10 lados, cada lado mide 4 metros y la apotema mide 6,2 metros.

② Tiene 7 lados, cada lado mide 2 metros y la apotema mide 2,1 metros.

③ Tiene 5 lados, cada lado mide 12 metros y la apotema mide 8,3 metros.

④ Tiene 6 lados, cada lado mide 10 metros y la apotema mide 8,7 metros.

⑤ Tiene 8 lados, cada lado mide 9 metros y la apotema mide 10,9 metros.

⑥ Tiene 9 lados, cada lado mide 8 metros y la apotema mide 11 metros.

⑦ Tiene 8 lados, cada lado mide 12 metros y la apotema mide 14,5 metros.

⑧ Tiene 6 lados, cada lado mide 9 metros y la apotema mide 7,8 metros.

⑨ Tiene 5 lados, cada lado mide 100 metros y la apotema mide 68,8 metros.

⑩ Tiene 12 lados, cada lado mide 6 metros y la apotema mide 11,2 metros.

⑪ Tiene 14 lados, cada lado mide 50 metros y la apotema mide 110 metros.

⑫ Tiene 10 lados, cada lado mide 10 metros y la apotema mide 15,4 metros.

⑬ Tiene 8 lados, cada lado mide 24 metros y la apotema mide 29 metros.

⑭ Tiene 7 lados, cada lado mide 13 metros y la apotema mide 13,5 metros.

⑮ Tiene 20 lados, cada lado mide 1 metro y la apotema mide 3,2 metros.

⑯ Tiene 15 lados, cada lado mide 2 metros y la apotema mide 4,7 metros.

⑰ Tiene 16 lados, cada lado mide 8 metros y la apotema mide 20,1 metros.

⑱ Tiene 6 lados, cada lado mide 32 metros y la apotema mide 27,7 metros.

⑲ Tiene 5 lados, cada lado mide 32 metros y la apotema mide 22 metros.

⑳ Tiene 100 lados, cada lado mide 1 metros y la apotema mide 15,9 metros.

㉑ Tiene 9 lados, cada lado mide 10 metros y la apotema mide 13,7 metros.

㉒ Tiene 17 lados, cada lado mide 20 metros y la apotema mide 53,5 metros.

㉓ Tiene 12 lados, cada lado mide 5 metros y la apotema mide 9,3 metros.

㉔ Tiene 7 lados, cada lado mide 20 metros y la apotema mide 20,7 metros.

㉕ Tiene 13 lados, cada lado mide 2 metros y la apotema mide 4,1 metros.

㉖ Tiene 50 lados, cada lado mide 0,1 metros y la apotema mide 0,8 metros.

El teorema de Pick

Este teorema recibe el nombre en honor del matemático austriaco Georg Alexander Pick (1859–1942), que publicó el resultado en 1899. El teorema relaciona el área de un polígono con sus puntos con coordenadas enteras. Aunque su demostración no se puede hacer con los conocimientos de la educación secundaria, su uso es un buen ejercicio porque relaciona conocimientos de distintas partes de la matemática.

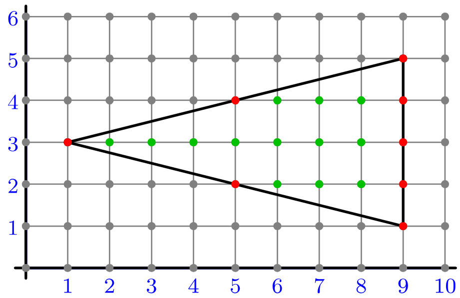
Un **polígono reticular** es el que puede ser representado en unos ejes de coordenadas de modo que todos sus vértices se sitúen en puntos con las dos coordenadas enteras.

Llamamos B al número de puntos con las dos coordenadas enteras de un polígono simple reticular situados en el perímetro del polígono e I al número de puntos con las dos coordenadas enteras situados en el interior. Entonces,

$$\boxed{\text{Área} = B : 2 + I - 1}$$

Ejemplo 1

Consideramos el triángulo que tiene los vértices en los puntos (1,3), (9,1) y (9,5). Es un polígono simple reticular y por tanto se le puede aplicar el teorema de Pick. El número de puntos con las dos coordenadas enteras que están situados en el perímetro (en rojo) es 8 (hay que contar los vértices) y el número de puntos con las dos coordenadas enteras que están situados en el interior (en verde) es 13.

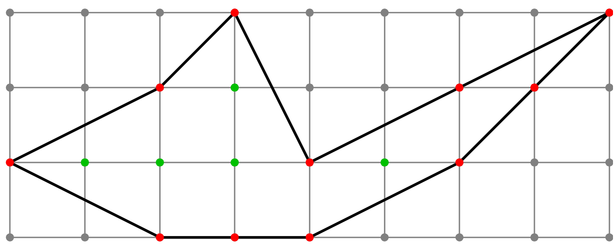


- ✱ Según el teorema de Pick, el área debe ser $8 : 2 + 13 - 1 = 4 + 12 = 16\,\text{u}^2$
- ✱ Como la base mide 4 y la altura 8, el área del triángulo es $4 \cdot 8 : 2 = 16\,\text{u}^2$

Efectivamente, se obtiene el mismo resultado con el método que ya conocíamos y aplicando el teorema de Pick.

Ejemplo 2

Es posible aplicar el teorema incluso aunque no se conozcan las coordenadas exactas, basta saber que son enteras. En el polígono de la derecha no sabemos cuáles son las coordenadas concretas y sin embargo el teorema se aplica perfectamente.



- ✱ Puntos en el perímetro: 11.
- ✱ Puntos en el interior: 5.
- ✱ $\text{Área} = 11 : 2 + 5 - 1 = 5{,}5 + 4 = 9{,}5\,\text{u}^2$

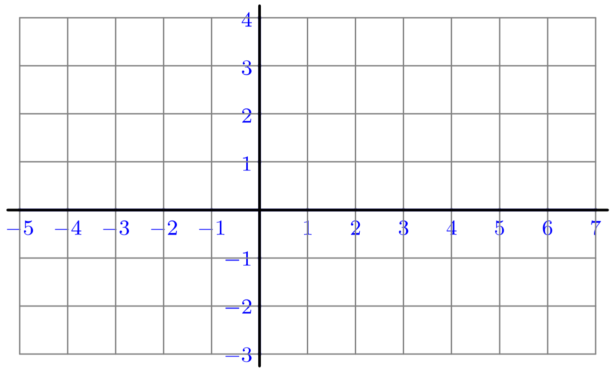
Calcular el área con los métodos que hemos visto sería mucho más trabajoso.

Limitaciones de la aplicación del teorema

El teorema resulta muy atractivo porque se ve que en muchos casos permite calcular el área de un polígono con rapidez; pero en algunos polígonos puede ocurrir que se tarde más tiempo en averiguar cuańtos puntos tienen coordenadas enteras que en aplicar otros métodos de cálculo de áreas. Ten en cuenta que veremos más métodos en niveles superiores.

Enunciados

① a) Representa gráficamente el triángulo de vértices A=(–4,–2), B=(6,–2) y C=(1,3).



b) Calcula el área del triángulo ABC.

c) ¿Cuántos puntos del perímetro del triángulo ABC tienen las dos coordenadas enteras?

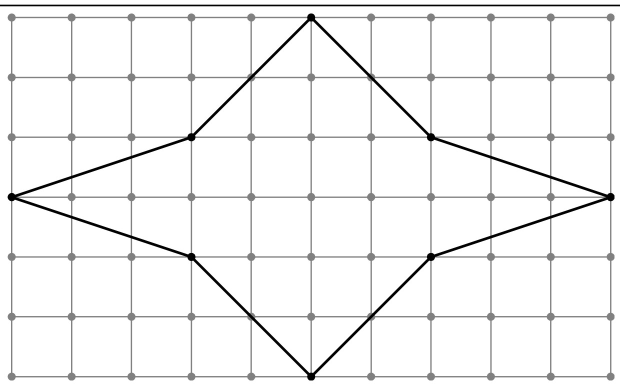
d) ¿Cuántos puntos del interior del triángulo ABC tienen las dos coordenadas enteras?

e) Comprueba el teorema de Pick.

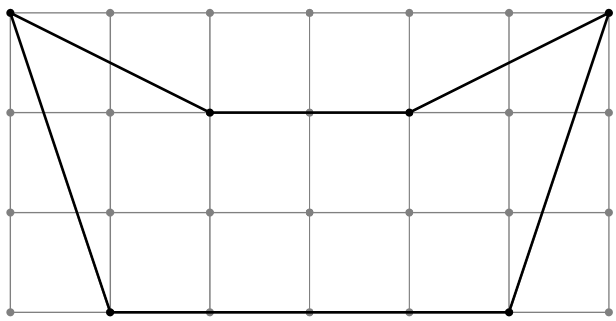
Enunciados

Usando el teorema de Pick, calcula el área de los siguientes polígonos:

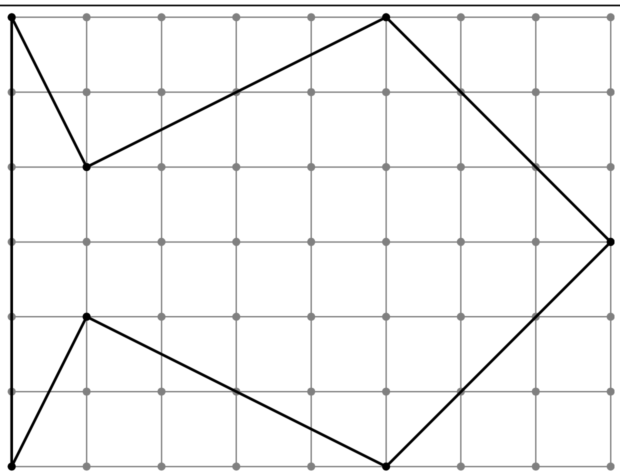
②



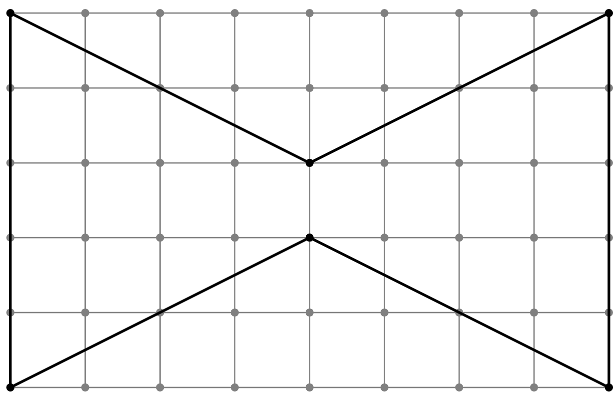
③



④



⑤

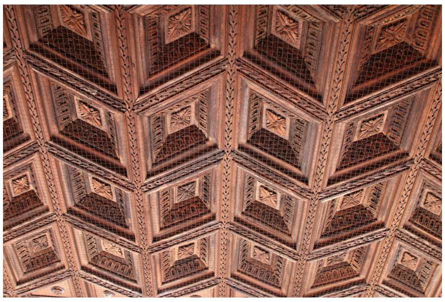


Teselación del plano

Una teselación (o teselado) del plano consiste en la disposición de un número fijo de figuras de manera que se cumplan estas condiciones:

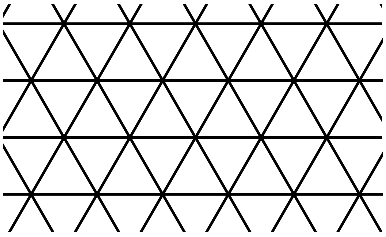
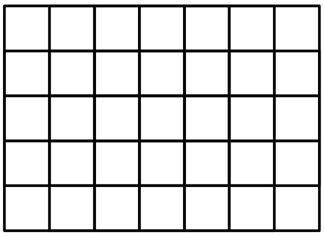
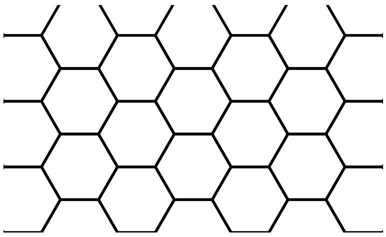
* Cubren completamente el plano, no quedan espacios libres entre ellas y no se superponen. Al repetir las figuras se permite girarlas.
* Si las figuras son polígonos, dos contiguos comparten un lado completo.

Los seres humanos llevan usando teselaciones del plano varios milenios. Para darte cuenta, no tienes más que fijarte en cómo se decoran suelos, paredes y techos. Y precisamente los polígonos son las figuras más usadas para las teselaciones.

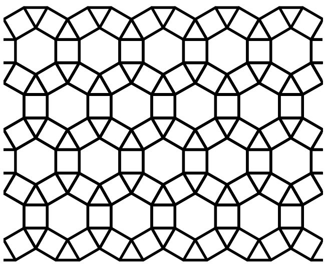
Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		
Mosaico romano en el suelo del yacimiento arqueológico de Conímbriga (Portugal).	Detalle de una pared de Los Alcázares de Sevilla (España).	Artesonado del palacio de los condes de Miranda de Peñaranda de Duero, Burgos (España).

Teselado regular

Es un tipo de teselado en el que todas las figuras son polígonos regulares idénticos. Las figuras solo pueden ser tres: triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares.

Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6
		
Convergen seis triángulos en cada vértice. $6 \cdot 60° = 360°$	Convergen cuatro cuadrados en cada vértice. $4 \cdot 90° = 360°$	Convergen tres hexágonos en cada vértice. $3 \cdot 120° = 360°$

Teselado semirregular



En este tipo de teselado las figuras son dos o más tipos de polígonos regulares, de cada tipo todos idénticos. Hay exactamente ocho teselados semirregulares. A la derecha se muestra uno de ellos, con triángulos, cuadrados y hexágonos.

Teselado irregular

Es el formado por polígonos no regulares. Por ejemplo, cualquier triángulo, cualquier cuadrilátero, quince pentágonos convexos y al menos tres hexágonos convexos sirven para teselar el plano.

Enunciados

Realiza las teselaciones pedidas usando como guía las marcas de puntos. Cada vértice de los polígonos que dibujes debe coincidir con alguno de los puntos.

① Los polígonos deben ser rectángulos que tengan una dimensión el doble que la otra. Hay que dibujar al menos doce rectángulos.

② Los polígonos deben ser triángulos rectángulos que tengan un cateto el doble que el otro. Hay que dibujar al menos 24 triángulos.

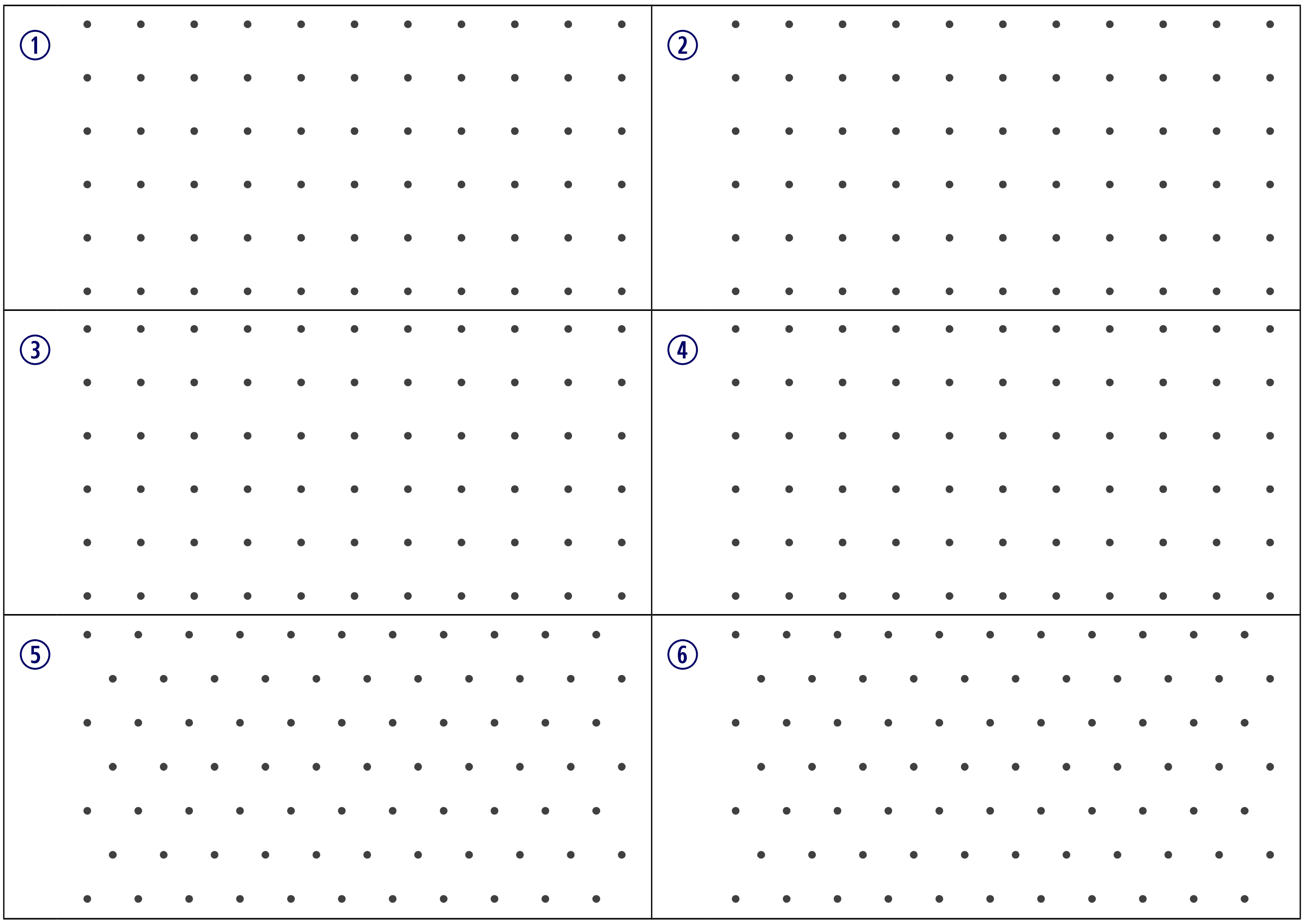
③ Los polígonos deben ser rombos que tengan una diagonal el doble que la otra. Hay que dibujar ocho rombos.

④ Los polígonos deben ser trapecios isósceles que tengan una base el triple que la otra. Hay que dibujar veinte trapecios.

⑤ Los polígonos deben ser hexágonos regulares y triángulos equiláteros. En cada vértice deben converger dos triángulos y dos hexágonos. Hay que dibujar quince hexágonos y al menos 16 triángulos.

⑥ Los polígonos deben ser hexágonos regulares y triángulos equiláteros. En cada vértice deben converger cuatro triángulos y un hexágono. Hay que dibujar tres hexágonos y al menos 40 triángulos.

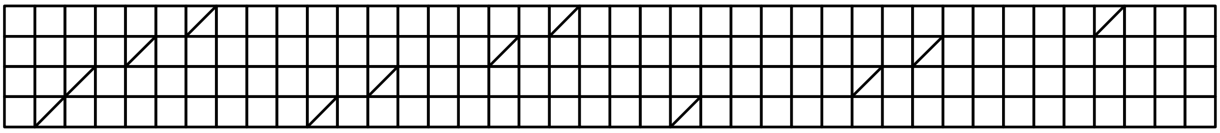
Resoluciones



Teselaciones periódicas y no periódicas

Las teselaciones que hemos visto hasta el momento son periódicas, lo que quiere decir que el patrón básico se repite cada cierto número de apariciones de los polígonos que la forman.

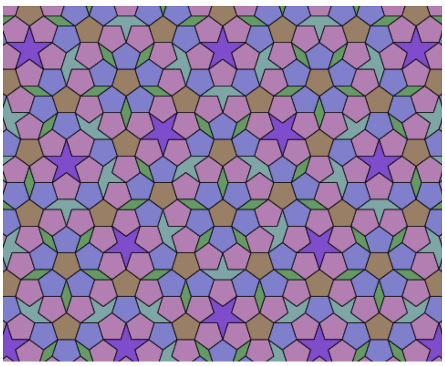
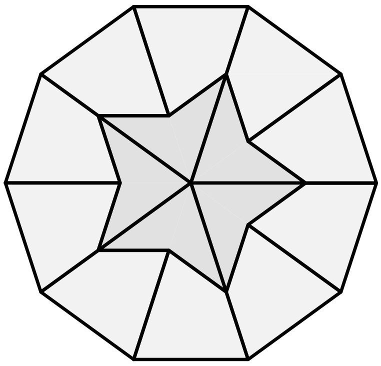
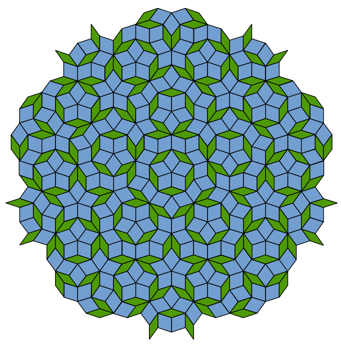
Es fácil convertir una teselación periódica en no periódica, basta alterar la posición de algún polígono o la distribución de los polígonos siguiendo alguna regla que no sea periódica (usando números primos, por ejemplo). Vemos un ejemplo:



Como una investigación recreativa surgió la pregunta «¿es posible encontrar un conjunto de polígonos con los que solo se pueda crear una teselación no periódica?» La respuesta fue que sí y condujo a aplicaciones «serias» en física.

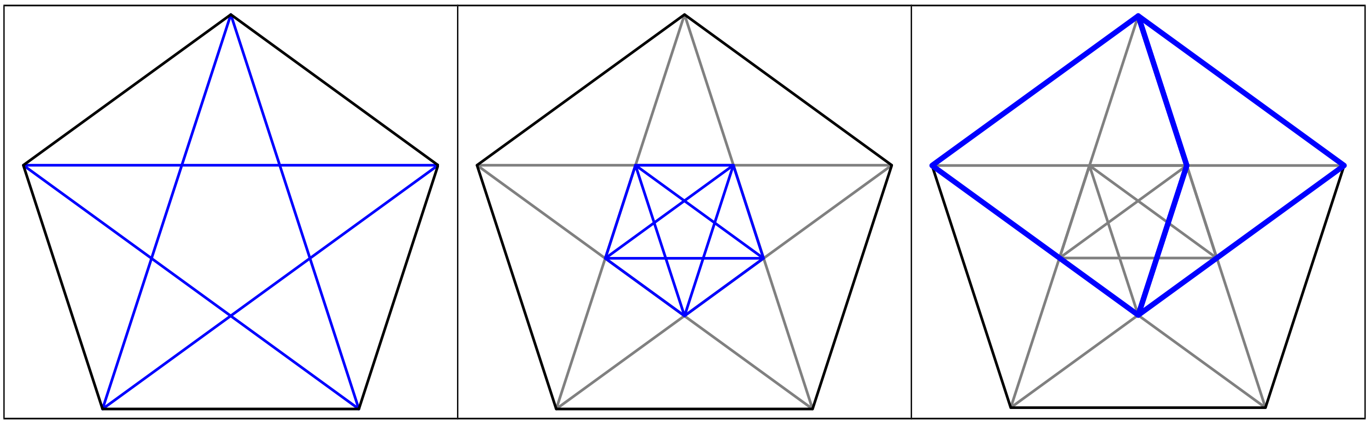
Teselaciones de Penrose

El matemático británico Roger Penrose encontró tres conjuntos de polígonos que dan lugar a teselaciones no periódicas, aunque en dos de ellas hay que añadir una regla adicional para forzar la no periodicidad. Las teselaciones se conocen como P1, P2 y P3. Vemos un ejemplo de cada una, en los que se han coloreado los polígonos con intención estética.

Ejemplo de P1	Ejemplo de P2	Ejemplo de P3
		

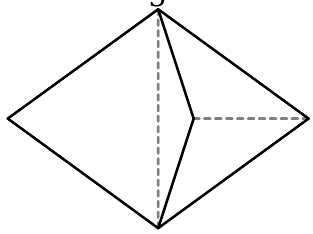
Obtención de los polígonos a partir de un pentágono regular

Las teselaciones de Penrose P2 están formadas por dos piezas llamadas en inglés *kite* y *dart* (cometa y flecha). Las dos se obtienen a partir de un pentágono regular:



Explicación

La teselación de Penrose P2 está formada por las dos piezas llamadas cometa y flecha, que originalmente forman un rombo. Como un rombo podría dar lugar a una teselación periódica, para producir una teselación que forzosamente no lo sea, se añade una condición: en cada vértice común solo pueden converger vértices a los que o bien les llegue la diagonal marcada a todos o bien no les llegue a ninguno. La imagen de la derecha muestra una combinación **prohibida**, precisamente la que formaría el rombo original.

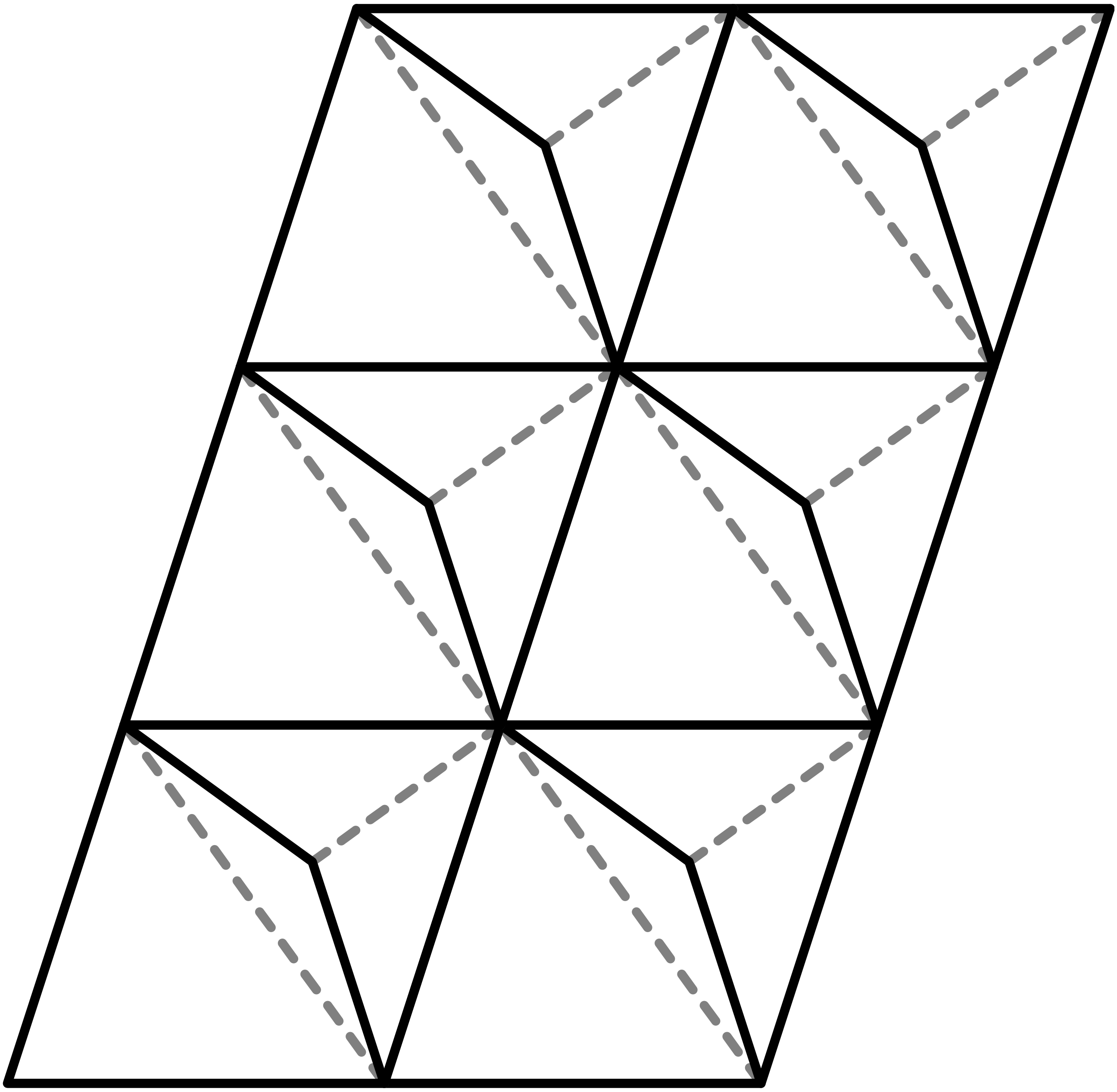


Preparación

Recorta las seis piezas «cometa» y las seis piezas «flecha» del dibujo de más abajo.

Enunciado

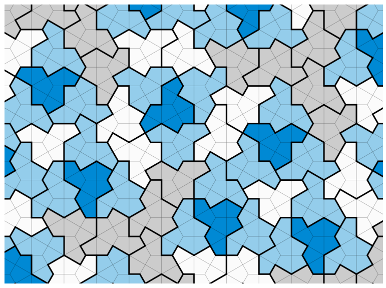
Averigua cuáles son las distintas maneras en que pueden converger varias piezas en un vértice hasta cubrirlo completamente.



Explicación

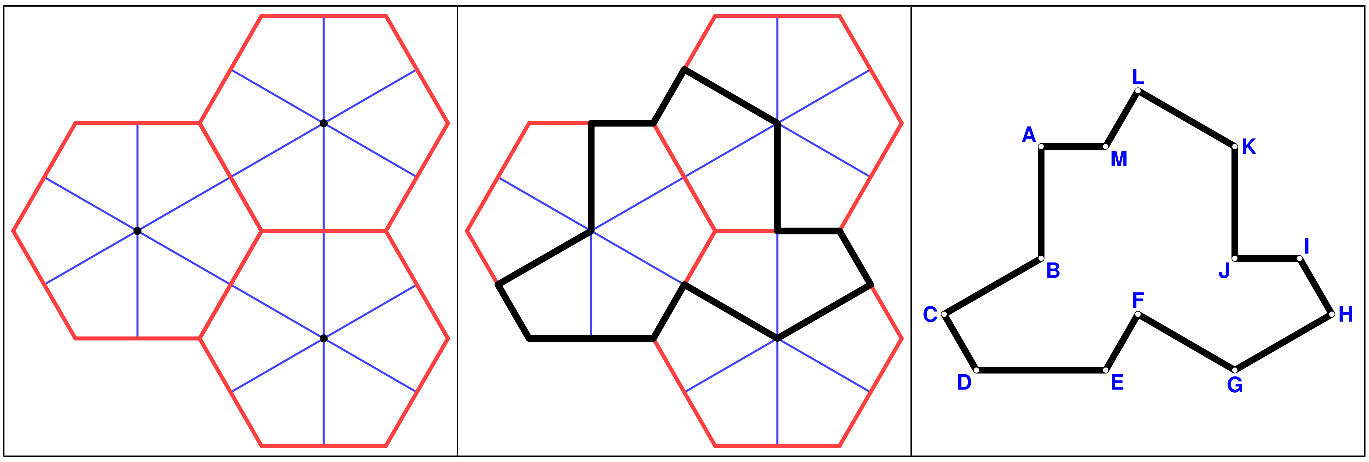
Desde que el matemático y físico británico Roger Penrose (nacido en 1931) descubriera a mediados de la década de los 1970 un conjunto de dos polígonos que tesela el plano pero solo de manera aperiódica, quedó abierto el problema de si existe un polígono capaz de teselar el plano, pero únicamente de forma aperiódica, es decir, rebajar el «récord» de dos a uno.

En marzo de 2023 los investigadores David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan y Chaim Goodman-Strauss publicaron un artículo en que mostraban un polígono con las características pedidas, al que llamaron «sombrero» (en el original inglés, *hat*). En el artículo ofrecieron dos demostraciones de que el sombrero es un polígono que tesela el plano exclusivamente de manera no periódica, así como toda una familia de polígonos similares al sombrero que comparten esa característica con él. A la derecha vemos una parte de una teselación en una ilustración que publicaron en una de sus páginas web.



El polígono presentado sorprendió por su sencillez, ya que se obtiene a partir de tres hexágonos regulares iguales, cuando se pensaba que iba a ser mucho más complicado.

En la ilustración de la izquierda vemos los tres hexágonos con los lados en rojo y las apotemas en azul. En el centro vemos cómo se obtiene el sombrero uniendo algunas de esas líneas y a la derecha vemos ya aislado el polígono final.



Enunciados

① ¿Cuántos lados del sombrero miden igual que el lado del hexágono?

② ¿Cuántos lados del sombrero miden la mitad que el lado del hexágono?

③ ¿Cuántos lados del sombrero miden igual que la apotema del hexágono?

④ Averigua el valor del ángulo correspondiente a cada vértice del sombrero.

Vértice	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Ángulo													

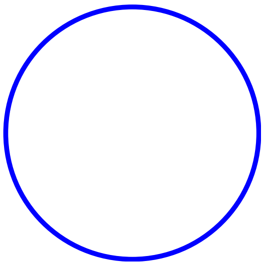
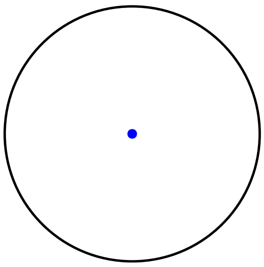
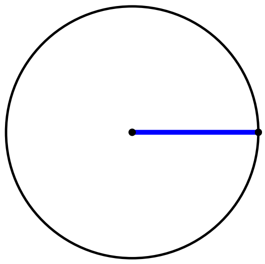
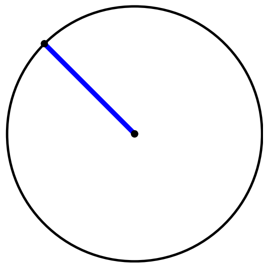
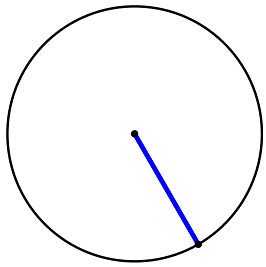
⑤ Si cada hexágono original tiene un área de 1 m², ¿cuál es el área del sombrero? Da el resultado como fracción irreducible.

Circunferencia

- ✱ Una circunferencia es el conjunto de puntos del plano que **equidistan** de otro punto del plano.
- ✱ El punto del que equidistan todos los puntos de la circunferencia se llama **centro** de la circunferencia.
- ✱ El segmento que une el centro de la circunferencia y uno cualquiera de sus puntos se llama **radio** de la circunferencia. Normalmente no se distingue entre el segmento y su longitud, hay que distinguirlos por el contexto.
- ✱ Cada circunferencia tiene un único centro e infinitos radios.
- ✱ Una circunferencia se puede nombrar con cualquier letra.

Ejemplo 1

Se señalan en color azul y trazo más grueso los elementos nombrados:

Circunferencia	Centro	Un radio	Un radio	Un radio
				

Círculo

- ✱ Un círculo es el conjunto de puntos del plano cuya distancia a otro punto del plano es **menor** que una cierta cantidad.
- ✱ El punto de referencia se llama **centro** del círculo.
- ✱ La cantidad se llama **radio** del círculo.

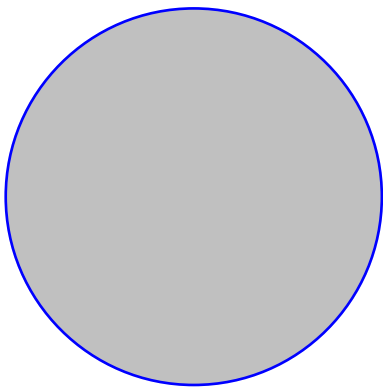
Es decir, que un círculo es el conjunto de puntos **interiores** de una circunferencia.

Circunferencia y círculo

Podríamos decir, en lenguaje sencillo, que la circunferencia es el borde y el círculo es la parte interior. Comparten centro y radio.

Ejemplo 2

Representamos en azul la circunferencia y en gris el círculo:

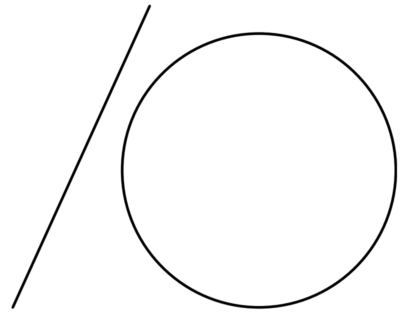
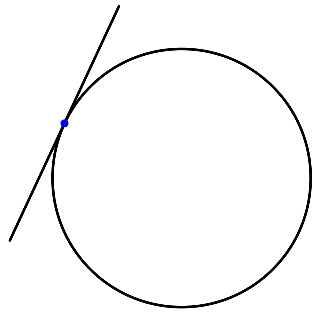
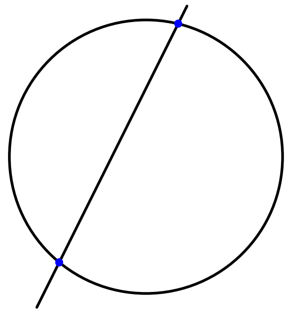


Posición relativa de una recta y una circunferencia

Una recta y una circunferencia pueden estar situadas entre sí de tres maneras diferentes:

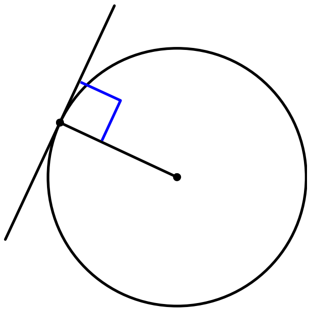
- **Exteriores**: no tienen ningún punto en común.
- **Tangentes**: tienen solo un punto en común, llamado punto de tangencia.
- **Secantes**: tienen dos puntos en común.

Ejemplo 1

Exteriores	Tangentes	Secantes
		

Propiedad 1

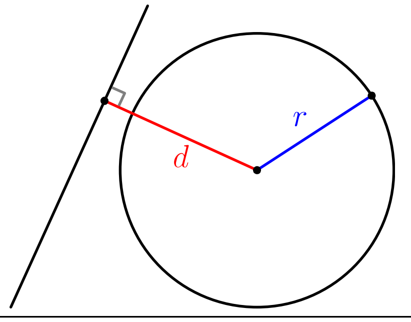
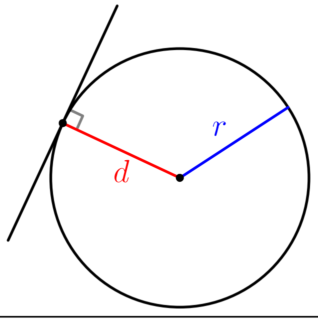
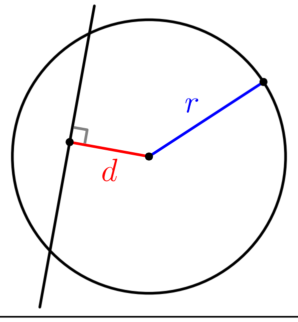
Una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia.

Ejemplo: 

Propiedad 2

Llamamos r al radio de una circunferencia y d a la distancia entre el centro de la circunferencia y la recta. Entonces:

- Si $d > r$, la recta y la circunferencia son exteriores.
- Si $d = r$, la recta y la circunferencia son tangentes.
- Si $d < r$, la recta y la circunferencia son secantes.

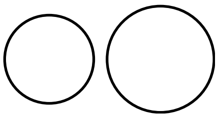
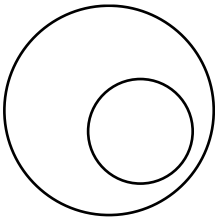
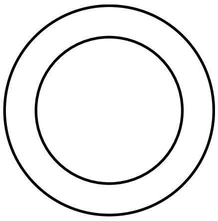
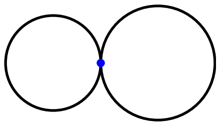
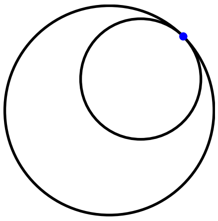
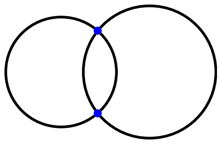
Exteriores • $d > r$	Tangentes • $d = r$	Secantes • $d < r$
		

Posición relativa de dos circunferencias

Dos circunferencias diferentes pueden estar situadas entre sí de cuatro maneras:

- **Exteriores**: no tienen ningún punto en común y ningún punto del interior de una está en el interior de la otra.
- **Interiores**: no tienen ningún punto en común y todos los puntos del interior de una de ellas están en el interior de la otra. Hay un caso particular:
  - **Concéntricas**: las dos circunferencias tienen el mismo centro.
- **Tangentes**: tienen solo un punto en común. Pueden serlo de dos formas:
  - **Tangentes exteriores**: el centro de cada una de las dos circunferencias está en el exterior de la otra.
  - **Tangentes interiores**: el centro de una de las dos circunferencias está en el interior de la otra.
- **Secantes**: tienen dos puntos en común.

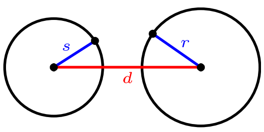
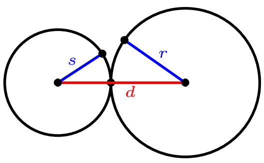
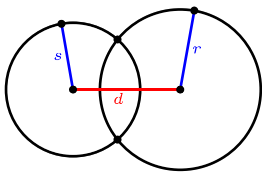
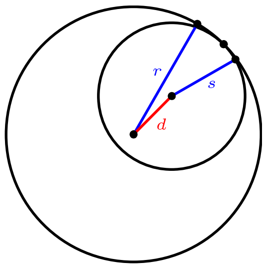
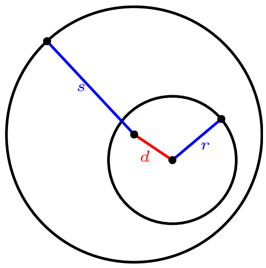
Ejemplo

Exteriores	Interiores	Concéntricas	Tangentes exteriores	Tangentes interiores	Secantes
					

Propiedad

Dadas dos circunferencias, llamamos r al radio de la mayor de ellas, s al radio de la menor y d a la distancia entre los dos centros. Entonces:

- Si $d > r + s$, las circunferencias son exteriores.
- Si $d = r + s$, las circunferencias son tangentes exteriores.
- Si $r - s < d < r + s$, las circunferencias son secantes.
- Si $d = r - s$, las circunferencias son tangentes interiores.
- Si $d < r - s$, las circunferencias son interiores.
- Si $d = 0$, las circunferencias son concéntricas.

Exteriores $d > r + s$	Tangentes exteriores $d = r + s$	Secantes $r - s < d < r + s$	Tangentes interiores $d = r - s$	Interiores $d < r - s$
				

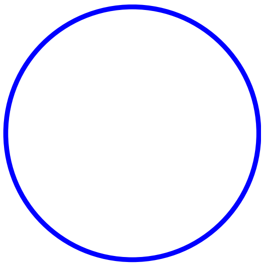
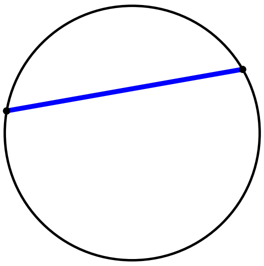
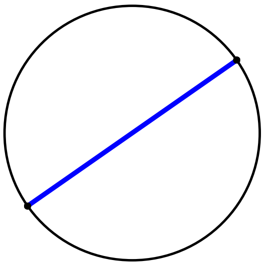
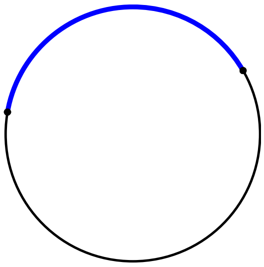
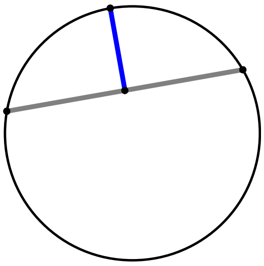
Líneas en la circunferencia

Hay varias líneas asociadas a la circunferencia que tienen mucha importancia:

* **Cuerda** es un segmento con los dos extremos en la circunferencia.
* **Diámetro** es la mayor de las cuerdas de una circunferencia.
* **Arco** es el conjunto de puntos de la circunferencia comprendidos entre dos puntos de ella.
* **Sagita** (o **flecha**) es el segmento que une el punto medio de una cuerda con el punto medio del arco que corresponde a la cuerda. La palabra *sagita* proviene del latín *sagitta*, «flecha».

Ejemplo 1

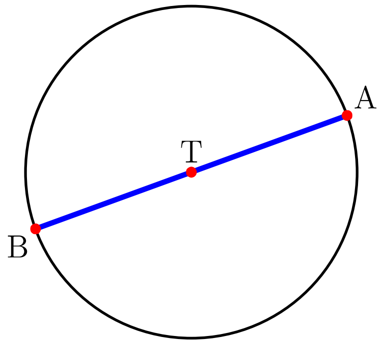
Se señalan en color azul y trazo más grueso los elementos nombrados:

Circunferencia	Cuerda	Diámetro	Arco	Sagita
				

Propiedades del diámetro

* El diámetro pasa por el **centro** de la circunferencia.
* La longitud del diámetro es el **doble** que la del radio.
* Se dice que los dos extremos de un diámetro son puntos **diametralmente opuestos**.

Ejemplo 2

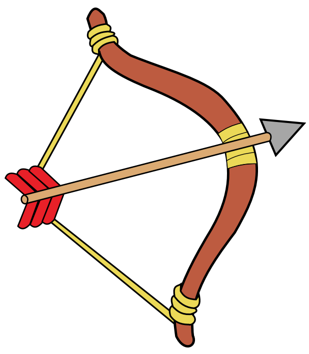


En la figura de la derecha hay una circunferencia.

* El centro es el punto T.
* El segmento AB es un diámetro.
* Los segmentos AT y BT son radios.
* $\overline{AB} = 2\cdot\overline{AT}$
* Los puntos A y B son diametralmente opuestos.

Cuerda, arco y sagita

Seguro que te has dado cuenta de por qué reciben esos nombres estas tres líneas.



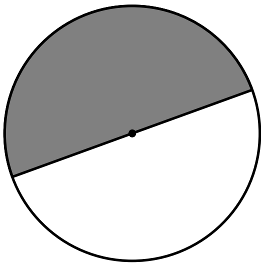
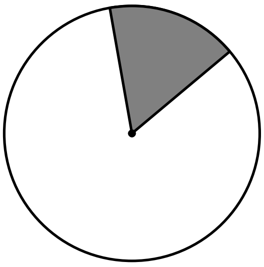
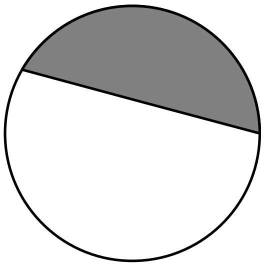
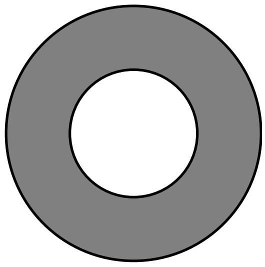
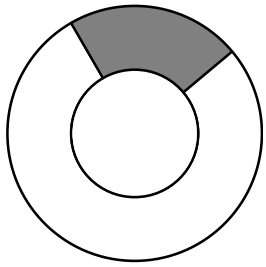
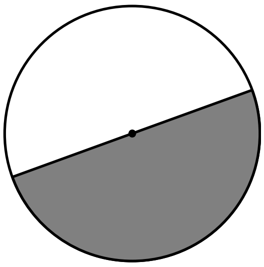
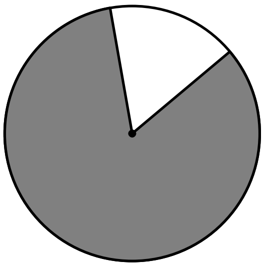
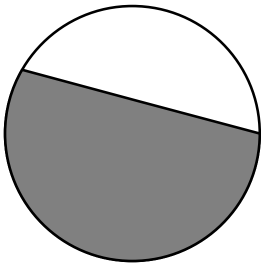
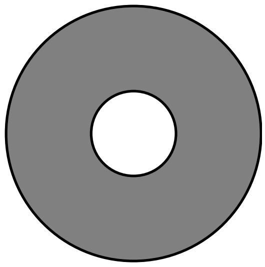
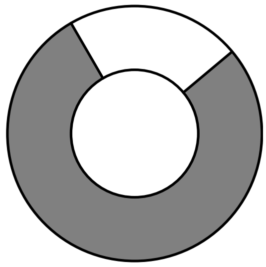
Regiones del círculo

Hay varias regiones asociadas al círculo que tienen mucho uso en la realidad:

- ✱ **Semicírculo** es la región del círculo determinada por un diámetro y uno de los dos arcos que determina.
- ✱ **Sector circular** es la región del círculo determinada por dos radios y uno de los dos arcos que determinan.
- ✱ **Segmento circular** es la región del círculo determinada por una cuerda y uno de los dos arcos que determina.
- ✱ **Corona circular** es la región del círculo determinada por dos circunferencias concéntricas.
- ✱ **Trapecio circular** es la región de una corona circular determinada por dos radios.

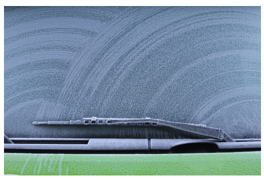
Ejemplo 1

Se señalan en color gris las regiones nombradas:

Semicírculo	Sector circular	Segmento circular	Corona circular	Trapecio circular
				
				

Ejemplo 2

Hay en la realidad numerosos ejemplos de la aparición de estas regiones:

Semicírculo	Sector circular	Segmento circular	Corona circular	Trapecio circular
				
Algunas ventanas, llamadas *fanlights*, tienen forma de semicírculo	Las raciones de *pizza* típicamente son sectores circulares	Los anfiteatros suelen tener forma de segmento circular	La forma de algunos atolones se aproxima a una corona circular	La parte que limpia un limpia-parabrisas es un trapecio circular

Enunciados

① ¿Cuál es la región del círculo que es a la vez un sector circular y un segmento circular?

② ¿Cuál es la distancia entre los centros de dos circunferencias de radio 3 metros que son tangentes exteriores?

③ Si se eligen tres puntos diferentes de una circunferencia, ¿cuántos arcos se determinan?

④ ¿Cuál es la cuerda que divide el círculo en dos regiones de la misma área?

Cuestiones

Juzga con las palabras «verdadero» o «falso» las siguientes afirmaciones. Asegúrate de tener pensado un motivo para tomar la decisión.

⑤ Todas las cuerdas de una circunferencia tienen la misma longitud.

⑥ Todos los diámetros de una circunferencia tienen la misma longitud.

⑦ Una recta no puede ser tangente a la vez de dos circunferencias exteriores.

⑧ Si dos circunferencias son interiores, la longitud del diámetro de una podría ser igual a la longitud del radio de la otra.

⑨ El semicírculo es el sector circular de mayor área.

⑩ El radio no puede ser la sagita de ningún segmento circular.

⑪ Si una circunferencia pasa por el centro de otra, las dos deben ser secantes.

⑫ Si dos circunferencias son secantes, la recta que pasa por los puntos comunes es secante a ambas.

⑬ Dos cuerdas de una circunferencia siempre se cortan en un punto.

⑭ Dos diámetros de una circunferencia siempre se cortan en un punto.

⑮ Ninguna cuerda de una circunferencia pasa por el centro.

⑯ Si dos circunferencias son secantes, el segmento que tiene como extremos los puntos comunes es una cuerda de ambas.

⑰ Si dos cuerdas de la misma circunferencia tienen un punto en común, ninguna de las regiones del círculo que determinan puede ser un sector circular.

⑱ No hay ningún segmento que sea la cuerda a la vez de dos circunferencias tangentes interiores.

⑲ Si dos circunferencias tienen un único punto en común, deben ser tangentes exteriores.

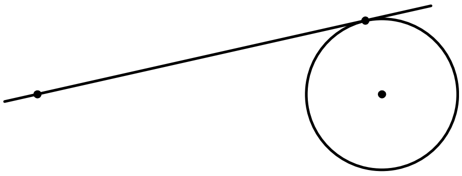
⑳ Si dos circunferencias son tangentes interiores, no puede haber ninguna circunferencia que sea tangente a ambas.

Enunciados

Algunos de estos enunciados van acompañados de una ilustración. Puedes usarla como indicación para entender mejor el enunciado, pero ten en cuenta que la ilustración no contiene todo lo necesario para encontrar el método de resolución.

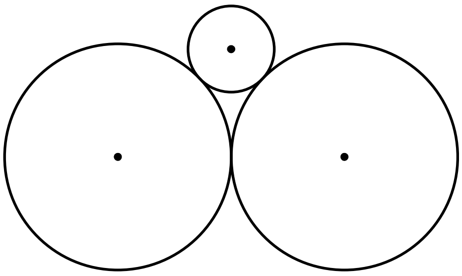
① Calcula el radio de una circunferencia sabiendo que cualquier cuerda que mida 42 metros distará del centro de la circunferencia 20 metros.

② Desde un punto que dista 82 metros del centro de una circunferencia cuyo radio mide 18 metros se traza una recta tangente a la circunferencia. Calcula la distancia entre el punto exterior y el punto de tangencia.



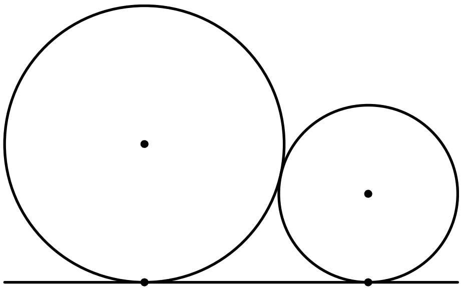
③ Una circunferencia cuyo radio mide 65 metros tiene una cuerda que mide 112 metros. Calcula la longitud de la sagita correspondiente a esa cuerda.

④ Tres circunferencias de radios 21 metros, 21 metros y 8 metros son tangentes exteriores dos a dos. Calcula el perímetro y el área del triángulo que tiene los vértices en los centros de las circunferencias.



⑤ Calcula la longitud de una cuerda de una circunferencia cuyo diámetro mide 178 metros sabiendo que la distancia de la cuerda al centro de la circunferencia es 39 metros.

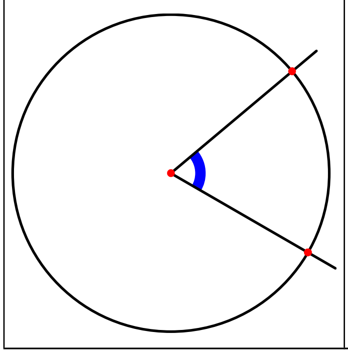
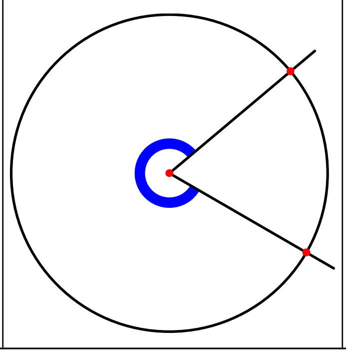
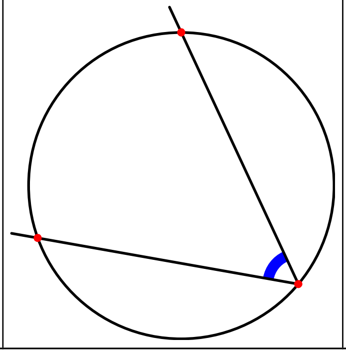
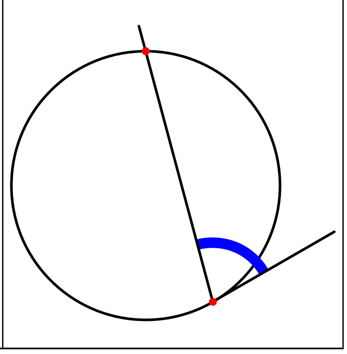
⑥ Dos circunferencias cuyos centros miden 25 metros y 16 metros son tangentes exteriores. Una recta es tangente a las dos circunferencias. Calcula la distancia entre los puntos de tangencia de la recta con las circunferencias.



Ángulos asociados a una circunferencia

* **Ángulo central** de una circunferencia es un ángulo que cumple estas dos características:
  - El vértice del ángulo es el centro de la circunferencia.
  - Cada lado del ángulo contiene un radio de la circunferencia.
* **Ángulo inscrito** en una circunferencia es un ángulo que cumple estas dos características:
  - El vértice del ángulo es un punto de la circunferencia.
  - Cada lado del ángulo corta a la circunferencia en un punto.
* **Ángulo semiinscrito** en una circunferencia es un ángulo que cumple estas tres características:
  - El vértice del ángulo es un punto de la circunferencia.
  - Un lado del ángulo corta a la circunferencia en un punto.
  - El otro lado del ángulo es tangente a la circunferencia.

Ejemplos 1

Ángulo central	Ángulo central	Ángulo inscrito	Ángulo semiinscrito
			

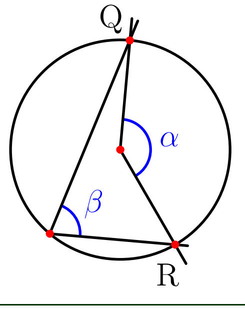
Propiedades

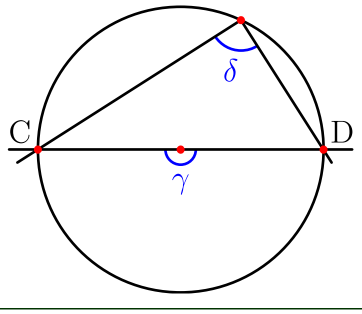
* La amplitud de un ángulo inscrito es la mitad de la amplitud del ángulo central que define el mismo arco.
* La amplitud de un ángulo semiinscrito es la mitad de la amplitud del ángulo central que define el mismo arco.

Ejemplos 2

(a) El ángulo central α y el ángulo inscrito β definen el mismo arco, el arco QR. Por tanto, $\alpha = 2\beta$.

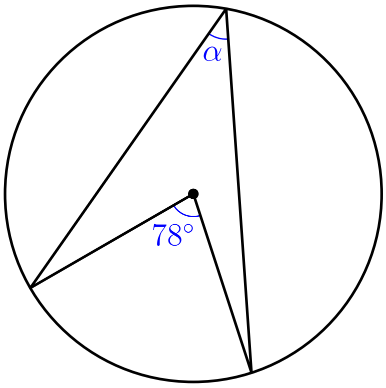
(b) El segmento CD es un diámetro de la circunferencia, luego $\gamma = 180°$. Como el ángulo central γ y el ángulo inscrito δ definen el mismo arco (CD), $\gamma = 2\delta$. Por tanto, $\delta = 90°$.

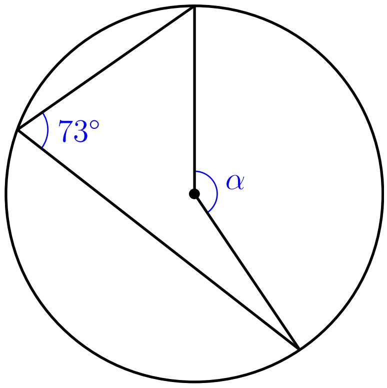
a) 

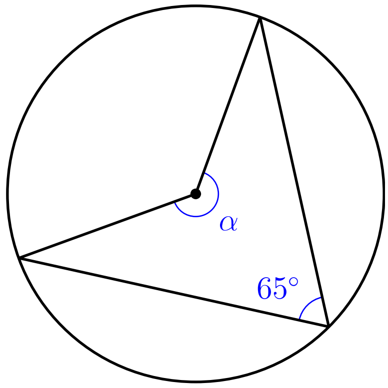
b) 

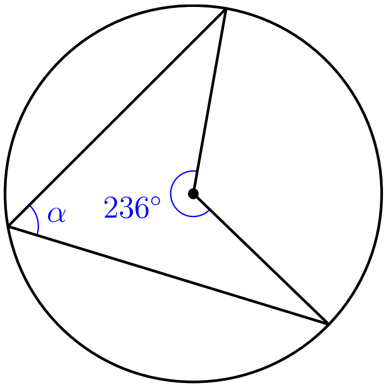
Enunciados

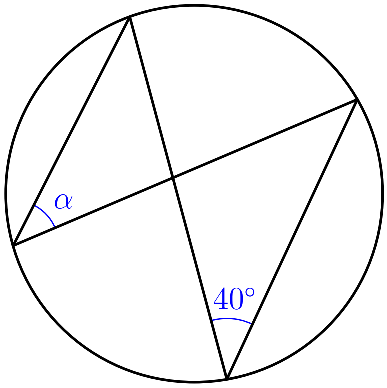
Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras:

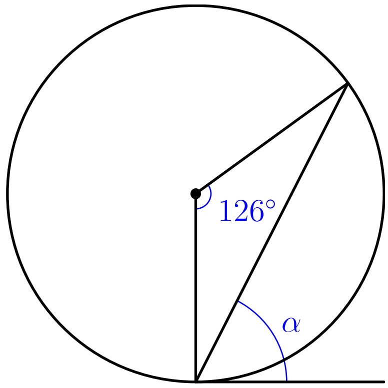
①


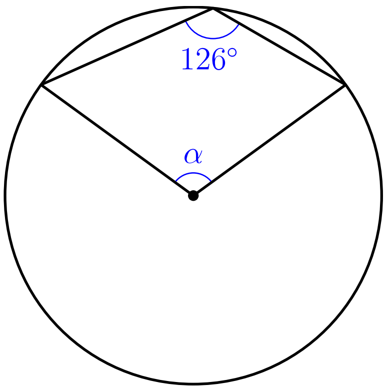
②


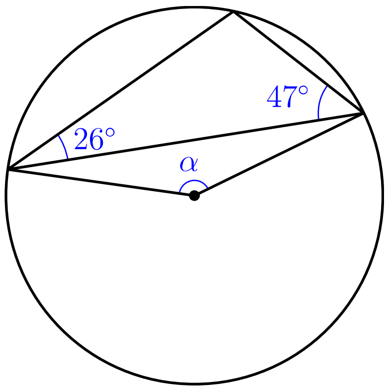
③


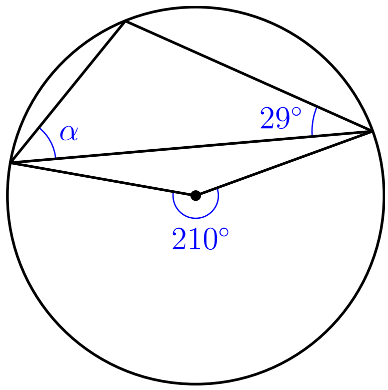
④


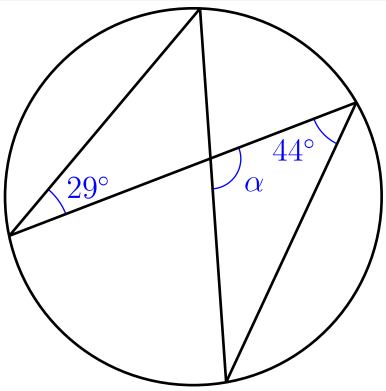
⑤


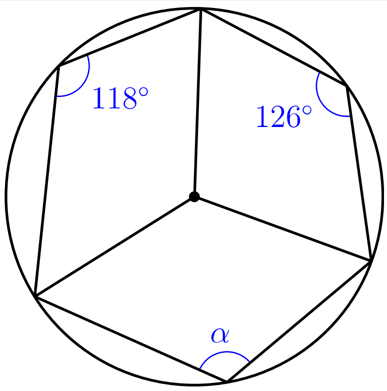
⑥


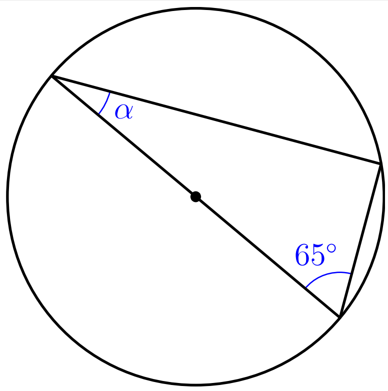
⑦


⑧


⑨


⑩


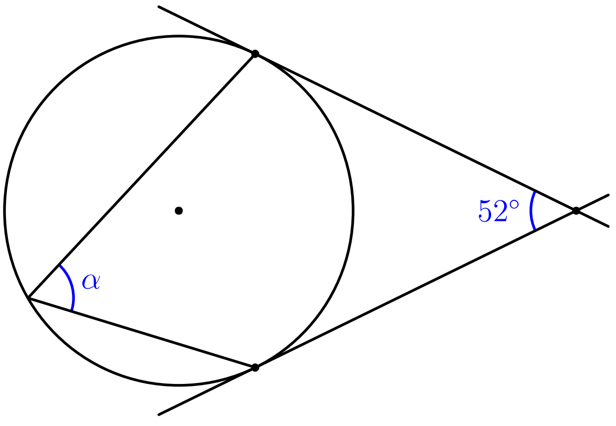
⑪


⑫


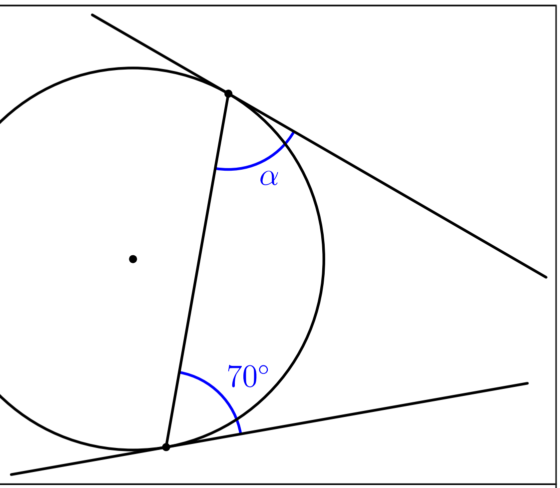
Enunciados

Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras:

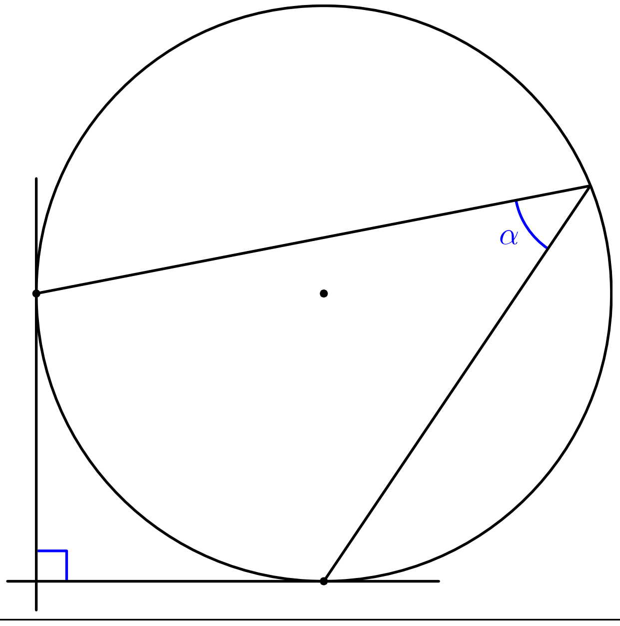
①



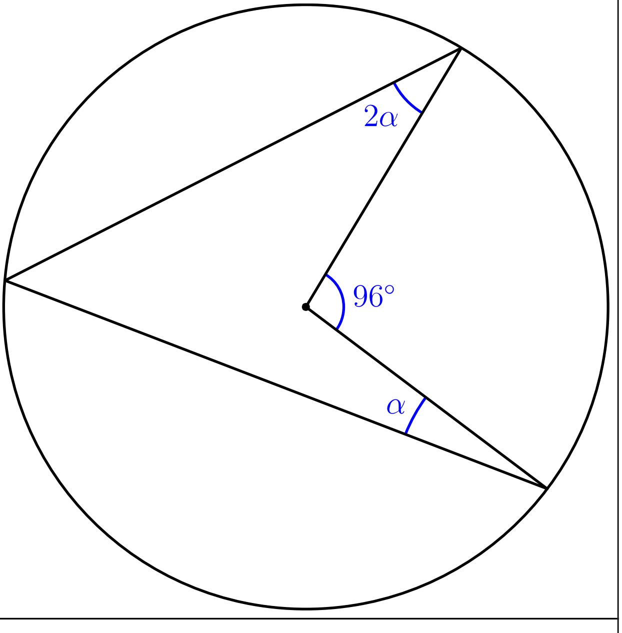
②



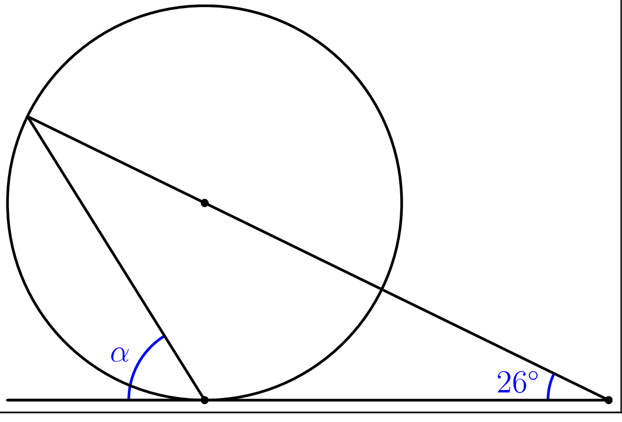
③



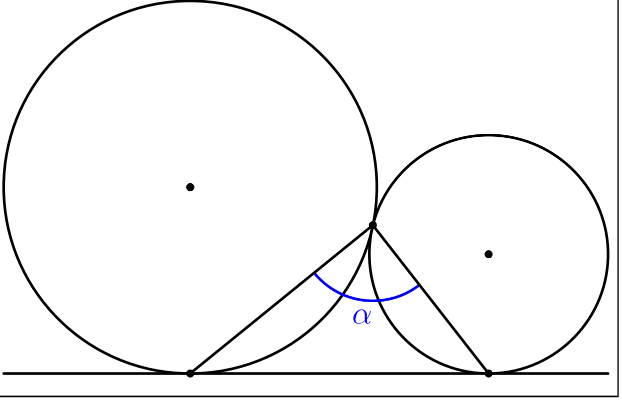
④



⑤



⑥



Longitud de una circunferencia

El tamaño de una circunferencia queda perfectamente determinado por la longitud de su radio. Por tanto, es lógico intentar averiguar una fórmula que permita calcular la longitud de la circunferencia conocido su radio. El problema es que la circunferencia es una curva y no se puede medir directamente la longitud de una curva.

El número π

Desde la antiguedad se comprobó que la división de la longitud de una circunferencia entre la longitud de su diámetro siempre da el mismo resultado: un poco más de tres. Por ejemplo, una circunferencia de 4 metros de diámetro tiene un poco más de 12 metros de longitud.

El matemático griego Euclides demostró que efectivamente la división de la longitud de una circunferencia entre su diámetro siempre da el mismo resultado. El matemático griego Arquímedes logró aproximar ese número como 3,14. Muchos siglos más adelante, se demostró que el número tiene infinitas cifras decimales que nunca se repiten periódicamente.

En el siglo XVII se comenzó a utilizar la letra griega π (pi minúscula) para simbolizar este número. Se eligió la letra π por ser la inicial de περιφέρεια (periferia) y περίμετρον (perímetro).

En junio de 2022 un equipo de informáticos liderado por la japonesa Emma Haruka Iwao calculó 100 billones de cifras usando el programa *y-cruncher* en una red de ordenadores durante algo más de 157 días.

Sabemos que el número π comienza así:

$$\boxed{\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937511}$$

Para los cálculos más precisos de la ingeniería no se necesitan nunca más de 16 cifras. En los dos primeros niveles de este curso, en los que no trabajamos con calculadora, usaremos la aproximación de Arquímedes $\pi \simeq 3{,}14$; en los siguientes niveles usaremos la calculadora científica, que incorpora el número π con una precisión de ocho, diez o doce cifras, según el modelo.

Fórmulas de la longitud de una circunferencia

Como consecuencia de lo explicado, si se conoce el diámetro de una circunferencia, se puede calcular su longitud:

$$\boxed{\text{Longitud} = \pi \cdot \text{diámetro}}$$

Como el diámetro es el doble que el radio, esta fórmula se puede transformar en Longitud = $\pi \cdot 2 \cdot$ radio; se suele escribir el 2 antes que π el radio:

$$\boxed{\text{Longitud} = 2 \cdot \pi \cdot \text{radio}}$$

Fórmulas con símbolos

Si se llama l a la longitud de la circunferencia y d a la longitud del diámetro:

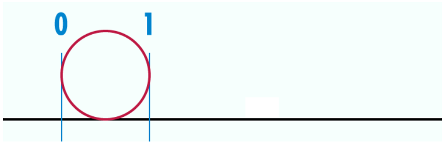
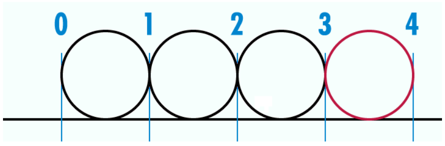
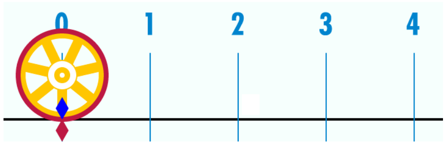
$$\boxed{l = \pi d}$$

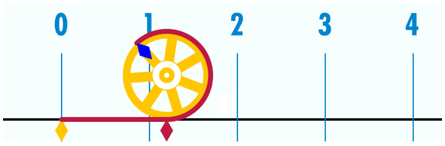
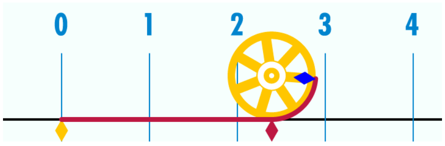
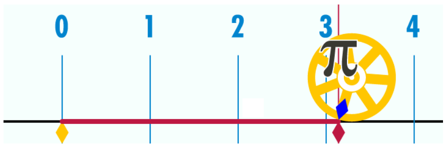
Si se llama l a la longitud de la circunferencia y r a la longitud del radio:

$$\boxed{l = 2\pi r}$$

Visualización del número π

Es posible visualizar por qué el número π es un poco mayor de 3:

Paso 1	Paso 2	Paso 3
		
Dibujamos una circunferencia y tomamos como unidad de medida su diámetro	Repetimos cuatro veces la circunferencia	Colocamos una rueda en el cero y la hacemos rodar hacia la derecha

Paso 4	Paso 5	Paso 6
		
Al rodar, vamos dejando la circunferencia marcada	Seguimos desenrrollando la longitud de la circunferencia.	Al llegar al final, la circunfe–rencia ha llegado un poco más allá del 3, ¡al π, exactamente!

Ejercicios resueltos de cálculo de la longitud de una circunferencia

Enunciados

Tomando como valor de π la aproximación 3,14, calcula la longitud de una circunferencia usando el dato de cada enunciado. Da el resultado en la misma unidad que el dato.

① El diámetro mide 4 metros.

② El diámetro mide 10 centímetros.

③ El diámetro mide 2,3 kilómetros.

④ El radio mide 8 metros.

⑤ El radio mide 15 milímetros.

⑥ El radio mide 0,7 hectómetros.

Resoluciones

① Longitud = $\pi \cdot$ diámetro = $3{,}14 \cdot 4 = 12{,}56$. Solución: 12,56 m

② Longitud = $\pi \cdot$ diámetro = $3{,}14 \cdot 10 = 31,4$. Solución: 31,4 cm

③ Longitud = $\pi \cdot$ diámetro = $3{,}14 \cdot 2{,}3 = 7{,}222$. Solución: 7,222 km

④ Longitud = $2 \cdot \pi \cdot$ radio = $2 \cdot 3{,}14 \cdot 8 = 16 \cdot 3{,}14 = 50{,}24$. Solución: 50,24 m

⑤ Longitud = $2 \cdot \pi \cdot$ radio = $2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 = 30 \cdot 3{,}14 = 94{,}2$. Solución: 94,2 mm

⑥ Longitud = $2 \cdot \pi \cdot$ radio = $2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}7 = 1{,}4 \cdot 3{,}14 = 4{,}396$. Solución: 4,396 hm

Área de un círculo

El área de un círculo es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

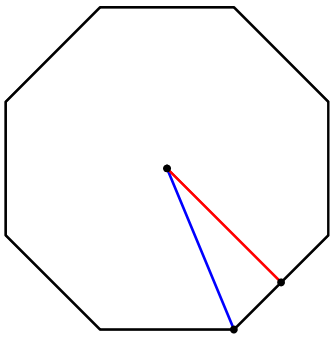
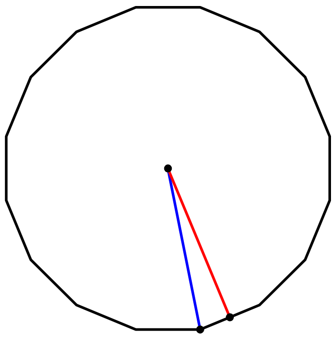
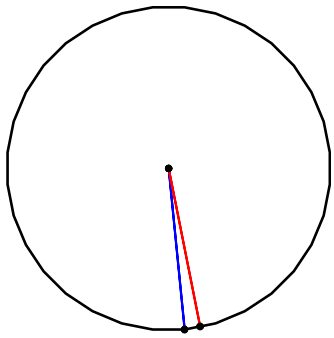
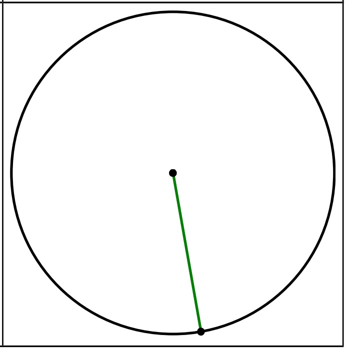
$$\boxed{\text{Área} = \pi \cdot \text{radio}^2}$$

Simbólicamente, si llamamos *r* a la longitud del radio:

$$\boxed{\text{Área} = \pi \cdot r^2}$$

Idea de la demostración

El método clásico para trabajar con las propiedades de la circunferencia y el círculo ha sido **aproximar** la circunferencia mediante un polígono regular que tenga un número elevado de lados.

Polígono regular de 8 lados	Polígono regular de 16 lados	Polígono regular de 32 lados	Circunferencia
			

Hemos dibujado tres polígonos regulares; los radios en azul y las apotemas en rojo. En la circunferencia hemos dibujado el radio en verde. Observa que conforme el número de lados va siendo mayor, el polígono regular se parece cada vez más a la circunferencia.

Así pues, aplicamos la fórmula del área del polígono regular para calcular el área del círculo, considerando que:

- ✱ El perímetro del polígono regular se aproxima a la longitud de la circunferencia.
- ✱ El apotema del polígono regular se aproxima al radio del círculo.

$$\text{Área} = \text{perímetro} \cdot \text{apotema} : 2 = (2 \cdot \pi \cdot \text{radio}) \cdot \text{radio} : 2 = \pi \cdot \text{radio}^2$$

En el último paso hemos simplificado los doses y hemos escrito como potencia el producto de los radios.

Ejercicios resueltos

Tomando como valor de π la aproximación 3,14, calcula el área de un círculo usando el dato de cada enunciado. Da el resultado en la misma unidad que el dato.

① El radio mide 4 metros.

② El diámetro mide 20 centímetros.

Resoluciones

① $\text{Área} = \pi \cdot \text{radio}^2 = 3{,}14 \cdot 4^2 = 3{,}14 \cdot 16 = 50{,}24$. Solución: $50{,}24\ \text{m}^2$

② $\text{Diámetro} = 20 \Rightarrow \text{radio} = 20 : 2 = 10$; $\text{área} = \pi \cdot \text{radio}^2 = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314$
Solución: $314\ \text{cm}^2$

Enunciados

Tomando como valor de π la aproximación 3,14, calcula la longitud de la circunferencia y el área del círculo usando el dato de cada enunciado. Da el resultado en la misma unidad que el dato.

① El radio mide 18 metros.

② El radio mide 23 milímetros.

③ El diámetro mide 26 kilómetros.

④ El diámetro mide 12 metros.

Enunciado

⑤ Calcula el área de un círculo cuyo radio mide 4,3 metros. Da el resultado en metros cuadrados redondenado a la décima.

Comentarios

* Cuando el dato es el radio, se pueden calcular directamente la longitud y el área, pero si el dato es el diámetro, para calcular el área hay que calcular primero el radio.
* En el problema (5) se obtienen muchos decimales y se obtendrían aún más si usáramos muchas cifras de π; por eso, en estos casos se redondea la solución.
* Puedes usar en los desarrollos símbolos comunes como P, A, r y d; todo el mundo te entenderá. Pero en la solución es mejor que no uses símbolos.

Resoluciones

① Longitud = 2 · π · radio = 2 · 3,14 · 18 = 36 · 3,14 = 113,04

Área = π · radio^2 = 3,14 · 18^2 = 3,14 · 324 = 1017,36.

Solución → longitud: 113,04 m; área: 1017,36 m^2

② l = 2πr = 2 · 3,14 · 23 = 46 · 3,14 = 144,44

A = πr^2 = 3,14 · 23^2 = 3,14 · 529 = 1661,06.

Solución → longitud: 144,44 mm; área: 1661,06 mm^2

③ Longitud = π · diámetro = 3,14 · 26 = 81,64

Radio = 26 : 2 = 13; area = π · radio^2 = 3,14 · 13^2 = 3,14 · 169 = 530,66.

Solución → longitud: 81,64 km; área: 530,66 km^2

④ l = πd = 3,14 · 12 = 37,68

r = d : 2 = 12 : 2 = 6; A = πr^2 = 3,14 · 6^2 = 3,14 · 36 = 113,04.

Solución → longitud: 37,68 mm; área: 113,04 mm^2

⑤ A = πr^2 = 3,14 · 4,3^2 = 3,14 · 18,49 = 58,0586

Solución: 58,1 m^2

Enunciados

Tomando como valor de π la aproximación 3,14, calcula la longitud de la circunferencia y el área del círculo usando el dato de cada enunciado. Da el resultado en la misma unidad que el dato.

① El radio mide 6 metros.

② El radio mide 40 decímetros.

③ El radio mide 8 kilómetros.

④ El radio mide 0,1 centímetros.

⑤ El radio mide 9 metros.

⑥ El radio mide 14 metros.

⑦ El radio mide 22 hectómetros.

⑧ El radio mide 50 metros.

⑨ El radio mide 30 decámetros.

⑩ El radio mide 17 metros.

⑪ El diámetro mide 6 metros.

⑫ El diámetro mide 20 kilómetros.

⑬ El diámetro mide 4 centímetros.

⑭ El diámetro mide 1,4 metros.

⑮ El diámetro mide 60 decímetros.

⑯ El diámetro mide 88 milímetros.

⑰ El diámetro mide 22 metros.

⑱ El diámetro mide 48 centímetros.

⑲ El diámetro mide 32 metros.

⑳ El diámetro mide 90 hectómetros.

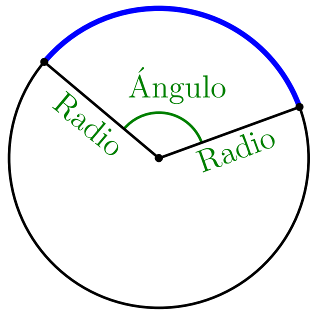
Enunciados

㉑ Calcula el área de un círculo cuyo radio mide 7,1 metros. Da el resultado en metros cuadrados redondenado a la décima.

㉒ Calcula el área de un círculo cuyo diámetro mide 19 metros. Da el resultado en metros cuadrados redondenado a la décima.

㉓ Calcula el área de un círculo cuyo radio mide 0,39 metros. Da el resultado en metros cuadrados redondenado a la centésima.

Longitud de un arco de circunferencia



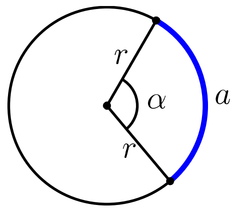
Para calcular la longitud de un arco de circunferencia hay que conocer el radio de la circunferencia y la amplitud del ángulo central de la circunferencia que define al arco.

- ✱ Llamamos a a la longitud del arco, que es lo que queremos calcular.
- ✱ Llamamos r a la longitud del radio de la circunferencia.
- ✱ Llamamos α a la amplitud del ángulo central.

La longitud de la circunferencia es $2\pi r$, que se corresponde con un ángulo completo, 360°. Utilizando la definición de fracción, sabemos que la fracción del ángulo completo que corresponde con un ángulo α es $\frac{\alpha}{360^\circ}$, luego la fracción de la longitud de la circunferencia que corresponde con el arco a es $\frac{\alpha}{360^\circ}$.

Por tanto, $a = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$, y simplificando el 2 y el 360 llegamos a

$$\boxed{a = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r}$$



Ejercicios resueltos

Enunciados

Tomando como valor de π la aproximación 3,14, calcula la longitud de los siguientes arcos de circunferencia.

① El radio mide 12 metros y el ángulo mide 60°.

② El radio mide 35 metros y el ángulo mide 72°.

③ El diámetro de la circunferencia mide 162 metros y el ángulo mide 40°.

Comentarios

- ✱ Para hacer las operaciones del modo más sencillo posible, recuerda la importancia de simplificar lo antes posible.
- ✱ La multiplicación por π casi siempre se deja para el final.

Resoluciones

① $a = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r = \frac{60^\circ}{180^\circ} \cdot 3{,}14 \cdot 12 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 12 = 4 \cdot 3{,}14 = 12{,}56$

Solución: 12,56 m

② $a = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r = \frac{72^\circ}{180^\circ} \cdot 3{,}14 \cdot 35 = \frac{2}{5} \cdot 3{,}14 \cdot 35 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 = 14 \cdot 3{,}14 = 43{,}96$

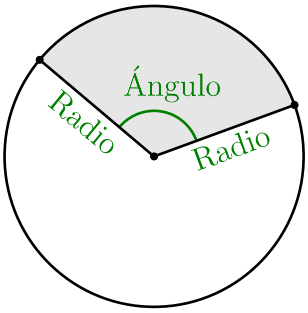
Solución: 43,96 m

③ $r = d : 2 = 162 : 2 = 81.$

$a = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r = \frac{40^\circ}{180^\circ} \cdot 3{,}14 \cdot 81 = \frac{2}{9} \cdot 3{,}14 \cdot 81 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 = 18 \cdot 3{,}14 = 56{,}52$

Solución: 56,52 m

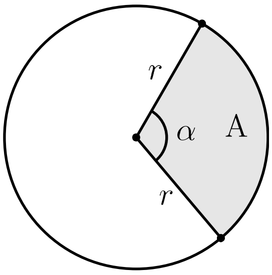
Área de un sector circular



Para calcular el área de un sector circular hay que conocer el radio de la circunferencia y la amplitud del ángulo central de la circunferencia que define al sector.

- ✱ Llamamos A al área del sector circular, que es lo que queremos calcular.
- ✱ Llamamos r a la longitud del radio de la circunferencia.
- ✱ Llamamos α a la amplitud del ángulo central.

El área del círculo es πr^2, que se corresponde con un ángulo completo, 360°. Utilizando la definición de fracción, sabemos que la fracción del ángulo completo que corresponde con un ángulo α es $\frac{\alpha}{360^\circ}$, luego la fracción del área del círculo que corresponde con el sector es $\frac{\alpha}{360^\circ}$.



Por tanto,

$$\boxed{A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2}$$

Ejercicios resueltos

Enunciados

Tomando como valor de π la aproximación 3,14, calcula el área de los siguientes sectores circulares.

① El radio mide 18 metros y el ángulo mide 60°.

② El radio mide 5 metros y el ángulo mide 72°.

③ El diámetro de la circunferencia mide 6 metros y el ángulo mide 160°.

Comentarios

- ✱ Para hacer las operaciones del modo más sencillo posible, recuerda la importancia de simplificar lo antes posible.
- ✱ La multiplicación por π casi siempre se deja para el final.

Resoluciones

① $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 3{,}14 \cdot 18^2 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 324 = 54 \cdot 3{,}14 = 169{,}56$

Solución: 169,56 m²

② $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 = \frac{1}{5} \cdot 3{,}14 \cdot 25 = 5 \cdot 3{,}14 = 15{,}7$

Solución: 15,7 m²

③ $r = d : 2 = 6 : 2 = 3$.

$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{160^\circ}{360^\circ} \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 = \frac{4}{9} \cdot 3{,}14 \cdot 9 = 4 \cdot 3{,}14 = 12{,}56$

Solución: 12,56 m²

Enunciados

Para resolver estos ejercicios, toma como valor de π la aproximación 3,14 y da el resultado en la misma unidad que el dato.

Longitud de un arco de circunferencia

① Calcula la longitud de un arco de circunferencia cuyo radio mide 20 metros y su ángulo mide 90°.

② Calcula la longitud de un arco de circunferencia cuyo radio mide 7 metros y su ángulo mide 18°.

③ Calcula la longitud de un arco de circunferencia cuyo radio mide 8 metros y su ángulo mide 270°.

④ Calcula la longitud de un arco de circunferencia cuyo radio mide 10 metros y su ángulo mide 36°.

⑤ Calcula la longitud de un arco de circunferencia con un ángulo de 20° sabiendo que el diámetro de la circunferencia mide 18 centímetros.

Área de un sector circular

⑥ Calcula el área de un sector circular cuyo radio mide 6 metros y su ángulo mide 90°.

⑦ Calcula el área de un sector circular cuyo radio mide 2 metros y su ángulo mide 270°.

⑧ Calcula el área de un sector circular cuyo radio mide 12 metros y su ángulo mide 60°.

⑨ Calcula el área de un sector circular cuyo radio mide 4 metros y su ángulo mide 45°.

⑩ Calcula el área de un sector circular con un ángulo de 40° sabiendo que el diámetro de la circunferencia mide 36 centímetros.

Semicírculos

⑪ Calcula el perímetro y el área de un semicírculo de radio 4 metros.

⑫ Calcula el perímetro y el área de un semicírculo de diámetro 6 metros.

Enunciados

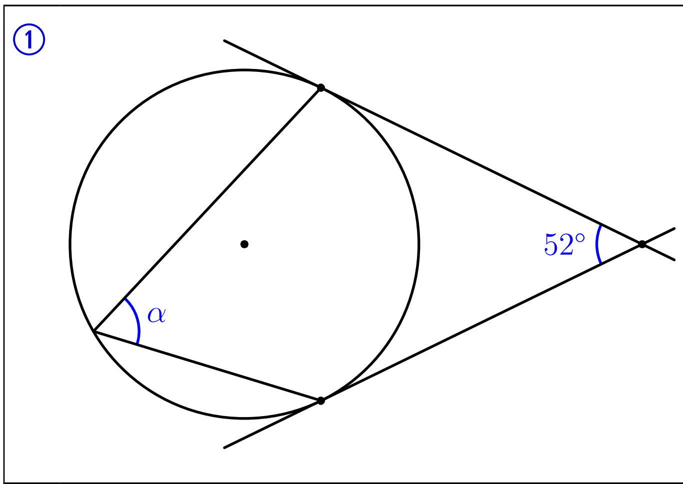
⑬ Calcula el perímetro y el área de un sector circular cuyo radio mide 3 metros y su ángulo mide 60°.

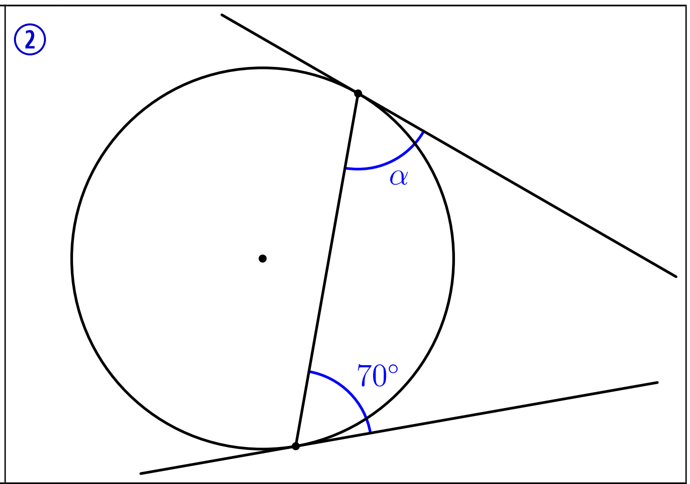
⑭ Calcula el perímetro y el área de un sector circular cuyo radio mide 6 metros y su ángulo mide 120°.

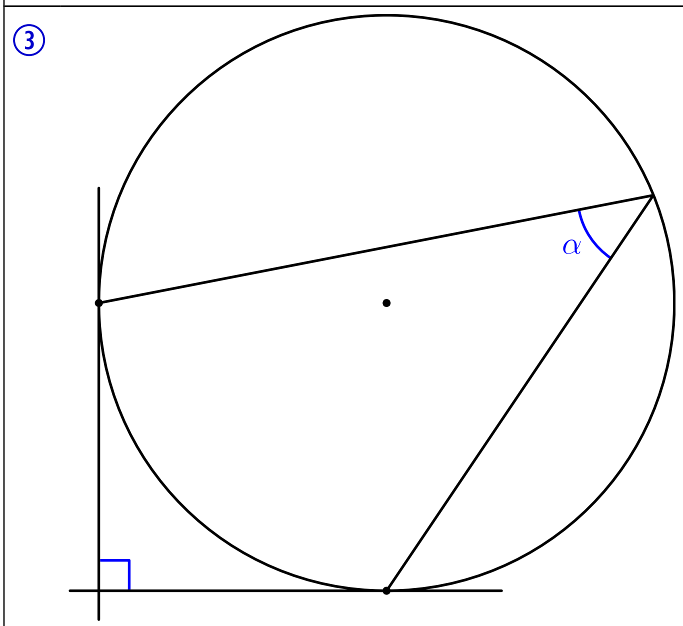
⑮ Calcula el perímetro y el área de un sector circular cuyo radio mide 3 metros y su ángulo mide 240°.

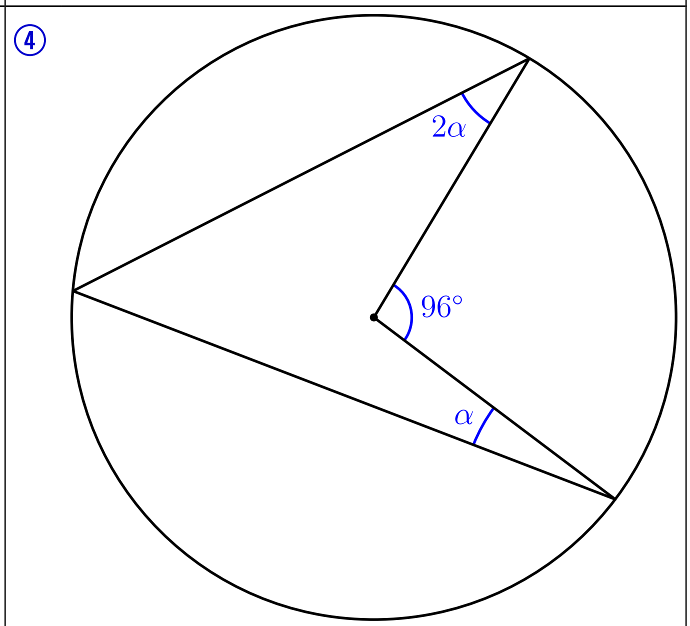
Enunciados

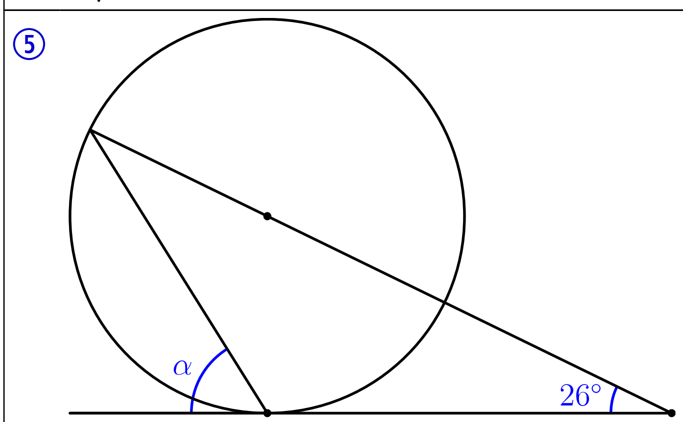
Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras:

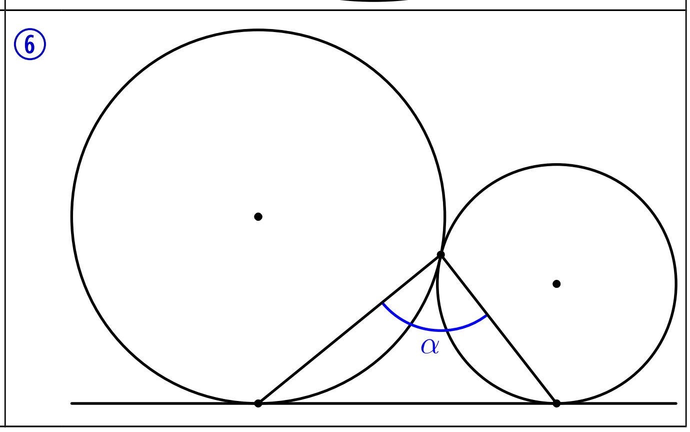




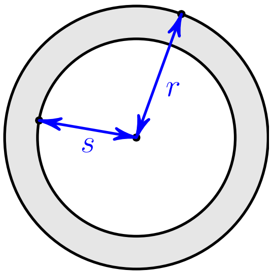








Perímetro y area de una corona circular



Para calcular el perímetro y el área de una corona circular hay que conocer los radios de las dos circunferencias que la definen.

* El perímetro de la corona circular es la **suma** de las longitudes de las dos circunferencias.
* El área de la corona circular es la **diferencia** de las áreas de los dos círculos.

Esta figura es un buen ejemplo de que en matemáticas no es imprescindible saberse todas las fórmulas. En muchos casos, como este, es suficiente con recordar el método de obtener las fórmulas. En una aplicación práctica, podrás optar por aplicar la fórmula, si la recuerdas bien, o aplicar el razonamiento otra vez.

Las fórmulas

Llamamos r al radio de la circunferencia mayor y s al radio de la circunferencia menor.

* Perímetro $= 2\pi r + 2\pi s = 2\pi(r+s)$
* Área $= \pi r^2 - \pi s^2 = \pi(r^2 - s^2)$

Es importante comprender que en las dos fórmulas hemos aplicado la propiedad distributiva para extraer factor común π. Con esto se consigue que el número π aparezca una sola vez y solo haya que multiplicar una vez por él. Esta técnica se usa siempre, incluso cuando se dispone de calculadora. Y es imprescindible cuando se quieren obtener valores absolutamente exactos matemáticamente.

Ejercicio resuelto 1

Enunciado

Tomando como valor de π la aproximación 3,14, calcula el perímetro y el área de una corona circular que tiene radios 8 metros y 5 metros.

Resolución

Perímetro $= 2\pi(8+5) = 2\pi\cdot 13 = 26\pi = 26 \cdot 3{,}14 = 81{,}64$

Área $= \pi(8^2 - 5^2) = \pi(64 - 25) = 39\pi = 39 \cdot 3{,}14 = 122{,}46$

Solución → perímetro: 81,64 m; área: 122,46 m²

Ejercicio resuelto 2

Enunciado

Tomando como valor de π la aproximación 3,1416, calcula el perímetro y el área de una corona circular que tiene radios 10 metros y 4 metros.

Resolución

Perímetro $= 2\pi(10+4) = 2\pi\cdot 14 = 28\pi = 28 \cdot 3{,}1416 = 87{,}9648$

Área $= \pi(10^2 - 4^2) = \pi(100 - 16) = 84\pi = 84 \cdot 3{,}1416 = 263{,}8944$

Solución → perímetro: 87,9648 m; área: 263,8944 m²

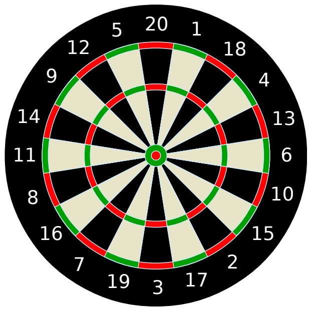
Enunciados

En todos los problemas debes utilizar como valor de π la aproximación 3,14.

① Si te montas en un tiovivo en un caballito que está a 3 metros del eje de giro y das cinco vueltas, ¿cuánta distancia recorres?

② Si te montas en un columpio cuyas cuerdas miden 2 metros y te balanceas doce veces (seis idas y seis vueltas) describiendo un arco correspondiente a un ángulo recto, ¿cuánta distancia recorres?

③ El diámetro de la diana oficial para jugar a los dardos mide 18 pulgadas.

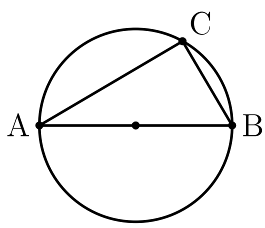


a) Calcula el área de la diana; da el resultado en pulgadas cuadradas.

b) Calcula la longitud del arco más alejado del centro y que limita cada una de las zonas de puntuación. Da el resultado en pulgadas.

④ Calcula el perímetro y el área de un trapecio circular sabiendo que los radios de sus circunferencias miden 5 metros y 3 metros y la amplitud del ángulo central es 45°.

⑤ Calcula la longitud de la circunferencia y el área del círculo de la figura adjunta conociendo estos datos:



- AB es un diámetro
- $\overline{\text{CA}} = 112$ m
- $\overline{\text{CB}} = 66$ m

⑥ El velocípedo es un medio de transporte precursor de la bicicleta. Lo que más nos llama la atención de él ahora es la diferencia de tamaño entre las dos ruedas. Imagínate que en el velocípedo de la foto los diámetros de la rueda de delante miden un metro y los radios de la rueda de detrás miden un decímetro. Averigua cuántas vueltas da la rueda pequeña cuando la grande da una vuelta.

Perímetro y área de figuras mixtas

En la vida real es muy habitual tener que calcular el perímetro o el área de una figura que está delimitada por segmentos (que son rectos) y por arcos de circunferencia (que son curvos); las figuras pueden tener o no agujeros. Las técnicas para realizar estos cálculos son iguales que las que ya hemos trabajado para figuras delimitadas por segmentos; solo hay que añadir la dificultad de trabajar con las partes curvas, con las que podemos aplicar lo aprendido sobre arcos, sectores circulares, etc.

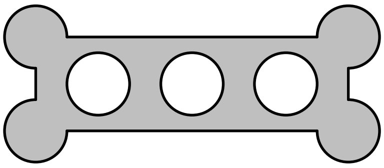
Problema resuelto

Enunciado

A un rectángulo de dimensiones 10 metros y 3 metros se le añaden en las esquinas sectores circulares de 1 metro de radio y se le recortan del interior tres círculos de 1 metro de radio. Calcula el perímetro y el área de la figura resultante. Utiliza como valor de π la aproximación 3,14.

Resolución

Hacemos un dibujo aproximado de la figura:



Para calcular el perímetro hay que sumar dos segmentos de 8, dos segmentos de 1, cuatro arcos de radio 1 y ángulo 270° y tres circunferencias de radio 1:

$$\text{Perímetro} = 2\cdot(8+1) + 4\cdot\frac{270}{360}\cdot 2\cdot\pi\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot\pi\cdot 1 = 2\cdot 9 + 4\cdot\frac{3}{4}\cdot 2\cdot\pi + 6\cdot\pi =$$

$$= 18 + 6\cdot\pi + 6\cdot\pi = 18 + 12\cdot\pi = 18 + 12\cdot 3{,}14 = 18 + 37{,}68 = 55{,}68$$

Para calcular el área hay que sumar el área del rectángulo de dimensiones 10 y 3 junto con cuatro sectores circulares de radio 1 y ángulo 270° y restar tres círculos de radio 1:

$$\text{Área} = 10\cdot 3 + 4\cdot\frac{270}{360}\cdot\pi\cdot 1^2 - 3\cdot\pi\cdot 1^2 = 30 + 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\pi - 3\cdot\pi = 30 + 3\cdot\pi - 3\cdot\pi = 30$$

Solución → perímetro: 55,68 m; área: 30 m²

Comentarios

- Como el enunciado no incluía ilustración, es muy conveniente hacer una. Cuanto más aproximada sea, mejor, pero no es necesario que sea perfecta, puesto que la usaremos para ayudarnos a pensar.
- Hemos supuesto que los sectores de las esquinas tienen el centro en los vértices del rectángulo, por ser lo más habitual.
- Hemos calculado que el ángulo de los sectores es 270°, pero no lo hemos justificado, por estar bastante claro. En otros problemas, quizá haya que hacer más cálculos para averiguar el ángulo.
- Para calcular el perímetro hemos sustituido π por su valor aproximado al final, cuando ya teníamos agrupadas todas las apariciones de π.
- Para calcular el área no hemos necesitado sustituir π por su valor aproximado, ya que se ha simplificado.

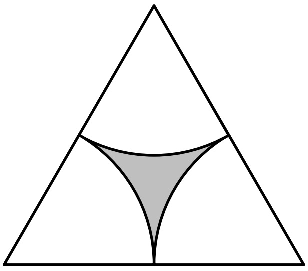
Enunciados

En todos los problemas debes utilizar como valor de π la aproximación 3,14.

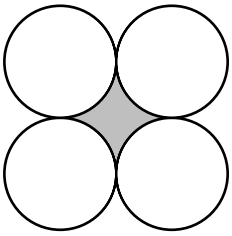
① A un cuadrado de 10 metros de lado se le añaden en cada lado dos semicírculos de 2 metros de diámetro y se le recortan del interior cuatro círculos de 2 metros de diámetro. Calcula el perímetro y el área de la figura resultante.

② Una cadena de trasmisión comunica dos ruedas que tienen 5 centímetros de radio. La distancia entre los centros de las ruedas es 26 centímetros. Calcula la longitud de la cadena.

③ Un terreno que tiene forma triangular regular y de 6 metros de lado está sembrado de alfalfa y en cada vértice se colocan, para que pasten, tres ovejas amarradas de tal forma que llegan solo a la mitad del lado del triángulo. Al cabo de un buen rato solo queda hierba en parte del terreno sembrado, tal y como se indica en la parte sombreada de la figura adjunta. ¿Cuál es el perímetro de esta zona que queda con pasto?



④ Calcula el perímetro y el área de la figura limitada por las cuatro circunfencias de radio 2 metros que aparecen en la ilustración:



⑤ En el centro de un prado lleno de hierba hay un cobertizo cuadrado de 4 metros de lado destinado a guardar los aperos de labranza. En el centro del lado opuesto a la puerta de entrada al cobertizo está atada una cabra mediante una cuerda de 4 metros. Calcula el área que tiene la cabra disponible para pastar.

Media de dos números

La media de dos números es la suma de los números dividida entre 2.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula la media de 5 y 9.

Resolución: media = (5 + 9) : 2 = 14 : 2 = 7. Solución: 7

Ejemplo 2

Enunciado: calcula la media de –4 y 6.

Resolución: media = (–4 + 6) : 2 = 2 : 2 = 1. Solución: 1

Expresión simbólica de la media

La media de los números a y b es

$$\boxed{\text{Media} = (a + b) : 2}$$

Representación gráfica de la media

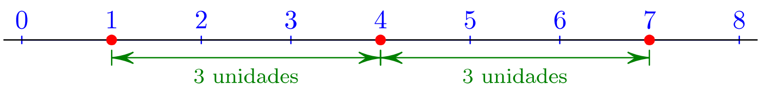
La media de dos números siempre se representa gráficamente en el **punto medio** del segmento que tiene de extremos la representación gráfica de los números.

Ejemplo 3

Enunciado: calcula la media de 1 y 7 y representa gráficamente los tres números.

Resolución

Media = (1 + 7) : 2 = 8 : 2 = 4. Solución: 4



Propiedad

Si $a < b$ y llamamos m a la media de a y b, se verifica que $a < m < b$

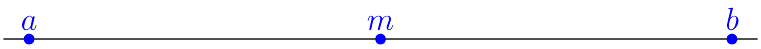
Comentario

- ✱ Esta propiedad es la que permite demostrar que el conjunto de los números decimales es un conjunto denso.
- ✱ Es interesante demostrar esta propiedad al final del nivel 1 para ver de primera mano que ya se pueden entender algunas propiedades matemáticas con demostraciones rigurosas.

Demostración

$$\left.\begin{aligned} &a < b \Rightarrow a+a < a+b \Rightarrow 2a{:}2 < (a+b){:}2 \Rightarrow a < m \\ &a < b \Rightarrow a+b < b+b \Rightarrow (a+b){:}2 < 2b{:}2 \Rightarrow m < b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a < m < b$$

- ✱ En el primer paso de cada línea hemos sumado la misma cantidad en los dos miembros.
- ✱ En el segundo paso de cada línea hemos dividido entre 2.



Enunciados

Calcula la media de las siguientes parejas de números:

① 20 y 30

② –6 y 16

③ 7 y 8

④ 7,2 y 7,6

⑤ –10 y –4

⑥ 0 y 36

⑦ –18 y 0

⑧ 2,82 y 2,88

⑨ –15 y 15

⑩ 100 y 200

⑪ 14 y 32

⑫ 38 y –38

⑬ 21 y 23

⑭ 0,24 y 0,3

⑮ –64 y 88

⑯ 0,02 y 1

⑰ –0,02 y 1

⑱ 2 y 3

⑲ 7,7 y 7,8

⑳ 8 y 12

㉑ –8 y 12

㉒ 8 y –12

㉓ –8 y –12

㉔ –7 y –8

㉕ 0,27 y 0,28

㉖ –0,27 y 0,28

Media de varios números

La media de varios números es otro número que sirve el propósito de unificar todos los valores dando solo uno. Es una especie de «resumen» de los números.

Cálculo de la media de varios números

Para calcular la media de varios números se divide la suma de todos los números entre la cantidad de números.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula la media de estos números: 12, 17, 21, 21 y 39.

Resolución

La suma de los números es 12 + 17 + 21 + 21 + 39 = 110

Hay 5 números, luego la media es: media = 110 : 5 = 22

Ejemplo 2

Enunciado: una persona realiza varios exámenes que pueden ser calificados entre 0 y 10, obteniendo estas notas: 8,2; 5,4; 3,1 y 4,5. Calcula la nota media.

Resolución

La suma de los números es 8,2 + 5,4 + 3,1 + 4,5 = 21,2

Hay 4 notas, luego la media es: media = 21,2 : 4 = 5,3

Cálculo de la media de muchos números con repeticiones

Cuando hay que calcular la media de muchos números y algunos de ellos se repiten varias veces, hay que utilizar la multiplicación para evitar repetir muchos sumandos y así agilizar la operación.

Ejemplo 3

Enunciado

Se realiza una encuesta en una urbanización para saber cuántas personas habitan en cada vivienda. Se obtienen estos resultados:

Número de personas	1	2	3	4	5
Número de viviendas	14	35	53	18	8

Calcula cuántas personas habitan de media en cada vivienda.

Explicaciones

- El cuadro nos está explicando de una manera esquemática que hay 14 viviendas con un solo habitante, 35 viviendas con dos habitantes, etc.
- Para calcular la media habría que sumar 14 unos, 35 doses, 53 treses, etc.; para hacer esa operación es más fácil ayudarse de la multiplicación.
- La cantidad total de viviendas se obtiene sumando cuántas hay de cada tipo.

Resolución

La suma de las personas es 14·1 + 35·2 + 53·3 + 18·4 + 8·5 = 355

La suma de las viviendas es 14 + 35 + 53 + 18 + 8 = 128

La media de personas por vivienda es: media = 355 : 128 = 2,7734375

Solución: 2,8

Explicación: no tiene sentido dar muchas cifras en la solución, hay que redondear.

Enunciados

Calcula la media de las siguientes series de números:

① 2, 3, 3, 5 y 7

② 8, 10, 12, 15 y 20

③ 0,3; 0,8; 1,1; 2,2; 2,6; 3; 3,2; 3,3; 3,4 y 4,1

④ 1,5; 2,8; 3,6; 4; 5,2; 5,8; 6,7; 6,8; 7,1 y 7,5

⑤ 3, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10, 12, 12, 12, 13 y 13

⑥ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9 y 9

Enunciados

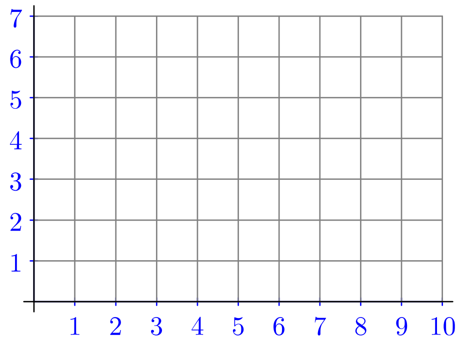
⑦ ¿Cuál es la media del número 117, su siguiente y su anterior?

⑧ En una empresa trabajan nueve personas con un sueldo de 1000 euros mensuales y un persona con un sueldo de 11 000 euros mensuales. Calcula el sueldo medio mensual de todas las personas de la empresa.

⑨ Consideramos los puntos A=(1,6) y B=(9,2). Se pide:

a) Calcula las coordenadas del punto M, que tiene como abscisa la media de las abscisas de A y B y como ordenada la media de las ordenadas de A y B.

b) Representa gráficamente el segmento AB y el punto M.



⑩ Se realiza una encuesta entre varias personas para saber cuántos relojes poseen, con estos resultados:

Número de relojes	0	1	2	3	4
Número de personas	20	44	27	7	2

Calcula cuántos relojes tiene de media cada persona. Da el resultado redondeado a la décima.

⑪ La media de dos números es 17 y uno de los números es 19. ¿Cuál es el otro?

⑫ La media de tres números es 6 y dos de ellos son 5. ¿Cuál es el otro?

⑬ La media de dos números es 25. ¿Cuál es la media de sus dobles?

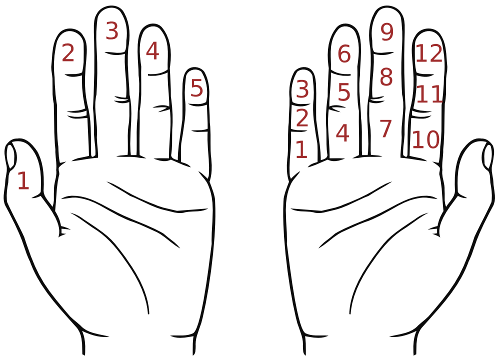
El sistema sexagesimal

Llamamos sistema sexagesimal al sistema de numeración que consiste en dividir la unidad en sesenta partes. Aunque ahora usamos principalmente el sistema decimal, en la antigüedad se usaba tanto el sexagesimal que ha llegado a nuestros días aplicado en dos ámbitos:

- En la medida del tiempo.
  - Una hora se divide en sesenta minutos.
  - Un minuto se divide en sesenta segundos.
- En la medida de ángulos.
  - Un grado sexagesimal se divide en sesenta minutos sexagesimales.
  - Un minuto sexagesimal se divide en sesenta segundos sexagesimales.

Origen

No se conoce con seguridad el origen del sistema sexagesimal, pero muchas personas que lo han estudiado opinan que puede deberse a un método utilizado antiguamente para contar usando las falanges de una mano y los dedos de la otra:



- Con el pulgar de una mano se pueden contar las doce falanges de los otros cuatro dedos.
- Con los dedos de la otra mano se van contando los ciclos de doce falanges.
- En total se llega a $5 \cdot 12 = 60$.

También es importante el hecho de que el número 60 tiene muchos divisores.

Divisores del grado sexagesimal

Estas definiciones parecen un trabalenguas, pero en realidad son sencillas:

- Un minuto sexagesimal es la sexagésima parte de un grado sexagesimal.
- Un segundo sexagesimal es la sexagésima parte de un minuto sexagesimal.

Origen de los nombres

Claudio Ptolomeo (100-170) fue un astrónomo y geógrafo griego que trabajó en la famosa biblioteca de Alejandría, en Egipto.

Él llamó a las sesenta divisiones del grado sexagesimal «partes di**minuta**s de primera especie» y a las sesenta divisiones del minuto sexagesimal «partes diminutas de **segunda** especie».

Símbolos de minuto y segundo sexagesimal

- El símbolo del minuto sexagesimal es la **prima** («′»). Ejemplo 1: 54′.
- El símbolo del segundo sexagesimal es la **prima doble** («″»). Ejemplo 2: 31″.

Resumen

El sistema sexagesimal se usa tanto en los submúltiplos de la hora (como unidades de tiempo) como en los del grado sexagesimal (como unidades de amplitud).

Unidades de tiempo	1 h = 60 min	1 min = 60 s
Unidades de amplitud	$1° = 60'$	$1' = 60''$

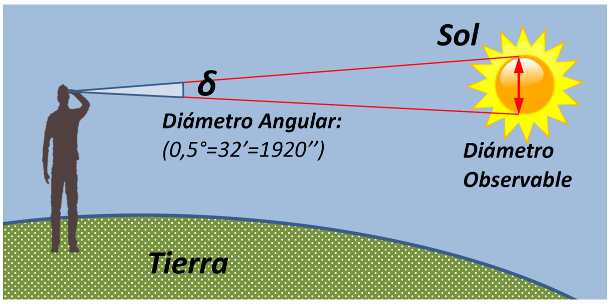
El grado sexagesimal

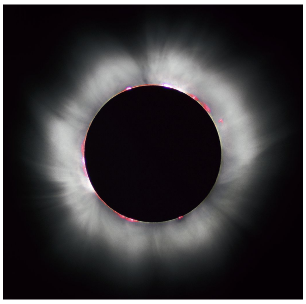
Cuando has hecho ejercicios de geometría seguro que te has dado cuenta de que los ángulos con los que has trabajado han sido mucho mayores de 1°; es lo habitual cuando estudiamos en la enseñanza secundaria.

Sin embargo, un ángulo de un solo grado puede resultar muy grande. Por ejemplo, en el tiro de precisión, que es un deporte olímpico, hay modalidades en las que la distancia entre la persona y el blanco es de 50 metros y el blanco mide 15,44 centímetros de diámetro. Pues bien, un error de 1° en el tiro daría una desviación de 27,78 centímetros en el punto de impacto, quizá la diferencia entre ganar una medalla o no ganarla.

Diámetro angular del la Luna y el Sol

Ni siquiera un ángulo de un grado sexagesimal nos sirve para cuantificar cómo vemos la Luna y el Sol desde la Tierra, es necesaria una unidad menor. Llamamos diámetro angular de un objeto celeste al ángulo con el que lo vemos desde la Tierra. Para la Luna y el Sol casi coinciden: vale en los dos casos aproximadamente medio grado sexagesimal. Esta igualdad es la que permite la existencia de eclipses totales de Sol, en los que la Luna casi ocupa la misma parte del cielo que el Sol y lo tapa, aun siendo realmente mucho menor.

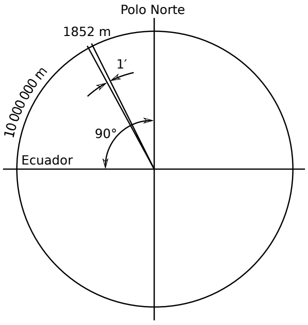




La milla náutica

La milla náutica es una unidad de longitud que no pertenece al Sistema Internacional; equivale a 1852 metros. Lo que nos interesa ahora es que su primera definición fue «la longitud de un arco de circunferencia de la Tierra que corresponde con un ángulo central de **un minuto sexagesimal**».

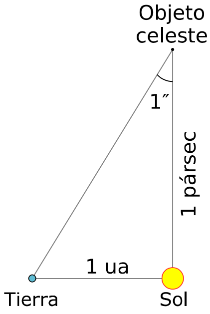
El radio de la Tierra es de unos 6365 kilómetros. Esto nos enseña que los valores pequeños de los ángulos importan cuando los radios de las circunferencias son grandes.



El pársec

El pársec es una unidad de longitud que no pertenece al Sistema Internacional, pero se utiliza en astronomía. Se define como la distancia desde la que una unidad astronómica (ua) se ve bajo un ángulo de **un segundo sexagesimal**. Su nombre proviene del inglés ***par****allax of one arc* ***sec****ond* (paralaje de un segundo de arco).

Un pársec equivale a 3,26 años luz. Por comparación, la estrella más cercana al Sol es Próxima Centauri, que se encuentra a unos 4,2 años luz.



Conversiones entre forma compleja y forma incompleja

El método para hacer conversiones en el sistema sexagesimal entre las formas compleja e incompleja sigue el mismo principio de multiplicaciones y divisiones que en el sistema decimal, pero con la dificultad de cambiar el 10 por el 60.

Las conversiones se hacen exactamente igual para las unidades tiempo (hora, minuto y segundo) que para las de amplitud de ángulo (grado, minuto y segundo sexagesimales).

Unidades de tiempo	1 h = 60 min	1 min = 60 s
Unidades de amplitud	$1° = 60'$	$1' = 60''$

Ejemplos básicos

Ejemplo 1	3 h = 3·60 min = 180 min	Ejemplo 2	$3° = 3·60' = 180'$
Ejemplo 3	0,2 h = 0,2·60 min = 12 min	Ejemplo 4	$0{,}2° = 0{,}2·60' = 12'$
Ejemplo 5	5 min = 5·60 s = 300 s	Ejemplo 6	$5' = 5·60'' = 300''$
Ejemplo 7	0,6 min = 0,6·60 s = 36 s	Ejemplo 8	$0{,}6' = 0{,}6·60'' = 36''$
Ejemplo 9	240 min = 240:60 h = 4 h	Ejemplo 10	$240' = 240:60° = 4°$
Ejemplo 11	48 min = 48:60 h = 0,8 h	Ejemplo 12	$48' = 48:60° = 0{,}8°$
Ejemplo 13	180 s = 180:60 min = 3 min	Ejemplo 14	$180'' = 180:60' = 3'$
Ejemplo 15	12 s = 12:60 min = 0,2 min	Ejemplo 16	$12'' = 12:60' = 0{,}2'$

Conversión directa entre horas y segundos

Como 1 h = 60 min y 1 min = 60 s, deducimos que 1 h = 60·60 s = 3600 s

$$\boxed{1\text{ h} = 3600\text{ s}}$$

Por tanto, es posible pasar directamente de horas a segundos y viceversa.

Conversión directa entre grados y segundos sexagesimales

Como $1° = 60'$ y $1' = 60''$, deducimos que $1° = 60·60'' = 3600''$

$$\boxed{1° = 3600''}$$

Por tanto, es posible pasar directamente de grados sexagesimales a segundos sexagesimales y viceversa.

Ejemplos

Ejemplo 17	4 h = 4·3600 s = 14 400 s	Ejemplo 18	$4° = 4·3600'' = 14\,400''$
Ejemplo 19	0,7 h = 0,7·3600 s = 2520 s	Ejemplo 20	$0{,}7° = 0{,}7·3600'' = 2520''$
Ejemplo 21	18 000 s = 18 000:3600 h = 5 h	Ejemplo 22	$18\,000'' = 18\,000:60° = 5°$
Ejemplo 23	2700 s = 2700:3600 h = 0,75 h	Ejemplo 24	$2700'' = 2700:3600° = 0{,}75°$

Dificultad de las operaciones

Es evidente que es mucho más difícil trabajar con 60 que con 10; por ese motivo, cuando se proponen ejercicios para hacer a mano, se procura que sean sencillos.

Paso de forma compleja a forma incompleja

- ✱ Hay que convertir todas las medidas de la forma compleja a la unidad pedida y sumarlo los resultados obtenidos.
- ✱ Puede ser aconsejable hacer conversiones intermedias.
- ✱ Organiza con orden las operaciones, porque pueden ser muchas y es fácil perderse. Recuerda que normalmente hay que repasar las operaciones.

Ejemplos

Ejemplo 1. Expresa 3 h 13 min 12 s en minutos.

Este es uno de los casos más fáciles: convertimos las horas en minutos, los minutos no los tocamos, convertimos los segundos en minutos y sumamos todo:

3 h 13 min 12 s = 3·60 min + 13 min + 12:60 min = 180 min + 13 min + 0,2 min =
= 193,2 min. Solución: 193,2 min

Ejemplo 2. Expresa 3° 13′ 12″ en minutos sexagesimales.

Este es uno de los casos más fáciles: convertimos los grados en minutos, los minutos no los tocamos, convertimos los segundos en minutos y sumamos todo:

3° 13′ 12″ = 3·60′ + 13′ + 12:60′ = 180′ + 13′ + 0,2′ = 193,2′. Solución: 193,2′

Ejemplo 3. Expresa 14 h 2 min 13 s en segundos.

Aunque es posible convertir las 14 horas en segundos, los 2 minutos en segundos y sumar todo, suele ser más sencillo hacer conversiones intermedias.

Convertimos las horas en minutos y sumamos los minutos dados:

14 h = 14·60 min = 840 min; 840 min + 2 min = 842 min

Convertimos los minutos en segundos y sumamos los segundos dados:

842 min = 842·60 s = 50 520 s; 50 520 s + 13 s = 50 533 s

Solución: 50 533 s

Ejemplo 4. Expresa 14° 2′ 13″ en segundos sexagesimales.

Aunque es posible convertir los 14 grados en segundos, los 2 minutos en segundos y sumar todo, suele ser más sencillo hacer conversiones intermedias.

Convertimos los grados en minutos y sumamos los minutos dados:

14° = 14·60′ = 840′; 840′ + 2′ = 842′

Convertimos los minutos en segundos y sumamos los segundos dados:

842′ = 842·60″ = 50 520″; 50 520″ + 13″ = 50 533″

Solución: 50 533″

Ejemplo 5. Expresa 2 h 42 min 18 s en horas.

18 s = 18:60 min = 0,3 min; 42 min + 0,3 min = 42,3 min

42,3 min = 42,3:60 h = 0,705 h; 2 h + 0,705 h = 2,705 h

Solución: 2,705 h

Ejemplo 6. Expresa 2° 42′ 18″ en grados sexagesimales.

18″ = 18:60′ = 0,3′; 42′ + 0,3′ = 42,3′

42,3′ = 42,3:60° = 0,705°; 2° + 0,705° = 2,705°

Solución: 2,705°

Enunciados

① Expresa 7 h 51 min 45 s en minutos.

② Expresa 5° 33′ 36″ en minutos sexagesimales.

③ Expresa 6 h 53 min 44 s en segundos.

④ Expresa 5° 25′ 3″ en segundos sexagesimales.

⑤ Expresa 5 h 38 min 24 s en horas.

⑥ Expresa 9° 7′ 30″ en grados sexagesimales.

⑦ Expresa 3 h 11 min 12 s en minutos.

⑧ Expresa 8° 23′ 54″ en minutos sexagesimales.

⑨ Expresa 1 h 2 min 52 s en segundos.

⑩ Expresa 8° 5′ 43″ en segundos sexagesimales.

⑪ Expresa 5 h 36 s en horas.

⑫ Expresa 4° 3′ 36″ en grados sexagesimales.

⑬ Expresa 3 h 1 min 18 s en minutos.

⑭ Expresa 7° 15′ 15″ en minutos sexagesimales.

⑮ Expresa 4 h 2 min en segundos.

⑯ Expresa 7° 5′ en segundos sexagesimales.

⑰ Expresa 7 h 24 min en horas.

⑱ Expresa 3° 54′ en grados sexagesimales.

⑲ Expresa 28 min 12 s en minutos.

⑳ Expresa 15′ 6″ en minutos sexagesimales.

㉑ Expresa 8 min 51 s en segundos.

㉒ Expresa 5′ 43″ en segundos sexagesimales.

㉓ Expresa 8 h 27 min 18 s en horas.

㉔ Expresa 3° 36′ 36″ en grados sexagesimales.

㉕ Expresa 2 h 7 min 24 s en minutos.

㉖ Expresa 7° 55′ 34″ en segundos sexagesimales.

㉗ Expresa 4 h 7 min 30 s en horas.

Paso de forma incompleja a forma compleja

* La necesidad de este paso proviene de que habremos obtenido el resultado de un problema en forma incompleja, pero las soluciones finales en el sistema sexagesimal se suelen dar en forma compleja.
* Organiza con orden las operaciones, porque pueden ser muchas y es fácil perderse. Recuerda que normalmente hay que repasar las operaciones.

Ejemplos

Ejemplo 1. Expresa 5,235 h en horas, minutos y segundos.
Descomponemos el dato inicial en la parte entera y la parte decimal:
5,235 h = 5 h + 0,235 h. Reservamos las 5 h para la solución final.
Convertimos la parte decimal en minutos: 0,235 h = 0,235·60 min = 14,1 min
Descomponemos el resultado obtenido en la parte entera y la parte decimal:
14,1 min = 14 min + 0,1 min. Reservamos los 14 min para la solución final.
Convertimos la parte decimal en segundos: 0,1 min = 0,1·60 s = 6 s
Solución: 5 h 14 min 6 s

Ejemplo 2. Expresa 5,235° en grados, minutos y segundos sexagesimales.
Descomponemos el dato inicial en la parte entera y la parte decimal:
5,235° = 5° + 0,235°. Reservamos los 5° para la solución final.
Convertimos la parte decimal en minutos: 0,235° = 0,235·60′ = 14,1′
Descomponemos el resultado obtenido en la parte entera y la parte decimal:
14,1′ = 14′ + 0,1′. Reservamos los 14′ para la solución final.
Convertimos la parte decimal en segundos: 0,1′ = 0,1·60″ = 6″
Solución: 5° 14′ 6″

Ejemplo 3. Expresa 178,4 min en horas, minutos y segundos.
Descomponemos el dato inicial en la parte entera y la parte decimal:
178,4 min = 178 min + 0,4 min
La división entera de 178 entre 60 nos da de cociente 2 h y de resto 58 min
Convertimos la parte decimal en segundos: 0,4 min = 0,4·60 s = 24 s
Solución: 2 h 58 min 24 s

Ejemplo 4. Expresa 178,4′ en grados, minutos y segundos sexagesimales.
Descomponemos el dato inicial en la parte entera y la parte decimal:
178,4′ = 178′ + 0,4′
La división entera de 178 entre 60 nos da de cociente 2° y de resto 58′
Convertimos la parte decimal en segundos: 0,4′ = 0,4·60″ = 24″
Solución: 2° 58′ 24″

Ejemplo 5. Expresa 17 495″ en grados, minutos y segundos sexagesimales.
La división entera de 17 495 entre 60 nos da de cociente 291′ y de resto 35″
La división entera de 291 entre 60 nos da de cociente 4° y de resto 51′
Solución: 4° 51′ 35″

Enunciados

① Expresa 1,415 h en horas, minutos y segundos.

② Expresa 3,375° en grados, minutos y segundos sexagesimales.

③ Expresa 328,3 min en horas, minutos y segundos.

④ Expresa 572,75′ en grados, minutos y segundos sexagesimales.

⑤ Expresa 22 675 s en horas, minutos y segundos.

⑥ Expresa 32 460″ en grados, minutos y segundos sexagesimales.

⑦ Expresa 3,76 h en horas, minutos y segundos.

⑧ Expresa 9,13° en grados, minutos y segundos sexagesimales.

⑨ Expresa 504,25 min en horas, minutos y segundos.

⑩ Expresa 602,1′ en grados, minutos y segundos sexagesimales.

⑪ Expresa 16 009 s en horas, minutos y segundos.

⑫ Expresa 26 106″ en grados, minutos y segundos sexagesimales.

⑬ Expresa 6,0125 h en horas, minutos y segundos.

⑭ Expresa 2,9° en grados, minutos y segundos sexagesimales.

⑮ Expresa 556,4 min en horas, minutos y segundos.

⑯ Expresa 227,8′ en grados, minutos y segundos sexagesimales.

⑰ Expresa 10 578 s en horas, minutos y segundos.

⑱ Expresa 32 746″ en grados, minutos y segundos sexagesimales.

⑲ Expresa 15,23 h en horas, minutos y segundos.

⑳ Expresa 89,57° en grados, minutos y segundos sexagesimales.

㉑ Expresa 500,1 min en horas, minutos y segundos.

㉒ Expresa 772,85′ en grados, minutos y segundos sexagesimales.

㉓ Expresa 56 000 s en horas, minutos y segundos.

㉔ Expresa 15 008″ en grados, minutos y segundos sexagesimales.

㉕ Expresa 23,0025 h en horas, minutos y segundos.

㉖ Expresa 230,2 min en horas, minutos y segundos.

㉗ Expresa 25 111″ en grados, minutos y segundos sexagesimales.

Operaciones en forma incompleja

- ✱ Las operaciones en cualquier forma incompleja en el sistema sexagesimal son iguales que las operaciones en el sistema decimal.
- ✱ Simplemente, el resultado se obtiene en la misma unidad que los datos.
- ✱ Es la manera más cómoda de hacer operaciones con el sistema sexagesimal.

Ejemplo 1	$2{,}5\,\text{h} + 7{,}41\,\text{h} = 9{,}91\,\text{h}$	Usamos la hora como unidad
Ejemplo 2	$3{,}04° + 6{,}8° = 9{,}84°$	Usamos el grado sexagesimal como unidad
Ejemplo 3	$2{,}1\,\text{min} + 4{,}2\,\text{min} = 6{,}3\,\text{min}$	Usamos el minuto como unidad
Ejemplo 4	$17{,}34' + 23{,}15' = 40{,}49'$	Usamos el minuto sexagesimal como unidad
Ejemplo 5	$17{,}28\,\text{s} + 14{,}65\,\text{s} = 31{,}93\,\text{s}$	Usamos el segundo como unidad
Ejemplo 6	$19{,}25'' + 34{,}03'' = 53{,}28''$	Usamos el segundo sexagesimal como unidad
Ejemplo 7	$4 \cdot 7{,}33\,\text{h} = 29{,}32\,\text{h}$	Usamos la hora como unidad
Ejemplo 8	$7 \cdot 51{,}63' = 361{,}41'$	Usamos el minuto sexagesimal como unidad
Ejemplo 9	$305{,}41° : 5 = 61{,}082°$	Usamos el grado sexagesimal como unidad

Dificultades en la vida real

Aunque la manera aconsejada de realizar cálculos en el sistema sexagesimal sea elegir una unidad y hacer todas las operaciones con ella igual que si se tratara del sistema decimal, la vida real nos obliga a tener en cuenta dos cosas:

- ✱ Los datos suelen venir en forma compleja.
- ✱ Se espera que demos la solución en forma compleja.

Ejemplos

- ✱ Sería inusual decir «alguien ha realizado el maratón en 2,705 horas», porque lo común es decir «alguien ha realizado el maratón en 2 h 42 min 18 s».
- ✱ Para referirnos a la hora del día no se suele decir «quedamos a las 16,25 h», sino «quedamos a las 16:15». Por supuesto, coloquialmente diríamos «quedamos a las cuatro y cuarto», pero estamos haciendo ciencia y hay que aprender a trabajar con precisión.

Calculadoras científicas

Las calculadoras científicas incorporan varias funciones para ayudarnos con los cálculos en el sistema sexagesimal, pero no suelen manejar directamente todos los casos posibles, hay que saber manejarlas.

Ordenadores

No todos los programas y lenguajes de ordenador incorporan funciones de manejo del sistema sexagesimal, por lo que es muy habitual tener que programarlas uno mismo. Por eso, es muy importante que aprendas a hacer a mano las operaciones con este sistema.

Suma en forma compleja

Para sumar dos o más cantidades expresadas en horas (o grados sexagesimales), minutos y segundos se sigue este procedimiento:

Paso 1. Se suman las horas con las horas (o los grados con los grados).

Paso 2. Se suman los minutos con los minutos.

Paso 3. Se suman los segundos con los segundos.

Paso 4. Si se han obtenido más de 60 segundos, se convierten en minutos y segundos y se añaden los minutos a los minutos obtenidos al sumar.

Paso 5. Si se han obtenido más de 60 minutos, se convierten en horas (o grados) y minutos y se añaden las horas a las horas obtenidas al sumar.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula 4 h 38 min 41 s + 9 h 47 min 32 s + 29 min 50 s

Resolución

Pasos 1, 2 y 3. Sumamos:

```
        4     3 8     4 1
        9     4 7     3 2
+             2 9     5 0
     ---------------------
      1 3   1 1 4   1 2 3
```

Hemos obtenido 13 h 114 min 123 s, pero las cantidades de minutos y segundos deben ser menores de 60.

Paso 4. 123 s = 2 min 3 s; 114 min + 2 min = 116 min

Paso 5. 116 min = 1 h 56 min; 13 h + 1 h = 14 h

Solución: 14 h 56 min 3 s

Ejemplo 2

Enunciado: calcula 15° 51′ 36″ + 13° 52″ + 9° 13′ + 53′ 49″

Resolución

Pasos 1, 2 y 3. Sumamos:

```
      1 5     5 1     3 6
      1 3             5 2
        9     1 3
+             5 3     4 9
     ---------------------
      3 7   1 1 7   1 3 7
```

Hemos obtenido 37° 117′ 137″, pero las cantidades de minutos y segundos deben ser menores de 60.

Paso 4. 137″ = 2′ 17″; 117′ + 2′ = 119′

Paso 5. 119′ = 1° 59′; 37° + 1° = 38°

Solución: 38° 59′ 17″

Ejemplo 3

Enunciado: calcula 16 h 20 min 13 s + 10 h 4 min 41 s

Resolución

Ninguna suma de minutos o segundos excede de 60, así que la operación se puede hacer mentalmente:

Solución: 26 h 24 min 54 s

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da todos los resultados en forma compleja: horas (o grados sexagesimales), minutos y segundos.

① 7 h 31 min 28 s + 5 h 52 min 16 s

② $53° 23' 45'' + 11° 29' 32''$

③ 3 h 34 min 50 s + 5 h 41 min 13 s

④ $32° 6' 2'' + 29° 12' 13''$

⑤ 7 h 27 min 5 s + 8 h 48 min 29 s

⑥ $35° 36' 22'' + 76° 19' 47''$

⑦ 17 h 29 min 35 s + 12 h 30 min 43 s

⑧ $3° 13' 32'' + 7° 18' 7''$

⑨ 1 h 33 min 45 s + 2 h 53 min 32 s + 3 h 52 min 13 s

⑩ $43° 43' 23'' + 18° 35' 19'' + 22° 43' 38''$

⑪ 8 h 3 min 5 s + 9 h 5 min 3 s + 6 h 6 min 8 s

⑫ $3° 4' 56'' + 13° 5' 38'' + 27° 8' 49''$

⑬ 8 h 39 min 2 s + 17 h 43 min 18 s + 9 h 33 min 25 s

⑭ $45° 32' 41'' + 28° 41' 31'' + 12° 34' 47''$

⑮ 7 h 33 min + 9 h 53 s + 45 min 29 s

⑯ $54' 23'' + 72° 57'' + 37° 41'$

⑰ 7 h 21 min 33 s + 4 h 19 min 43 s + 9 h 19 min 34 s + 6 h 22 min 28 s

⑱ $35° 29' 23'' + 42° 46' 16'' + 11° 19' 17'' + 26° 25' 18''$

⑲ 2 h 29 min 17 s + 3 h 9 min 8 s + 10 h 32 min 53 s + 11 h 32 min 42 s

⑳ $22° 22' 31'' + 52° 8' 16'' + 19° 33' 44'' + 35° 27' 56''$

㉑ 10 h 5 s + 4 min 52 s + 5 h 39 s + 4 h 17 min 37 s

㉒ $31° 51'' + 39' 57'' + 42° 21' + 121° 13' 45''$

㉓ 7 h 13 min 35 s + 9 h 18 min 39 s + 6 h 11 min 33 s + 8 h 8 min 18 s

㉔ $41° 14' 44'' + 11° 54' 45'' + 32° 23' 53'' + 8° 18' 48''$

㉕ 1 h 56 min 53 s + 2 h 43 min 56 s + 7 h 53 min 49 s + 4 h 58 min 58 s

㉖ $17° 2' 5'' + 46° 13' 41'' + 5° 23' 24'' + 1° 56' 41'' + 3° 12' 43''$

Resta en forma compleja

Ya sabemos que los números pueden ser positivos, negativos o nulos y que restar consiste en sumar el número opuesto. Sin embargo, para aprender a restar en el sistema sexagesimal hay que empezar por el caso más natural: las dos cantidades son positivas y el minuendo es mayor que el sustraendo.

Para restar dos cantidades expresadas en horas (o grados sexagesimales), minutos y segundos se sigue este procedimiento:

Paso 1. Si hay menos minutos en el minuendo que en el sustraendo, se resta una hora (o un grado) a las horas (o los grados) del minuendo y se suman 60 minutos a los minutos del minuendo; es decir, se convierte una de las horas (o grados) del minuendo en minutos.

Paso 2. Si hay menos segundos en el minuendo que en el sustraendo, se resta un minuto del minuendo y se suman 60 segundos a los segundos del minuendo; es decir, se convierte uno de los minutos del minuendo en segundos.

Paso 3. Se restan las horas (o los grados) con las horas (o los grados).

Paso 4. Se restan los minutos con los minutos.

Paso 5. Se restan los segundos con los segundos.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula $31° \, 18' \, 22'' - 16° \, 42' \, 35''$

Resolución

Paso 1. Como $18' < 42'$, convertimos $31° \, 18' \, 22'' = 30° \, 78' \, 22''$

Paso 2. Como $22'' < 35''$, convertimos $30° \, 78' \, 22'' = 30° \, 77' \, 82''$

Pasos 3, 4 y 5. Restamos:

$$\begin{array}{rrrr} & 30 & 77 & 82 \\ - & 16 & 42 & 35 \\ \hline & 14 & 35 & 47 \end{array}$$

Solución: $14° \, 35' \, 47''$

Ejemplo 2

Enunciado: calcula 12 h 45 min 51 s − 2 h 56 min 57 s

Resolución

Paso 1. Como 45 min < 56 min, convertimos 12 h 45 min 51 s = 11 h 105 min 51 s

Paso 2. Como 51 s < 57 s, convertimos 11 h 105 min 51 s = 11 h 104 min 111 s

Pasos 3, 4 y 5. Restamos:

$$\begin{array}{rrrr} & 11 & 104 & 111 \\ - & 2 & 56 & 57 \\ \hline & 9 & 48 & 54 \end{array}$$

Solución: 9 h 48 min 54 s

Ejemplo 3

Enunciado: calcula 13 h 20 min 13 s − 10 h 4 min 8 s

Resolución

No hay que hacer ninguna conversión, así que la operación se puede hacer mentalmente:

Solución: 3 h 16 min 7 s

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da todos los resultados en forma compleja: horas (o grados sexagesimales), minutos y segundos.

① 17 h 25 min 42 s – 8 h 15 min 31 s

② 60° 40′ 34″ – 25° 17′ 22″

③ 22 h 18 min 5 s – 17 h 11 min 3 s

④ 140° 45′ 21″ – 78° 42′ 18″

⑤ 7 h 22 min 37 s – 2 h 35 min 23 s

⑥ 120° 43′ 52″ – 51° 48′ 37″

⑦ 19 h 25 min 36 s – 8 h 22 min 48 s

⑧ 67° 33′ 12″ – 43° 16′ 32″

⑨ 18 h 21 min 33 s – 11 h 34 min 50 s

⑩ 12° 34′ 5″ – 4° 42′ 27″

⑪ 23 h 5 min 8 s – 16 h 42 min 17 s

⑫ 67° 22′ 15″ – 31° 26′ 19″

⑬ 5 h 23 min 13 s – 3 h 30 min 40 s

⑭ 230° 12′ 34″ – 150° 36′ 44″

⑮ 5 h 13 min 38 s – 4 h 25 min 13 s

⑯ 72° 17′ 50″ – 17° 23′ 56″

⑰ 1 h 45 min 17 s – 50 min 22 s

⑱ 17° 2′ 34″ – 44′ 54″

⑲ 6 h 22 s – 2 h 31 min 34 s

⑳ 134° 50″ – 120° 42′ 56″

㉑ 17 h 22 min – 12 h 52 min 13 s

㉒ 67° 34′ – 51° 46′ 17″

㉓ 13 h 45 min 32 s – 4 h 45 min 18 s

㉔ 124° 55′ 45″ – 88° 55′ 26″

㉕ 3 h 43 min 16 s – 3 h 16 min 33 s

㉖ 18° 51′ 22″ – 18° 13′ 46″

Producto en forma compleja

Para multiplicar por un número una cantidad expresada en horas (o grados sexagesimales), minutos y segundos se sigue este procedimiento:

Paso 1. Se multiplica el número por las horas (o los grados).

Paso 2. Se multiplica el número por los minutos.

Paso 3. Se multiplica el número por los segundos.

Paso 4. Si se han obtenido más de 60 segundos, se convierten en minutos y segundos y se añaden los minutos a los minutos obtenidos al multiplicar.

Paso 5. Si se han obtenido más de 60 minutos, se convierten en horas (o grados) y minutos y se añaden las horas a las horas obtenidas al multiplicar.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula 6 · (3 h 27 min 18 s)

Resolución

Pasos 1, 2 y 3. Multiplicamos

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 27 & 18 \\ \times & & & 6 \\ \hline & 18 & 162 & 108 \end{array}$$

Hemos obtenido 18 h 162 min 108 s, pero las cantidades de minutos y segundos deben ser menores de 60.

Paso 4. 108 s = 1 min 48 s; 162 min + 1 min = 163 min

Paso 5. 163 min = 2 h 43 min; 18 h + 2 h = 20 h

Solución: 20 h 43 min 48 s

Ejemplo 2

Enunciado: calcula 7 · (14° 49′ 38″)

Resolución

Pasos 1, 2 y 3. Multiplicamos:

$$\begin{array}{rrrr} & 14 & 49 & 38 \\ \times & & & 7 \\ \hline & 98 & 343 & 266 \end{array}$$

Hemos obtenido 98° 343′ 266″, pero las cantidades de minutos y segundos deben ser menores de 60.

Paso 4. 266″ = 4′ 26″; 343′ + 4′ = 347′

Paso 5. 347′ = 5° 47′; 98° + 5° = 103°

Solución: 103° 47′ 26″

Ejemplo 3

Enunciado: calcula 2 · (16 h 20 min 13 s)

Resolución

Ningún resultado de minutos o segundos excede de 60, así que la operación se puede hacer mentalmente:

Solución: 32 h 40 min 26 s

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da todos los resultados en forma compleja: horas (o grados sexagesimales), minutos y segundos.

① $3 \cdot (4\,\text{h}\ 12\,\text{min}\ 19\,\text{s})$

② $4 \cdot (32°\ 13'\ 11'')$

③ $2 \cdot (7\,\text{h}\ 25\,\text{min}\ 33\,\text{s})$

④ $3 \cdot (13°\ 15'\ 29'')$

⑤ $5 \cdot (6\,\text{h}\ 13\,\text{min}\ 9\,\text{s})$

⑥ $6 \cdot (23°\ 12'\ 8'')$

⑦ $8 \cdot (3\,\text{h}\ 11\,\text{min}\ 8\,\text{s})$

⑧ $7 \cdot (20°\ 10'\ 13'')$

⑨ $5 \cdot (3\,\text{h}\ 22\,\text{min}\ 17\,\text{s})$

⑩ $4 \cdot (21°\ 31'\ 42'')$

⑪ $6 \cdot (4\,\text{h}\ 5\,\text{min})$

⑫ $5 \cdot (30°\ 11')$

⑬ $8 \cdot (4\,\text{h}\ 9\,\text{min})$

⑭ $9 \cdot (21°\ 9')$

⑮ $4 \cdot (8\,\text{h}\ 12\,\text{s})$

⑯ $6 \cdot (22°\ 9'')$

⑰ $3 \cdot (5\,\text{h}\ 31\,\text{s})$

⑱ $4 \cdot (25°\ 26'')$

⑲ $12 \cdot (4\,\text{min}\ 3\,\text{s})$

⑳ $11 \cdot (5'\ 4'')$

㉑ $6 \cdot (13\,\text{min}\ 14\,\text{s})$

㉒ $7 \cdot (10'\ 13'')$

㉓ $2 \cdot (3\,\text{h}\ 35\,\text{min}\ 42\,\text{s})$

㉔ $2 \cdot (25°\ 48'\ 52'')$

㉕ $7 \cdot (9\,\text{h}\ 48\,\text{min}\ 51\,\text{s})$

㉖ $8 \cdot (10°\ 36'\ 43'')$

Cociente en forma compleja

Para dividir una cantidad expresada en horas (o grados sexagesimales), minutos y segundos entre un número natural se sigue este procedimiento:

Paso 1. Se realiza la división entera de las horas (o los grados) entre el número.

Paso 2. El resto obtenido se multiplica por 60 para pasarlo a minutos.

Paso 3. Se suman los minutos obtenidos con los minutos de la cantidad.

Paso 4. Se realiza la división entera de los minutos entre el número.

Paso 5. El resto obtenido se multiplica por 60 para pasarlo a segundos.

Paso 6. Se suman los segundos obtenidos con los segundos de la cantidad.

Paso 7. Se realiza la división con decimales de los segundos entre el número, llegando hasta la precisión que sea necesaria.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula (20 h 26 min 6 s) : 3

Resolución

Paso 1. La división entera de 20 h entre 3 nos da cociente 6 h y resto 2 h

Paso 2. Convertimos 2 h = 2·60 min = 120 min

Paso 3. Sumamos todos los minutos: 120 min + 26 min = 146 min

Paso 4. La división entera de 146 min entre 3 nos da cociente 48 min y resto 2 min

Paso 5. Convertimos 2 min = 2·60 s = 120 s

Paso 6. Sumamos todos los segundos: 120 s + 6 s = 126 s

Paso 7. La división de 126 s entre 3 nos da exactamente 42 s

Solución: 6 h 48 min 42 s

Ejemplo 2

Enunciado: calcula (114° 43′ 51″) : 5

Resolución

Paso 1. La división entera de 114° entre 5 nos da cociente 22° y resto 4°

Paso 2. Convertimos 4° = 4·60′ = 240′

Paso 3. Sumamos todos los minutos: 240′ + 43′ = 283′

Paso 4. La división entera de 283′ entre 5 nos da cociente 56′ y resto 3′

Paso 5. Convertimos 3′ = 3·60″ = 180″

Paso 6. Sumamos todos los segundos: 180″ + 51″ = 231″

Paso 7. La división de 231″ entre 5 nos da exactamente 46,2″

Solución: 22° 56′ 46,2″

Observación: la subdivisión de los segundos se realiza según el sistema decimal.

Ejemplo 3

Enunciado: calcula (21 h 42 min 14 s) : 7

Resolución

Todas las divisiones son exactas, así que la operación se puede hacer mentalmente:

Solución: 3 h 6 min 2 s

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da todos los resultados en forma compleja: horas (o grados sexagesimales), minutos y segundos (con decimales si es necesario).

① (12 h 40 min 32 s) : 2

② (210° 24′ 15″) : 3

③ (15 h 26 min 5 s) : 5

④ (36° 7′ 18″) : 6

⑤ (23 h 45 min 8 s) : 4

⑥ (25° 32′ 16″) : 8

⑦ (15 h 5 s) : 7

⑧ (22° 19″) : 7

⑨ (19 min 21 s) : 9

⑩ (23′ 17″) : 11

⑪ 19 h : 6

⑫ 25° : 4

⑬ 33 h : 8

⑭ 17° : 16

⑮ (1 h 3 min 5 s) : 10

⑯ (15° 1′ 6″) : 15

⑰ (7 h 11 min 18 s) : 2

⑱ (9° 51′ 44″) : 2

⑲ (11 h 11 min 13 s) : 0

⑳ (30° 49′ 53″) : 2

㉑ (31 h 4 min 39 s) : 3

㉒ (37° 5′ 42″) : 3

㉓ (2 h 4 min 6 s) : 5

㉔ (4° 8′ 14″) : 5

㉕ (28 h 17 min 35 s) : 13

㉖ (28° 17′ 44″) : 17

Cálculo del ángulo complementario

Como el ángulo complementario a otro ángulo se calcula restando 90° menos el ángulo dado, hay que tener en cuenta si la expresión del ángulo tiene minutos o segundos para preparar correctamente la resta.

✱ Si el ángulo α tiene en su expresión minutos pero no segundos, para calcular $90° - \alpha$ haremos la operación $89°\,60' - \alpha$.

✱ Si el ángulo α tiene en su expresión segundos, para calcular $90° - \alpha$ haremos la operación $89°\,59'\,60'' - \alpha$.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula el ángulo complementario de $27°\,32'$

Resolución

$$\begin{array}{rrr} & 90 & \\ - & 27 & 32 \\ \hline & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rrr} & 89 & 60 \\ - & 27 & 32 \\ \hline & 62 & 28 \end{array}$$

Solución: $62°\,28'$

Ejemplo 2

Enunciado: calcula el ángulo complementario de $71°\,45'\,39''$

Resolución

$$\begin{array}{rrrr} & 90 & & \\ - & 71 & 45 & 39 \\ \hline & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rrrr} & 89 & 59 & 60 \\ - & 71 & 45 & 39 \\ \hline & 18 & 14 & 21 \end{array}$$

Solución: $18°\,14'\,21''$

Cálculo del ángulo suplementario

Como el ángulo suplementario a otro ángulo se calcula restando 180° menos el ángulo dado, hay que tener en cuenta si la expresión del ángulo tiene minutos o segundos para preparar correctamente la resta.

✱ Si el ángulo α tiene en su expresión minutos pero no segundos, para calcular $180° - \alpha$ haremos la operación $179°\,60' - \alpha$.

✱ Si el ángulo α tiene en su expresión segundos, para calcular $180° - \alpha$ haremos la operación $179°\,59'\,60'' - \alpha$.

Ejemplo 3

Enunciado: calcula el ángulo suplementario de $102°\,51'$

Resolución

$$\begin{array}{rrr} & 180 & \\ - & 102 & 51 \\ \hline & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rrr} & 179 & 60 \\ - & 102 & 51 \\ \hline & 077 & 09 \end{array}$$

Solución: $77°\,9'$

Ejemplo 4

Enunciado: calcula el ángulo suplementario de $44°\,6'\,17''$

Resolución

$$\begin{array}{rrrr} & 180 & & \\ - & 44 & 6 & 17 \\ \hline & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rrrr} & 179 & 59 & 60 \\ - & 44 & 6 & 17 \\ \hline & 135 & 53 & 43 \end{array}$$

Solución: $135°\,53'\,43''$

Enunciados

① Calcula el ángulo complementario de 46° 27′

② Calcula el ángulo complementario de 21° 33′ 16″

③ Calcula el ángulo suplementario de 163° 14′

④ Calcula el ángulo suplementario de 128° 39′ 17″

⑤ Calcula el ángulo complementario de 28° 9′

⑥ Calcula el ángulo complementario de 31° 6′ 3″

⑦ Calcula el ángulo suplementario de 48° 5′

⑧ Calcula el ángulo suplementario de 65° 7′ 2″

⑨ Calcula el ángulo complementario de 37° 41′

⑩ Calcula el ángulo complementario de 13° 47″

⑪ Calcula el ángulo suplementario de 173° 22′

⑫ Calcula el ángulo suplementario de 142° 51″

⑬ Calcula el ángulo complementario de 7° 34′

⑭ Calcula el ángulo complementario de 6° 32′ 49″

⑮ Calcula el ángulo suplementario de 8° 18′

⑯ Calcula el ángulo suplementario de 3° 57′ 58″

⑰ Calcula el ángulo complementario de 50° 40′

⑱ Calcula el ángulo complementario de 45° 2′ 57″

⑲ Calcula el ángulo suplementario de 90° 37′

⑳ Calcula el ángulo suplementario de 100° 13″

㉑ Calcula el ángulo complementario de 18° 12′

㉒ Calcula el ángulo complementario de 15° 35″

㉓ Calcula el ángulo suplementario de 99° 52′

㉔ Calcula el ángulo suplementario de 155° 54′ 46″

㉕ Calcula el ángulo complementario de 3° 3″

㉖ Calcula el ángulo complementario de 2° 2′ 2″

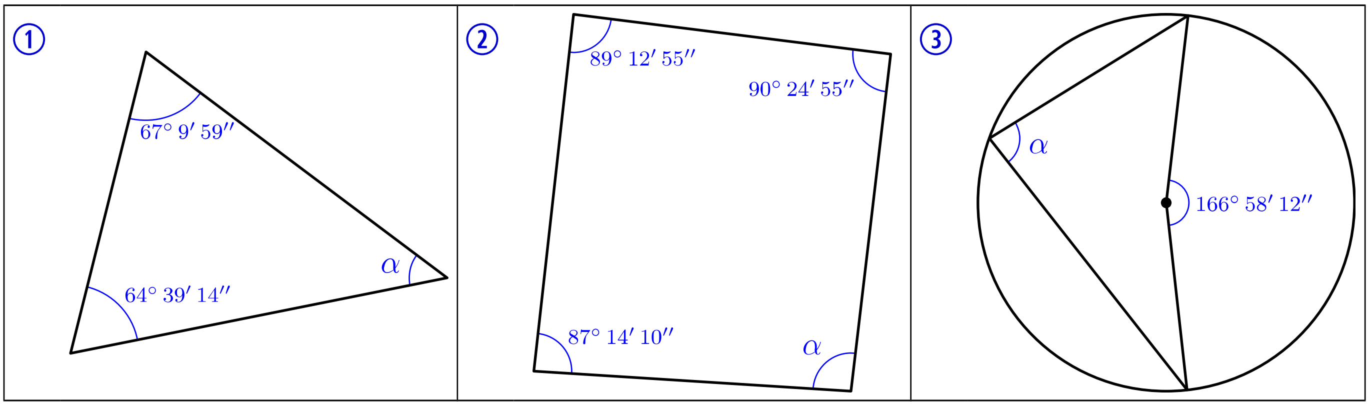
㉗ Calcula el ángulo suplementario de 2′ 2″

Sistema sexagesimal en ejercicios y problemas

No hay diferencias respecto a cómo pensar ejercicios y problemas cuando hay que usar el sistema sexagesimal, lo importante sigue siendo averiguar el método de resolución; solo cambia el modo de hacer las operaciones.

Enunciados

Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras:



Resolución 1

La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°, luego

α = 180° – (67° 9′ 59″ + 64° 39′ 14″) = 180° – 131° 49′ 13″ = 48° 10′ 47″

	67	9	59
+	64	39	14
	131	48	73

	179	59	60
–	131	49	13
	048	10	47

Solución: α = 48° 10′ 47″

Resolución 2

La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero es 360°, luego

α = 360° – (89° 12′ 55″ + 90° 24′ 55″ + 87° 14′ 10″) = 360° – 266° 52′ = 93° 8′

	89	12	55
	90	24	55
+	87	14	10
	266	50	120

	359	60
–	266	52
	093	08

Solución: α = 93° 8′ 0″

Observación: como los datos iniciales van con precisión de segundos, damos la solución también con precisión de segundos, aunque sean 0.

Resolución 3

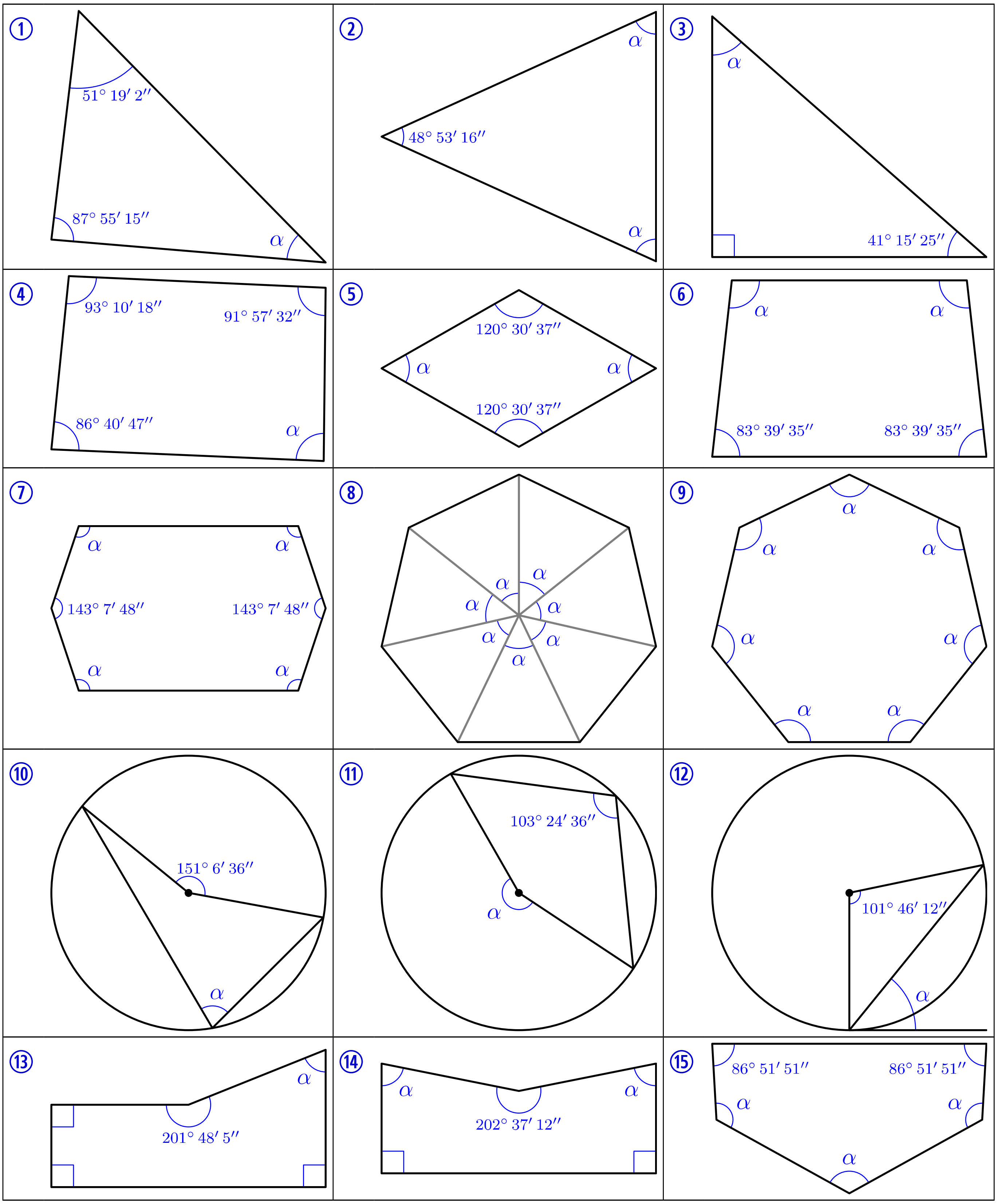
La amplitud de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del ángulo central correspondiente, luego

α = 166° 58′ 12″ : 2 = 83° 39′ 6″

Solución: α = 83° 39′ 6″

Enunciados

Calcula el valor del ángulo α en cada una de las siguientes figuras. Da todos los resultados en grados, minutos y segundos sexagesimales. Los resultados que no sean exactos debes darlos redondeando los segundos a la unidad.



International Organization for Standardization

- La Organización Internacional para la Estandarización se conoce por sus siglas en inglés: ISO.
- Es una organización independiente y no gubernamental a la que están afiliadas 156 agencias nacionales de estandarización.
- Es la organización más importante del mundo en la definición de estándares en las distintas áreas de las necesidades humanas.

Norma ISO 8601

- Es la norma ISO que define cómo escribir fechas y horas de un modo que sea universalmente comprendido.
- Intenta resolver el problema de que hay muchas maneras de representar las fechas y las horas.
- Se publicó en 1988.

Ejemplo

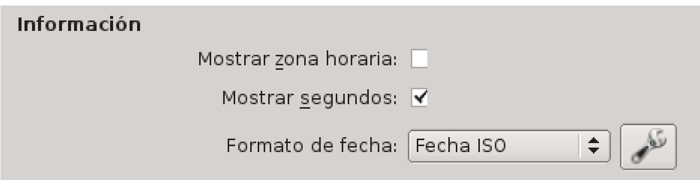
La fecha «27 de septiembre de 2012» se dice en inglés «September 27, 2012» y se puede escribir en diferentes idiomas como «27.12.2012» o «12/27/2012». Pues bien, siguiendo la norma ISO 8601 se escribe así: «2012-09-27». Esto evita cualquier ambigüedad y permite entender correctamente la fecha a todo el mundo. Como ventaja añadida, facilita la manipulación informática de las fechas.

Norma ISO 8601 para la hora del día

- Hay varias maneras de escribir la hora del día según este estándar, pero solo vamos a ver la que es más sencilla para este curso.
- La hora se escribe con formato HH:MM:SS; es decir: dos dígitos para la hora, dos puntos, dos dígitos para los minutos, dos puntos y dos dígitos para los segundos.
- Como siempre hay que escribir dos dígitos, será necesario comenzar por 0 cuando el número en cuestión sea menor de 10.
- Ejemplo 1: las 3 horas 14 minutos 8 segundos se escribe «03:14:08».
- Las horas siempre van de 0 a 24 (nunca de 0 a 12).
- Ejemplo 2: las 8 horas 13 segundos de la tarde se escribe «20:00:13».
- El día comienza a las 00:00:00 y acaba a las 24:00:00, que son también las 00:00:00 del día siguiente.
- Se permite omitir los segundos, aunque así la precisión es menor.
- Ejemplo 3: las 10 horas 6 minutos se escribe «10:06».

Configuración de ordenadores

Es perfectamente posible configurar los ordenadores para que muestren la fecha y la hora en formato ISO:



Operaciones con la hora del día

Conocer cómo operar con expresiones en el sistema sexagesimal permite realizar cálculos necesarios casi diariamente con la hora del día.

Ejemplo 1

Enunciado: un partido de tenis empieza a las 15:12 y dura 2 h 53 min. Calcula a qué hora acaba el partido.

Resolución

Hay que sumar la hora de comienzo (que está en horas y minutos) y la duración del partido (que está también en horas y minutos)

$$\begin{array}{rrr} & 15 & 12 \\ + & 2 & 53 \\ \hline & 17 & 65 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rr} 18 & 05 \end{array}$$

Solución: 18:05

Ejemplo 2

Enunciado: se realiza un lanzamiento de un satélite artificial a las 21:52:44 y el procedimiento completo dura 1 h 9 min 25 s. ¿A qué hora se espera que esté operativo el satélite?

Resolución

Hay que sumar la hora de comienzo (que está en horas, minutos y segundos) y la duración del partido (que está también en horas, minutos y segundos).

$$\begin{array}{rrrr} & 21 & 52 & 44 \\ + & 1 & 9 & 25 \\ \hline & 22 & 61 & 69 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} 23 & 02 & 09 \end{array}$$

Solución: 23:02:09

Ejemplo 3

Enunciado: una persona decide averiguar cuánto tarda en realizar una tarea. Anota que comienza a las 10:42 y acaba a las 13:35. ¿Cuánto tiempo tarda?

Resolución

Hay que restar la hora de finalización menos la de comienzo, que están en horas y minutos, de modo que obtenderemos la duración en horas y minutos.

$$\begin{array}{rrrcrrr} & 13 & 35 & \rightarrow & & 12 & 95 \\ - & 10 & 42 & \rightarrow & - & 10 & 42 \\ \cline{1-3}\cline{5-7} & & & \rightarrow & & 02 & 53 \end{array}$$

Solución: 2 h 53 min

Ejemplo 4

Enunciado: un vuelo despega a las 15:41:23 y aterriza a las 17:18:09. ¿Cuánto tiempo dura el vuelo?

Resolución

Hay que restar la hora de aterrizaje menos la de despegue, ambas en horas, minutos y segundos, así que obtenderemos la duración en horas, minutos y segundos.

$$\begin{array}{rrrrcrrrr} & 17 & 18 & 09 & \rightarrow & & 16 & 77 & 69 \\ - & 15 & 41 & 23 & \rightarrow & - & 15 & 41 & 23 \\ \cline{1-4}\cline{6-9} & & & & \rightarrow & & 1 & 36 & 46 \end{array}$$

Solución: 1 h 36 min 46 s

Enunciados

① Salgo de casa a las 17:45 y paseo durante 2 h 27 min. ¿A qué hora vuelvo a casa?

② Un experimento químico comienza a las 09:33:46 y dura 11 h 56 min 17 s. ¿A qué hora acaba el experimento?

③ Entro en una fiesta a las 18:42 y salgo a las 21:09. ¿Cuánto tiempo he estado en la fiesta?

④ Un dron comienza a volar a las 08:34:39 y aterriza a las 10:02:13. ¿Cuánto tiempo ha estado volando?

⑤ Un examen empieza a las 09:20 y durará 1 h 45 min. ¿A qué hora acabará?

⑥ Una persona realiza una carrera de montaña. Pasa por la línea de salida a las 07:02:55 y tarda en completar la carrera 5 h 58 min 33 s. ¿A qué hora pasa por la línea de meta?

⑦ Si sales de casa para dar un paseo a las 21:35 y vuelves a las 23:08, ¿cuánto tiempo has estado paseando?

⑧ Un ordenador de alto rendimiento comienza la ejecución de un programa a las 01:48:45 y termina a las 22:03:17. ¿Cuánto tiempo ha estado ejecutando el programa?

⑨ Si paseo durante 3 h 32 min y vuelvo a casa a las 10:17, ¿a qué hora comencé el paseo?

⑩ Un experimento físico dura 8 h 54 s y acaba a las 10:04:00, ¿a qué hora comenzó?

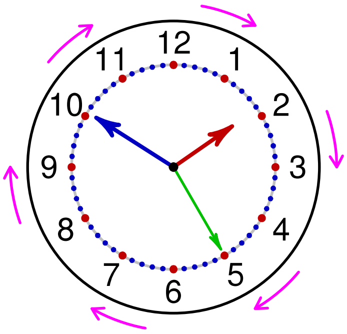
⑪ Cada día de la semana leo un rato, de 22:15 a 23:42. En una semana, ¿cuánto tiempo he estado leyendo en total?

⑫ Un coche de pruebas da cuatro vueltas a un circuito a velocidad constante. Comienza a las 12:24:57 y acaba a las 13:04:09. Calcula cuánto tiempo ha tardado en cada vuelta.

⑬ El decatlón es una prueba atlética que comprende diez pruebas diferentes y que se desarrolla en dos días (cinco pruebas cada día). El primer día de competición una persona sale a la pista a las 07:22 y regresa al vestuario a las 22:08; el segundo día sale a las 07:15 y regresa a las 21:48. Calcula cuánto tiempo en total ha estado en la pista.

Nota: la atleta letona Austra Skujyte (foto de la izquierda) y el atleta francés Kevin Meyer (foto de la derecha) ostentaban el récord del mundo de decatlón en julio de 2021 en las categorías femenina y masculina, respectivamente.

Relojes analógicos

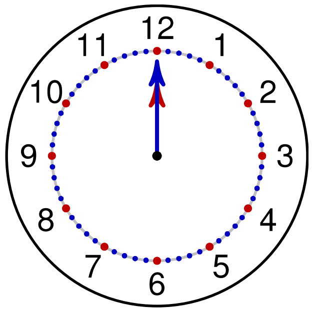
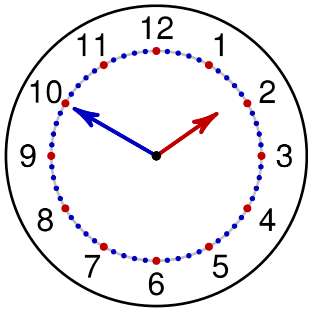
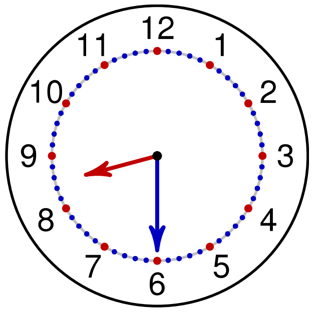
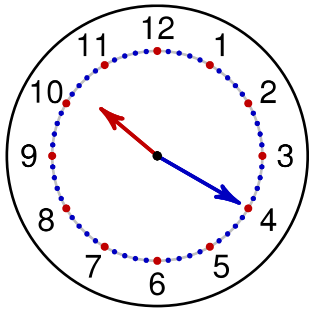


Son los relojes que dan la hora según la posición de unas agujas o manillas que giran en un círculo, casi siempre con marcas para indicar las horas, minutos o segundos. A la derecha se ve un ejemplo:

* Las horas están numeradas de 1 a 12, que es lo más habitual (con mucha diferencia). Están señaladas también con un punto rojo.
* La manilla de las horas es la roja, la más corta.
* Los minutos están señalados con puntos azules, aunque los puntos rojos también sirven como marcas de minutos.
* La manilla de los minutos (el minutero) es la azul, la mediana.
* La manilla de los segundos (el segundero) es la verde, la más larga. Algunos relojes no la incorporan.
* Las tres manillas giran siempre en el sentido indicado por las flechas que hemos representado en el exterior. Este es, por definición, «el sentido de giro de las agujas de un reloj» (en inglés, *clockwise*).
* Para hacer problemas de matemáticas siempre se considera que las manillas giran constantemente (cada una a su velocidad), es decir, que no dan saltos de una posición a otra.

Ejemplos

Los relojes analógicos de 12 horas tienen la dificultad de que señalan de la misma manera dos horas distintas del día. Vemos unos ejemplos, en relojes sin segundero:

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
			
00:00 y 12:00	01:50 y 13:50	08:30 y 20:30	10:20 y 22:20

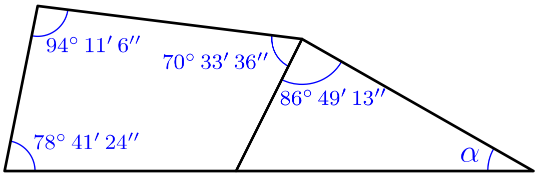
Relojes analógicos de 24 horas

Aunque son mucho menos habituales que los de 12 horas, también existen relojes analógicos de 24, como el que se ve en la ilustración. Comúnmente tienen estas características:

* Las horas están numeradas o marcadas de 1 a 24.
* La manilla de las horas da una vuelta completa en 24 horas.
* La manilla de los minutos da una vuelta completa en una hora.
* La manilla de los segundos da una vuelta completa en un minuto.

Enunciados

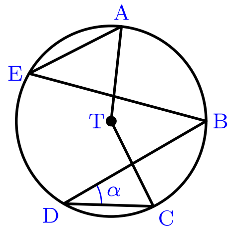
① Calcula el valor del ángulo α en la siguiente figura:



② Un experimento químico comienza a las 22:15:50 y dura 13 h 22 min 47 s. ¿A qué hora del día siguiente acaba el experimento?

③ Un experimento químico dura 9 h 31 min 54 s y termina a las 06:22:33. ¿A qué hora del día anterior empezó?

④ Calcula el valor del ángulo α en la figura de la derecha, conociendo estos datos:

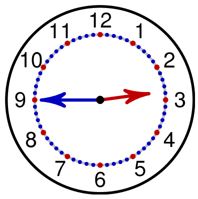


- ∠(AEB) = 41° 51′ 18″
- ∠(ATC) = 147° 13′ 12″

⑤ El protocolo NTP (*Network Time Protocol*) permite que los ordenadores se pongan en hora automáticamente. Parte del sistema consiste en relojes de muy elevada precisión que envían por internet la hora correcta al aparato que lo solicite (los servidores NTP). Algunos programas en el ordenador detectan cuánto se alejan de la hora correcta para corregir la propia.

Un ordenador está en hora a las 00:00:00 de cierto día y exactamente 25 días después consulta con un servidor NTP y este le informa de que se ha adelantado 1 min 40 s. Calcula cuánto tiempo se adelanta cada día el ordenador.

⑥ Se dispone de un reloj analógico de 12 horas.



a) ¿Qué ángulo gira la manilla de las horas cada hora?

b) ¿Qué ángulo gira la manilla de las horas cada minuto?

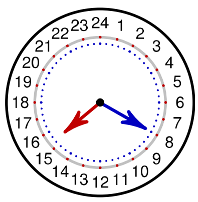
c) ¿Qué ángulo gira la manilla de los minutos cada minuto?

d) ¿Cuál es el menor de los ángulos que determinan las manillas a las 05:00?

e) ¿Cuál es el menor de los ángulos que determinan las manillas a las 14:45?

f) ¿Cuál es el mayor de los ángulos que determinan las manillas a las 15:20?

⑦ Se dispone de un reloj analógico de 24 horas.



a) ¿Qué ángulo gira la manilla de las horas cada hora?

b) ¿Qué ángulo gira la manilla de las horas cada minuto?

c) ¿Qué ángulo gira la manilla de los minutos cada minuto?

d) ¿Cuál es el menor de los ángulos que determinan las manillas a las 05:00?

e) ¿Cuál es el menor de los ángulos que determinan las manillas a las 14:45?

f) ¿Cuál es el mayor de los ángulos que determinan las manillas a las 15:20?

Operación combinada

Una operación combinada es la que tiene dos o más operaciones simples.

Jerarquía de operaciones

La jerarquía de operaciones con fracciones es la misma que con números enteros:

1. Paréntesis, comenzando por los interiores.
2. Potencias.
3. Productos y cocientes, comenzando por la izquierda.
4. Sumas y restas, comenzando por la izquierda.

Importancia de las simplificaciones

Recuerda que las simplificaciones son muy importantes en el cálculo con fracciones. En general, conviene simplificar lo antes posible para conseguir que las operaciones resulten más sencillas.

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{21}$ ② $14\cdot\left(\frac{15}{35}\right)^2$ ③ $\left(\frac{1}{5}-1\right):\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{3}\right)$

Resoluciones

① Hay que hacer primero los dos productos y luego la suma:

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{21} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} = \frac{5}{14}+\frac{1}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

En el primer paso hemos simplificado los dos productos, el primero entre 2 y el segundo entre 3. En el segundo paso hemos completado los productos. En el tercer paso hemos calculado la suma. En el cuarto paso hemos simplificado entre 2.

② Hay que hacer primero la potencia y luego el producto:

$$14\cdot\left(\frac{15}{35}\right)^2 = 14\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2 = 14\cdot\frac{9}{49} = 2\cdot\frac{9}{7} = \frac{18}{7}$$

En el primer paso hemos simplificado entre 5 la fracción base de la potencia. En el segundo paso hemos calculado la potencia. En el tercer paso hemos simplificado entre 7. En el cuarto paso hemos completado el producto.

③ Hay que hacer primero los paréntesis y luego la división:

$$\left(\frac{1}{5}-1\right):\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{5}\right):\frac{1+5}{15} = -\frac{4}{5}:\frac{6}{15} = -\frac{4}{5}:\frac{2}{5} = -\frac{4\cdot 5}{5\cdot 2} = -2$$

En el primer paso hemos calculado directamente la primera suma y hemos comenzado la segunda. En el segundo paso hemos eliminado el paréntesis y completado la segunda suma. En el tercer paso hemos simplificado el divisor entre 3. En el cuarto paso hemos aplicado la regla del cociente. En el quinto paso hemos simplificado los cincos entre sí y hemos simplificado entre 2.

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{11}{2}$

② $9\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$

③ $2-\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3}$

④ $\left(1-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{7}{35}$

⑤ $\frac{8}{5}\cdot\frac{25}{16}+\frac{2}{3}-2$

⑥ $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot 12$

⑦ $\frac{1}{2}-\frac{21}{22}\cdot\frac{11}{3}$

⑧ $\left(\frac{12}{11}:3\right):\frac{16}{33}$

⑨ $\left(1-\frac{1}{4}\right):\left(2-\frac{3}{5}\right)$

⑩ $\left(3+\frac{2}{3}\right):\left(1+\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{5}{16}$

⑪ $12\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)$

⑫ $\left(3:\frac{11}{12}\right)\cdot\frac{8}{12}$

⑬ $\frac{3}{5}-\frac{3}{14}\cdot\frac{7}{9}$

⑭ $\frac{8}{2}\cdot\frac{14}{7}\cdot\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\right)$

⑮ $\frac{8}{12}-\frac{3}{5}\cdot\frac{25}{9}-1$

⑯ $5\cdot\left(\frac{4}{15}+\frac{1}{5}\right):\left(3+\frac{5}{3}\right)$

⑰ $\left(3-\frac{7}{5}\right)^2\cdot\left(3-\frac{1}{2}\right)^3$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $8\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{5}{12}\right)$

② $2+\frac{3}{11}:\frac{9}{22}$

③ $\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)$

④ $\frac{6}{8}+\frac{12}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}$

⑤ $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2+1\right):\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)$

⑥ $\left(3-\frac{2}{5}\right):\left(\frac{3}{5}-2\right)$

⑦ $\left(1-\frac{2}{3}\right):\left(2+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{16}{5}$

⑧ $\frac{3}{8}+\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{2}$

⑨ $\frac{45}{49}\cdot\frac{7}{45}-2:\frac{1}{3}$

⑩ $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{3}{14}\right)$

⑪ $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right):2$

⑫ $\left(\frac{77}{55}\right)^2+\frac{1}{25}$

⑬ $\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2$

⑭ $\frac{4}{6}-\frac{3}{5}\cdot\frac{25}{9}+1$

⑮ $\frac{4}{6}-\frac{12}{5}\cdot\frac{25}{9}+2$

⑯ $\left(2+\frac{1}{3}\right):\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$

⑰ $\left(\left(\frac{10}{15}\right)^3+1\right):\left(\frac{2}{54}-\frac{8}{36}\right)$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\left(\frac{8}{14}+\frac{9}{21}\right)^5-\frac{5}{3}$

② $\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{8}{3}$

③ $\left(\frac{3}{7}+\frac{19}{21}\right):\left(\frac{16}{18}-\frac{23}{9}\right)$

④ $\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{29}{28}\right)$

⑤ $\left(1+\frac{1}{5}\right)^2:\left(\frac{1}{4}+\frac{19}{20}\right)$

⑥ $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$

⑦ $\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(\frac{14}{22}+\frac{24}{33}\right)$

⑧ $\left(\frac{2}{7}\right)^2:\left(\frac{1}{14}\right)^2$

⑨ $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}+6\right)$

⑩ $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2$

⑪ $\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{3}-\frac{8}{35}:\frac{1}{7}$

⑫ $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{3}{8}\right):9$

⑬ $\left(\frac{2}{15}+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{11}{4}+\frac{3}{8}\right)$

⑭ $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{18}$

⑮ $\frac{15}{8}\cdot\frac{4}{5}-\frac{39}{28}:\frac{3}{2}$

⑯ $\left(\frac{2}{5}+\frac{44}{15}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)$

⑰ $\frac{1}{10}+\left(\frac{4}{5}\right)^2-\frac{3}{50}$

Eliminación de paréntesis

Cuando se calculan expresiones combinadas, en algunos casos se puede ahorrar tiempo si se elimina algún paréntesis en vez de aplicar directamente la jerarquía de operaciones.

Reglas para eliminar paréntesis

La única regla que realmente se aplica es la **propiedad distributiva**, aunque es más fácil en la práctica distinguir tres casos:

- ✱ Si un paréntesis únicamente tiene un signo más («+») delante, se puede eliminar sin más (es como si estuviera multiplicado por «1»).
- ✱ Si un paréntesis solo tiene un signo menos («–») delante, para eliminarlo hay que cambiar el signo a todos los sumandos que contenga (es como si estuviera multiplicado por «–1»).
- ✱ Si un paréntesis tiene un número delante, para eliminarlo hay que multiplicar el número por todos los sumandos que contenga.

Ejemplos

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\right)$

② $3\cdot\left(\frac{11}{6}+\frac{1}{2}\right)-5\cdot\left(\frac{11}{10}-\frac{3}{2}\right)$

Resolución 1

Primer método: aplicando la jerarquía de operaciones.

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\right) = \frac{15+14}{35}-\frac{9+7}{21} = \frac{29}{35}-\frac{16}{21} = \frac{3\cdot 29-5\cdot 16}{105} = \frac{7}{105} = \frac{1}{15}$$

Segundo método: eliminando primero los paréntesis con las reglas.

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{7}+\frac{2}{5}-\frac{3}{7}-\frac{1}{3} = \frac{2}{5}-\frac{1}{3} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15}$$

Comentario: vemos en el enunciado que en cada paréntesis está la fracción $3/7$, pero como los paréntesis tienen signos distintos, se podrían simplificar las dos apariciones si se eliminan los paréntesis.

Resolución 2

Primer método: aplicando la jerarquía de operaciones.

$$3\cdot\left(\frac{11}{6}+\frac{1}{2}\right)-5\cdot\left(\frac{11}{10}-\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\frac{11+3}{6}-5\cdot\frac{11-2}{10} = \frac{14}{2}-\frac{9}{2} = 7+2=9$$

Segundo método: eliminando primero los paréntesis con las reglas.

$$3\cdot\left(\frac{11}{6}+\frac{1}{2}\right)-5\cdot\left(\frac{11}{10}-\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\frac{11}{6}+3\cdot\frac{1}{2}-5\cdot\frac{11}{10}+5\cdot\frac{3}{2} = \frac{11}{2}+\frac{3}{2}-\frac{11}{2}+\frac{15}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Comentario: al eliminar los paréntesis se ha conseguido que todas las fracciones resultantes tengan el mismo denominador y se han podido simplificar los cálculos.

Conclusión

Cualquiera de los dos métodos lleva al mismo resultado final, de modo que ambos son correctos; pero siempre es preferible usar el más sencillo. Tendrás que decidir tú en cada caso qué método vas a aplicar, piénsalo antes de empezar.

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\left(\frac{19}{21}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{19}{21}+\frac{1}{4}\right)$

② $13\cdot\left(\frac{2}{13}+\frac{1}{5}\right)-17\cdot\left(\frac{2}{17}-\frac{1}{5}\right)$

③ $\left(\frac{17}{33}+\frac{15}{11}\right)-\left(\frac{17}{33}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{15}{11}-\frac{3}{4}\right)$

④ $7\cdot\left(\frac{5}{14}+\frac{4}{21}\right)+5\cdot\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{15}\right)$

⑤ $-\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(3+\frac{5}{6}\right)$

⑥ $\frac{3}{5}+\frac{35}{36}\cdot\frac{6}{7}-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\right)$

⑦ $2-\left(\frac{7}{5}+\frac{14}{15}\right)$

⑧ $\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{6}\right)-\left(\frac{4}{5}+\frac{27}{35}\right)$

⑨ $\left(3+\frac{27}{35}\right)-\left(\frac{4}{5}+\frac{27}{35}\right)$

⑩ $3\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)-5\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{10}{9}\right)$

⑪ $3\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+31\cdot\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{31}\right)$

⑫ $\left(\frac{7}{53}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{7}{53}+\frac{15}{17}\right)-\left(-\frac{1}{14}-\frac{15}{17}\right)$

⑬ $7\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{35}\right)-\left(\frac{71}{22}+\frac{4}{5}\right)$

⑭ $\frac{125}{27}-\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3+4\right)$

⑮ $11\cdot\left(\frac{3}{22}+\frac{4}{55}\right)+13\cdot\left(\frac{2}{13}-\frac{3}{26}\right)$

⑯ $7\cdot\left(\frac{5}{14}-\frac{3}{2}\right)+4\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\right)$

Potencia con exponente entero de una fracción

Para dar un sentido correcto a las potencias con exponente entero de una fracción hay que tener en cuenta varias cosas:

- ✱ Las potencias con exponente natural de una fracción ya tienen unas propiedades importantes que están demostradas.
- ✱ La definición de potencia con exponente entero debe dar el mismo resultado que la definición de potencia con exponente natural para los casos en que se puedan aplicar las dos.
- ✱ Hay definir la potencia con exponente entero de manera que las propiedades de la potencia con exponente natural sigan siendo válidas.

Por tanto, vamos a definir las potencias con exponente 0 y con exponente negativo inspirándonos en las propiedades de las potencias.

Como todos los números enteros son también fracciones, las nuevas definiciones de potencia también serán aplicables cuando la base sea un número entero.

Potencia con exponente 0 de una fracción

Recordamos que el cociente de potencias de la misma base se puede escribir como una potencia de la misma base y con el exponente la diferencia de exponentes; simbólicamente, $a^m : a^n = a^{m-n}$ (donde «a» representa cualquier fracción).

Si dividimos dos potencias exactamente iguales, el resultado deber ser 1, como en cualquier otra división en la que el numerador y el denominador sean iguales; simbólicamente, $a^n : a^n = 1$ (donde «a» representa cualquier fracción).

Por tanto, la expresión $a^n : a^n$ debería poder calcularse de dos maneras:

Primera manera → $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$; segunda manera → $a^n : a^n = 1$

Llegamos a la conclusión de que hay que **definir** $a^0 = 1$.

Potencia con exponente negativo de una fracción

Para entender la definición es más fácil comenzar por un ejemplo: supongamos que «a» representa una fracción cualquiera y vamos a trabajar con la expresión $a^3 : a^5$.

Por un lado, aplicando la propiedad del cociente de potencias de la misma base, deberíamos obtener $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$.

Por otro lado, para hacer la división podemos simplificar tres factores en el dividendo con tres factores del divisor: $a^3 : a^5 = (a \cdot a \cdot a) : (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) = 1 : (a \cdot a) = 1 : a^2$.

Por tanto, habría que definir $a^{-2} = 1 : a^2$. Observamos que -2 y 2 son opuestos entre sí, así que la definición de a^n cuando n es negativo deber ser $a^n = 1 : a^{-n}$. Observa que si n es negativo, $-n$ es positivo.

Definición

Si «a» es una fracción y «n» es un número entero, se define a^n así:

- ■ Si $n > 0$, $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n factores)
- ■ Si $n = 0$, $a^n = 1$
- ■ Si $n < 0$, $a^n = 1 : a^{-n}$

Ejemplos

Ejemplo 1: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$; ej. 2: $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$; ej. 3: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 : \frac{16}{81} = \frac{81}{16}$

Cálculo práctico de potencias de fracciones

Una cosa es cómo se definen los conceptos matemáticos y otra cómo se realizan en la práctica las operaciones. La diferencia es clara en el caso del cálculo de potencias de fracciones.

Potencia con exponente positivo de una fracción

Ya hemos trabajado este cálculo en el nivel 1 del curso. Recuerda que siempre es conveniente simplificar antes de calcular la potencia. El método práctico es:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$$

Ejemplo 1: $\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{5^3}{4^3}=\frac{125}{64}$. Ej. 2: $\left(-\frac{5}{4}\right)^3=-\frac{125}{64}$. Ej. 3: $\left(\frac{35}{55}\right)^2=\left(\frac{7}{11}\right)^2=\frac{7^2}{11^2}=\frac{49}{121}$.

Potencia con exponente 0 de una fracción

Como el resultado siempre es «1», no merece la pena simplificar la fracción de la base, aunque fuera posible: sería una pérdida de tiempo.

Ej. 4: $\left(\frac{5}{4}\right)^0=1$. Ej. 5: $\left(-\frac{5}{4}\right)^0=1$. Ej. 6: $\left(\frac{35}{55}\right)^0=1$. Ej. 7: $\left(\frac{35}{55}\right)^0=1$. Ej. 8: $\left(-\frac{35}{55}\right)^0=1$.

Potencia con exponente negativo de una fracción

El método práctico es aplicar esta propiedad:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{b^n}{a^n}}$$

Aquí tienes el razonamiento: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=1:\left(\frac{a}{b}\right)^n=1:\frac{a^n}{b^n}=\frac{b^n}{a^n}$

Ejemplo 9: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$. Ej. 10: $\left(\frac{5}{8}\right)^{-2}=\frac{8^2}{5^2}=\frac{64}{25}$. Ej. 11: $\left(-\frac{5}{8}\right)^{-2}=\frac{8^2}{5^2}=\frac{64}{25}$.

Como casi siempre, es aconsejable simplificar la fracción base antes de calcular la potencia, caso de ser posible la simplificación.

Ejemplo 12: $\left(\frac{49}{42}\right)^{-2}=\left(\frac{7}{6}\right)^{-2}=\frac{6^2}{7^2}=\frac{36}{49}$. Ejemplo 13: $\left(\frac{24}{40}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}=\frac{5^3}{3^3}=\frac{125}{27}$.

Si te animas, podrías simplificar la fracción y cambiar el signo al exponente en el mismo paso.

Ejemplo 14: $\left(\frac{15}{35}\right)^{-2}=\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{7^2}{3^2}=\frac{49}{9}$. Ejemplo 15: $\left(-\frac{30}{45}\right)^{-3}=-\left(\frac{3}{2}\right)^3=-\frac{3^3}{2^3}=-\frac{27}{8}$.

Incluso podrías hacer algunos cálculos en tan solo dos pasos:

Ej. 16: $\left(\frac{44}{33}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$. Ej. 17: $\left(\frac{21}{14}\right)^{-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$. Ej. 18: $\left(-\frac{18}{30}\right)^{-3}=-\left(\frac{5}{3}\right)^3=-\frac{125}{27}$.

Da los pasos que necesites, pero recuerda tener seguridad y que las demás personas también deben poder seguir tus cálculos.

Enunciados

Calcula las siguientes potencias y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\left(\frac{7}{4}\right)^{2}$

② $\left(\frac{8}{5}\right)^{0}$

③ $\left(-\frac{3}{7}\right)^{-2}$

④ $\left(\frac{20}{28}\right)^{2}$

⑤ $\left(\frac{120}{180}\right)^{0}$

⑥ $\left(\frac{30}{35}\right)^{-2}$

⑦ $\left(\frac{22}{33}\right)^{4}$

⑧ $\left(-\frac{55}{77}\right)^{0}$

⑨ $\left(\frac{49}{35}\right)^{-2}$

⑩ $\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$

⑪ $\left(\frac{58}{34}\right)^{0}$

⑫ $\left(-\frac{12}{21}\right)^{-3}$

⑬ $\left(\frac{14}{22}\right)^{3}$

⑭ $\left(\frac{14}{22}\right)^{0}$

⑮ $\left(\frac{22}{14}\right)^{-3}$

⑯ $\left(\frac{40}{16}\right)^{2}$

⑰ $\left(-\frac{21}{28}\right)^{-3}$

Casos particulares con exponentes negativos

Hay una serie de casos de potencia de una fracción con exponente negativo que conviene tener en cuenta porque se puede ahorrar algo de tiempo al operar.

Fracción unitaria elevada a un número negativo

Una fracción unitaria es la que tiene numerador 1. Si se eleva una fracción unitaria a un número negativo, se obtiene un número entero.

Ejemplo 1: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{1}\right)^{3}=3^3=1$. Ejemplo 2: $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}=\left(-\frac{2}{1}\right)^{5}=(-2)^5=-32$.

Número entero elevado a un número negativo

Si se eleva un número entero a un número negativo, se obtiene una fracción unitaria. Recuerda que cualquier número entero se puede escribir como una fracción con denominador «1».

Ejemplo 3: $2^{-5}=\left(\frac{2}{1}\right)^{-5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{1^5}{2^5}=\frac{1}{32}$. Ejemplo 4: $(-3)^{-4}=\left(\frac{-3}{1}\right)^{-4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{4}=\frac{1^4}{3^4}=\frac{1}{81}$.

Resulta muy cómodo recordar que si «a» es un número entero,

$$\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$$

Ejemplo 5: $7^{-2}=\frac{1}{7^2}=\frac{1}{49}$. Ejemplo 6: $(-2)^{-5}=\frac{1}{(-2)^5}=\frac{1}{-32}=-\frac{1}{32}$.

Número «1» elevado a cualquier potencia

El número «1» elevado a cualquier potencia siempre da como resultado «1», sin importar que el exponente sea positivo, cero o negativo.

Ejemplo 7: $1^{35}=1$. Ejemplo 8: $1^0=1$. Ejemplo 9: $1^{-37}=\frac{1}{1^{37}}=\frac{1}{1}=1$.

Número «0» elevado a un número negativo

No se puede elevar el número «0» a un número negativo, porque si aplicáramos la definición llegaríamos a una división entre 0, que no existe en matemáticas.

Ejemplo 10: $0^{-7}=\frac{1}{0^7}=\frac{1}{0}$ → no existe. Ejemplo 11: $0^{-1}=\frac{1}{0^1}=\frac{1}{0}$ → no existe.

Expresión de la fracción inversa como potencia

Recuerda que la fracción inversa de la fracción $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$.

Pues bien, se verifica que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$, ya que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b^1}{a^1}=\frac{b}{a}$.

Por eso verás muy a menudo que para escribir la fracción inversa de la fracción $\frac{a}{b}$ se escribe $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ y el número inverso del número entero k se escribe k^{-1}.

Ejemplo 12: $\left(\frac{7}{9}\right)^{-1}=\frac{9}{7}$. Ej. 13: $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-1}=-\frac{5}{4}$. Ej. 14: $7^{-1}=\frac{1}{7}$. Ej. 15: $(-13)^{-1}=-\frac{1}{13}$.

Enunciados

Calcula las siguientes potencias y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$

② 2^{-3}

③ $\left(\frac{7}{8}\right)^{-1}$

④ 0^{-7}

⑤ $\left(-\frac{2}{10}\right)^{-2}$

⑥ $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3}$

⑦ 4^{-2}

⑧ 1^{-58}

⑨ $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

⑩ $(-3)^{-4}$

⑪ $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$

⑫ $\left(-\frac{17}{11}\right)^{-1}$

⑬ $(-5)^{-3}$

⑭ $\left(-\frac{1}{10}\right)^{-3}$

⑮ 0^{-1}

⑯ $\left(\frac{56}{63}\right)^{-1}$

⑰ $(-1)^{-7}$

⑱ $\left(\frac{5}{35}\right)^{-2}$

⑲ $\left(\frac{35}{7}\right)^{-3}$

Operaciones combinadas con algún exponente no positivo

Para calcular operaciones combinadas que incluyan algún exponente cero o negativo no hay ninguna variación respecto al caso de que todos los exponentes sean positivos, ya que la jerarquía de operaciones es la misma. Simplemente, hay que dar algún paso más.

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-2}+\frac{100}{27}\cdot\frac{3}{5}$	② $2^{-3}\cdot\left(5+\frac{1}{3}\right)+3^{-2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)$
③ $4^{-2}+2^{-1}+(3\cdot 2)^{-2}:18^{-1}$	④ $\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{8}\right)^{2}+\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{7}\right)^{0}+2^{-4}$

Resoluciones

① En un primer paso calcularemos el interior del paréntesis y el producto; después la potencia y por último la suma.

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-2}+\frac{100}{27}\cdot\frac{3}{5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}+\frac{20}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\frac{20}{9} = \frac{4}{9}+\frac{20}{9}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$$

② Comenzaremos por las potencias y los paréntesis; en un segundo paso los productos y terminaremos con la suma.

$$2^{-3}\cdot\left(5+\frac{1}{3}\right)+3^{-2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2^3}\cdot\frac{16}{3}+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{8}\cdot\frac{16}{3}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{3}+\frac{1}{12} = \frac{8+1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

③ Aunque parece una operación exclusivamente con números enteros, realmente es una operación con fracciones.

$$4^{-2}+2^{-1}+(3\cdot 2)^{-2}:18^{-1} = \frac{1}{4^2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6^2}:\frac{1}{18} = \frac{1}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{36}:\frac{1}{18} = \frac{1}{16}+\frac{1}{2}+\frac{18}{36} =$$

$$= \frac{1}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{16}+1=\frac{17}{16}$$

④ Hay que comenzar por calcular los interiores de los dos primeros paréntesis; el tercero no es necesario, ya que al estar elevado a 0, el resultado de la potencia será 1. Luego calcularemos las potencias que quedarán y por último haremos la suma.

$$\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{8}\right)^{2}+\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{7}\right)^{0}+2^{-4} = \left(\frac{11-3}{6}\right)^{-3}+\left(\frac{14+1}{8}\right)^{2}+1+\frac{1}{2^4} =$$

$$= \left(\frac{8}{6}\right)^{-3}+\left(\frac{15}{8}\right)^{2}+1+\frac{1}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\frac{225}{64}+1+\frac{1}{16} = \frac{27}{64}+\frac{225}{64}+1+\frac{1}{16} =$$

$$= \frac{27+225+64+4}{64}=\frac{320}{64}=5$$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-3}+\frac{35}{16}\cdot\frac{2}{7}$

② $3^{-2}\cdot\left(2+\frac{1}{4}\right)+2^{-4}\cdot(3^{2}-5)$

③ $3^{-1}+5^{-2}+\frac{2}{3}:\frac{25}{11}$

④ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)^{-3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)^{2}+\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{5}\right)^{0}+2^{-4}$

⑤ $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

⑥ $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+1\right):\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)$

⑦ $\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{4}{25}+\frac{1}{25}\right)+2^{-2}+\frac{1}{8}$

⑧ $\left(1-\frac{1}{5}\right)^{-2}\cdot\left(2-\frac{3}{4}\right)^{-3}$

⑨ $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\right)\cdot\frac{8}{5}$

⑩ $\left(1+\frac{2}{3}\right)^{2}-\left(2-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

⑪ $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{14}+\frac{2}{7}\right)^{-2}$

⑫ $\left(1-\frac{3}{5}\right)^{-2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}$

⑬ $\left(1-\frac{2}{5}\right)^{-2}-\left(1-\frac{2}{3}\right)^{2}$

⑭ $5^{-2}+\frac{3}{5}:\frac{5}{8}$

⑮ $\left(\frac{2}{7}-\frac{15}{13}\right)^{0}+11^{-1}$

⑯ $2^{-2}-\left(2^{-2}+\frac{5}{4}\right)^{2}$

Notación de fracción usada en cocientes

Hasta ahora hemos utilizado la notación de fracción (una línea horizontal con un número entero sobre ella y otro bajo ella) con el convenio de que el número sobre la línea es el numerador y el número bajo ella es el denominador.

Pero existe otra manera de utilizar la barra de fracción: se puede usar para indicar cualquier cociente. La expresión que se escriba sobre la línea es el **dividendo** y la que se escriba bajo la línea es el **divisor**. Es decir:

$$\boxed{\frac{a}{b}=a:b}$$

donde a y b pueden ser números enteros, números decimales y fracciones.

Ejemplos

Ejemplo 1	$\frac{7}{5}=7:5$	La fracción siete quintos es igual al cociente de los números enteros 7 y 5. El resultado es 1,2
Ejemplo 2	$\frac{3{,}6}{1{,}2}=3{,}6:1{,}2$	Se puede usar la notación de fracción para indicar la división del número decimal 3,6 entre el número decimal 1,2. El resultado es 3
Ejemplo 3	$\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2}{3}:\frac{5}{7}$	Se puede usar la notación de fracción para indicar la división de la fracción $\frac{2}{3}$ entre la fracción $\frac{5}{7}$. El resultado es $\frac{14}{15}$

Fracción de fracciones

Cuando se escribe con la notación de fracción un cociente entre dos fracciones es imprescindible escribir la línea de fracción que indica el cociente un poco más larga que las otras dos, para indicar que es la **fracción principal**. Si no se hace bien, puede haber confusiones en expresiones más complicadas. La línea que indica la fracción principal es la que hay que alinear con el signo igual.

Ejemplo 4. En el cociente de dos tercios entre cinco séptimos que vemos a la derecha la línea que separa el «3» del «5» es un poco más larga que las líneas de las dos fracciones.

$$\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$$

La construcción de una fración con fracciones en el numerador y en el denominador recibe multitud de nombres como «castillo de fracciones», «torre de quebrados» y variaciones similares.

Cálculo de una fracción de fracciones

Para realizar el cálculo de una fracción con fracciones solo hay que tener en cuenta que es un cociente y aplicar su regla:

$$\boxed{\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$$

Otra vez nos encontramos con la expresión «producto de extremos entre producto de medios», ya que a y d son los extremos y b y c son los medios.

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\dfrac{\frac{22}{5}}{\frac{33}{7}}$	② $\dfrac{-\frac{3}{4}}{\frac{9}{8}}$	③ $\dfrac{-\frac{13}{2}}{-\frac{11}{5}}$	④ $\dfrac{\frac{21}{2}}{\frac{7}{4}}$
⑤ $\dfrac{4}{\frac{3}{5}}$	⑥ $\dfrac{7}{\frac{21}{2}}$	⑦ $\dfrac{\frac{3}{5}}{2}$	⑧ $\dfrac{\frac{9}{5}}{3}$

Resoluciones

①	$\dfrac{\frac{22}{5}}{\frac{33}{7}} = \dfrac{22\cdot 7}{5\cdot 33} = \dfrac{2\cdot 7}{5\cdot 3} = \dfrac{14}{15}$	Se han simplificado el 22 y el 33
②	$\dfrac{-\frac{3}{4}}{\frac{9}{8}} = -\dfrac{3\cdot 8}{4\cdot 9} = -\dfrac{2}{3}$	Se ha simplificado el 3 con el 9 y el 8 con el 4 Se ha aplicado la regla de los signos
③	$\dfrac{-\frac{13}{2}}{-\frac{11}{5}} = \dfrac{13\cdot 5}{2\cdot 11} = \dfrac{65}{22}$	No hay simplificación posible Se ha aplicado la regla de los signos
④	$\dfrac{\frac{21}{2}}{\frac{7}{4}} = \dfrac{21\cdot 4}{2\cdot 7} = 3\cdot 2 = 6$	Se ha simplificado el 21 con el 7 y el 4 con el 2
⑤	$\dfrac{4}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4\cdot 5}{3} = \dfrac{20}{3}$	El numerador es un número entero, así que para aplicar la regla imaginamos que tiene denominador «1», que no escribimos
⑥	$\dfrac{7}{\frac{21}{2}} = \dfrac{7\cdot 2}{21} = \dfrac{2}{3}$	El numerador es un número entero, así que para aplicar la regla imaginamos que tiene denominador «1», que no escribimos; se han simplificado el 7 y el 21
⑦	$\dfrac{\frac{3}{5}}{2} = \dfrac{3}{5\cdot 2} = \dfrac{3}{10}$	El denominador es un número entero, así que para aplicar la regla imaginamos que tiene denominador «1», que no escribimos
⑧	$\dfrac{\frac{9}{5}}{3} = \dfrac{9}{5\cdot 3} = \dfrac{3}{5}$	El denominador es un número entero, así que para aplicar la regla imaginamos que tiene denominador «1», que no escribimos; se han simplificado el 9 y el 3

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{5}}$

② $\dfrac{\frac{15}{14}}{\frac{3}{2}}$

③ $\dfrac{-\frac{21}{11}}{\frac{15}{22}}$

④ $\dfrac{-\frac{16}{35}}{-\frac{8}{5}}$

⑤ $\dfrac{2}{\frac{3}{4}}$

⑥ $\dfrac{\frac{7}{5}}{5}$

⑦ $\dfrac{-7}{\frac{21}{5}}$

⑧ $\dfrac{-\frac{22}{3}}{-11}$

⑨ $\dfrac{\frac{22}{35}}{\frac{33}{49}}$

⑩ $\dfrac{21}{\frac{7}{5}}$

⑪ $\dfrac{\frac{36}{3}}{-4}$

⑫ $\dfrac{\frac{39}{55}}{\frac{26}{77}}$

Paréntesis implícitos en una fracción

Cuando se usa la notación de fracción dentro de una operación combinada hay que tener en cuenta que la propia notación de fracción incluye tres paréntesis implícitos; es decir, paréntesis que sí existen pero que no se escriben. Así:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\left(\frac{(a)}{(b)}\right)}$$

Esto nos indica que hay que primero hay que calcular el numerador y el denominador independientemente uno del otro y tras eso se podrá operar con la fracción (casi siempre simplificándola primero para facilitar los cálculos).

Ejemplo

Enunciado: calcula $3:\dfrac{1+\frac{4}{5}}{2-\frac{4}{5}}$ y da el resultado del modo más sencillo posible (fracción irreducible o número entero).

Resolución

Comenzamos por calcular el numerador y el denominador en el mismo paso:

$3:\dfrac{1+\frac{4}{5}}{2-\frac{4}{5}} = 3:\dfrac{\frac{9}{5}}{\frac{6}{5}}$; calculamos la fracción de fracciones: $3:\dfrac{\frac{9}{5}}{\frac{6}{5}} = 3:\dfrac{9\cdot 5}{5\cdot 6} = 3:\dfrac{3}{2}$

Ya se puede hacer la división final: $3:\dfrac{3}{2} = \dfrac{3\cdot 2}{3} = 2$. Solución: 2

El problema de los números mixtos

- ✱ Un número mixto es la suma de un número entero y una fracción.
- ✱ Ejemplo 1: la suma del número entero dos y la fracción cuatro quintos.
- ✱ El concepto de número mixto tuvo hace años mucha importancia y por eso se sigue usando en muchos ámbitos, como las medidas en el sistema imperial.
- ✱ El problema es que un número mixto se escribe sin ningún signo entre el entero y la fracción pero con los convenios actuales eso representa un producto y no una suma.
- ✱ Ejemplo 2: dos cuatro quintos se escribe $2\dfrac{4}{5}$, que realmente vale $2\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{8}{5}$
- ✱ Para evitar este problema hay que prestar atención al contexto, para ver si el enunciado se refiere a un número mixto o a un producto. Se recomienda, para evitar ambiguedades, escribir el punto que indica el producto incluso aunque no es estrictamente necesario.
- ✱ Ejemplo 3: para escribir «nueve por tres cuartos» es mejor $9\cdot\dfrac{3}{4}$ que $9\dfrac{3}{4}$
- ✱ Seguro que los aficionados a la serie literaria de Harry Potter, creada por la escritora británica J. K. Rowling, reconocen el número mixto nueve tres cuartos con cierto significado bastante importante.

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $$\frac{1+\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}-1}$$

② $$\frac{3-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{6}}$$

③ $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$$

④ $$\frac{\frac{14}{3}+\frac{4}{3}}{\frac{7}{3}+\frac{2}{3}}$$

⑤ $$\frac{4}{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}$$

⑥ $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{4}$$

⑦ $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}$$

⑧ $$\frac{4\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)}{8\cdot\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{10}\right)}$$

⑨ $$\frac{\frac{53}{83}+\frac{31}{73}}{\frac{53}{83}+\frac{31}{73}}$$

⑩ $$\left(\frac{1-\frac{2}{3}}{2-\frac{17}{9}}\right)^{-1}$$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1-\dfrac{2}{3}}{3}$

② $\dfrac{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{2}}+\dfrac{5}{21}$

③ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1-\dfrac{2}{5}}{3}$

④ $\dfrac{1+\dfrac{7}{15}}{1-\dfrac{11}{15}}\cdot\left(\dfrac{3}{11}+\dfrac{5}{2}\right)$

⑤ $\dfrac{\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{9}}{\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}}-\dfrac{5}{4}:6$

⑥ $\dfrac{\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{10}}{\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{5}+\dfrac{1}{15}}$

⑦ $\dfrac{\dfrac{1+\dfrac{1}{5}}{3}+2}{4}$

⑧ $\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^4}{\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^2}$

⑨ $\left(\dfrac{1+\dfrac{4}{7}}{1-\dfrac{1}{14}}\right)^{-1}:\dfrac{13}{11}$

⑩ $\dfrac{\left(1+\dfrac{4}{3}\right)\left(1-\dfrac{4}{7}\right)}{17^{-1}}$

Propiedades de las potencias

Desde el nivel 1 conocemos las propiedades de las potencias de base natural y exponente natural. En el nivel 2 hemos definido las potencias de base una fracción y exponente entero; y lo hemos hecho de manera que fueran las mismas que en el caso anterior.

Ahora se nos presenta la situación de que para aplicar las propiedades de las potencias cuando nos interese, podemos optar por usar las propiedades para las bases números enteros o fracciones. Además, como se puede escribir el cociente con la notación de fracción, las propiedades a veces se confunden; pero no te preocupes, porque son ciertas las interpretes como las interpretes.

Producto de potencias de la misma base

Regla: se mantiene la base y se suman los exponentes.

Base un número entero	Base una fracción
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$

Cociente de potencias de la misma base

Regla: se mantiene la base y se restan los exponentes.

Base un número entero	Base una fracción
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$

Producto de potencias con el mismo exponente

Regla: se mantiene el exponente y se multiplican las bases.

Bases números enteros	Bases fracciones
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n$

Cociente de potencias con el mismo exponente

Regla: se mantiene el exponente y se dividen las bases.

Bases números enteros	Bases fracciones
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n$

Potencia de potencia

Regla: se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

Base un número entero	Base una fracción
$(a^n)^m = a^{nm}$	$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{nm}$

Ejemplos de las propiedades de las potencias

Es importante recordar que las propiedades se pueden usar de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, según convenga en cada caso.

Producto de potencias de la misma base

Regla: se mantiene la base y se suman los exponentes.

Base un número entero	Base una fracción
Ejemplo 1. $5^6 \cdot 5^{-8} = 5^{-2}$	Ejemplo 2. $\left(\frac{3}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^9$

Cociente de potencias de la misma base

Regla: se mantiene la base y se restan los exponentes.

Base un número entero	Base una fracción
Ejemplo 3. $\frac{7^2}{7^5} = 7^{-3}$	Ejemplo 4. $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^8}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^6$

Producto de potencias con el mismo exponente

Regla: se mantiene el exponente y se multiplican las bases.

Base números enteros	Base fracciones
Ejemplo 5. $\frac{8^3}{5^3} = \left(\frac{8}{5}\right)^3$	Ejemplo 6. $\left(\frac{3}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^7 = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{11}\right)^7$

Cociente de potencias con el mismo exponente

Regla: se mantiene el exponente y se dividen las bases.

Base números enteros	Base fracciones
Ejemplo 7. $\frac{8^3}{5^3} = \left(\frac{8}{5}\right)^3$	Ejemplo 8. $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^7}{\left(\frac{2}{11}\right)^7} = \left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{11}}\right)^7$

Potencia de potencia

Regla: se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

Base un número entero	Base una fracción
Ejemplo 9. $\left(2^5\right)^3 = 2^{15}$ Ejemplo 10. $2^9 = \left(2^3\right)^3$	Ejemplo 11. $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^7 = \left(\frac{3}{5}\right)^{14}$

Operaciones con fracciones usando propiedades de potencias

El uso combinado de las operaciones con fracciones y las propiedades de las potencias permite hacer a mano algunos cálculos que resultarían muy largos. Puedes pensar que con una calculadora (de bolsillo o programada en un ordenador) serían muy fáciles de hacer y que por tanto no merece la pena este aprendizaje, pero debes saber que estas transformaciones también se hacen cuando se programa, para mejorar la rapidez de respuesta de los programas de ordenador. Tómate estos ejercicios como un método para mejorar en el dominio de las propiedades, no te quedes solo en los números.

Normalmente hay varias maneras de aplicar las propiedades, busca la que a ti te parezca cómoda. Pero a veces ocurre que cuando ya has resuelto el ejercicio es cuando ves un método más sencillo: quédate a gusto haciéndolo otra vez por esa nueva vía más fácil, tendrás una magnífica sensación de dominio.

Recuerda que está permitido saltarse algún paso. ¡Sé tú mismo!

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9$ ② $5^6 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4$ ③ $\left(\frac{7}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4 \cdot 35^{-4}$

Resoluciones

① Observamos que el numerador y el denominador están intercambiados en las dos potencias y eso nos hace sospechar que podremos simplificarlos.

Este es el desarrollo que queremos evitar, fíjate lo difícil que parece a mano:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{2^8}{3^8} \cdot \frac{3^9}{2^9} = \frac{256}{6561} \cdot \frac{19683}{512} = \frac{5027328}{3359232} = \frac{3}{2} \text{ (¡vaya simplificación!)}$$

Usando las propiedades, tardamos mucho menos y no manejamos números tan grandes.

Primera resolución → $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{2^8}{3^8} \cdot \frac{3^9}{2^9} = \frac{2^8}{2^9} \cdot \frac{3^9}{3^8} = 2^{-1} \cdot 3^1 = \frac{3}{2}$

Segunda resolución → $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$

② Parece que podremos simplificar el 5 de fuera del paréntesis con el de dentro del paréntesis.

$$5^6 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 5^6 \cdot \frac{2^4}{5^4} = 5^2 \cdot 2^4 = 25 \cdot 16 = 400$$

③ Si multiplicamos los numeradores de las dos potencias obtenemos un 35 y vemos otro 35 aparte; parece buena idea intentar simplificarlos.

$$\left(\frac{7}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4 \cdot 35^{-4} = \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3}\right)^4 \cdot 35^{-4} = \left(\frac{35}{6}\right)^4 \cdot 35^{-4} = \frac{35^4}{6^4} \cdot 35^{-4} = \frac{35^0}{6^4} = \frac{1}{1296}$$

Enunciados

Realiza las siguentes operaciones y da el resultado del modo más sencillo que sea posible (fracción irreducible o número entero).

① $\left(\frac{7}{9}\right)^{11}\cdot\left(\frac{9}{7}\right)^{13}$

② $7^5\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^4$

③ $(-5)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4$

④ $\left(\frac{11}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^3\cdot 77^{-3}$

⑤ $\left(1-\frac{4}{5}\right)^6\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)^6$

⑥ $\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^4}{\left(1-\frac{1}{6}\right)^4}$

⑦ $\left(3-\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)^{-2}$

⑧ $\left(\frac{16}{81}\right)^5\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^5$

⑨ $\dfrac{\left(1-\frac{4}{15}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{6}\right)^3}$

⑩ $\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{14}\right)^5:\left(\frac{1}{3}+\frac{32}{21}\right)^3$

⑪ $\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{22}\right)^3\cdot\left(2+\frac{4}{9}\right)^3$

⑫ $\left(-\frac{3}{5}\right)^4\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^5$

⑬ $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{26}\right)^5\cdot\left(3+\frac{1}{4}\right)^5$

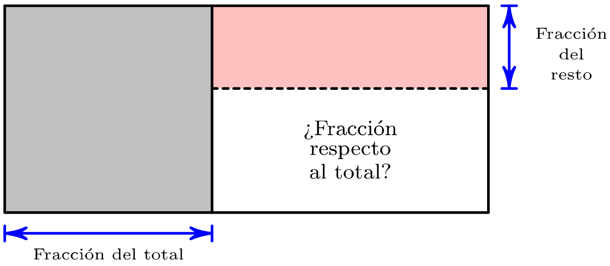
⑭ $\dfrac{\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{10}\right)^7}{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{15}\right)^9}$

Conocida una fracción y una fracción del resto, averiguar lo que queda

Este es un **patrón de resolución de problemas** muy utilizado. La resolución se basa en la utilización conjunta de dos patrones que ya conoces del nivel 1.

Enunciado general

De un total conocemos una fracción (representada en gris) y una fracción del resto que no pertenece a esa fración (representada en rosa) y queremos averiguar qué fracción del total representa la parte que no conocemos (la que queda en blanco).

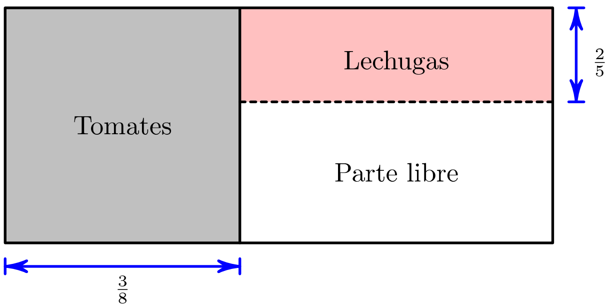


Enunciado concreto

Una persona dedica ⅜ de su huerta a plantar tomates y ⅖ del resto a plantar lechugas. ¿Qué fracción del total de la huerta le queda libre aún? Da el resultado como fracción irreducible.

Explicación

Los ⅜ de su huerta es la fracción que conocemos del total. Los ⅖ es la fracción del resto que no son tomates que nos dan como dato. Queremos averiguar qué fracción de la huerta está sin usar. Lo más importante de este tipo de problemas es entender que los ⅖ no son del total de la huerta, sino que lo son de la parte no destinada a tomates. El dibujo lo intenta reflejar usando divisiones verticales y horizontales.



Resolución detallada

La parte no dedicada a tomates es $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

De la parte no dedicada a tomates, la parte libre es $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

Respecto al total, la parte libre son los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{5}{8}$, es decir: $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

Solución: $\frac{3}{8}$

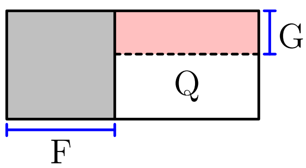
Resolución rápida

La parte libre es $\left(1-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{8}$. Solución: $\frac{3}{8}$

Resolución general

Si conocemos una fracción (F) del total y una fracción (G) del resto, la fracción del total que queda (Q) es

$$\boxed{Q = (1-F)\cdot(1-G)}$$



Observa que el problema se puede resolver usando **operaciones combinadas**, lo que es más rápido y potente que encadenar operaciones simples.

Enunciados

Da todos los resultados como fracción irreducible.

① Mi abuelo tiene una colección de discos de vinilo; $\frac{3}{7}$ de los discos son de música clásica; $\frac{5}{8}$ del resto son de jazz y los demás son de rock. Averigua qué fracción del total constituyen los discos de rock.

② En un jardín, $\frac{2}{5}$ de la superficie están dedicados a plantas de origen asiático; del resto, $\frac{6}{11}$ de la superficie están dedicados a plantas de origen africano y todo lo demás a plantas de origen europeo. Averigua qué fracción de la superficie del jardín está dedicada a las plantas de origen europeo.

③ De una colección de juegos, $\frac{1}{5}$ son de fútbol y $\frac{1}{16}$ del resto son de baloncesto. Calcula qué fracción del total de los juegos de la colección no son ni de fútbol ni de baloncesto.

④ En un bar, $\frac{2}{7}$ de los bocadillos son aptos para celíacos y el resto no lo son; $\frac{4}{5}$ de los bocadillos no aptos para celíacos llevan tomate. Averigua qué fracción del total de los bocadillos corresponde a bocadillos sin tomate no aptos para celíacos.

⑤ Una persona sale a la calle por la mañana con cierta cantidad de dinero. Por la mañana se gasta $\frac{11}{14}$ de lo que lleva y por la tarde se gasta $\frac{2}{9}$ de lo que le queda. ¿Con qué fracción del total de dinero con el que salió por la mañana llega por la noche a casa?

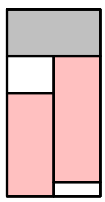
⑥ En una urna hay bolas blancas, negras, rojas y azules. Sabemos que $\frac{1}{3}$ del total son rojas y $\frac{4}{15}$ del total son negras. También sabemos que, de las que no son ni blancas ni negras, las rojas son $\frac{13}{28}$. Calcula la fracción del total que constituyen las bolas azules.

⑦ Un chalet tiene tres plantas y un desván. La primera planta ocupa $\frac{3}{7}$ del total de superficie de la vivienda; la segunda planta ocupa $\frac{4}{11}$ del resto y la tercera planta ocupa $\frac{7}{18}$ de lo que dejan libre las dos primeras. Calcula qué fracción de la superficie de la vivienda ocupa el desván.

⑧ Una ciudad está dividida por un río en dos zonas. La zona de la ribera derecha ocupa $\frac{2}{3}$ del total de superficie de la ciudad y dedica la mitad de su superficie a viviendas y el resto a jardines; la zona de la ribera izquierda dedica $\frac{5}{7}$ de su superficie a viviendas y el resto a jardines. Calcula qué fracción del total de la superficie de la ciudad se dedica a jardines.

⑨ Una urbanización con solo tres viviendas dedica a zonas comunes $\frac{4}{7}$ de su superficie total. La primera vivienda ocupa $\frac{1}{3}$ de la superficie habitable y la segunda ocupa $\frac{1}{5}$ de la superficie habitable. Calcula qué fracción del total de superficie de la urbanización ocupa la tercera vivienda.

⑩ En el rectángulo de la derecha la parte gris ocupa $\frac{1}{4}$ de la superficie. La parte no gris está dividida dos zonas iguales: en la derecha la parte rosa ocupa los $\frac{9}{10}$ y en la izquierda la parte rosa ocupa los $\frac{7}{10}$. Calcula qué fracción de la superficie total suman las dos partes blancas.



Uso de varios patrones de problema

En cuanto un problema se complica un poco, para resolverlo es necesario reconocer al menos dos patrones de problema. Vemos ejemplos muy habituales en los que hay que usar estos dos patrones:

- Dada una fracción y una fracción del resto, averiguar la fracción que queda.
- Relación entre total, parte y fracción.

Enunciados

① Una persona tiene un presupuesto de 1200 euros para comprar un sistema informático nuevo. Dedica $5/8$ a comprar un ordenador y $5/9$ del resto en comprar un monitor. Calcula cuánto dinero le queda disponible para comprar los demás periféricos.

② Un barco de pesca vuelve a puerto tras varios días de faena. Descubre que $1/4$ de lo pescado es de mala calidad y no se puede consumir. Del resto, dedican a la venta $31/39$ y se quedan con 208 kilogramos para consumo propio. Calcula cuánto pescaron.

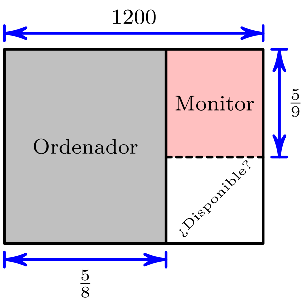
Resoluciones

① La fracción del total que le queda disponible es:

$$\left(1-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{9}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$$

El dinero disponible es $1200\cdot\frac{1}{6}=200$

Solución: 200 euros

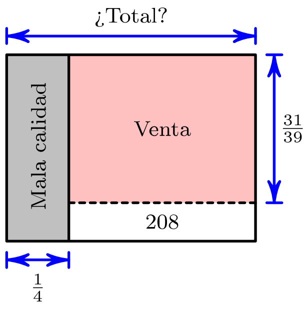


② La fracción del total para consumo propio es:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{31}{39}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{39}=\frac{2}{13}$$

El total que pescaron es $208:\frac{2}{13}=\frac{208\cdot 13}{2}=104\cdot 13=1352$

Solución: 1352 kilogramos



Explicación

Si utilizaras repetidamente varias de las estrategias que aprendiste en el nivel 1, podrías resolver estos problemas de otra manera, pero tardarías mucho más tiempo y tendrías que razonar más. El método visto ahora es mucho más eficiente y, además, te prepara para afrontar problemas más difíciles más adelante.

Este proceso de ir aplicando técnicas cada vez más refinadas es una parte importante de la matemática: cuanto más avanzadas son las técnicas, más fácil es resolver los problemas más básicos y más posible es atacar los problemas más complicados.

Dedica el tiempo que necesites para comparar las resoluciones que acabas de ver con las resoluciones alternativas que podrías pensar. Debes estar convencido, con esa reflexión, de que este método es mejor.

Enunciados

① En un zoo hay 425 especies animales, de las que $3/5$ son mamíferos y $12/17$ del resto son reptiles; todos las demás son especies de insectos. Calcula cuántas especies de insectos hay en el zoo.

② En una urna llena de bolas, $3/7$ del total son blancas. De las bolas que no son blancas, $11/32$ son negras y el resto son de colores. Sabiendo que en la urna hay 819 bolas de colores, calcula cuántas bolas hay en total en la urna.

③ En un depósito hay 780 kilogramos de pienso. Una piara de cerdos se come $7/13$ y se va a echar la siesta. Luego viene una bandada de cuervos que se come $11/24$ de lo que dejaron los cerdos. Calcula cuánto pienso queda en el depósito.

④ Una empresa española vende $19/54$ de su producción al extranjero; del resto, vende $19/28$ a otras comunidades autónomas y le quedan anualmente 605 toneladas de producción, que vende en su propia comunidad autónoma. Calcula su producción total anual.

⑤ Una persona tiene una biblioteca de 1505 libros para su disfrute personal. Los libros de ficción son $1/15$ del total, $43/49$ del resto son de ensayo y los demás son biografías. Calcula cuántos libros de biografías tiene.

⑥ Salgo de casa con cierta cantidad de dinero en efectivo. Por la mañana me gasto $3/7$ de lo que llevo en un traje y por la tarde me gasto $3/10$ de lo que me queda en unos zapatos. Vuelvo a casa con 336 euros. ¿Con cuánto dinero salí de casa por la mañana?

⑦ Las $7/12$ partes de una vivienda están dedicadas a dormitorios y $1/6$ se dedica al patio; $3/7$ del resto de la casa se dedican a los baños y la cocina ocupa todo lo demás. Sabiendo que la superficie de la vivienda es 238 m^2, calcula la superficie de la cocina.

⑧ Una parcela dispone para jardín $16/31$ del total de la superficie y el resto es una vivienda de una sola planta. Un tercio de la superficie de la vivienda es el salón, un quinto es la cocina y aún quedan 343 m^2. Calcula la superficie total de la parcela.

⑨ Una casa de pueblo se reparte entre tres hermanos: el hermano mayor se lleva la mitad y el hermano menor se lleva la duodécima parte. El hermano mediano dispone en su parte de la casa de un patio que ocupa la séptima parte de lo que le corresponde, de un baño que ocupa $2/35$ de lo que le corresponde y le quedan 40 m^2 para habitaciones. Calcula la superficie total de la casa.

⑩ Una pareja vive en una vivienda de 320 m^2 que destina a habitaciones $3/5$ de su superficie, $7/16$ del resto a un salón y lo que queda para servicios. Como adopta tres hijos, la vivienda se les queda pequeña y deciden comprar el piso de arriba, que tiene una superficie de 360 m^2, destina $5/8$ de la superficie a habitaciones, $8/15$ del resto a un salón y lo que queda para servicios. Calcula qué fracción del total de la superficie de que disponen tras la compra se destina a servicios; da el resultado como fracción irreducible.

Enunciados

En todos los problemas en los que se pida alguna fracción, hay que dar el resultado como fracción irreducible.

① En una urna con 600 bolas hemos contado que $\frac{4}{5}$ son blancas y el resto son negras. Si ponemos en la urna 20 bolas blancas más y 130 bolas negras más, ¿qué fracción de las bolas constituyen las bolas blancas?

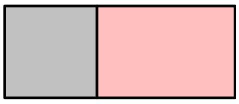
② La quinta parte de las habitaciones de un hotel están en la planta baja y la tercera parte están en el primer piso; en el segundo piso hay el doble de habitaciones que en la planta baja y en el tercer piso hay cuatro habitaciones.

a) ¿Cuántas habitaciones hay en el primer piso?

b) ¿Cuántas habitaciones hay en el segundo piso?

③ Una urna contiene bolas de madera y bolas de metal. Cualquiera de las bolas puede ser blanca o negra. La fracción de bolas de madera es $\frac{3}{5}$. De las bolas de madera, las bolas negras son $\frac{4}{9}$. De las bolas metálicas, las bolas blancas son $\frac{1}{6}$. Calcula la fracción del total que constituyen las bolas blancas.

④ En el rectángulo de la derecha la parte gris ocupa $\frac{2}{5}$ del total. Si se añade al rectángulo otra parte igual que la rosa, ¿qué fracción del total ocupará ahora la parte gris?



⑤ En un rebaño de 77 ovejas, $\frac{6}{11}$ son blancas; en otro rebaño, de 91 ovejas, $\frac{10}{13}$ son blancas. Si reunimos los dos rebaños en uno solo, ¿cuál es la fracción de ovejas blancas?

⑥ Una urna contiene bolas de madera y bolas de metal. Cualquiera de las bolas puede ser blanca o negra. Hay el mismo número de bolas blancas de madera que de bolas blancas de metal. Las bolas blancas de madera son $\frac{2}{3}$ del total de bolas de madera. Las bolas blancas de metal son $\frac{3}{5}$ del total de bolas de metal. Calcula la fracción del total que constituyen las bolas negras.

⑦ Una urna con 273 bolas solo tiene bolas blancas y negras. Las blancas son $\frac{19}{21}$ del total. Extraemos algunas bolas blancas y ahora las bolas blancas son $\frac{2}{15}$ del total. ¿Cuántas bolas hemos extraído?

⑧ Dos personas viven en el mismo edificio y trabajan en el mismo sitio. Cada mañana salen para trabajar a la misma hora, pero una tarda 20 minutos en hacer el trayecto de casa al trabajo y la otra 30 minutos. ¿Cuántos minutos más tarde tiene que salir la que tarda menos para encontrarse con la otra exactamente cuando los dos han recorrido los $\frac{4}{5}$ del trayecto?

⑨ En las urnas A y B solo hay bolas blancas y negras. En A, $\frac{3}{7}$ de las bolas son blancas. En la urna B hay el doble de número de bolas blancas que en la urna A y el triple de bolas negras que en la urna A. Calcula la fracción de bolas negras en la urna B.

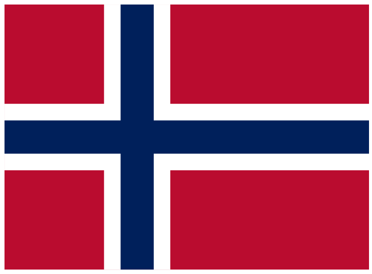
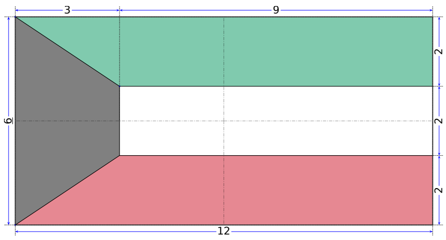
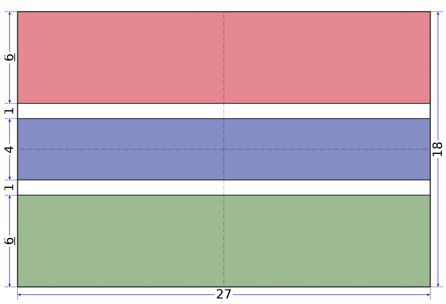
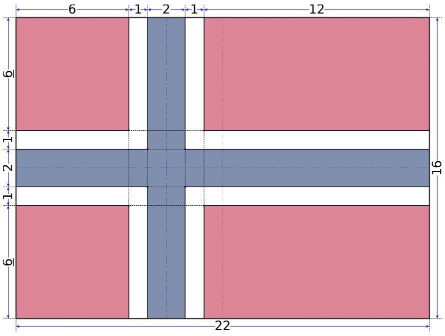
⑩ Tres hermanos se reparten la finca de sus padres. El mayor se queda con $\frac{1}{3}$ de la finca. El mediano se queda con 5400 m^2. El menor se queda con el resto de la finca; decide dedicar $\frac{7}{10}$ de su parte a un invernadero y sabe que le quedarán aún 2160 m^2. Calcula qué fracción de la finca le corresponde al mediano.

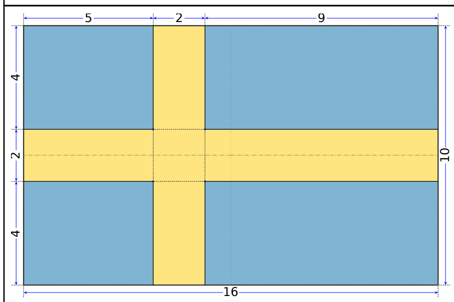
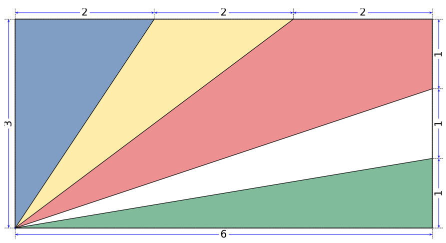
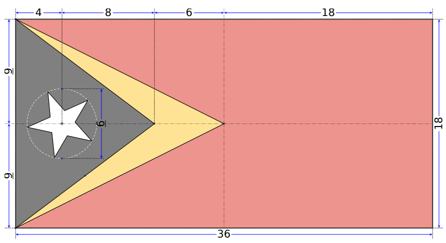
Vexilología

Es el estudio de las banderas. En la descripción de cada bandera aparecen definiciones de colores y el modo de determinar las dimensiones de cada parte. En los siguientes enunciados verás la bandera de un país y un esquema de sus dimensiones relativas (las banderas se pueden reproducir a cualquier tamaño).

Enunciados

Calcula como fracción irreducible la parte del área de la bandera que corresponde al color o colores especificados.

① Kuwait	② Gambia	③ Noruega
		
		
Colores blanco y negro	Color blanco	Color blanco

④ Suecia	⑤ Seychelles	⑥ Timor Oriental
		
		
Color azul	Todos los colores	Colores rojo y amarillo

Los números naturales y los números enteros

En el nivel 1 trabajamos con el conjunto de los números naturales y vimos que no siempre era posible restar: para poder hacerlo en todos los casos, introdujimos los números enteros.

Con los números enteros no siempre se puede dividir, así que consideramos las fracciones y vimos que con ellas sí que es posible dividir en todos los casos, salvo cuando el divisor es 0.

Los números racionales

Podríamos decir, simplificando, que los números racionales son las fracciones. Pero eso sería quedarnos cortos, porque son mucho más que eso. Hay números decimales que también son números racionales, aunque no todos.

Es necesario examinar con detalle la relación que hay entre las fracciones y los números decimales para, a partir de ella, definir los números racionales. Esta definición, además, nos prepara para el siguiente conjunto de números (los números reales), que estudiaremos en el nivel 4.

Paso de fracción a número decimal

Veremos qué ocurre cuando intentamos convertir una fracción en un número decimal haciendo la división con decimales. Demostraremos cuáles son todas las opciones para el resultado.

Paso de número decimal a fracción

Veremos un mecanismo que permite obtener a partir de algunos números decimales (no todos) una fracción que tiene el mismo valor.

Relación entre fracciones y números decimales

A partir de las dos trasformaciones estudiadas, llegaremos a la conclusión de que los números que se pueden escribir como fracción son exactamente los mismos que se pueden escribir como números decimales de una determinada manera. Así llegaremos a definir de manera plena los números racionales.

El conjunto de los números racionales

Acabaremos estudiando el propio conjunto de los números racionales y algunas de sus propiedades.

Relación entre conjuntos numéricos

Desde el nivel 1 hasta el nivel 4 verás estos conjuntos numéricos:

$$\boxed{\text{Naturales } (\mathbb{N}) \Rightarrow \text{Enteros } (\mathbb{Z}) \Rightarrow \text{Racionales } (\mathbb{Q}) \Rightarrow \text{Reales } (\mathbb{R})}$$

Ahora nos estamos concentrando en el paso de números enteros a números racionales, para el que vamos a necesitar estudiar con más profundidad los distintos tipos de números decimales.

Una propuesta

Cuando termines de estudiar este tema, podrás entender perfectamente el significado de la siguiente expresión, pero de momento te la proponemos para que reflexiones sobre ella:

$$\boxed{1 = 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5} + 9 \cdot 10^{-6} + \ldots}$$

Tipos de números decimales

Los números decimales pueden ser de tres tipos:

* Números decimales **exactos**. Tienen una cantidad finita de dígitos en la parte decimal.
* Números decimales **periódicos**. Tienen una cantidad infinita de dígitos en la parte decimal, pero a partir de cierto momento siempre se repiten por grupos.
* Números decimales **ni exactos ni periódicos**. Tienen una cantidad infinita de dígitos en la parte decimal que nunca se repiten por grupos.

Ejemplos de números decimales exactos

Los ejemplos que tienen pocos dígitos en la parte decimal son fáciles de entender:

Ejemplo 1	4,547	Ejemplo 2	–1,0082	Ejemplo 3	19,4
Ejemplo 4	189,00289	Ejemplo 5	0,0018209	Ejemplo 6	–36,3876

Pero hay que tener en cuenta que podrían tener muchos o muchísimos dígitos en la parte decimal:

Ejemplo 7	23,00035693059385929385038422025555129248343585
Ejemplo 8	–19,059624587495720492724293589734264563449678235073457

Ejemplos de números decimales periódicos

Como los números decimales periódicos tienen infinitos dígitos en la parte decimal, en principio deberemos escribir unos puntos suspensivos al final. Pronto explicaremos una manera más clara de escribirlos.

Ejemplo 9	5,7777777777777777777...	Ejemplo 10	–8,143143143143143...
Ejemplo 11	23,2323444444444444444...	Ejemplo 12	0,00384385385385385...

Un problema grave que puede surgir con los números periódicos es que los grupos de dígitos que se repiten sean muy largos, con lo que pueden ser difíciles de detectar y, sobre todo, de manejar.

Ejemplo 13	0,58132457443132457443132457443132457443132457443...
Ejemplo 14	–58,847226485512778472264855127784722648551277...

Ejemplos de números decimales ni exactos ni periódicos

Como los números decimales ni exactos ni periódicos tienen infinitos dígitos en la parte decimal, hay escribirlos con puntos suspensivos al final. Es importante darse cuenta de que, como son infinitos y no se repiten nunca, no podemos saber cuáles son exactamente los dígitos de estos números hasta que no los calculemos de alguna manera, si es que se puede.

Ejemplo 15	27,185736295837600027475689184756382009578122424275843...
Ejemplo 16	–9,010020003000040000050000006000000070000000080000...

Algunos números decimales no periódicos son tan importantes que tienen nombre propio, pero hasta el momento en este curso solo te hemos presentado π.

Ejemplo 17	π = 3,141592653589793238462643383279502884197169399375...

El periodo de los números decimales periódicos

Se llama **periodo** de un número decimal periódico al grupo más corto de cifras que se repite de manera infinita. Hay que especificar «el más corto» porque, si no, habría infinitas posibilidades de elegir el periodo y porque es el más fácil de manejar.

Ejemplo 1. El periodo del número 45,777777777777... es 7. No es 77 ni 777.

Ejemplo 2. El periodo del número −31,384545454545... es 45. No es 4545.

El anteperiodo de los números decimales periódicos

Se llama **anteperiodo** de un número decimal periódico al grupo de cifras decimales que puede haber entre el separador decimal y la primera aparición del periodo.

Tipos de números decimales periódicos

- ✱ Si un número decimal periódico no tiene anteperiodo se dice que es **puro**.
- ✱ Si un número decimal periódico tiene anteperiodo se dice que es **mixto**.

Ejemplo 3. El anteperiodo del número 23,09814814814814... es 09. Es mixto.

Ejemplo 4. El número 92,3737373737373737... no tiene anteperiodo. Es puro.

Escritura de los números decimales periódicos

Existen varias maneras de escribir los números periódicos, dependiendo del idioma en que esté escrito el texto. Explicamos el método que se usa en español y el método que se usa en inglés.

Escritura en español

Se escribe la parte entera, el separador decimal, el anteperiodo (si lo hay) y luego una sola vez el periodo, con un arco encima que abarque a todas sus cifras.

Ejemplo 5. El número 4,78251251251251... se escribe $4{,}78\overset{\frown}{251}$

Ejemplo 6. El número 53,2626262626262... se escribe $53{,}\overset{\frown}{26}$

Escritura en inglés

Se escribe la parte entera, el separador decimal, el anteperiodo (si lo hay) y luego una sola vez el periodo, con un segmento encima que abarque a todas sus cifras.

Ejemplo 7. El número 36,113485858585858... se escribe $36{,}1134\overline{85}$.

Ejemplo 8. El número 29,873487348734873487348734... se escribe $29{,}\overline{8734}$.

Ejemplo 9. El número −45,22222222222222222... se escribe $-45{,}\overline{2}$.

Escritura de los números decimales periódicos en este curso

Aunque este curso está escrito en español, se va a usar la notación en inglés. Hay varios motivos para hacerlo:

- ✱ Nos parece una notación mucho más lógica.
- ✱ En los procesadores de texto es muy fácil de aplicar, ya que se trata simplemente de elegir el efecto de suprarrayado (se llama *overline* en inglés).
- ✱ Si el periodo es largo, en la notación española el arco o bien queda casi recto o bien es exageradamente grande.
- ✱ La humanidad tiende progresivamente a una completa unificación en la escritura de la matemática (que no dependa del idioma usado) y a una estandarización en la ciencia, como demuestra la existencia y el éxito del Sistema Internacional. En esta unificación, parece lo más probable que la manera de escribir los números decimales periódicos que se imponga sea la del idioma inglés.

Enunciados

Dados los siguientes números decimales que o bien son exactos o bien son periódicos, se pide:

a) Decir si son exactos, periódicos puros o periódicos mixtos.

b1) Si son exactos, decir cuántas cifras decimales tienen.

b2) Si son periódicos, decir cuál es el periodo, cuál es el anteperiodo y escribirlos con la notación abreviada.

① 41,987	② 71,8363636...	③ –0,0000109	④ 8,151151151...
⑤ 15,34343434	⑥ –19,080808...	⑦ 4,009090909...	⑧ –0,91949494...

Resoluciones

① (a) Es un número decimal exacto; (b) tiene 3 cifras decimales

② (a) Es un número decimal periódico mixto

(b) Periodo: 36; anteperiodo: 8; escritura abreviada: $71{,}8\overline{36}$

③ (a) Es un número decimal exacto; (b) tiene 7 cifras decimales

④ (a) Es un número decimal periódico puro

(b) Periodo: 151; anteperiodo: no tiene; escritura abreviada: $8{,}\overline{151}$

⑤ (a) Es un número decimal exacto; (b) tiene 8 cifras decimales

⑥ (a) Es un número decimal periódico puro

(b) Periodo: 08; anteperiodo: no tiene; escritura abreviada: $-19{,}\overline{08}$

⑦ (a) Es un número decimal periódico mixto

(b) Periodo: 09; anteperiodo: 0; escritura abreviada: $4{,}0\overline{09}$

⑧ (a) Es un número decimal periódico mixto

(b) Periodo: 94; anteperiodo: 91; escritura abreviada: $-0{,}91\overline{94}$

Enunciados

⑨ Inventa un número decimal que no sea exacto ni periódico explicando cómo se pueden ir obteniendo sus cifras.

⑩ Utilizando alguna variante del número π, inventa un número decimal que no sea exacto ni periódico que tenga por parte entera 0.

Resoluciones

⑨ Solución: 0,12345678910111213141516171819202122232425262728 2930...

La parte entera es 0 y la parte decimal se va formando escribiendo los números naturales uno tras otro; es imposible que se repitan sus dígitos por grupos.

⑩ Solución: π–3 = 0,14159265358979323846264338327950288419716939 9...

Como los dígitos de π son infinitos y no se repiten, así les ocurre a los de π–3.

Enunciados

Dados los siguientes números decimales que o bien son exactos o bien son periódicos, se pide:

a) Decir si son exactos, periódicos puros o periódicos mixtos.

b1) Si son exactos, decir cuántas cifras decimales tienen.

b2) Si son periódicos, decir cuál es el periodo, cuál es el anteperiodo y escribirlos con la notación abreviada.

① 8,0909

② –7,0909...

③ 0,173586

④ 33,22753753753...

⑤ –3,175176176176...

⑥ 4,676768

⑦ 4,555555555555...

⑧ –3,9213131313...

⑨ 0,005005005...

⑩ 12,12

⑪ –51,7878929292...

⑫ 304,3041111111...

⑬ 21,038603860386...

⑭ 13,0102999999

⑮ –15,123451234512...

⑯ 8,012345345345...

⑰ –5,3838383...

⑱ 8,2525257

⑲ 7,222522222222...

⑳ 95,03867538673867...

㉑ 29,079336

㉒ –0,0005757575...

㉓ 1,004005006006006...

Redondeo de números decimales

Los números decimales exactos pueden tener muchas cifras decimales; los demás números decimales tienen infinitas cifras decimales. Por lo tanto, casi siempre habrá que redondearlos para dar la solución final de un ejercicio o problema; veremos excepciones en el nivel 4, en casos en los que hace falta la solución exacta.

El resultado final del redondeo siempre es un número **exacto**; normalmente será un número decimal exacto, pero podría ser un número entero si se pide el redondeo a la unidad.

Redondeo de números decimales exactos

Este caso no tiene ninguna dificultad y ya lo trabajamos en el nivel 1.

Ejemplos

Redondea los siguientes números a la centésima:

① 2,481 ② 5,318 ③ 4,275 ④ 6,296

Resoluciones

① 2,48 ② 5,32 ③ 4,28 ④ 6,30

Observa en el número (4) que mantenemos el «0» final porque es la cifra de las centésimas y el enunciado nos las pide.

Redondeo de números decimales periódicos

En este caso se nos pueden presentar dos posibilidades:

Primera posibilidad. Aparecen las cifras decimales que necesitamos para el redondeo, o más. En este caso, procedemos exactamente igual que si el número fuera decimal exacto.

Ejemplos

Redondea los siguientes números a la milésima:

⑤ $3{,}41\overline{24}$ ⑥ $2{,}383\overline{7}$ ⑦ $7{,}0\overline{125}$ ⑧ $8{,}23\overline{98}$

Resoluciones

⑤ 3,412 ⑥ 2,384 ⑦ 7,013 ⑧ 8,240

Segunda posibilidad. Aparecen menos cifras decimales que las que necesitamos para el redondeo. En este caso, añadimos mentalmente las que sean necesarias usando el periodo, que se puede repetir tantas veces como haga falta.

Ejemplos

Redondea los siguientes números a la milésima:

⑨ $5{,}\overline{28}$ ⑩ $6{,}\overline{74}$ ⑪ $7{,}2\overline{5}$ ⑫ $3{,}\overline{799}$

Resoluciones

Como se pide redondear a la milésima, hacen falta al menos 4 cifras decimales.

⑨ Mentalmente: $5{,}\overline{28} = 5{,}2828...$ Solución: 5,283

⑩ Mentalmente: $6{,}\overline{74} = 6{,}7474...$ Solución: 6,747

⑪ Mentalmente: $7{,}2\overline{5} = 7{,}2555...$ Solución: 7,256

⑫ Mentalmente: $3{,}\overline{799} = 3{,}799799...$ Solución: 3,800

Enunciados

Redondea los siguientes números a la centésima.

①	$3{,}472$	②	$8{,}137$	③	$2{,}035$	④	$4{,}597$
⑤	$7{,}3\overline{42}$	⑥	$5{,}2\overline{86}$	⑦	$7{,}36\overline{5}$	⑧	$1{,}29\overline{6}$
⑨	$4{,}\overline{3}$	⑩	$6{,}\overline{7}$	⑪	$3{,}2\overline{5}$	⑫	$0{,}\overline{69}$
⑬	$1{,}\overline{80}$	⑭	$1{,}\overline{08}$	⑮	$5{,}8\overline{7}$	⑯	$3{,}\overline{68}$
⑰	$7{,}\overline{01}$	⑱	$8{,}\overline{73}$	⑲	$4{,}\overline{51}$	⑳	$1{,}4\overline{2}$

Enunciados

Redondea los siguientes números a la milésima.

㉑	$3{,}4826$	㉒	$5{,}2238$	㉓	$2{,}1015$	㉔	$7{,}0196$
㉕	$4{,}84\overline{58}$	㉖	$2{,}93\overline{41}$	㉗	$5{,}67\overline{85}$	㉘	$3{,}9\overline{007}$
㉙	$8{,}\overline{23}$	㉚	$6{,}\overline{86}$	㉛	$5{,}\overline{28}$	㉜	$1{,}\overline{82}$
㉝	$6{,}71\overline{4}$	㉞	$4{,}07\overline{8}$	㉟	$0{,}83\overline{5}$	㊱	$1{,}\overline{899}$
㊲	$2{,}\overline{289}$	㊳	$3{,}\overline{945}$	㊴	$2{,}\overline{7}$	㊵	$7{,}\overline{2}$

Enunciados

Redondea los siguientes números a la diezmilésima.

㊶	$1{,}00835$	㊷	$2{,}11991$	㊸	$3{,}46786$	㊹	$5{,}49996$
㊺	$3{,}83\overline{571}$	㊻	$0{,}983\overline{75}$	㊼	$4{,}\overline{38838}$	㊽	$1{,}004\overline{80}$
㊾	$7{,}\overline{93}$	㊿	$9{,}\overline{37}$	(51)	$4{,}\overline{157}$	(52)	$3{,}\overline{812}$
(53)	$3{,}045\overline{7}$	(54)	$4{,}\overline{9820}$	(55)	$2{,}53\overline{69}$	(56)	$7{,}\overline{45}$
(57)	$1{,}\overline{54}$	(58)	$8{,}28\overline{3}$	(59)	$1{,}09\overline{7}$	(60)	$0{,}\overline{79}$
(61)	$3{,}\overline{98}$	(62)	$4{,}\overline{050}$	(63)	$1{,}2\overline{781}$	(64)	$4{,}0\overline{129}$

Enunciados

Redondea los siguientes números a la unidad.

(65)	$5{,}\overline{6}$	(66)	$8{,}\overline{1}$	(67)	$10{,}\overline{5}$	(68)	$5{,}\overline{91}$
(69)	$3{,}\overline{80}$	(70)	$1{,}\overline{32}$	(71)	$4{,}\overline{48}$	(72)	$3{,}\overline{51}$

Enunciados

El resultado de las siguientes operaciones puede ser un número entero, un número decimal exacto o un número decimal periódico. En cada caso, escribe el resultado de la manera más abreviada posible.

① $4{,}\overline{2} + 3{,}\overline{1}$

② $4{,}2 + 3{,}\overline{1}$

③ $3{,}\overline{21} + 4{,}\overline{12}$

④ $5{,}\overline{7} - 2{,}\overline{3}$

⑤ $5{,}\overline{7} - 2{,}3$

⑥ $5{,}\overline{789} - 0{,}\overline{4}$

⑦ $4{,}\overline{5} - 1{,}\overline{5}$

⑧ $8{,}1\overline{7} - 4{,}3\overline{7}$

⑨ $2 \cdot 5{,}\overline{3}$

⑩ $3 \cdot 4{,}\overline{31}$

⑪ $6 \cdot 1{,}7\overline{1}$

⑫ $10 \cdot 6{,}\overline{7}$

⑬ $100 \cdot 0{,}\overline{23}$

⑭ $100 \cdot 1{,}57\overline{4}$

⑮ $7 \cdot 4{,}\overline{02}$

⑯ $8{,}\overline{4} : 2$

⑰ $10{,}\overline{10} : 5$

⑱ $26{,}\overline{26} : 100$

⑲ $1{,}3\overline{8} : 10$

⑳ $1{,}\overline{37} + 2{,}\overline{4}$

㉑ $2{,}\overline{6} + 5{,}\overline{7}$

㉒ $2 \cdot 3{,}\overline{8}$

㉓ $4 - 1{,}\overline{3}$

㉔ $7{,}\overline{89} - 2{,}\overline{134}$

㉕ $1{,}7\overline{4} : 2$

Escritura de un número entero como suma con potencias de 10

Ya vimos en el nivel 1 cómo se podía hacer, hasta cierto punto.

Ejemplo 1: $3852 = 3 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 2 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2$

Realmente, hay un poco de trampa, porque falta la potencia de 10 en las unidades. Ahora sabemos que $10^0 = 1$, luego podemos escribir ya todo con potencias de 10.

Ejemplo 2: $3852 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

Escritura de un número decimal exacto como suma con potencias de 10

Usando que $10^{-1} = 1:10 = 0{,}1$; $10^{-2} = 1:100 = 0{,}01$; $10^{-3} = 1:1000 = 0{,}001$; etcétera, podemos escribir cualquier número decimal exacto como una suma con potencias de 10.

Ejemplo 3: $4{,}769 = 4 \cdot 1 + 7 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}01 + 9 \cdot 0{,}001 = 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}$

Ejemplo 4: $0{,}0072 = 7 \cdot 0{,}001 + 2 \cdot 0{,}0001 = 7 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4}$

Ejemplo 5: $723{,}856 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$

Escritura de un número decimal periódico como suma con potencias de 10

Un número decimal periódico tiene infinitas cifras decimales; ¿quiere esto decir que la suma también tendrá infinitos sumandos? ¡Esto se pone interesante! ¿Puede una suma tener infinitos sumandos?

Empezamos con un caso sencillo: un número decimal periódico puro que tenga un periodo de una sola cifra; como la parte entera ya la sabemos manejar, podemos poner un 0.

Ejemplo 6: $0{,}\overline{3} = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \ldots =$ (continuará)

Cada vez que escribimos puntos suspensivos en matemáticas, estamos afrontando un problema: ¿realmente sabemos cómo continuar? Plantéate si sabrías cómo sigue la suma. **Pausa**. Si efectivamente lo sabes, acabas de descubrir que sí que existen las sumas con infinitos sumandos (¡sorpresa!).

Lo más difícil ha pasado, ahora ya podemos seguir usando el método que acabamos de ver con los números decimales exactos:

(continuación)

$= 3 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}01 + 3 \cdot 0{,}001 + 3 \cdot 0{,}0001 + 3 \cdot 0{,}00001 + \ldots =$

$= 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5} + \ldots$

Si el periodo tiene más de una cifra, lo que dejamos para los puntos suspensivos es un poco más difícil, pero también tiene sentido y lo puedes continuar tú:

Ejemplo 7: $0{,}\overline{27} = 2 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-6} + \ldots$

Podemos unir todo lo que hemos visto y escribir un número decimal periódico mixto sabiendo que la suma infinita se escribirá con sumandos que tienen todos la misma forma:

Ejemplo 8: $3{,}52\overline{4} = 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-5} \ldots$

Las sumas con infinitos sumandos

Las hemos escrito usando puntos suspensivos, pero como se estudian bastante en matemáticas, existe una manera de escribirlas sin puntos suspensivos, usando la letra griega sigma mayúscula («Σ»), que llamamos en estos casos «sumatorio». Explicaremos la notación en niveles superiores. Ejemplo 9: $0{,}\overline{3} = \sum_{n \in \mathbb{N}} 3 \cdot 10^{-n}$

Enunciados

Escribe los siguientes números como la suma de cada una de sus cifras que no sea 0 multiplicada por una potencia de 10; puedes usar puntos suspensivos cuando sea necesario.

① 456,23

② 32,495

③ 3,9728

④ 500,03

⑤ 30 608,005 073

⑥ $0,\overline{7}$

⑦ $0,\overline{43}$

⑧ $657,\overline{2}$

⑨ $7,04\overline{6}$

⑩ $78,36\overline{42}$

Enunciados

Las siguientes sumas dan como resultado un número decimal, que puede ser exacto o periódico. Averigua el valor de la suma y escribe el resultado final de la manera más abreviada que sea posible.

⑪ $3{\cdot}10^{2} + 5{\cdot}10^{1} + 8{\cdot}10^{0} + 2{\cdot}10^{-1} + 9{\cdot}10^{-2} + 5{\cdot}10^{-3}$

⑫ $6{\cdot}10^{3} + 4{\cdot}10^{1} + 10^{0} + 9{\cdot}10^{-2} + 5{\cdot}10^{-3} + 8{\cdot}10^{-4}$

⑬ $9{\cdot}10^{5} + 4{\cdot}10^{3} + 5{\cdot}10^{1} + 9{\cdot}10^{-1} + 6{\cdot}10^{-2} + 4{\cdot}10^{-3}$

⑭ $2{\cdot}10^{-1} + 2{\cdot}10^{-2} + 2{\cdot}10^{-3} + 2{\cdot}10^{-4} + 2{\cdot}10^{-5} + 2{\cdot}10^{-6} + \ldots$

⑮ $3{\cdot}10^{-1} + 5{\cdot}10^{-2} + 3{\cdot}10^{-3} + 5{\cdot}10^{-4} + 3{\cdot}10^{-5} + 5{\cdot}10^{-6} + \ldots$

⑯ $2{\cdot}10^{0} + 3{\cdot}10^{-2} + 5{\cdot}10^{-3} + 5{\cdot}10^{-4} + 5{\cdot}10^{-5} + 5{\cdot}10^{-6} + \ldots$

⑰ $3{\cdot}10^{-1} + 8{\cdot}10^{-2} + 3{\cdot}10^{-3} + 8{\cdot}10^{-4}$

⑱ $9{\cdot}10^{2} + 8{\cdot}10^{1} + 6{\cdot}10^{0} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + 10^{-5} + \ldots$

⑲ $9{\cdot}10^{-3} + 9{\cdot}10^{-6} + 9{\cdot}10^{-9} + 9{\cdot}10^{-12} + 9{\cdot}10^{-15} + \ldots$

⑳ $8{\cdot}10^{-1} + 9{\cdot}10^{-3} + 8{\cdot}10^{-4} + 9{\cdot}10^{-6} + 8{\cdot}10^{-7} + 9{\cdot}10^{-9} + \ldots$

Enunciado

㉑ Si sumas todas las potencias de 10 con exponente negativo e impar, ¿qué número obtienes?

Conversión de fracción a número decimal

Si nos dan una fracción, entendida con el concepto original de números enteros en el numerador y el denominador, y queremos convertirla en un solo número (entero o decimal) no tenemos más que considerar la fracción como el cociente de los dos números y hacer la división.

Estamos interesados no solo en hacer la división, sino también en comprender qué posibles resultados se pueden obtener, considerando **todos** los casos posibles.

El resultado puede ser un número entero

Ocurrirá cuando el numerador sea múltiplo del denominador. Realmente es un caso poco interesante, puesto que lo sabemos manejar desde el nivel 1, cuando dividíamos números enteros entre sí. La única novedad es que ahora solo añadimos que la división puede escribirse como fracción.

Ejemplo 1 $\frac{35}{5}=7$	Ejemplo 2 $\frac{-63}{7}=-9$	Ejemplo 3 $\frac{48}{12}=4$

El resultado puede ser un número decimal

Si el numerador no es múltiplo del denominador, el resultado ya no puede ser un número entero, luego debe ser un número decimal. Ahora es cuando el estudio toma interés, porque puede ocurrir que la división sea infinita: ¡otra vez habrá que recurrir a los puntos suspensivos!

Hay que advertir de entrada que una calculadora de bolsillo será inútil en los casos complicados, porque las cifras decimales importantes podrían estar más allá del alcance de la calculadora. Así que tendremos que hacer la operación a mano y con cuidado, fijándonos en los detalles.

Para facilitar las operaciones, casi siempre es mejor simplificar la fracción hasta llegar a una fracción irreducible antes de hacer la división.

El resultado puede ser un número decimal exacto

Si en algún momento de la división llegamos a un resto 0, la operación de la división habrá terminado y el resultado será un número decimal exacto.

Ejemplo 4: $\frac{5}{8}=0{,}625$

```
5          |8
5 0         0, 6 2 5
  2 0
    4 0
      |0|
```

El resultado puede ser un número decimal periódico

Si en algún momento de la división llegamos a un resto que ya haya aparecido antes, la operación de la división será infinita, pero las cifras se repetirán.

Ejemplo 5: $\frac{1}{3}=0{,}333\ldots=0{,}\overline{3}$.

```
1          |3
1 0         0, 3 3 3 …
  1 0
    1 0
      1 …
```


Importancia de los restos al hacer la división

Cuando se convierte una fracción en un número decimal, hay que prestar atención al resto parcial que se va obteniendo en cada paso. Por eso, en los siguientes ejemplos vamos a escribir debajo de cada cifra del cociente cuál fue el resto obtenido tras operar con esa cifra, antes de añadir un cero para seguir dividiendo.

Enunciados

Convierte las siguientes fracciones en números decimales y di qué tipo de número decimal se obtiene.

① $\frac{15}{16}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{85}{66}$

Resoluciones

① Observa que, si dividimos entre 16, los restos en cada paso podrían ser en principio 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 o 15; no podría dar más porque si ocurriera sería simplemente porque hemos dividido mal. En este caso concreto, con dividendo 15, los restos han sido 15, 6, 12, 8 y 0. Como hemos llegado a un resto 0, la división ha concluido y el resultado final es un número decimal exacto.

```
1 5                   | 1 6
1 5 0                 0, 9 3 7 5
    6 0                ↓  ↓ ↓  ↓ ↓
    1 2 0             15  6 12 8 0
        8 0
          0
```

Solución: $\frac{15}{16}$ = 0,9375, número decimal exacto.

② Observa que, si dividimos entre 7, los restos en cada paso podrían ser en principio 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. En este caso concreto, con dividendo 1, los restos han sido tras obtener cinco cifras del cociente 1, 3, 2, 6, 4 y 5. En el útimo paso que vamos a dar vemos que cabe a 7 y sobra de resto 1, que fue con el que comenzamos; por tanto, se van a repetir indefinidamente a partir de aquí tanto las cifras del cociente como los restos parciales. El resultado final es un número decimal periódico.

```
1                     | 7
1 0                   0, 1 4 2 8 5 7
  3 0                  ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
    2 0                1 3 2 6 4 5 1
      6 0
        4 0
          5 0
            1 …
```

Solución: $\frac{1}{7}$ = $0,\overline{142857}$, número decimal periódico puro.

③ Si dividimos entre 66, los restos en cada paso podrían ser en principio de 0 a 65, no más. En este caso concreto, con dividendo 85, los restos han sido tras obtener cuatro cifras del cociente 19, 58 y 52. En el útimo paso que vamos a dar vemos que cabe a 7 y sobra de resto 58, que es un resto que ya ha aparecido antes; por tanto, se van a repetir indefinidamente a partir de aquí tanto las cifras del cociente como los restos parciales. El resultado final es un número decimal periódico.

```
8 5                | 6 6
1 9 0              1, 2 8 7
  5 8 0             ↓  ↓  ↓  ↓
    5 2 0          19 58 52 58
      5 8 …
```

Solución: $\frac{85}{66}$ = $1,2\overline{87}$, número decimal periódico mixto.

Enunciados

Convierte las siguientes fracciones en números decimales y di qué tipo de número decimal se obtiene (exacto, periódico puro o periódico mixto).

① $\frac{7}{8}$

② $\frac{1}{6}$

③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{6}{5}$

⑤ $\frac{1}{11}$

⑥ $\frac{5}{18}$

⑦ $\frac{17}{32}$

⑧ $\frac{1}{55}$

⑨ $\frac{4}{20}$

⑩ $\frac{13}{18}$

⑪ $\frac{1}{13}$

⑫ $\frac{127}{400}$

⑬ $\frac{70}{333}$

⑭ $\frac{2}{7}$

⑮ $\frac{35}{55}$

⑯ $\frac{1297}{180}$

⑰ $\frac{5}{11}$

⑱ $\frac{1}{23}$

Ejemplos de conversión de fracción en número

Hemos visto algunos ejemplos de conversión de una fracción en un número y quizá hayas resuelto algunos ejercicios. Si todo ha ido bien, verás que siempre ha ocurrido alguno de estos casos:

* El resultado es un número entero.
* El resultado es un número decimal exacto.
* El resultado es un número decimal periódico puro.
* El resultado es un número decimal periódico mixto.

Para la explicación teórica que nos interesa ahora, podemos reducir los cuatro casos a solo dos:

* La división es exacta y por tanto el resultado es un número entero o un número decimal exacto.

  Ejemplo 1: $\dfrac{629}{37} = 17$; ejemplo 2: $\dfrac{545}{1024} = 0{,}5322265625$

* La división no es exacta y el resultado ha sido un número decimal periódico, puro o mixto.

  Ejemplo 3: $\dfrac{1}{17} = 0{,}\overline{0588235294117647}$; ejemplo 4: $\dfrac{226}{275} = 0{,}82\overline{18}$

Objetivo de la demostración

Ahora afrontamos la tarea de **demostrar** que esas dos son las únicas posibilidades que hay, en **todos** los casos. Es una tarea típica de la matemática: hacer demostraciones generales. En este nivel de enseñanza, te conviene entender bien primero los ejemplos concretos para poder afrontar una demostración general; pero te viene muy bien hacer el esfuerzo de entender esa generalización.

Demostración de los casos de conversión de fracción en número

Partimos de una fracción general, $\dfrac{a}{b}$, con a y b números enteros y $b \neq 0$. Si la fracción es negativa, podemos asignar el número negativo al numerador, así que podemos asumir para la demostración que $b > 0$.

Cuando hacemos la división de a entre b el resto en cada paso tiene que ser menor que b, luego hay exactamente b posibles resultados: 0, 1, 2, ..., b−1.

Si en algún momento de la división el resto es 0, la división ha acabado y el resultado será un número entero o un número decimal exacto.

[Ahora viene el momento clave de la demostración]

Si no aparece ningún 0 como resto, debe llegar un momento en que se repita por primera vez uno de los restos (puesto que hay una cantidad finita de posibilidades), luego desde ahí se repetirán periódicamente las cifras del cociente y por tanto el resultado será un número decimal periódico (puro o mixto, dependiendo de cuándo aparezca el periodo).

Principio del palomar

La idea clave de esta demostración se parece mucho a un principio que se usa bastante para hacer demostraciones en matemáticas: el principio del palomar. La idea de este principio es que si tienes cuatro palomas y las tienes que guardar en tres palomares, en alguno de los palomares tendrá que haber más de una paloma.

Fracción generatriz

La fracción generatriz de un número decimal es una fracción que tiene el mismo valor que la fracción. El nombre proviene de que la fracción **genera** al número.

Ejemplo 1. La fracción generatriz del número 0,5 es $\frac{1}{2}$ porque $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

Ejemplo 2. La fracción generatriz del número $0{,}\overline{3}$ es $\frac{1}{3}$ porque $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$.

Si un número decimal tiene fracción generatriz, entonces tiene infinitas fracciones generatrices, puesto que todas las fracciones equivalentes a la primera también serán generatrices. Ya sabes que en la mayor parte de las aplicaciones de las fracciones se prefiere trabajar con fracciones irreducibles, por eso en los problemas de obtención de fracciones generatrices muchas veces se pide que sea irreducible.

El problema que afrontamos es, dado un número decimal exacto o periódico, averiguar una de sus fracciones generatrices. Aunque existen reglas nemotécnicas para obtener una, no son más que la aplicación de un método, así que preferimos explicar el método y aplicarlo. Aunque parece una manera más larga de resolver el problema, es recomendable, porque los métodos se recuerdan más fácilmente que las reglas.

Existen tres métodos distintos de obtención de fracciones generatrices, según sea el número decimal (exacto, periódico puro y periódico mixto), de creciente dificultad, pero la idea general es pensar qué se puede hacer para eliminar la parte decimal del número.

Obtención de la fracción generatriz de un número decimal exacto

Este método es bastante sencillo; comenzamos con dos ejemplos para ver la idea:

Ejemplo 3. Obtén una fracción generatriz del número 6,53.

Resolución: si eliminamos el separador decimal del número 6,53 obtenemos el número entero 653, que vamos a usar como numerador de la fracción. Si convertimos 6,53 en 653 es porque hemos multiplicado por 100, luego para que la fracción siga valiendo 6,53 habrá que dividir 653 entre 100.

Solución: $6{,}53 = \frac{653}{100}$

Hemos obtenido una fracción irreducible, porque 100 solo es divisible entre 2 y entre 5 pero 653 no es divisible ni entre 2 ni entre 5.

Ejemplo 4. Obtén una fracción generatriz del número 0,0734 que sea irreducible.

Resolución: si eliminamos el separador decimal del número 0,0734 obtenemos el número entero 734, que vamos a usar como numerador de la fracción. Si convertimos 0,0734 en 734 es porque hemos multiplicado por 10 000, luego para que la fracción siga valiendo 0,0734 habrá que dividir 734 entre 10 000:

$0{,}0734 = \frac{734}{10000}$. Simplificando: $0{,}0734 = \frac{734}{10000} = \frac{367}{5000}$

Solución: $0{,}0734 = \frac{367}{5000}$

Como vemos, solo hay que dividir el número sin el separador decimal entre una potencia de 10 con tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

Obtención de la fracción generatriz de un número decimal periódico puro

Comenzamos la explicación del método usando un ejemplo que sea lo más sencillo que sea posible y más adelante veremos el método con casos un poco más complicados. Si entiendes bien un ejemplo, ya te parecerán todos iguales.

Ejemplo

Enunciado: obtén una fracción generatriz del número $0{,}\overline{6}$ que sea irreducible.

Explicación

En general en la vida, la ciencia y la matemática se intenta aplicar métodos conocidos para resolver problemas nuevos.

En este caso, podríamos pensar en aplicar el método que hemos utilizado para averiguar una fracción generatriz de un número decimal exacto: comenzamos pensando en eliminar el separador decimal del número para obtener un número entero, pero ahora no podemos aplicar este método porque $0{,}\overline{6}$ tiene infinitas cifras decimales y no existen números enteros que tengan infinitas cifras, luego no podemos simplemente eliminar el separador decimal.

Por tanto, hay que pensar otro método. ¿Qué podemos hacer para eliminar infinitas cifras decimales? La respuesta es: restar un número que tenga las mismas infinitas cifras decimales; así: $6{,}\overline{6} - 0{,}\overline{6} = 6$. Y el número $6{,}\overline{6}$ se puede obtener a partir del número $0{,}\overline{6}$ multiplicándolo por 10. Así que debemos hacer varias operaciones con el número del enunciado y para eso nos vendrá muy bien denominarlo con una letra.

Desarrollo

Usamos una letra cualquiera para designar el número: $F = 0{,}\overline{6}$

(Hemos elegido la «F» por ser la inicial de «fracción», pero valdría cualquier otra.)

Multiplicamos la igualdad por 10: $10 \cdot F = 10 \cdot 0{,}\overline{6} \Rightarrow 10F = 6{,}\overline{6}$

Restamos miembro a miembro las igualdades «$10F = 0{,}\overline{6}$» y «$F = 0{,}\overline{6}$»:

$10F - F = 6{,}\overline{6} - 0{,}\overline{6} \Rightarrow 9F = 6$.

Puedes pensar de dos maneras cómo obtener el valor de F a partir de esta última expresión:

* Si multiplicas 9 por $\frac{6}{9}$ obtienes 6, como viste en aritmética en el nivel 1, así que la fracción F debe ser $F = \frac{6}{9}$
* El 9 que está multiplicando en un miembro pasa dividiendo al otro, como viste estudiando ecuaciones en álgebra en el nivel 1, luego $F = \frac{6}{9}$

Recuerda que F es una manera de llamar al número que nos han dado en el enunciado, luego ya hemos obtenido una fracción generatriz. Nos falta simplificarla, ya que en este caso es posible: $F = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Solución: $0{,}\overline{6} = \frac{2}{3}$

Comparación con las películas de superhéroes

Hemos eliminado infinitos decimales usando otros infinitos decimales. En las películas de superhéroes hacen falta villanos con gran poder para dar emoción.

Obtención de la fracción generatriz de un número decimal periódico puro

Vemos cómo el método funciona muy bien aunque los números sean más difíciles.

Enunciados

Obtén una fracción generatriz de cada uno de los siguientes números y que sea irreducible.

① $4,\overline{18}$ ② $0,\overline{459}$ ③ $0,\overline{0036}$

Resoluciones

① Llamamos $F = 4,\overline{18}$

Como el periodo del número $4,\overline{18}$ tiene dos cifras, multiplicamos por 100:

$100 \cdot F = 100 \cdot 4,\overline{18} \Rightarrow 100F = 418,\overline{18}$

Restamos «$100F = 418,\overline{18}$» menos «$F = 4,\overline{18}$»

$100F - F = 418,\overline{18} - 4,\overline{18} \Rightarrow 99F = 414$

Despejamos F: $F = \frac{414}{99}$; simplificamos: $\frac{414}{99} = \frac{46}{11}$

Solución: $4,\overline{18} = \frac{46}{11}$

② Llamamos $F = 0,\overline{459}$

Como el periodo del número $0,\overline{459}$ tiene tres cifras, multiplicamos por 1000:

$1000 \cdot F = 1000 \cdot 0,\overline{459} \Rightarrow 1000F = 459,\overline{459}$

Restamos: $1000F - F = 459,\overline{459} - 0,\overline{459} \Rightarrow 999F = 459$

Despejamos y simplificamos: $F = \frac{459}{999} = \frac{51}{111} = \frac{17}{37}$

Solución: $0,\overline{459} = \frac{17}{37}$

③ Llamamos $F = 0,\overline{0036}$

Multiplicamos por 10000: $10000F = 36,\overline{0036}$

Restamos: $9999F = 36$

Despejamos y simplificamos: $F = \frac{36}{9999} = \frac{4}{1111}$

Solución: $0,\overline{0036} = \frac{4}{1111}$

Observación

En estos ejercicios es fácil que aparezcan fracciones difíciles de simplificar cuando el periodo tiene muchas cifras decimales. La descomposición factorial en números primos de algunos números enteros fomados por nueves puede ayudar:

$9 = 3^2$	$99 = 3^2 \cdot 11$	$999 = 3^3 \cdot 37$	$9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 191$	$99999 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271$

Obtención de la fracción generatriz de un número decimal periódico mixto

Este método se parece mucho al de obtención de la fracción generatriz de un número decimal periódico puro, ya que también se basa en restar dos números decimales que tengan exactamente la misma parte decimal. La diferencia es que para obtener los dos números que restaremos hay que dar un paso más.

Enunciados

Obtén una fracción generatriz de cada uno de los siguientes números y que sea irreducible.

① $0{,}2\overline{57}$ ② $0{,}18\overline{3}$

Resoluciones

① Llamamos $F = 0{,}2\overline{57}$

Como el anteperiodo del número $0{,}2\overline{57}$ tiene una cifra, multiplicamos por 10:

$10·F = 10·0{,}2\overline{57} \Rightarrow 10F = 2{,}\overline{57}$. Observa que, al «saltarnos» el anteperiodo, hemos obtenido un número decimal periódico puro, que ya sabemos convertir en fracción: ahora hay que «saltarse» la primera aparición del periodo.

Como el periodo del número $2{,}\overline{57}$ tiene dos cifras, multiplicamos la igualdad obtenida por 100:

$100·10F = 100·2{,}\overline{57} \Rightarrow 1000F = 257{,}\overline{57}$

Restamos miembro a miembro las dos últimas igualdades obtenidas, con lo que eliminaremos la parte decimal: «$1000F = 257{,}\overline{57}$» menos «$10F = 2{,}\overline{57}$»

$1000F – 10F = 257{,}\overline{57} – 2{,}\overline{57} \Rightarrow 990F = 255$

Despejamos F: $F = \dfrac{255}{990}$; simplificamos: $\dfrac{255}{990} = \dfrac{85}{330} = \dfrac{17}{66}$

Solución: $0{,}2\overline{57} = \dfrac{17}{66}$

② Llamamos $F = 0{,}18\overline{3}$

Como el anteperiodo del número $0{,}18\overline{3}$ tiene dos cifras, multiplicamos por 100:

$100·F = 100·0{,}18\overline{3} \Rightarrow 100F = 18{,}\overline{3}$.

Como el periodo del número $18{,}\overline{3}$ tiene una cifra, multiplicamos por 10:

$10·100F = 10·18{,}\overline{3} \Rightarrow 1000F = 183{,}\overline{3}$

Restamos miembro a miembro las dos últimas igualdades obtenidas, con lo que eliminaremos la parte decimal: «$1000F = 183{,}\overline{3}$» menos «$100F = 18{,}\overline{3}$»

$1000F – 100F = 183{,}\overline{3} – 18{,}\overline{3} \Rightarrow 900F = 165$

Despejamos F: $F = \dfrac{165}{900}$; simplificamos: $\dfrac{165}{900} = \dfrac{55}{300} = \dfrac{11}{60}$

Solución: $0{,}18\overline{3} = \dfrac{11}{60}$

Comentario

Guíate por cuántas cifras decimales tienen el anteperiodo y el periodo.

Enunciados

Obtén una fracción generatriz de cada uno de los siguientes números y que sea irreducible.

1	$0{,}87$	2	$2{,}22$	3	$8{,}4$	4	$0{,}13$
5	$2{,}\overline{6}$	6	$1{,}\overline{7}$	7	$0{,}\overline{93}$	8	$0{,}\overline{03}$
9	$0{,}1\overline{5}$	10	$0{,}6\overline{1}$	11	$0{,}4\overline{6}$	12	$0{,}3\overline{8}$
13	$7{,}25$	14	$0{,}125$	15	$0{,}75$	16	$0{,}025$
17	$0{,}\overline{45}$	18	$3{,}\overline{42}$	19	$1{,}\overline{21}$	20	$10{,}\overline{01}$
21	$0{,}28\overline{3}$	22	$0{,}14\overline{6}$	23	$0{,}6\overline{81}$	24	$0{,}7\overline{72}$
25	$0{,}102$	26	$0{,}245$	27	$25{,}25$	28	$0{,}004$
29	$0{,}\overline{17}$	30	$0{,}\overline{306}$	31	$0{,}\overline{054}$	32	$0{,}\overline{0561}$
33	$0{,}6\overline{12}$	34	$0{,}02\overline{57}$	35	$0{,}091\overline{6}$	36	$0{,}2\overline{729}$
37	$9{,}6$	38	$9{,}\overline{6}$	39	$0{,}\overline{96}$	40	$0{,}9\overline{6}$
41	$0{,}99\overline{69}$	42	$0{,}\overline{90}$	43	$0{,}5$	44	$0{,}\overline{5}$
45	$0{,}\overline{50}$	46	$0{,}\overline{05}$	47	$0{,}0\overline{5}$	48	$0{,}2\overline{45}$
49	$0{,}2\overline{60}$	50	$0{,}20\overline{3}$	51	$0{,}4\overline{58}$	52	$0{,}04\overline{8}$
53	$0{,}6\overline{75}$	54	$0{,}9\overline{9603}$	55	$0{,}9\overline{36}$	56	$0{,}11\overline{6}$
57	$0{,}\overline{8316}$	58	$0{,}\overline{918}$	59	$0{,}13\overline{8}$	60	$0{,}9\overline{54}$
61	$0{,}2\overline{2607}$	62	$0{,}12\overline{8}$	63	$0{,}3\overline{08}$	64	$0{,}2\overline{3267}$
65	$0{,}519\overline{4}$	66	$0{,}52\overline{7}$	67	$0{,}\overline{8448}$	68	$0{,}68\overline{3}$
69	$0{,}3\overline{48}$	70	$0{,}14\overline{6}$	71	$0{,}\overline{8118}$	72	$0{,}95\overline{1}$
73	$0{,}63\overline{8}$	74	$0{,}8\overline{63}$	75	$0{,}2\overline{78}$	76	$3{,}12$
77	$0{,}3\overline{45}$	78	$0{,}9\overline{84}$	79	$0{,}12\overline{4}$	80	$0{,}7\overline{82}$
81	$0{,}5\overline{18}$	82	$0{,}45\overline{3}$	83	$0{,}\overline{7722}$	84	$2{,}05$
85	$0{,}85\overline{3}$	86	$0{,}30\overline{5}$	87	$0{,}5\overline{30}$	88	$0{,}3\overline{27}$
89	$0{,}\overline{7678}$	90	$0{,}17\overline{3}$	91	$0{,}6\overline{81}$	92	$0{,}41\overline{6}$

El periodo 9 da lugar a un número exacto

Una propiedad que a veces desconcierta a los estudiantes es que el número $0,\overline{9}$, que aparentemente es un número periódico puro, realmente es el número entero 1. Vamos a verlo de dos maneras distintas.

Cálculo de la fracción generatriz

Podemos convertir el número $0,\overline{9}$ en una fracción utilizando el método que hemos estudiado para obtener una fracción generatriz:

Le ponemos un nombre al número: $F = 0,\overline{9}$

Multiplicamos por 10: $10F = 9,\overline{9}$

Restamos las dos igualdades: $9F = 9$

Despejamos F: $F = \dfrac{9}{9}$

Simplificamos: $\dfrac{9}{9} = 1$

Conclusión: $0,\overline{9} = 1$

Por muy correcto que sea un razonamiento matemático, si su resultado no está acorde con lo que nos sugiere nuestra intuición, desconfiamos de él. Es normal, nuestra intuición no suele enfrentarse a casos así. Pero tenemos otra manera de verlo que quizá ayude a entender mejor por qué ocurre esto.

No hay números entre $0,\overline{9}$ y 1

Sabemos desde el nivel 1 que entre dos números decimales diferentes siempre se pueden encontrar infinitos números decimales más. Pues bien, piensa esto: si entre dos números no puedes encontrar ningún otro, es que los dos números son iguales.

Intenta averiguar algún número que esté entre $0,\overline{9}$ y 1. Pausa. No lo hay. Algunas personas sugieren el $0,\overline{9}5$: ¡buen intento!, pero ese número no existe, no puedes escribir infinitos nueves y después escribir un cinco.

Como no hay ningún número entre $0,\overline{9}$ y 1, concluimos que $0,\overline{9} = 1$

Aplicación a otros casos

El periodo 9 puede aparecer en otras situaciones aparte de la que hemos visto, pero ya sabemos cómo habrá que actuar:

Ejemplo 1: $0,25\overline{9} = 0,26$

Ejemplo 2: $3,\overline{9} = 4$

Ejemplo 3: $5,0\overline{9} = 5,1$

Ejemplo 4: $1,\overline{4} + 2,\overline{5} = 4$

También podemos usar la propiedad para hacer más fácilmente alguna operación:

Ejemplo 5: $3 - 2,\overline{5} = 2,\overline{9} - 2,\overline{5} = 0,\overline{4}$

Ejemplo 6: $7 - 1,\overline{92} = 6,\overline{9} - 1,\overline{92} = 5,\overline{07}$

La expresión propuesta

Recuerda la expresión que te propusimos al comienzo del tema:

$$\boxed{1 = 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5} + 9 \cdot 10^{-6} + \ldots}$$

¿A que ahora la entiendes?

Enunciados

Escribe como fracción irreducible el resultado de las siguientes operaciones.

① $2{,}7\overline{9} + 0{,}6\overline{9}$

② $3{,}1\overline{4} + 1{,}0\overline{5}$

③ $2\cdot 0{,}2\overline{45} + 0{,}0\overline{09}$

④ $3{,}\overline{8651} + 4{,}\overline{3184}$

⑤ $0{,}\overline{135} + 0{,}\overline{481}$

⑥ $0{,}\overline{0100} + 0{,}\overline{0001}$

⑦ $1{,}\overline{7489} - 0{,}\overline{4156}$

⑧ $7{,}\overline{35} - 7{,}1\overline{53}$

⑨ $3\cdot 0{,}0\overline{3}$

⑩ $2\cdot 0{,}\overline{61110} + 0{,}\overline{00001}$

⑪ $3{,}\overline{1} : 1{,}\overline{7}$

⑫ $\sqrt{0{,}\overline{4}}$

⑬ $1{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + 0{,}0006 + 0{,}00006 + \ldots$

⑭ $1{,}6 + 0{,}006 + 0{,}00006 + 0{,}0000006 + 0{,}0000006 + \ldots$

⑮ $0{,}47 + 0{,}0047 + 0{,}000047 + 0{,}00000047 + \ldots$

⑯ $1 + 8\cdot 10^{-1} + 8\cdot 10^{-2} + 8\cdot 10^{-3} + 8\cdot 10^{-4} + 8\cdot 10^{-5} + 8\cdot 10^{-6} + \ldots$

⑰ $2\cdot 10^{-1} + 7\cdot 10^{-2} + 2\cdot 10^{-3} + 7\cdot 10^{-4} + 2\cdot 10^{-5} + 7\cdot 10^{-6} + \ldots$

Enunciados

⑱ ¿Cuál es el número que está justo en medio de $0{,}\overline{7}$ y $0{,}\overline{8}$. Da el resultado como número decimal.

⑲ Calcula la media de estos números: $3{,}\overline{1}$, $3{,}\overline{4}$ y $5{,}\overline{4}$.

⑳ Calcula $\dfrac{0{,}\overline{4}+0{,}\overline{8}}{0{,}\overline{05}+0{,}\overline{17}}$

Número racional

Hemos visto que hay dos tipos de números que coinciden:

- Si un número se puede expresar como una fracción, al hacer la división se obtiene un número entero, un número decimal exacto o un número decimal periódico.
- Todos los números decimales exactos y decimales periódicos se pueden expresar como una fracción.

Como los dos tipos realmente expresan a los mismos números, podemos utilizar cualquiera de las dos características como definición de número racional. Nos parece más útil definir los números racionales como los que verifican las dos propiedades, porque cuando se usan a veces conviene verlos de una manera y a veces de la otra.

Definición de número racional

Un número racional es un número que puede ser expresado de cualquiera de estas dos maneras:

- Como fracción de dos números enteros.
- Como número entero, número decimal exacto o número decimal periódico.

Definición de número irracional

La definición más rápida de número irracional es que es un número que no es racional. Es una definición perfectamente válida, pero no expresa bien las dos características principales de un número irracional.

Así pues, es conveniente reformular la definición de número irracional diciendo cuáles son sus dos características, que son equivalentes:

- No se puede escribir como fracción de dos números enteros.
- Su expresión como número decimal no es exacta ni periódica.

Irracionalidad de π

El único número irracional con nombre propio que conoces por este curso es el número π. Te hemos explicado que su expresión decimal no es exacta ni periódica.

Ahora también deducimos que el número π no puede ser expresado como fracción, aunque curiosamente durante muchos años se aproximó con la fracción $22/7$.

El matemático, físico y filósofo suizo Johann Heinrich Lambert (1728-1777) demostró en 1760 la irracionalidad de π.

Demostraciones a tu alcance

Con lo que sabes hasta el momento, puedes hacer demostraciones de sorprendente generalidad y sin embargo sencillez, como la que vas a ver a continuación. Esta capacidad de demostración es una característica muy apreciada de la matemática.

Enunciado: demuestra que el número 0,101001000100001... no se puede expresar como fracción.

Resolución: el número propuesto es un número decimal que no es exacto; sus cifras no se pueden repetir periódicamente puesto que siempre va habiendo un cero más entre cada dos unos consecutivos; por tanto, es un número irracional; por eso, no se puede escribir como fracción.

El conjunto de los números racionales

- El conjunto de los números racionales se escribe $\mathbb{Q}$, que no es más que una forma especial de escribir la letra Q.
- Se ha elegido la letra Q porque es la inicial de la palabra del inglés *quotient*, que significa «cociente». El motivo es que todos los números racionales se pueden escribir como el cociente de dos números enteros.
- Observa que hay infinitas maneras de representar un número racional, pero recuerda que todas ellas son realmente **el mismo** número racional.

  Ejemplo 1: $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{20}{50} = \ldots$

  Ejemplo 2: $1{,}\overline{3} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \ldots$

  Ejemplo 3: $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \ldots$

Relación entre los conjuntos de naturales, enteros y racionales

Como todos los números enteros son también números racionales, el conjunto de los números enteros está contenido en el conjunto de los números racionales. También se puede decir que el conjunto de los números enteros es un subconjunto del conjunto de los números racionales.

Simbólicamente se escribe $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Por tanto, la relación entre los tres conjuntos numéricos que hemos definido en el curso hasta el momento es:

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}$$

Ejemplos

Estos ejemplos te ayudarán a entender cómo usamos los signos de pertenencia de elementos junto con los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 4	$7 \in \mathbb{N}$	El número 7 es un número natural	7 pertenece a $\mathbb{N}$
Ejemplo 5	$7 \in \mathbb{Z}$	El número 7 es un número entero	7 pertenece a $\mathbb{Z}$
Ejemplo 6	$7 \in \mathbb{Q}$	El número 7 es un número racional	7 pertenece a $\mathbb{Q}$
Ejemplo 7	$-9 \notin \mathbb{N}$	El número –9 no es un número natural	–9 no pertenece a $\mathbb{N}$
Ejemplo 8	$-9 \in \mathbb{Z}$	El número –9 es un número entero	–9 pertenece a $\mathbb{Z}$
Ejemplo 9	$-9 \in \mathbb{Q}$	El número –9 es un número racional	–9 pertenece a $\mathbb{Q}$
Ejemplo 10	$2{,}5 \notin \mathbb{N}$	El número 2,5 no es un número natural	2,5 no pertenece a $\mathbb{N}$
Ejemplo 11	$2{,}5 \notin \mathbb{Z}$	El número 2,5 no es un número entero	2,5 no pertenece a $\mathbb{Z}$
Ejemplo 12	$2{,}5 \in \mathbb{Q}$	El número 2,5 es un número racional	2,5 pertenece a $\mathbb{Q}$
Ejemplo 13	$0{,}\overline{1} \notin \mathbb{N}$	El número $0{,}\overline{1}$ no es un número natural	$0{,}\overline{1}$ no pertenece a $\mathbb{N}$
Ejemplo 14	$0{,}\overline{1} \notin \mathbb{Z}$	El número 2,5 no es un número entero	$0{,}\overline{1}$ no pertenece a $\mathbb{Z}$
Ejemplo 15	$0{,}\overline{1} \in \mathbb{Q}$	El número 2,5 es un número racional	$0{,}\overline{1}$ pertenece a $\mathbb{Q}$
Ejemplo 16	$\pi \notin \mathbb{Q}$	El número π no es un número racional	π no pertenece a $\mathbb{Q}$

Enunciados

De cada una de las siguientes expresiones di si es verdadera o falsa. Ten en cuenta que puede ser necesario hacer alguna operación mental.

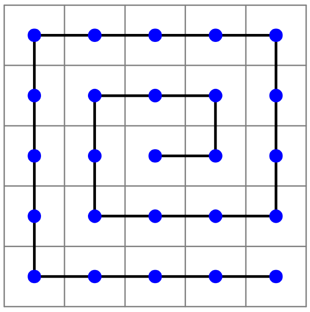
1	$-5 \in \mathbb{N}$	2	$0 \notin \mathbb{Z}$	3	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
4	$\frac{5}{4} \in \mathbb{Q}$	5	$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	6	$3{,}4 \notin \mathbb{Q}$
7	$17 \in \mathbb{Q}$	8	$-\frac{7}{5} \notin \mathbb{Q}$	9	$5{,}9 \in \mathbb{N}$
10	$3{,}\overline{78} \in \mathbb{Z}$	11	$4{,}\overline{05} \notin \mathbb{Z}$	12	$\frac{8}{4} \in \mathbb{N}$
13	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$	14	$-1{,}2 \in \mathbb{Q}$	15	$5{,}\overline{9} \in \mathbb{N}$
16	$8{,}3 \in \mathbb{N}$	17	$-12 \in \mathbb{Q}$	18	$-\frac{20}{5} \in \mathbb{Z}$
19	$\frac{13}{17} \in \mathbb{Z}$	20	$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$	21	$\frac{17}{13} \notin \mathbb{Q}$
22	$\pi+1 \in \mathbb{Q}$	23	$-\pi \in \mathbb{Z}$	24	$0 \in \mathbb{Q}$
25	$3{,}\overline{09} \in \mathbb{Q}$	26	$0{,}232233222333\ldots \notin \mathbb{Q}$	27	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$
28	$5{,}\overline{89} \in \mathbb{Z}$	29	$0{,}5555555\ldots \in \mathbb{Q}$	30	$1{,}6777777\ldots \notin \mathbb{Q}$
31	$3{,}99999999 \in \mathbb{N}$	32	$-0{,}9999999\ldots \in \mathbb{Z}$	33	$3{,}\overline{7753679} \notin \mathbb{Q}$
34	$\frac{0}{23} \in \mathbb{Q}$	35	$\sqrt{4} \in \mathbb{N}$	36	$\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$
37	$7{,}333333335 \in \mathbb{Q}$	38	$\frac{19}{3} \in \mathbb{Z}$	39	$\pi-3 \notin \mathbb{Q}$
40	$-\frac{51}{51} \in \mathbb{Z}$	41	$\frac{35}{5} \in \mathbb{Q}$	42	$0{,}451010101010\ldots \notin \mathbb{Q}$
43	$1{,}\overline{90} + 1{,}\overline{09} \in \mathbb{N}$	44	$-\frac{121}{11} \notin \mathbb{Z}$	45	$-7{,}8934\overline{89344} \notin \mathbb{Q}$
46	$\frac{24}{10} \in \mathbb{Q}$	47	$-4{,}5 \in \mathbb{Z}$	48	$8{,}4\overline{9} \in \mathbb{Z}$
49	$0{,}131131113\ldots \in \mathbb{Q}$	50	$4+\frac{1}{5} \in \mathbb{Z}$	51	$\frac{0}{0} \in \mathbb{Q}$
52	$\frac{2}{5}-\frac{7}{5} \in \mathbb{Z}$	53	$\frac{1}{99} \notin \mathbb{Z}$	54	$7{,}\overline{82} + \frac{6}{7} \in \mathbb{Q}$
55	$\frac{7}{7} \in \mathbb{N}$	56	$5{,}\overline{61} - 2{,}\overline{61} \in \mathbb{Z}$	57	$\frac{4}{1{,}\overline{3}} \in \mathbb{N}$

Cantidades de números naturales y de números enteros

En el nivel 1 vimos que había la misma cantidad de números enteros que de números naturales. El método para comprobarlo fue emparejarlos de manera que a cada número natural le correspondiera un único número entero y viceversa.

Cantidades de números naturales y de números racionales

Ahora vamos a ver algo que puede resultar aún más sorprendente: la cantidad de números racionales es la misma que la cantidad de números naturales. Lo conseguiremos «poniendo en fila» todos los números racionales, de modo que queden relacionados con los números naturales. La clave para hacerlo es la figura de la derecha, que muestra cómo podemos recorrer una cuadrícula de una manera ordenada a partir de una de las casillas: dibujando una espiral, pasaremos ordenadamente por todos los puntos de la cuadrícula.



Paso 1

			3			
			2			
			1			
-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
			-1			
			-2			
			-3			

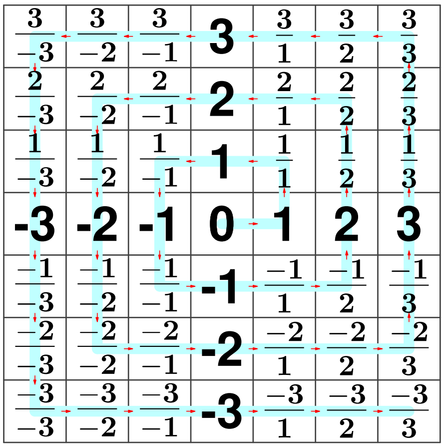
Dibujamos una cuadrícula y anotamos los números enteros en un eje vertical y en uno horizontal de modo que coincidan los 0

Paso 2

$\frac{3}{-3}$	$\frac{3}{-2}$	$\frac{3}{-1}$	**3**	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$
$\frac{2}{-3}$	$\frac{2}{-2}$	$\frac{2}{-1}$	**2**	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{-3}$	$\frac{1}{-2}$	$\frac{1}{-1}$	**1**	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
$\frac{-1}{-3}$	$\frac{-1}{-2}$	$\frac{-1}{-1}$	**-1**	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$
$\frac{-2}{-3}$	$\frac{-2}{-2}$	$\frac{-2}{-1}$	**-2**	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-2}{3}$
$\frac{-3}{-3}$	$\frac{-3}{-2}$	$\frac{-3}{-1}$	**-3**	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{3}$

Escribimos todas las fracciones usando como numerador el número del eje vertical y como denominador el del horizontal

Paso 3



Comenzando por el 0, iremos recorriendo en espiral todos los enteros y todas las fracciones

Hay que conseguir una correspondencia entre cada número natural (1, 2, 3, etc.) y cada número racional. Sabemos que en la cuadrícula están todos los números racionales, aunque todos aparecerán infinitas veces.

Comenzando por el 0 y siguiendo la espiral, iremos recorriendo todos los números racionales: si pasamos por uno que no esté aún en la lista, lo anotamos; si pasamos por uno que ya esté en la lista, lo saltamos.

Obtenemos esta correspondencia:

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
$\mathbb{Q}$	0	1	-1	$-\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	...

Esto demuestra que la cantidad de números racionales es la misma que la cantidad de números naturales.

Razón y proporción

Hay conceptos que ya conoces desde el nivel 1 pero que volvemos a tratar ahora debido a que queremos darle un significado adicional. Para reflejar ese significado añadido daremos nombres nuevos a dos conceptos conocidos.

- Una **razón** entre dos números no es más que una fracción.

  Ejemplo 1: $\frac{4}{3}$

- Una **proporción** no es más que la igualdad entre dos fracciones.

  Ejemplo 2: $\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$

Como ya sabes manejar fracciones, nos concentraremos en ver cuál es el significado nuevo.

Razón entre dos números

La palabra «razón» significa división o cociente, además de otros significados comunes. Llamamos razón entre dos números a la fracción formada por esos números. Pero podemos escribirlo y decirlo de varias maneras más.

- Ejemplo 3: en una reunión los hombres y las mujeres están en razón $\frac{7}{5}$. Esto quiere decir que por cada 7 hombres hay 5 mujeres. También podemos decir que están en razón 7 a 5. Y es habitual escribirlo 7:5, como una división.
- Ejemplo 4: en un monitor FullHD la anchura y la altura en píxeles están en razón 16 a 9; lo podemos escribir 16:9 (como habrás podido ver quizá en algunos menús de un aparato de televisión). Igualmente, lo podemos escribir como una fracción: $\frac{16}{9}$. En cualquier caso, queremos señalar que por cada 16 unidades de longitud el monitor tendrá 9 unidades de altura.

Observa la manera de nombrar una razón: 4 a 3, 7 a 5, 16 a 9,...

Proporción entre cuatro números

Una proporción es la igualdad de dos razones.

- Ejemplo 5: $\frac{3}{5}=\frac{60}{100}$. Se lee: 3 es a 5 como 60 es a 100.

Cuando usamos el término «proporción» queremos señalar especialmente que la razón entre las dos parejas de números es la misma.

- Ejemplo 6. **Enunciado**: el sensor de una cámara de fotos tiene 6000 píxeles de ancho y 4000 píxeles de alto. ¿Cuál es la razón de sus dimensiones?

  Explicación: nos están pidiendo que simplifiquemos la fracción $\frac{6000}{4000}$ hasta llegar a una fracción irreducible y digamos el resultado como una razón.

  Resolución: $\frac{6000}{4000}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$. Solución: 3 a 2.

Ejemplo de uso habitual

Usamos constantemente razones y proporciones cuando manejamos imágenes: si hacemos zoom en una imagen queremos hacerlo de modo que se mantenga la proporción, para que no se deforme.

Razones en fotografía y vídeo

Desde que en 1839 se inventó la fotografía, se han utilizado varias razones distintas entre las dos dimensiones de la imagen. Algunas de estas dimensiones han llegado hasta nuestros días en multitud de aparatos. En esta rama del conocimiento a las razones se les llama formatos, igual que en pintura y escultura.

Formato 1:1

Es el llamado formato cuadrado, porque las dos dimensiones son iguales. En arte se ha usado con cierta frecuencia, aunque sea sin exactitud. A la derecha vemos una reproducción del cuadro *El cambista y su mujer*, del pintor flamenco Quinten Massys (1466-1530). El cuadro es casi cuadrado. También fue el formato elegido originalmente por la red social Instagram para publicar las fotografías realizadas por sus usuarios.

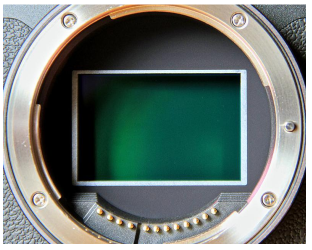
Formato 4:3

Durante muchos años fue el habitual en el cine; por eso, en la década de los 1950 se eligió también para las emisiones de televisión. Casi todas los aparatos de tubo catódico tienen este formato (a la derecha se ve una consola de control de televisión). Es el de las series antiguas de televisión, como *Friends* y *Star Trek TNG*.

El formato de las televisiones se adoptó también para los monitores de los ordenadores. El tamaño VGA es un buen ejemplo de formato 4 a 3.

Actualmente hay una serie de cámaras fotográficas llamadas «cuatro tercios» precisamente porque ese es el formato de su sensor de imagen.

Formato 3:2



Este formato aparece con la fotografía de película de 35 mm de anchura, ya que la superficie disponible para cada fotograma es 36 mm × 24 mm. Lo usó por primera vez la marca de cámaras Leica en 1920 y sigue en uso actualmente en las cámaras digitales llamadas *full frame*, en las que el sensor mide exactamente lo mismo. A la derecha se ve un sensor de imagen de este formato de una cámara actual.

Hacemos la simplificación de la fracción para comprobar el formato:

$$\frac{36}{24}=\frac{18}{12}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

Formato 16:9

Es el formato más popular en la actualidad. Lo incorporan todos los aparatos de televisión y casi todos los monitores de ordenador. Prácticamente cualquier aparato moderno que permita grabar vídeo permite elegir este formato. El ejemplo más común de utilización es el tamaño *FullHD*, con unas dimensiones de 1920 × 1080 píxeles.

Si hacemos la simplificación de la fracción, lo vemos fácilmente:

$$\frac{1920}{1080}=\frac{192}{108}=\frac{96}{54}=\frac{48}{27}=\frac{16}{9}$$

Enunciados

① Una persona posee una cámara digital con un sensor de 8256 × 5504 píxeles. Averigua el formato de la cámara. Nota: es un modelo real.

② El formato de vídeo VGA es un formato 4:3 con 640 píxeles de anchura. Calcula cuántos píxeles de altura tiene.

③ Existe un tamaño de vídeo de alta definición con formato 16:9 llamado «720» porque tiene 720 píxeles de altura. Calcula cuántos píxeles de anchura tiene.

④ En una reunión de 132 personas hay 77 personas mayores de edad. Calcula la razón entre personas mayores de edad y personas menores de edad.

Comentario

Estos ejercicios se resuelven usando técnicas vistas en el nivel 1 para resolver problemas de fracciones. Solo hay que tener en cuenta ahora que el vocabulario es ligeramente diferente.

Resoluciones

① Simplificamos la fracción hasta llegar a una fracción irreducible:

$$\frac{8256}{5504}=\frac{4128}{2752}=\frac{2064}{1376}=\frac{1032}{688}=\frac{516}{344}=\frac{258}{172}=\frac{129}{86}=\frac{3}{2}$$

(En el último paso hay que simplificar entre el número primo 43).

Solución: 3:2

② Llamamos «x» al número de píxeles de altura.

Sabemos que $\frac{4}{3}=\frac{640}{x}$ y hay que averiguar el valor de «x».

Como una proporción es una equivalencia de fracciones, podemos aplicar que el producto de extremos es igual al producto de medios: $4x = 3 \cdot 640$.

Despejamos «x» y simplificamos: $x=\frac{3\cdot 640}{4}=3\cdot 160=480$

Solución: 480 píxeles.

③ Llamamos «x» al número de píxeles de anchura.

$$\frac{16}{9}=\frac{x}{720} \Rightarrow 16\cdot 720 = 9\cdot x \Rightarrow x=\frac{16\cdot 720}{9}=16\cdot 80=1280$$

Solución: 1280 píxeles.

④ El número de personas menores de edad es $132-77 = 55$.

La razón pedida es $\frac{77}{55}=\frac{7}{5}$

Solución: 7:5

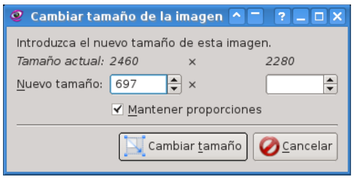
Enunciados

① Una persona dispone de una cámara de fotos fabricada en 2021 con un sensor de 5184×3888 píxeles. Averigua qué formato tiene.

② Cada vez hay en el mercado más aparatos de televisión con paneles denominados 4K UHDTV; las siglas 4K significan que tiene unos 4000 píxeles de anchura, las siglas UHDTV significan *ultra high definition television*. Sabiendo que estos paneles tienen formato 16:9 y exactamente 3840 píxeles de anchura, calcula cuántos píxeles tienen de altura.

③ En un grupo de hombres y mujeres con 91 hombres, la razón entre hombres y mujeres es 7 a 5. Si entraran al grupo 54 mujeres, ¿cuál sería la razón entre mujeres y hombres?

④ Una persona visita el zoo de Berlín y le hace una foto a un gorila macho adulto (un espalda plateada). Recorta la foto hasta una imagen de 2460×2280 píxeles. Para subir la foto a su página web, quiere preparar una imagen más pequeña que sirva de previsualización. Quiere que la nueva imagen tenga 697 píxeles de anchura. Para conseguirlo, usa un programa de ordenador con un cuadro de diálogo como el de la derecha.



Cuando elige una altura de 800 píxeles, la imagen le queda como estirada (izquierda); cuando elige una altura de 500, le queda como aplastada (derecha). ¿Qué altura debe elegir para que le quede perfecta (centro)?

⑤ En un grupo de hombres y mujeres la razón entre hombres y mujeres es 3 a 2. La media de edad de las mujeres es 25 años y la de los hombres 35 años. Calcula la media de edad del grupo completo.

⑥ Dos jarras idénticas están llenas de una mezcla de aceite y vinagre en razón de 2 a 1 en una de ellas y de 3 a 1 en la otra. Vaciamos ambas jarras en una grande; calcula en qué razón están en la mezcla el aceite y el vinagre.

⑦ En una urna hay bolas rojas, blancas y negras. Las rojas y las blancas están en razón 5:9; las blancas y las negras están en razón 6:5. Averigua en qué razón están las rojas y las negras.

Producto de medios igual a producto de extremos

Como una proporción es una igualdad entre fracciones equivalentes, es aplicable la propiedad de que el producto de extremos es igual al producto de medios.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc \text{ , si } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0}$$

Observa que hemos escrito una doble flecha («⇔») entre las dos igualdades. Esto significa que las dos igualdades son equivalentes: de la de la izquierda se puede deducir la de la derecha y viceversa.

Modos de escribir una proporción

Si cuatro números distintos de cero forman una proporción, esta se puede escribir de ocho maneras equivalentes. Vamos a usar símbolos en vez de letras para ayudar a una comprensión visual rápida.

Observa que en todos los casos se verifica ○·▥ = ◍·□.

* Partimos de una proporción:

  $\frac{○}{□}=\frac{◍}{▥}$ → círculo es a cuadrado como círculo rayado es a cuadrado rayado.

* Podemos intercambiar numeradores y denominadores.

  $\frac{□}{○}=\frac{▥}{◍}$ → cuadrado es a círculo como cuadrado rayado es a círculo rayado.

* Podemos intercambiar los miembros.

  $\frac{◍}{▥}=\frac{○}{□}$ → círculo rayado es a cuadrado rayado como círculo es a cuadrado.

* Podemos intercambiar numeradores, denominadores y miembros.

  $\frac{▥}{◍}=\frac{□}{○}$ → cuadrado rayado es a círculo rayado como cuadrado es a círculo.

* Podemos intercambiar los medios entre sí.

  $\frac{○}{◍}=\frac{□}{▥}$ → círculo es a círculo rayado como cuadrado es a cuadrado rayado.

* Podemos intercambiar los medios entre sí y numeradores y denominadores.

  $\frac{◍}{○}=\frac{▥}{□}$ → círculo rayado es a círculo como cuadrado rayado es a cuadrado.

* Podemos intercambiar los medios entre sí y los miembros.

  $\frac{□}{▥}=\frac{○}{◍}$ → cuadrado es a cuadrado rayado como círculo es a círculo rayado.

* Podemos intercambiar los medios entre sí, numeradores y denominadores y los miembros.

  $\frac{▥}{□}=\frac{◍}{○}$ → cuadrado rayado es a cuadrado como círculo rayado es a círculo.

Resumen

$$\frac{○}{□}=\frac{◍}{▥} \Leftrightarrow \frac{□}{○}=\frac{▥}{◍} \Leftrightarrow \frac{◍}{▥}=\frac{○}{□} \Leftrightarrow \frac{▥}{◍}=\frac{□}{○} \Leftrightarrow \frac{○}{◍}=\frac{□}{▥} \Leftrightarrow \frac{◍}{○}=\frac{▥}{□} \Leftrightarrow \frac{□}{▥}=\frac{○}{◍} \Leftrightarrow \frac{▥}{□}=\frac{◍}{○}$$

Magnitudes relacionadas

Una de las cuestiones más importantes de la matemática, la ciencia y la técnica es la posible relación entre dos magnitudes. Por ejemplo, cuando sube la temperatura, los metales se dilatan (aumenta su longitud); esto obliga a dejar pequeñas separaciones entre dos tramos de la vía del tren. Las magnitudes involucradas en este ejemplo son temperatura y longitud.

Magnitudes no relacionadas

Naturalmente, si nos fijamos en dos magnitudes del mismo objeto, es muy posible que no tengan ninguna relación. Por ejemplo, la masa de un planeta y la velocidad a la que se mueve alrededor de su estrella. Las magnitudes involucradas en este ejemplo son masa y velocidad.

Estudio de las relaciones

Averiguar si hay relación entre dos magnitudes y describirla es uno de los objetivos de la ciencia. El estudio es un auténtico problema, en el sentido de que a veces es fácil y a veces es difícil. En este nivel 2 vamos a trabajar solo dos tipos de relación, de los más sencillos, que podrás determinar dedicando algo de tiempo a pensar.

Magnitudes proporcionales

Dos magnitudes son proporcionales cuando la relación entre sus posibles valores siempre se puede describir usando exclusivamente la multiplicación (o su operación inversa, la división).

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar el valor de una por un número, la otra debe ser multiplicada por el mismo número. También podríamos decir que al dividir el valor de una por un número, la otra debe ser dividida por el mismo número.

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar el valor de una por un número, la otra debe ser dividida por el mismo número. También podríamos decir que al dividir el valor de una por un número, la otra debe ser multiplicada por el mismo número.

Ejemplos de magnitudes proporcionales

① La masa de manzanas que compras en el mercado y el dinero que pagas por ellas son **directamente proporcionales**. Piensa: si compras el doble de masa, pagas el doble; si compras la tercera parte, pagas la tercera parte, etc.

② La superficie de baldosas iguales y el número de ellas necesario para cubrir el suelo de una habitación son **inversamente proporcionales**. Piensa: si las baldosas son el doble de grandes, necesitas la mitad; si son la tercera parte de pequeñas, necesitas el triple, etc.

Observación sobre las unidades

Cuando pensamos la relación entre dos magnitudes, no tenemos en cuenta en qué unidad las vamos a medir; eso será necesario después, para hacer las operaciones. Debemos concentrarnos en lo que significan las magnitudes. Ejemplo: no pienses en «cuántos metros», sino en «cuánta longitud».

Enunciados

Dadas las siguientes parejas de magnitudes, estudia si son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o no tienen ninguna relación.

① El volumen de refresco comprado y el dinero que cuesta.

② El número de asistentes a una fiesta y la cantidad de la única tarta que hay que le corresponde equitativamente a cada persona.

③ La talla de zapato de un estudiante y el número de suspensos.

④ La masa de champiñones comprada y el dinero que cuesta.

⑤ El tiempo que estás paseando (a una velocidad constante) y la distancia que recorres.

⑥ El número de obreros en una obra y el tiempo que tardan en acabarla.

⑦ El número de personas atrapadas en un refugio de montaña y el tiempo que les dura la comida que encuentran en él.

⑧ La edad y la estatura de una persona.

⑨ El número de grifos abiertos (todos iguales) en una piscina y el tiempo que se tarda en llenarla.

⑩ Los pasos que das de tu casa al instituto y tu paga semanal.

⑪ El número de pollos en una granja y el dinero que cuesta alimentarlos.

⑫ La longitud de un rectángulo y la superficie del rectángulo.

⑬ El número de personas que han compartido un billete de lotería y el dinero que le corresponde a cada una si el billete resulta premiado.

⑭ Si necesitas ahorrar una determinada cantidad de dinero, los meses que estás ahorrando y la cantidad que ahorras cada mes.

⑮ Si trabajas por horas, el tiempo que estás trabajando y el dinero que recibes.

⑯ El número de puestos para cobrar el peaje en una autopista y la cantidad de automóviles que pueden pasar en un determinado tiempo.

⑰ La velocidad media a la que se desplaza un coche y el tiempo que tarda en completar un determinado recorrido.

⑱ La superficie de un cuadro y el dinero que cuesta comprarlo.

⑲ La distancia de la Tierra a una estrella y el tiempo que tarda la luz en llegar desde la estrella hasta la Tierra.

⑳ Considerando todos los rectángulos que tienen la misma superficie, sus dos dimensiones.

Propiedad de las magnitudes directamente proporcionales

Si dos magnitudes son directamente proporcionales, al dividir sus dos valores siempre se obtiene el mismo resultado, llamado **constante de proporcionalidad**. Para que la propiedad se verifique se debe usar para cada magnitud siempre la misma unidad.

Ejemplo

Sabemos que la masa de manzanas que se compran en el mercado y el dinero que se paga por ellas son magnitudes directamente proporcionales.

Imaginemos que por 3 kg se pagan 4,8 euros. Si compramos el triple, 9 kg, debemos pagar el triple, 14,4 euros.

Por tanto: $\frac{3\,\text{kg}}{4{,}8\,\text{eur}}=\frac{9\,\text{kg}}{14{,}4\,\text{eur}}$, ya que se puede simplificar entre 3.

Si compramos la mitad, 1,5 kg, debemos pagar la mitad, 2,4 euros.

Por tanto: $\frac{3\,\text{kg}}{4{,}8\,\text{eur}}=\frac{1{,}5\,\text{kg}}{2{,}4\,\text{eur}}$, ya que se puede amplificar por 2.

Las tres divisiones dan el mismo resultado:

$$\frac{3\,\text{kg}}{4{,}8\,\text{eur}}=\frac{9\,\text{kg}}{14{,}4\,\text{eur}}=\frac{1{,}5\,\text{kg}}{2{,}4\,\text{eur}}=0{,}625\frac{\text{kg}}{\text{eur}}$$

El número obtenido, la constante de proporcionalidad, nos indica que con 1 euro se pueden comprar 0,625 kg de manzanas.

Las divisiones también se pueden plantear escribiendo en el numerador el dinero y en el denominador la masa:

$$\frac{4{,}8\,\text{eur}}{3\,\text{kg}}=\frac{14{,}4\,\text{eur}}{9\,\text{kg}}=\frac{2{,}4\,\text{eur}}{1{,}5\,\text{kg}}=1{,}6\frac{\text{eur}}{\text{kg}}$$

Ahora la constante de proporcionalidad es 1,6 e indica que para comprar 1 kg hace falta gastar 1,6 euros (lo que se conoce como «precio»).

Otra manera de ver la propiedad

Si dos magnitudes son directamente proporcionales y cada una se mide cada vez con la misma unidad, se puede escribir una proporción usando los valores de las magnitudes en dos casos.

Ejemplo

Podemos escribir el ejemplo anterior de una manera más general, sin números, colocando en una tabla todo lo que hay que tener en cuenta:

Magnitud	Unidad	Valores 1	Valores 2	Proporción
Masa	kg	m_1	m_2	$\frac{m_1}{d_1}=\frac{m_2}{d_2}$
Dinero	eur	d_1	d_2	

Como las proporciones se pueden escribir de ocho maneras, la que hemos escrito es solo una de las posibles, pero es una de las que mejor expresan la propiedad que estamos tratando.

Enunciados

① Si por 4 kilogramos de manzanas se pagan 7 euros, ¿cuánto costarán 9 kilogramos?

② Si ahorro cada mes la misma cantidad de dinero y en 5 meses he conseguido ahorrar 840 euros, ¿cuánto dinero ahorraré en un año?

Resoluciones

① La masa de manzana que se compra y el dinero que se paga por ella son magnitudes directamente proporcionales.

Llamamos x al dinero pedido, medido en euros.

Magnitud	Unidad	Valores	Valores	Proporción
Masa	kg	4	9	$\frac{4}{7}=\frac{9}{x}$
Dinero	eur	7	x	

$\frac{4}{7}=\frac{9}{x} \Rightarrow 4 \cdot x = 7 \cdot 9 \Rightarrow x=\frac{7 \cdot 9}{4}=\frac{63}{4} = 15{,}75$ *No había simplificación posible*

Solución: 15,75 euros.

② El tiempo transcurrido y el dinero ahorrado son magnitudes directamente proporcionales.

Para poder escribir la proporción hay que usar la misma unidad para el tiempo; como el enunciado mezcla meses y años, hay que decidir cuál usar. Aunque se puede hacer el problema escribiendo el tiempo en años, es más sencillo hacerlo escribiendo el tiempo en meses.

Llamamos x al dinero pedido, medido en euros.

Magnitud	Unidad	Valores	Valores	Proporción
Tiempo	mes	5	12	$\frac{5}{840}=\frac{12}{x}$
Dinero	eur	840	x	

$\frac{5}{840}=\frac{12}{x} \Rightarrow \frac{1}{168}=\frac{12}{x} \Rightarrow x = 168 \cdot 12 = 2016$ *Hemos simplificado entre 5*

Solución: 2016 euros.

Comentario

Estos dos problemas ya sabías hacerlos en el nivel 1. La diferencia es que ahora estamos estudiando un nuevo **patrón de problema**. Veremos que hay muchos problemas que son esencialemente iguales entre sí y podemos aplicar en todos la misma técnica de resolución; así no tenemos que pensar cada uno por separado, como hacíamos en el nivel 1.

Comprender este patrón de problema te permitirá afrontar problemas más difíciles con más facilidad, que es uno de los objetivos de la ciencia y de la técnica.

Reglas de tres directas

Los problemas en los que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales, nos dan tres datos y nos piden un cuarto valor realmente son muy sencillos. Los podíamos pensar en el nivel 1 y ahora los sabemos resolver usando una proporción.

Una manera adicional de resolverlos consiste en la regla de tres directa, que no es más que colocar los tres datos y la incógnita de una manera particular y despejar directamente la incógnita. Sigue siendo importante usar la misma unidad para cada magnitud en los dos valores.

Enunciados

① Si por 4 kilogramos de manzanas se pagan 7 euros, ¿cuánto costarán 9 kilogramos?

② Si ahorro cada mes la misma cantidad de dinero y en 5 meses he conseguido ahorrar 840 euros, ¿cuánto dinero ahorraré en un año?

Resoluciones

① La masa de manzana que se compra y el dinero que se paga por ella son magnitudes directamente proporcionales.

Llamamos x al dinero pedido.

$$\left.\begin{array}{lcl} 4 \text{ kg} & — & 7 \text{ euros} \\ 9 \text{ kg} & — & x \end{array}\right| \quad x=\frac{9\cdot 7}{4}=\frac{63}{4}=15{,}75$$

Solución: 15,75 euros.

② El tiempo transcurrido y el dinero ahorrado son magnitudes directamente proporcionales.

1 año = 12 meses

Llamamos x al dinero pedido.

$$\left.\begin{array}{lcl} 5 \text{ meses} & — & 840 \text{ euros} \\ 12 \text{ meses} & — & x \end{array}\right| \quad x=\frac{12\cdot 840}{5}=12\cdot 168=2016$$

Solución: 2016 euros.

Comentarios

- ✱ Es indiferente a qué lado se escriba cada magnitud.
- ✱ Es indiferente que la incógnita esté arriba o abajo.
- ✱ Lo más importante es recordar cómo se despeja la incógnita: es igual al producto de los valores que estén al lado y por encima (o por debajo) dividido entre el valor que esté diagonalmente opuesto.
- ✱ **Ejemplo**. Las siguientes expresiones son todas equivalentes:

$\left.\begin{array}{lcl} a & — & b \\ c & — & x \end{array}\right| \; x=\frac{c\cdot b}{a}$	$\left.\begin{array}{lcl} b & — & a \\ x & — & c \end{array}\right| \; x=\frac{c\cdot b}{a}$	$\left.\begin{array}{lcl} c & — & x \\ a & — & b \end{array}\right| \; x=\frac{c\cdot b}{a}$	$\left.\begin{array}{lcl} x & — & c \\ b & — & a \end{array}\right| \; x=\frac{c\cdot b}{a}$

Propiedad de las magnitudes inversamente proporcionales

Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, al multiplicar sus dos valores siempre se obtiene el mismo resultado. Para que la propiedad se verifique se debe usar para cada magnitud siempre la misma unidad. El producto obtenido no recibe ningún nombre especial, pero suele tener significado en la realidad, comúnmente algún total.

Ejemplo

Sabemos que la superficie de baldosas iguales y el número de ellas necesario para cubrir el suelo de una habitación son inversamente proporcionales.

Imaginemos que usando baldosas de 4 dm² hacen falta 300 baldosas para cubrir el suelo de una habitación. Si cada baldosa tuviera el triple de superficie, 12 dm², haría falta usar la tercera parte, 100 baldosas.

Por tanto: $4 \cdot 300 = 12 \cdot 100$, ya que hemos multiplicado por 3 y dividido entre 3.

Si cada baldosa tuviera la mitad de superficie, 2 dm², harían falta el doble de baldosas, 600 baldosas.

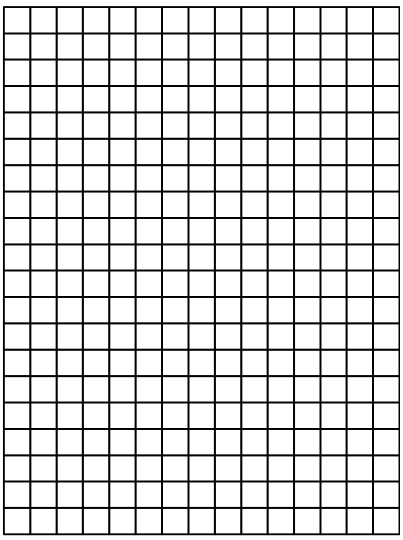
Por tanto: $4 \cdot 300 = 2 \cdot 600$, ya que hemos dividido entre 2 y multiplicado por 2.

Los tres productos dan el mismo resultado:

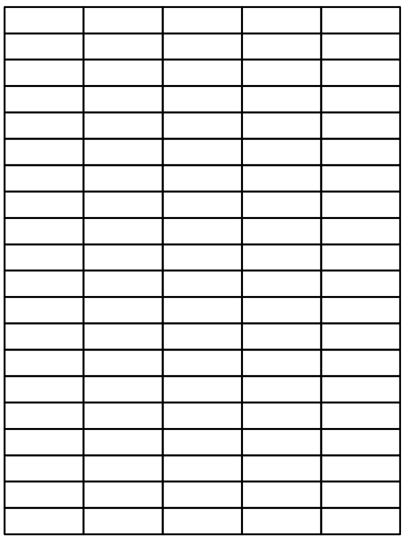
$4 \cdot 300 = 12 \cdot 100 = 2 \cdot 600 = 1200$

El número obtenido, 1200 dm² (que equivale a 12 m²), es la superficie de la habitación, el total de superficie ocupado por todas las baldosas.

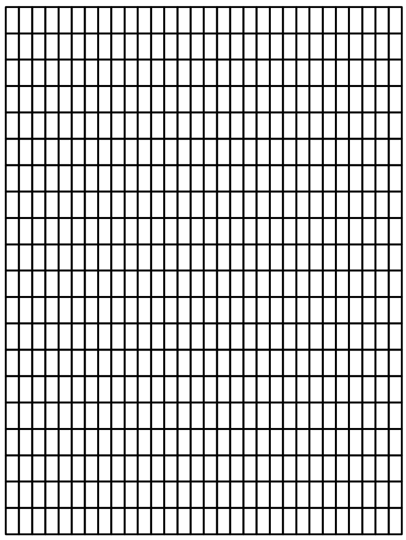
Visualización del ejemplo



300 baldosas de 4 dm²



100 baldosas de 12 dm²



600 baldosas de 2 dm²

Generalización del ejemplo

Podemos escribir el ejemplo de una manera más general, sin números, colocando en una tabla todo lo que hay que tener en cuenta:

Magnitud	Unidad	Valores 1	Valores 2	Producto
Superficie	dm²	s_1	s_2	$s_1 \cdot n_1 = s_2 \cdot n_2$
Número de baldosas	sin unidad	n_1	n_2	

Enunciados

① Para cubrir el suelo de una habitación con baldosas de 25 dm^2 hacen falta 64 baldosas. ¿Cuántas baldosas harán falta para cubrir el mismo suelo con baldosas de 20 dm^2?

② Para comprar un ordenador puedo ahorrar 240 euros cada mes durante 5 meses. Si pudiera dedicar un año a ahorrar, ¿cuánto debería ahorrar cada mes?

Resoluciones

① La superficie de cada baldosa y el número de ellas necesario para cubrir el suelo de una habitación son inversamente proporcionales.

Llamamos x al número de baldosas pedido.

Magnitud	Unidad	Valores	Valores	Producto
Superficie	dm^2	25	20	$25 \cdot 64 = 20 \cdot x$
Número de baldosas	sin unidad	64	x	

$25 \cdot 64 = 20 \cdot x \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 64}{20} = \frac{5 \cdot 64}{4} = 5 \cdot 16 = 80$

Solución: 80 baldosas.

② La cantidad de dinero ahorrada cada mes y el tiempo ahorrando son magnitudes inversamente proporcionales.

Para poder escribir el producto hay que usar la misma unidad para el tiempo; como el enunciado mezcla meses y años, hay que decidir cuál usar. Aunque se puede hacer el problema escribiendo el tiempo en años, es más sencillo hacerlo escribiendo el tiempo en meses.

Llamamos x al dinero pedido, medido en euros.

Magnitud	Unidad	Valores	Valores	Producto
Tiempo	mes	5	12	$5 \cdot 240 = 12 \cdot x$
Dinero	eur	240	x	

$5 \cdot 240 = 12 \cdot x \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 240}{12} = 5 \cdot 20 = 100$

Solución: 100 euros.

Comentario

Estos dos problemas ya sabías hacerlos en el nivel 1. La diferencia es que ahora estamos estudiando un nuevo **patrón de problema**. Veremos que hay muchos problemas que son esencialemente iguales entre sí y podemos aplicar en todos la misma técnica de resolución; así no tenemos que pensar cada uno por separado, como hacíamos en el nivel 1.

Comprender este patrón de problema te permitirá afrontar problemas más difíciles con más facilidad, que es uno de los objetivos de la ciencia y de la técnica.

Reglas de tres inversas

Los problemas en los que intervienen dos magnitudes inversamente proporcionales, nos dan tres datos y nos piden un cuarto valor realmente son muy sencillos. Los podíamos pensar en el nivel 1 y ahora los sabemos resolver usando directamente un producto.

Una manera adicional de resolverlos consiste en la regla de tres inversa, que no es más que colocar los tres datos y la incógnita de una manera particular y despejar directamente la incógnita. Sigue siendo importante usar la misma unidad para cada magnitud en los dos valores.

Enunciados

① Para cubrir el suelo de una habitación con baldosas de 25 dm^2 hacen falta 64 baldosas. ¿Cuántas baldosas harán falta para cubrir el mismo suelo con baldosas de 20 dm^2?

② Para comprar un ordenador puedo ahorrar 240 euros cada mes durante 5 meses. Si pudiera dedicar un año a ahorrar, ¿cuánto debería ahorrar cada mes?

Resoluciones

① La superficie de cada baldosa y el número de ellas necesario para cubrir el suelo de una habitación son inversamente proporcionales.

Llamamos x al número de baldosas pedido.

$$\left.\begin{array}{lcl} 25\ dm^2 & — & 64\ \text{baldosas} \\ 20\ dm^2 & — & x \end{array}\right| \quad x=\frac{25\cdot 64}{20}=\frac{5\cdot 64}{4}=5\cdot 16=80$$

Solución: 80 baldosas.

② La cantidad de dinero ahorrada cada mes y el tiempo ahorrando son magnitudes inversamente proporcionales.

1 año = 12 meses

Llamamos x al dinero pedido.

$$\left.\begin{array}{lcl} 5\ \text{meses} & — & 240\ \text{euros} \\ 12\ \text{meses} & — & x \end{array}\right| \quad x=\frac{5\cdot 240}{12}=5\cdot 20=100$$

Solución: 100 euros.

Comentarios

✱ Es indiferente a qué lado se escriba cada magnitud.

✱ Es indiferente que la incógnita esté arriba o abajo.

✱ Lo más importante es recordar cómo se despeja la incógnita: es igual al producto de los valores que no están en su línea dividido entre el valor que esté en su línea.

✱ **Ejemplo**. Las siguientes expresiones son todas equivalentes:

$\left.\begin{array}{ccc} a & — & b \\ c & — & x \end{array}\right\| \ x=\frac{a\cdot b}{c}$	$\left.\begin{array}{ccc} b & — & a \\ x & — & c \end{array}\right\| \ x=\frac{b\cdot a}{c}$	$\left.\begin{array}{ccc} c & — & x \\ a & — & b \end{array}\right\| \ x=\frac{a\cdot b}{c}$	$\left.\begin{array}{ccc} x & — & c \\ b & — & a \end{array}\right\| \ x=\frac{b\cdot a}{c}$

Consejos para resolver problemas con magnitudes proporcionales

1. Lee bien el enunciado y averigua de qué magnitudes trata el problema.
2. Decide qué unidades vas a usar para cada magnitud.
3. Rellena una tabla con las magnitudes, unidades, valores y la incógnita.
4. Especifica si las magnitudes son directa o inversamente proporcionales.
5. Escribe una igualdad con los valores y la incógnita: si las magnitudes son directamente proporcionales, iguala los cocientes; si las magnitudes son inversamente proporcionales, iguala los productos.
6. Despeja la incógnita.
7. Haz las operaciones necesarias. Consejo: simplifica si puedes.
8. Escribe la solución.

Uso de reglas de tres

Si el problema te parece muy sencillo, quizá tengas suficiente con plantear una regla de tres directa o inversa en vez de dar tantos pasos como hemos explicado. Si te decides por hacerlo así, recuerda que la incógnita se despeja de manera diferente en cada caso, por lo que sigue siendo imprescindible que en tu resolución especifiques claramente si las magnitudes son directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

Enunciados

① Para alimentar un día a 40 cerdos son necesarios 540 kilogramos de comida. ¿Cuánta comida es necesaria para alimentar un día a 72 cerdos?

② Tenemos preparada suficiente comida como para alimentar a 60 cerdos durante 125 días. Si tuviéramos 100 cerdos, ¿durante cuánto tiempo los podríamos alimentar con esa comida?

Resoluciones

① [Se puede hacer con una regla de tres directa]

Magnitud	Unidad	Valores	Valores	Relación
Número de cerdos	sin unidad	40	540	Directamente proporcionales
Masa	kg	72	x	

$\frac{40}{72}=\frac{540}{x} \Rightarrow x=\frac{72\cdot 540}{40}=\frac{72\cdot 54}{4}=36\cdot 27=972$. Solución: 972 kilogramos.

② [Se puede hacer con una regla de tres inversa]

Magnitud	Unidad	Valores	Valores	Relación
Número de cerdos	sin unidad	60	100	Inversamente proporcionales
Tiempo	días	125	x	

$60\cdot 125 = 100\cdot x \Rightarrow x=\frac{60\cdot 125}{100}=\frac{6\cdot 125}{10}=3\cdot 25=75$. Solución: 75 días.

Enunciados

① Por 24 litros de refresco se han pagado 20 euros. ¿Cuánto costarán 36 litros?

② Se reparte una tarta entre las 15 personas que asisten a una fiesta y cada una recibe una ración de 120 gramos. Si en la fiesta hubiera 20 personas, ¿de cuánto serían las raciones?

③ Un coche recorre a velocidad constante 40 kilómetros en 15 minutos. Si continúa a la misma velocidad, ¿qué distancia recorrerá en una hora y media?

④ Una cuadrilla de 16 personas tarda 18 días en realizar un trabajo. ¿Cuánto tiempo tardarían en realizar el mismo trabajo 24 personas?

⑤ Un adolescente quiere decorar una parte de la pared de su habitación con carteles. Si usa carteles de 20 decímetros cuadrados necesita 10 carteles. ¿Cuántos carteles de 25 dm^2 necesitaría para ocupar la misma parte de la pared?

⑥ Tengo una piscina con cinco grifos que echan la misma cantidad de agua. Si abro los cinco grifos, lleno la piscina en 24 minutos. Si solo abriera tres grifos, ¿cuánto tiempo tardaría en llenar la piscina?

⑦ Una cuadrilla de 15 personas tarda 20 días en realizar un trabajo. ¿Cuánto tiempo tardarían en realizar el mismo trabajo 25 personas?

⑧ Una persona pasea a velocidad constante durante 10 minutos y recorre 900 metros. Si continúa a la misma velocidad, ¿qué distancia recorrerá en 35 minutos?

⑨ Necesito preparar 210 kilogramos de pienso para alimentar una semana a mis gallinas. ¿Cuánto pienso necesito para alimentarlas 9 días?

⑩ En limpiar un pabellón deportivo han tenido que trabajar 10 personas durante 36 horas. ¿Cuántas personas habrían hecho falta para limpiarlo en 15 horas?

⑪ He consumido 1,4 kilogramos de un producto en siete meses. ¿Cuánto consumiré en un año?

⑫ He trabajado 9 horas diarias durante 4 días para terminar un trabajo. Si hubiera trabajado 6 horas diarias, ¿cuántos días habría necesitado?

⑬ He trabajado 6 horas diarias durante 140 días para terminar un trabajo. Para hacer el mismo trabajo en 105 días, ¿cuánto tiempo tendría que trabajar cada día?

⑭ He hecho un viaje de 6 horas con una velocidad media de 80 kilómetros cada hora. Si hubiera ido a una velocidad media de 120 kilómetros cada hora, ¿cuánto tiempo hubiera tardado?

⑮ Un grifo ha tardado 6 minutos en llenar un depósito de agua arrojando 80 litros cada minuto. Si hubiera arrojado 120 litros cada minuto, ¿cuánto tiempo hubiera tardado?

Definición de velocidad media

Cuando un objeto se está moviendo recibe en física el nombre de «móvil» (no lo confundas con tu teléfono celular).

Si un móvil se desplaza un espacio «e» en un tiempo «t», se define que su velocidad media «v» ha sido

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} \qquad \text{Simbólicamente: } v = \frac{e}{t}$$

La velocidad

La velocidad es una magnitud derivada del Sistema Internacional, ya que su definición es «espacio dividido entre tiempo».

Su unidad en el Sistema Internacional es la división de la unidad de espacio entre la unidad de tiempo, es decir, metro dividido entre segundo. La manera más correcta de escribirlo simbólicamente es $\frac{m}{s}$, pero lo más común es escribir el signo de división usando la barra «/», así: «m/s».

Expresión en español

El idioma español presenta un problema con la manera de decir en voz alta esta unidad, ya que en vez del correcto «metro entre segundo» o «metro cada segundo», se suele decir «metro por segundo», con lo que parece que las unidades se están multiplicando cuando realmente se están dividiendo.

Para complicar más las cosas, existen otras magnitudes derivadas que se suelen medir como un producto de unidades. Por ejemplo, la capacidad de la batería de un móvil (ahora sí, tu teléfono celular) se mide en miliamperios por hora. El símbolo de miliamperio es mA, el símbolo de hora es h, así que el símbolo de miliamperio por hora es mA·h o bien mAh.

Por tanto, cuando oigamos una magnitud derivada en la que se usa la palabra «por», realmente es necesario saber si se refiere a un producto o a una división. Para ello, hay que saber un poco de física.

Por ejemplo, el precio mayorista de la electricidad se da diciendo cuánto dinero cuesta cada «megavatio por hora»; cabe preguntarse si el megavatio y la hora están multiplicándose o dividiéndose. La física nos enseña que están multiplicándose. El símbolo de vatio es W, el del megavatio es MW y el de la hora es h. Por tanto el megavatio por hora se escribe MW·h o MWh. Es común verlo mal escrito en algunos medios de comunicación.

Generalización de la velocidad

El concepto de velocidad que define la física se puede generalizar, considerando magnitudes que tenga sentido dividir entre el tiempo. Por ejemplo:

- La velocidad de una cosechadora mide la cantidad de material que puede recoger en cada unidad de tiempo. Podría ser de 100 000 kilogramos cada hora (100 000 kg/h); será normal oírlo como cien mil kilogramos por hora.
- La cantidad de líquido que sale por un grifo en cada unidad de tiempo mide la velocidad de salida del líquido; esta magnitud se llama caudal. En un grifo casero podría ser de unos seis litros cada minuto (6 l/min); mucha gente diría seis litros por minuto.

Enunciados

① Un vehículo realiza el trayecto entre dos ciudades a una velocidad media de 100 km/h y tarda 4 horas y 30 minutos en hacerlo. ¿Cuánto tiempo tardaría en hacerlo si su velocidad media fuera 90 km/h?

② Un grifo con un caudal de 5 l/min tarda dos horas y media en llenar un depósito de agua. ¿Cuánto tardaría en llenarlo si su caudal fuera de 3 l/min?

Resoluciones

① [Se puede hacer con una regla de tres inversa]

4 horas y 30 minutos = 4,5 h

Llamamos x al tiempo pedido.

Magnitud	**Unidad**	**Valores**	**Valores**	**Relación**
Velocidad	km/h	100	90	Inversamente proporcionales
Tiempo	h	4,5	x	

$100 \cdot 4{,}5 = 90 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{100 \cdot 4{,}5}{90} = \dfrac{10 \cdot 4{,}5}{9} = \dfrac{45}{9} = 5$

Solución: 5 horas.

② [Se puede hacer con una regla de tres inversa]

2 horas y 30 minutos = 2,5 h

Llamamos x al tiempo pedido.

Magnitud	**Unidad**	**Valores**	**Valores**	**Relación**
Caudal	l/min	5	3	Inversamente proporcionales
Tiempo	h	2,5	x	

$5 \cdot 2{,}5 = 3 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{5 \cdot 2{,}5}{3} = \dfrac{12{,}5}{3} = 4{,}1\overline{6}$ h.

Como sería muy raro dar el resultado así, pasamos la parte decimal a fracción y la multiplicamos por 60 para pasarla a minutos:

$F = 0{,}1\overline{6};\ 10F = 1{,}\overline{6};\ 100F = 16{,}\overline{6};\ 90F = 15 \Rightarrow F = \dfrac{15}{90} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6};\ \dfrac{1}{6} \cdot 60 = 10$

$4{,}1\overline{6}$ h = 4 h 10 min

Solución: 4 h 10 min

Comentario: a veces en estos problemas pensamos en la posibilidad de usar como unidad de tiempo el minuto, pero incluso así se pueden presentar operaciones incómodas si en el resultado también aparecen segundos. Estas dificultades se eliminarán en el nivel 3, con el uso adecuado de una calculadora científica.

Enunciados

① Un avión que vuela a 660 km/h hace un recorrido en 5 horas. Si pudiera llevar una velocidad de 1100 km/h, ¿cuánto tiempo tardaría en hacer el recorrido?

② Un depósito de agua se puede llenar con dos grifos; uno de ellos tiene un caudal de 5 l/min y el otro de 3 l/m. Usando el grifo de mayor caudal, se tarda 4 horas y 24 minutos en llenar el depósito.

a) ¿Cuánto tiempo tardaría el grifo de menor caudal en llenar el depósito él solo? Da el resultado en horas y minutos.

b) ¿Cuánto tiempo tardarían los dos grifos utilizados a la vez en llenar el depósito? Da el resultado en horas y minutos.

③ En una competición de automovilismo gana el coche que completa más vueltas en el tiempo establecido de duración de la prueba. Un coche que circula a una velocidad media de 180 km/h completa exactamente 36 vueltas a la pista. Si otro coche circula a una velocidad media de 240 km/h, ¿cuántas vueltas completará?

④ Una fuente tiene dos grifos: uno con un caudal de 12 l/min y otro con un caudal de 15 l/min. Dos grupos de personas llenan sus cantimploras (todas iguales) durante el tiempo que les asignan, el mismo a cada grupo. El grupo que más cantimploras llena consigue llenar 35 cantimploras. ¿Cuántas llenó el otro grupo?

⑤ Una pequeña piscina se puede llenar con cuatro grifos; cada uno de ellos tiene un caudal de 25 l/min. La piscina se puede vaciar mediante un desagüe que tiene un caudal de 40 l/m. Usando uno solo de los grifos, se tardaría 30 horas en llenar la piscina.

a) ¿Cuánto tiempo tardaría el desagüe en vaciar una piscina llena? Da el resultado en horas y minutos.

b) Si la piscina estuviera llena y se abrieran los cuatros grifos y el desagüe, ¿cuánto tiempo pasaría hasta que se llenara la piscina? Da el resultado en horas y minutos.

⑥ Un equipo de 5 agricultores trabajando 10 horas consigue trabajar 1300 metros cuadrados de terreno. ¿Qué extensión de terreno podrá trabajar un equipo de 7 agricultores trabajando 11 horas?

⑦ Tengo un rebaño de 76 vacas y ahora mismo dispongo de comida para alimentarlas durante 60 días. Un amigo en apuros me pide que cuide y alimente sus 4 vacas; naturalmente, le digo que sí, pero ¿durante cuánto tiempo menos podré alimentar correctamente a todas las vacas? (no quiero darles menos comida ahora que me ocupo de más vacas).

⑧ Consigo un trabajo en el que me pagan por cada hora trabajada. Si voy a trabajar 7 días y trabajo 4 horas cada día, me pagan 616 euros. ¿Cuánto dinero me pagarían si fuera a trabajar 6 días y trabajara 5 horas cada día?

Problemas de proporcionalidad compuesta

En un problema de proporcionalidad compuesta aparecen tres o más magnitudes de modo que cada dos magnitudes dependen entre sí de forma directamente proporcional o inversamente proporcional. Se puede dar cualquier combinación de dependencias.

Ejemplo

El encargado de dirigir la realización de un túnel por el que discurrirá una carretera debe tener en cuenta tres factores a la hora de distribuir el trabajo: el número de trabajadores disponibles, la longitud de túnel que debe preparar y el tiempo disponible para hacerlo.

- ✱ El número de trabajadores y la longitud del túnel son directamente proporcionales, pero para hacer el estudio de esta relación hay que considerar que el tiempo disponible no variará.
- ✱ El número de trabajadores y el tiempo disponible para hacer el túnel son inversamente proporcionales, pero para hacer este estudio hay que considerar que la longitud del túnel no variará.
- ✱ La longitud del túnel y el tiempo disponible para hacerlo son directamente proporcionales, pero para hacer el estudio de esta relación hay que considerar que el número de trabajadores asignado no variará.

Enunciados

① Si 13 trabajadores hacen un túnel de 100 metros, ¿cuántos trabajadores harán falta para hacer un túnel de 200 metros en el mismo tiempo?

② Si 13 trabajadores hacen un túnel en 9 días, ¿cuántos trabajadores harán falta para hacer el mismo túnel en 3 días?

③ Si 13 trabajadores hacen un túnel de 100 metros en 9 días, ¿cuántos trabajadores harán falta para hacer un túnel de 200 metros en 3 días?

Resoluciones

① Es un problema de proporcionalidad directa. Como hay que hacer el doble de longitud, hace falta el doble de trabajadores, 26.

La operación se puede escribir así: solución = $13\cdot\frac{200}{100}=13\cdot 2=26$

② Es un problema de proporcionalidad inversa. Como se dispone de la tercera parte del tiempo, hacen falta el triple de trabajadores, 39.

La operación se puede escribir así: solución = $13\cdot\frac{9}{3}=13\cdot 3=39$

③ Es un problema de proporcionalidad compuesta. Por un lado hace falta el doble de trabajadores y por otro lado hace falta el triple de trabajadores.

Uniendo las dos cosas: solución = $13\cdot\frac{200}{100}\cdot\frac{9}{3}=13\cdot 2\cdot 3=78$

Solución: 78 trabajadores

Consejos para resolver problemas de proporcionalidad compuesta

Existen muchas maneras de resolver problemas de proporcionalidad compuesta; todas ellas llegan exactamente a la misma expresión de la solución. En este curso se ha escogido un método de resolución que es especialmente rápido.

1. Lee bien el enunciado y averigua de qué magnitudes trata el problema.
2. Decide qué unidades vas a usar para cada magnitud.
3. Rellena una tabla con las magnitudes, unidades, valores y la incógnita.
4. Estudia la relación de cada magnitud con la que tiene la incógnita.
5. Escribe la incógnita como una operación con todos los valores.
6. Haz las operaciones necesarias. Consejo: simplifica si puedes.
7. Escribe la solución.

Ejemplo

Treinta vacas comen 3150 kilogramos de pienso en 15 días. ¿Cuántas vacas podríamos alimentar con 9240 kilogramos de pienso en 24 días?

Resolución

Magnitud	Unidad	Valores	Valores	Relación con la incógnita
Número de vacas	sin unidad	30	x	
Masa	kilogramo	3150	9240	Directamente proporcional
Tiempo	día	15	24	Inversamente proporcional

$$x=30\cdot\frac{9240}{3150}\cdot\frac{15}{24}=30\cdot\frac{924}{315}\cdot\frac{5}{8}=30\cdot\frac{462}{63}\cdot\frac{1}{4}=10\cdot\frac{231}{21}\cdot\frac{1}{2}=5\cdot\frac{77}{7}=5\cdot 11=55$$

Solución: 55 vacas

Comentarios

- ✱ Cuando estudiamos la relación entre el número de vacas y la masa, suponemos que el tiempo no cambia.
- ✱ Cuando estudiamos la relación entre el número de vacas y el tiempo, suponemos que la masa no cambia.
- ✱ Las simplificaciones elegidas para la resolución podrían haber sido otras, elige las simplificaciones que tú vayas prefiriendo.

Explicación del paso esencial

En el método general no se ha explicado el paso 5, que es decisivo. A la vista del ejemplo, se puede entender mejor.

- ✱ La incógnita siempre es igual al producto del valor conocido de su magnitud (en el ejemplo, 30) por una serie de fracciones, una por cada magnitud de las que sabemos sus dos valores.
- ✱ Si una magnitud es directamente proporcional a la de la incógnita (en el ejemplo, la masa) la fracción tiene como **numerador** el valor de la columna de la incógnita y como denominador el otro (en el ejemplo, 9240 entre 3150).
- ✱ Si una magnitud es inversamente proporcional a la de la incógnita (en el ejemplo, el tiempo) la fracción tiene como **denominador** el valor de la columna de la incógnita y como numerador el otro (en el ejemplo, 15 entre 24).

Enunciados

① Dos amigos se comen en tres horas 420 gramos de chocolate. ¿Cuánto tiempo tardarán cinco amigos en comerse 700 gramos de chocolate?

② Con 99 kilogramos de alimento podemos abastecer a 15 personas durante 22 días. ¿Cuántos días podríamos abastecer a 24 personas si dispusiéramos de 144 kilogramos de alimento?

③ Seis cosechadoras han segado en dos horas un campo de 36 hectáreas. ¿Cuántas cosechadoras serán necesarias para segar en tres horas un campo de 27 hectáreas?

④ Usando 15 camiones, necesitamos hacer 10 viajes con cada uno para mover 1200 toneladas de material. Si tenemos que mover 960 toneladas con 10 camiones, ¿cuántos viajes tendrá que hacer cada uno?

⑤ Veinte pintores trabajando durante seis horas pintan una superficie total de 840 m^2. Para pintar 560 m^2 en cinco horas, ¿cuántos pintores se necesitan?

⑥ Con 5,6 kilogramos de helado puedo preparar 70 raciones con dos bolas en cada ración. Dispongo de 6 kilogramos de helado y quiero preparar raciones que tengan tres bolas. ¿Cuántas raciones puedo preparar?

⑦ Un equipo de arqueología de 120 personas necesita 10 500 litros de agua para pasar 25 días en el desierto. Otro equipo, de 45 personas, dispone de 6300 litros de agua; ¿cuántos días podrá permanecer en el desierto?

⑧ En una residencia de estudiantes utilizan tres latas de cinco kilogramos de bonito para preparar 120 bocadillos. ¿Cuántas latas de siete kilogramos necesitarían para preparar 224 bocadillos?

⑨ Hemos pagado 18 480 euros por una plancha rectangular de metal de 22 metros por 21 metros. Por otra plancha más pequeña hemos pagado 8400 euros. Sabemos que una de las dimensiones de la plancha pequeña es 14 metros; calcula la otra dimensión.

⑩ Preparo un fiestón para el que espero a 200 personas y compro 12 tartas para conseguir dar raciones de 120 gramos de tarta para cada persona. De repente me dicen que van a venir 50 personas más y bajo rápidamente a comprar más tartas, pero solo puedo comprar dos tartas más. ¿De qué masa deberán ser las raciones que repartamos?

⑪ En un hotel disponen de siete lavadoras; diariamente las usan durante seis horas para lavar 630 kilogramos de ropa. Un día están estropeadas dos lavadoras, pero tienen que lavar 30 kilogramos menos de lo habitual. ¿Cuánto tiempo deberán usar las lavadoras?

⑫ Un grupo de 21 amigos trabaja un verano durante 45 días y gana 61 425 euros. Para el siguiente verano están dispuestos a trabajar cinco días más, pero quieren ganar 81 250 euros. ¿A cuántos amigos deben convencer para trabajar con ellos?

Enunciados

① Quince camiones consiguen trasladar 180 m³ de desmonte trabajando ocho horas. ¿Qué volumen conseguirán trasladar 16 camiones en diez horas?

② Preparamos una bebida para ofrecer a las 120 personas de un crucero; ofreceremos cuatro bebidas al día de 0,3 litros cada una. Si diéramos tres bebidas diarias de 0,5 litros cada una, ¿cuántas personas atenderíamos?

③ Una lavadora industrial lava 1000 kilogramos de ropa trabajando cinco días ocho horas diarias. ¿Cuánto tiempo diario debería trabajar para poder lavar 3000 kilogramos de ropa en doce días?

Resoluciones

① Las dos relaciones de este problema son de proporcionalidad directa.

Magnitud	Unidad	Valores	Valores	Relación con la incógnita
Núm. camiones	sin unidad	15	16	Directamente proporcional
Volumen	m³	180	x	
Tiempo	hora	8	10	Directamente proporcional

$x = 180 \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{10}{8}$ = *(haz tú las simplificaciones)* = 240. Solución: 240 m³

② Las dos relaciones de este problema son de proporcionalidad inversa.

Magnitud	Unidad	Valores	Valores	Relación con la incógnita
Núm. personas	sin unidad	120	x	
Núm. bebidas	sin unidad	4	3	Inversamente proporcional
Volumen	litro	0,3	0,5	Inversamente proporcional

$x = 120 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{0{,}3}{0{,}5}$ = *(haz tú las simplificaciones)* = 96. Solución: 96.

③ Son muy habituales problemas como este, en el que aparece la magnitud tiempo dos veces, pero con significado ligeramente diferente. Utiliza alguna manera de distinguirlas que te permita dominar el problema. Aquí te ofrecemos solo una posibilidad.

Magnitud	Unidad	Valores	Valores	Relación con la incógnita
Masa	kilogramo	1000	3000	Directamente proporcional
Tiempo (jornadas)	día	5	12	Inversamente proporcional
Tiempo (diario)	hora	8	x	

$x = 8 \cdot \frac{3000}{1000} \cdot \frac{5}{12}$ = *(haz tú las simplificaciones)* = 10. Solución: 10 horas.

Enunciados

① Veinte obreros trabajando 35 días consiguen hacer un túnel de 875 metros. ¿Qué longitud de túnel podrían hacer catorce obreros en 16 días?

② Para cuidar un cultivo usamos un depósito de agua al día. Si regamos tres veces al día con 120 litros cada vez, atendemos 270 m². Si regáramos cuatro veces al día con 100 litros cada vez, ¿qué superficie podríamos atender?

③ Cinco encuestadores trabajando ocho horas diarias completan los datos para un estudio en 27 días. ¿Cuánto tardarían en hacer el mismo trabajo nueve encuestadores trabajando diez horas cada día?

④ Poner el suelo en mi salón, que mide 8 metros por 3 metros, me ha costado 840 euros. ¿Cuánto me costará poner el suelo en una habitación que mide 5 metros por 4 metros?

⑤ Si voy 15 días a trabajar y trabajo cuatro horas cada día, me pagan 480 euros. Si quiero ganar 624 euros trabajando seis horas al día, ¿cuántos días tendría que trabajar?

⑥ Hacen falta 8 horas de trabajo de 25 camiones de 16 toneladas de capacidad cada uno para hacer un movimiento de tierras. ¿Cuántos camiones de 20 toneladas de capacidad habrían hecho falta para hacer el mismo movimiento en 20 horas?

⑦ Disponemos de 315 hectáreas de pastos que permiten alimentar a 50 vacas durante nueve días. Si queremos alimentar a 40 vacas durante una semana, ¿qué superficie de pastos debemos disponer?

⑧ Conseguí un trabajo en el que me pagaron 720 euros por trabajar durante seis días a ocho horas diarias. Para ganar 1650 euros en once días. ¿Cuánto tiempo tendría que trabajar cada día?

⑨ Para llenar un depósito de agua necesitamos tener abiertos durante 40 minutos cuatro grifos con un caudal de 3 litros/minuto cada uno. Si dispusiéramos de cinco grifos con un caudal de 2 litros/minuto cada uno, ¿cuánto tiempo tardaríamos en llenar el mismo depósito?

⑩ Si trabajo durante 15 días a razón de 6 horas diarias, me pagan 1080 euros. ¿Cuánto dinero me pagarán si trabajo 12 días a razón de 8 horas diarias?

⑪ Una cooperativa vende el aceite que produce. Si vende 35 cajas con cuatro botellas cada una, con dos litros en cada botella, gana 630 euros. Si ganara 675 euros vendiendo cajas con cinco botellas cada una, con un litro y medio en cada botella, ¿cuántas cajas habría vendido?

⑫ Para trasladar 24 000 kilogramos de material en una mina ha hecho falta trabajar durante siete horas diarias durante quince días usando 36 camiones que admiten una carga de veinte toneladas. Queremos saber cuántos camiones que admitan una carga de 25 toneladas serán necesarios para trasladar 121 000 kilogramos de material en 21 días trabajando once horas diarias.

Repartos directamente proporcionales

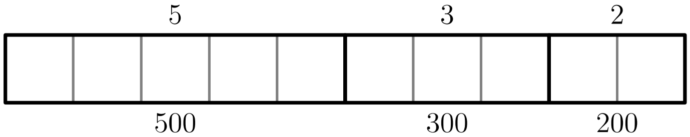
Ejemplo: tú pones 5 euros para comprar un billete de lotería, tu hermano pone 3 euros y tu hermana pone 2 euros. Si el billete resulta premiado con 1000 euros, ¿cómo crees que debe repartirse? Tu hermana podría decir: «nos llevamos 300 euros cada uno y con los otros 100 nos vamos de merienda con nuestros padres». Tu hermano podría decir: «nos lo quedamos todo nosotros: 333,33 euros cada uno». Seguramente tú piensas que como pusiste la mitad del dinero, deberías llevarte la mitad del premio: sí, eso es lo más correcto matemáticamente; pero, siguiendo el razonamiento, ¿cuánto deberían llevarse cada uno de tus hermanos? Piensa.

Estos repartos se llaman **repartos directamente proporcionales**, porque la manera justa de resolverlos matemáticamente es que cada parte debe ser directamente proporcional a lo que aportó cada uno.

La manera matemática de decir lo que se pide en el ejemplo es: «reparte 1000 en partes directamente proporcionales a 5, 3 y 2». Es decir, nos dan una cantidad que hay que descomponer en varios sumandos y unos números; los sumandos deben ser directamente proporcionales a los números.

Solución. Este problema es muy sencillo: tú te debes llevar 500 euros, tu hermano 300 euros y tu hermana 200 euros. Observa la proporción:

$\frac{500}{5}=\frac{300}{3}=\frac{200}{2}$. El resultado de las tres divisiones es 100, que tiene un significado importante: es la cantidad que corresponde a cada euro puesto inicialmente.



Método de resolución

Lo explicamos con un ejemplo que no sea tan obvio como el primero.

Enunciado: reparte 6650 en partes directamente proporcionales a 17, 13 y 8.

Resolución

Sumamos los números para obtener el total inicial: $17+13+8=38$

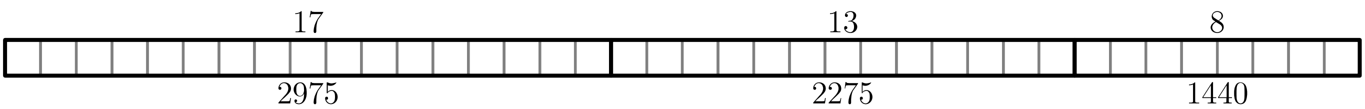
Dividimos la cantidad que hay que repartir entre el total inicial: $6650:38=175$

Multiplicamos cada número por el cociente obtenido:

$17\cdot 175=2975$; $13\cdot 175=2275$; $8\cdot 175=1400$

Solución: 2975, 2275 y 1400

Observa que si dividimos cada número de la solución entre el número correspondiente del enunciado siempre obtenemos 175. Por eso hemos comenzado por calcular el 175.



Observaciones

- El número de partes en que hay que descomponer la cantidad puede ser cualquiera, no solo tres como hemos visto en estos ejemplos.
- Si la división no fuera exacta se podría trabajar con su fracción irreducible equivalente o con decimales.

Enunciados

① Descompón 77 en partes directamente proporcionales a 5, 4 y 2.

② Descompón 35 en partes directamente proporcionales a 3 y 2.

③ Descompón 300 en partes directamente proporcionales a 4, 3, 2 y 1.

④ Descompón 48 en partes directamente proporcionales a 7 y 5.

⑤ Descompón 117 en partes directamente proporcionales a 6, 5 y 2.

⑥ Descompón 25,2 en partes directamente proporcionales a 5 y 1.

⑦ Descompón 345 en partes directamente proporcionales a 11, 7 y 5.

⑧ Descompón 450 en partes directamente proporcionales a 9, 4, 3 y 2.

⑨ Descompón 153 en partes directamente proporcionales a 10 y 7.

⑩ Descompón 1335 en partes directamente proporcionales a 7, 4, 3 y 1.

⑪ Descompón 1260 en partes directamente proporcionales a 13, 5 y 2.

⑫ Descompón 143 en partes directamente proporcionales a 7 y 4.

⑬ Descompón 2990 en partes directamente proporcionales a 9, 2 y 2.

⑭ Descompón 40,5 en partes directamente proporcionales a 5 y 4.

⑮ Descompón 636 en partes directamente proporcionales a 7 y 5.

⑯ Descompón 5160 en partes directamente proporcionales a 20, 15 y 8.

⑰ Descompón 680 en partes directamente proporcionales a 10, 4 y 3.

⑱ Descompón 2574 en partes directamente proporcionales a 13, 7 y 6.

⑲ Descompón 1 en partes directamente proporcionales a 3 y 2.

⑳ Descompón 1798 en partes directamente proporcionales a 16 y 15.

㉑ Descompón 2838 en partes directamente proporcionales a 20, 13 y 10.

㉒ Descompón 4 en partes directamente proporcionales a 17 y 3.

㉓ Descompón 765 en partes directamente proporcionales a 10, 4 y 3.

㉔ Descompón 2541 en partes directamente proporcionales a 11, 9, 8 y 5.

㉕ Descompón 55 en partes directamente proporcionales a 13 y 9.

㉖ Descompón 400 en partes directamente proporcionales a 9, 4 y 3.

㉗ Descompón 4047 en partes directamente proporcionales a 35, 18, 10 y 8.

Propiedad de los repartos directamente proporcionales

Si se dividen (o multiplican) todos los números que explican la proporción por el mismo número, el reparto no varía.

Esta propiedad se puede utilizar para simplificar los cálculos, algo especialmente útil cuando hay que hacerlos a mano, como se pide en este nivel.

Cuando se hacen las divisiones o multiplicaciones es importante mantener el orden de los números, para que la solución sea la correcta.

Enunciados

① Reparte 819 en partes directamente proporcionales a 25, 15 y 5.

② Reparte 833 en partes directamente proporcionales a $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{15}$ y $\frac{1}{4}$

③ Reparte 114 en partes directamente proporcionales a 0,06 y 0,3.

Resoluciones

① Los tres números se pueden dividir entre 5. $25:5=5$, $15:5=3$, $5:5=1$

Repartir 819 en partes directamente proporcionales a 25, 15 y 5 es equivalente a repartir 819 en partes directamente proporcionales a 5, 3 y 1.

Sumamos los números: $5+3+1=9$

Dividimos la cantidad que hay que repartir entre la suma: $819:9=91$

Multiplicamos cada número por el cociente obtenido:

$5\cdot 91=455$; $3\cdot 91=273$; $1\cdot 91=91$
Solución: 455, 273 y 91

② Podemos multiplicar las tres fracciones por el mínimo común múltiplo de los denominadores para conseguir eliminar las fracciones.

mcm(10,15,4) = 60; $60\cdot\frac{3}{10}=18$, $60\cdot\frac{4}{15}=16$, $60\cdot\frac{1}{4}=15$

Repartir 833 en partes directamente proporcionales a $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{15}$ y $\frac{1}{4}$ es equivalente a repartir 833 en partes directamente proporcionales a 18, 16 y 15.

Sumamos los números: $18+16+15=49$

Dividimos la cantidad que hay que repartir entre la suma: $833:49=17$

Multiplicamos cada número por el cociente obtenido:

$18\cdot 17=306$; $16\cdot 17=272$; $15\cdot 17=255$
Solución: 306, 272 y 255

③ Repartir 114 en partes directamente proporcionales a 0,06 y 0,3 es equivalente a repartir 114 en partes directamente proporcionales a 6 y 30, lo que es equivalente a repartir 114 en partes directamente proporcionales a 1 y 5.

$1+5=6$; $114:6=19$; $1\cdot 19=19$; $5\cdot 19=95$.

Solución: 19 y 95

Enunciados

① Descompón 126 en partes directamente proporcionales a 49, 35 y 14.

② Descompón 376 en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{2}{9}$.

③ Descompón 68 en partes directamente proporcionales a 0,15 y 0,45.

④ Descompón 572 en partes directamente proporcionales a 30, 36 y 12.

⑤ Descompón 1197 en partes directamente proporcionales a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{15}$.

⑥ Descompón 366 en partes directamente proporcionales a 1, 1,5 y 0,5.

⑦ Descompón 682 en partes directamente proporcionales a 250, 350 y 500.

⑧ Descompón 1435 en partes directamente proporcionales a $\frac{11}{15}$, $\frac{7}{30}$ y $\frac{1}{5}$.

⑨ Descompón 3,72 en partes directamente proporcionales a 4, 3 y 5.

⑩ Descompón 6 en partes directamente proporcionales a 4 y 2.

⑪ Descompón 1148 en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$ y 1.

⑫ Descompón 850 en partes directamente proporcionales a $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$.

⑬ Descompón 627 en partes directamente proporcionales a 7, 49 y 343.

⑭ Descompón 338 en partes directamente proporcionales a 0,1, 2 y 0,5.

⑮ Descompón 966 en partes directamente proporcionales a $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{10}$.

⑯ Descompón 1300 en partes directamente proporcionales a 40, 120 y 100.

⑰ Descompón 1550 en partes directamente proporcionales a $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{4}$ y 2.

⑱ Descompón 345 en partes directamente proporcionales a 0,55, 0,77 y 1,21.

⑲ Descompón 100 en partes directamente proporcionales a 13, 26, 39 y 52.

⑳ Descompón 1155 en partes directamente proporcionales a 1,7 y 34.

㉑ Descompón 23 en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$ y $\frac{1}{21}$.

㉒ Descompón 68 en partes directamente proporcionales a $0,\overline{3}$ y 1.

㉓ Descompón 322 en partes directamente proporcionales a 1, 2, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

Repartos inversamente proporcionales

Ejemplo: tenéis que preparar para una fiesta 10 paquetes con regalos. En preparar un paquete tú tardas 10 minutos, tu hermana tarda 5 minutos y tu hermano tarda 30 minutos. Si os ponéis a trabajar todos a la vez, sin descanso, ¿cuántos paquetes prepararéis cada uno? Como tu hermana tarda la mitad de tiempo que tú, podrá preparar el doble de paquetes; como tu hermano tarda el triple que tú, preparará la tercera parte. Dedica un rato a pensar este problema.

Estos repartos se llaman **repartos inversamente proporcionales**, porque la manera de resolverlos matemáticamente es que cada número de paquetes debe ser inversamente proporcional al tiempo que se tarda en preparar cada uno.

La manera matemática de decir lo que se pide en el ejemplo es: «reparte 10 en partes inversamente proporcionales a 10, 5 y 30». Es decir, nos dan una cantidad que hay que descomponer en varios sumandos y unos números; los sumandos deben ser inversamente proporcionales a los números.

Solución. Este problema no es fácil, pero quizá hayas llegado a la solución: tú prepararás tres paquetes, tu hermana seis paquetes y tu hermano uno. Observa los productos:

Tú: $10 \cdot 3 = 30$. Tu hermana: $5 \cdot 6 = 30$. Tu hermano: $30 \cdot 1 = 30$

El resultado de los tres productos es 30, que tiene un significado importante: es el tiempo total de trabajo que habéis dedicado a la tarea, medido en minutos.

Método de resolución

Estos problemas se resuelven convirtiéndolos en un problema de reparto directamente proporcional.

Para entender el motivo, vamos a jugar un poco con el enunciado anterior. Llamanos «x» al número de paquetes que prepararás tú, «y» al número de paquetes que preparará tu hermana y «z» al número de paquetes que preparará tu hermano. Sabemos que debe ocurrir que $10 \cdot x = 5 \cdot y = 30 \cdot z$.

Usando fracciones con fracciones, esta expresión se puede transformar en $\frac{10}{\frac{1}{x}} = \frac{5}{\frac{1}{y}} = \frac{30}{\frac{1}{z}}$, que nos indica que los números 10, 5 y 30 deben ser directamente proporcionales a los inversos de los números «x», «y» y «z».

Enunciado

Tenéis que preparar para una fiesta 40 paquetes con regalos. En preparar un paquete tú tardas 10 minutos, tu hermana tarda 15 minutos y tu hermano tarda 18 minutos. Si os ponéis a trabajar todos a la vez, sin descanso, ¿cuántos paquetes prepararéis cada uno?

Resolución

Hay que repartir 40 en partes inversamente proporcionales a 10, 15 y 18. Por tanto, hay que repartir 40 en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$ y $\frac{1}{18}$.

Multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores (90), hay que repartir 40 en partes directamente proporcionales a 9, 6 y 5.

Lo hacemos: $9 + 6 + 5 = 20$; $40 : 20 = 2$; $9 \cdot 2 = 18$; $6 \cdot 2 = 12$; $5 \cdot 2 = 10$

Solución: tú prepararás 18 paquetes, tu hermana 12 y tu hermano 10.

Enunciados

① Descompón 132 en partes inversamente proporcionales a 3, 2 y 1.

② Descompón 63 en partes inversamente proporcionales a 2 y 5.

③ Descompón 63 en partes inversamente proporcionales a 1, 2 y 4.

④ Descompón 65 en partes inversamente proporcionales a 7 y 6.

⑤ Descompón 273 en partes inversamente proporcionales a 1, 2, 4 y 5.

⑥ Descompón 476 en partes inversamente proporcionales a 2, 4 y 8.

⑦ Descompón 132 en partes inversamente proporcionales a 5 y 15.

⑧ Descompón 114 en partes inversamente proporcionales a 1, 7 y 49.

⑨ Descompón 594 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 6.

⑩ Descompón 121 en partes inversamente proporcionales a 1 y 10.

⑪ Descompón 129 en partes inversamente proporcionales a 2, 4, 3 y 9.

⑫ Descompón 55 en partes inversamente proporcionales a 18 y 12.

⑬ Descompón 161 en partes inversamente proporcionales a 1, 3 y 5.

⑭ Descompón 100 en partes inversamente proporcionales a 1, 2, 3 y 4.

⑮ Descompón 774 en partes inversamente proporcionales a 1, 2, 5 y 10.

⑯ Descompón 156 en partes inversamente proporcionales a 5, 7 y 35.

⑰ Descompón 221 en partes inversamente proporcionales a 1, 7 y 14.

⑱ Descompón 377 en partes inversamente proporcionales a 1, 2, 4 y 16.

⑲ Descompón 100 en partes inversamente proporcionales a 1, 2, 3, 6 y 12.

⑳ Descompón 120 en partes inversamente proporcionales a 11 y 13.

㉑ Descompón 792 en partes inversamente proporcionales a 1, 3, 5 y 15.

㉒ Descompón 112 en partes inversamente proporcionales a 2, 8 y 24.

㉓ Descompón 15 en partes inversamente proporcionales a 13 y 17.

㉔ Descompón 6,8 en partes inversamente proporcionales a 31 y 37.

㉕ Descompón 3481 en partes inversamente proporcionales a 2, 5 y 7.

㉖ Descompón 5183 en partes inversamente proporcionales a 3, 5 y 7.

㉗ Descompón 1573 en partes inversamente proporcionales a 5, 7 y 9.

Enunciados

① Descompón 1598 en partes inversamente proporcionales a $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ y $\frac{6}{5}$.

② Descompón 36 en partes directamente proporcionales a $0{,}1\overline{6}$, $0{,}2\overline{7}$ y $0{,}\overline{5}$.

③ Tres personas, Andrea, Beatriz y Carlos, fundan una empresa. Andrea aporta el doble de dinero que Beatriz y Carlos el triple que Andrea. ¿Cómo deben repartirse los primeros 8550 euros de beneficio que obtienen?

④ Un depósito de agua de 856 metros cúbicos de capacidad se puede llenar con el grifo A, que necesita tres minutos para echar un metro cúbico, o con el grifo B, que necesita cinco minutos para echar un metro cúbico. Abrimos los dos grifos a la vez hasta llenar el depósito.

a) ¿Cuánta agua habrá aportado el grifo A?

b) ¿Cuánta agua habrá aportado el grifo B?

⑤ Un artesano hace muñecos a base de unir dos piezas: el cuerpo y la cabeza. Es capaz de hacer cuatro cuerpos en una hora y también es capaz de hacer dos cabezas en una hora.

a) Si quiere terminar muñecos completos trabajando seis horas, ¿cuánto tiempo debe dedicar a hacer cuerpos?

b) Si quiere terminar muñecos completos trabajando seis horas, ¿cuánto tiempo debe dedicar a hacer cabezas?

c) Si quiere terminar muñecos completos trabajando doce horas, ¿cuántos muñecos podrá preparar?

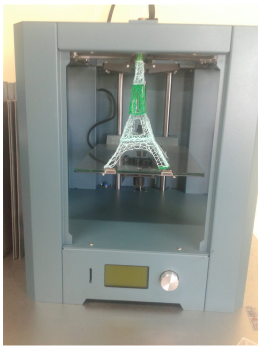
⑥ El ayuntamiento de un pueblo quiere preparar sus bosques para prevenir incendios en verano; para ello, dedicará un presupuesto de 1632 euros. Primero contrata a una empresa, que emplea a nueve personas durante cuatro horas y luego a una cooperativa, que emplea a doce personas durante cinco horas.

a) ¿Cuánto dinero le corresponderá a la empresa?

b) ¿Cuánto dinero le corresponderá a la cooperativa?

⑦ Tenemos que distribuir 1554 cajas en el suelo de dos habitaciones: la pequeña, de cinco metros de lado, y la grande, de siete metros de lado. ¿Cuál es la mejor distribución de las cajas?

⑧ Una empresa va a utilizar su impresora 3D para hacer unos artículos que se componen de tres piezas: A, B y C, que una vez impresas se ensamblan fácilmente. Van a trabajar 18 horas diarias, al término de las cuales una empresa de mensajería recogerá los artículos producidos. Saben que con la impresora funcionando las 18 horas, podrían imprimir o bien 150 piezas del tipo A, o bien 90 piezas del tipo B o bien 45 piezas del tipo C. Calcula cúantos artículos completos pueden preparar cada día de trabajo.



Idea de porcentaje

El porcentaje es una manera cómoda de conocer una **razón**. Si en una razón cambiamos el denominador por **100** y nos fijamos con el numerador, estamos calculando un porcentaje.

Estudio

Queremos comparar la calidad de dos jugadoras de baloncesto lanzando tiros libres en sus partidos, pero una de ellas lanza más tiros libres que la otra; estos son los datos:

Jugadora	Lanzamientos intentados	Lanzamientos convertidos
Margarita	175	147
Nayeli	200	166

Podemos pensar que Nayeli ha convertido más tiros, luego es mejor lanzadora, pero es que también ha lanzado más tiros. Para igualar las cosas, intentamos escribir la **razón de aciertos** (lanzamientos convertidos **entre** lanzamientos intentados) de las dos con denominador 100:

Margarita: $\frac{147}{175}=\frac{x}{100} \Rightarrow x=\frac{147\cdot 100}{175}$ = *(simplifica tú)* = 84. Es decir, $\frac{147}{175}=\frac{84}{100}$

Nayeli: $\frac{166}{200}=\frac{x}{100} \Rightarrow x=\frac{166\cdot 100}{200}$ = *(simplifica tú)* = 83. Es decir, $\frac{166}{200}=\frac{83}{100}$

Si las dos hubieran lanzado exactamente 100 veces, Margarita habría convertido 84 y Nayeli 83, así que Margarita es un poco mejor lanzadora que Nayeli.

Obverva que en cada caso hemos calculado el numerador que corresponde a un denominador 100. Para ello, hemos planteado una **proporción** y hemos resuelto el equivalente a una **regla de tres directa**; hemos llegado a estas dos conclusiones:

- ✱ Margarita ha convertido 84 lanzamientos de cada 100 que intenta.
- ✱ Nayeli ha convertido 83 lanzamientos de cada 100 que intenta.

Definición y notación de porcentaje

- ✱ Un porcentaje es una manera de escribir una fracción con denominador 100.
- ✱ La fracción $\frac{p}{100}$ se escribe como porcentaje «p %» y se lee «p por ciento».

Ejemplos

① $\frac{37}{100}$ = 37 %. Se lee «37 por ciento»	② $\frac{53}{100}$ = 53 %. Se lee «53 por ciento»

Aplicación al estudio

A la vista de la definición de porcentaje, podemos decir en nuestro estudio sobre las dos jugadoras de baloncesto que

- ✱ Margarita tiene un porcentaje de acierto del 84 % lanzando tiros libres.
- ✱ Nayeli tiene un porcentaje de acierto del 83 % lanzando tiros libres.

Uso de porcentajes en la realidad

Los porcentajes nos permiten asimilar con facilidad el valor de las razones, así que se usan constantemente en la vida real.

Porcentajes como proporcionalidad directa

La relación de un porcentaje con una de las dos cantidades de las que proviene siempre es de proporcionalidad directa, de modo que se pueden aplicar tanto proporciones como reglas de tres directas para resolver los problemas más sencillos de porcentajes. Para los problemas más difíciles será necesario utilizar técnicas más avanzadas. Por tanto, vamos a comenzar resolviendo algunos problemas de porcentajes usando proporcionalidad directa para que comiences a entenderlos.

Enunciados

① Un jugador de baloncesto lanzó en una temporada 350 tiros libres, con una efectividad del 76 %. ¿Cuántos lanzamientos encestó?

② Una jugadora de rugby se ha encargado de los lanzamientos a palos de su equipo durante una temporada. Ha conseguido su objetivo en 34 ocasiones, lo que supone el 40 % de las veces que ha lanzado. ¿Cuántos lanzamientos ha intentado?

③ Se hace una encuesta en 1250 hogares y se obtiene que en 1200 de ellos hay al menos un aparato de televisión. ¿Cuál es el porcentaje de hogares que no tiene ningún aparato de televisión?

Resoluciones

① El número de lanzamientos encestado es directamente proporcional al porcentaje de efectividad. Si llamamos «x» al número de lanzamientos encestados,

$\frac{x}{350}=\frac{76}{100} \Rightarrow x=\frac{76\cdot 350}{100}$ = *(simplifica tú)* = 266. Solución: 266.

También podemos resolverlo con una regla de tres directa:

$$\left.\begin{array}{lll} 100 \text{ lanzados} & — & 76 \text{ encestados} \\ 350 \text{ lanzados} & — & x \end{array}\right| \quad x=\frac{350\cdot 76}{100}=\ldots=266$$

. Solución: 266.

② El número de lanzamientos conseguidos es directamente proporcional al porcentaje de efectividad. Si llamamos «x» al número de lanzamientos intentados,

$\frac{40}{100}=\frac{34}{x} \Rightarrow x=\frac{100\cdot 34}{40}$ = *(simplifica tú)* = 85. Solución: 85.

También podemos resolverlo con una regla de tres directa:

$$\left.\begin{array}{lll} 100 \text{ lanzados} & — & 40 \text{ conseguidos} \\ x & — & 34 \text{ conseguidos} \end{array}\right| \quad x=\frac{100\cdot 34}{40}=\ldots=85$$

. Solución: 85.

③ El porcentaje de hogares sin aparato de televisión es directamente proporcional al número de hogares sin aparato de televisión.

Hay $1250-1200=50$ hogares sin aparato de televisión. Si llamamos «x» al número de hogares sin aparatos de televisión cada 100 hogares:

$\frac{50}{1250}=\frac{x}{100} \Rightarrow x=\frac{50\cdot 100}{1250}$ = *(simplifica tú)* = 4. Solución: 4 %.

También podemos resolverlo con una regla de tres directa.

Enunciados

① Un jugador de baloncesto lanzó en una temporada 160 tiros libres, con una efectividad del 85 %. ¿Cuántos lanzamientos encestó?

② Un jugador de rugby se ha encargado de los lanzamientos a palos de su equipo durante una temporada. Ha conseguido su objetivo en 33 ocasiones, lo que supone el 55 % de las veces que ha lanzado. ¿Cuántos lanzamientos ha intentado?

③ Se hace una encuesta en 960 hogares y se obtiene que en 144 de ellos hay al menos una consola de videojuegos. ¿Cuál es el porcentaje de hogares que tiene alguna consola de videojuegos?

④ Dos jugadores de fútbol discuten a ver cuál de los dos es más efectivo en sus disparos a puerta. El jugador Menelik dice que de 440 tiros a puerta a conseguido 110 goles y el jugador Anuar alega que él ha conseguido 120 goles con 600 lanzamientos a puerta. Averigua cuál de los dos tiene mayor efectividad.

⑤ Dos amigos deciden dar parte de sus ahorros para ayudar a una persona que necesita dinero. Alejandro tiene ahorrados 1200 euros y entrega el 10 %; Laura tiene ahorrados 2000 euros y entrega el 5 %. ¿Cuánto dinero le entregan en total a la persona que lo necesita?

⑥ En un instituto de enseñanza hay once chicas por cada nueve chicos. Calcula cuál es el porcentaje de chicos.

⑦ Un animal hace una puesta de 1500 huevos, de los que el 60 % eclosiona. De las crías que nacen, el 20 % consigue llegar al primer año de vida. Calcula cuántos animales de la puesta llegaron al primer año de vida.

⑧ Una cerveza tiene un 6 % de alcohol. En un botellín de 25 centilitros, ¿cuál es la cantidad de alcohol? Da el resultado en mililitros.

⑨ En una feria dan un premio al que acierte con una escopeta en una diana. Cada disparo cuesta dos euros. He tenido una efectividad del 20 % y me he llevado tres premios. ¿Cuánto dinero me he gastado?

⑩ En una urna hay 450 bolas, de las que dos quintos son blancas y el resto son negras. De las bolas blancas, el 30 % están rotas; de las bolas negras el 40 % están rotas.

a) Calcula cuántas bolas rotas hay.

b) Calcula el porcentaje de bolas rotas.

⑪ Una jugadora de baloncesto durante una temporada ha tenido una efectividad del 25 % en los tiros de tres puntos y del 45 % en los tiros de dos puntos. Ha obtenido 312 puntos con los lanzamientos de tres puntos y 720 puntos con los lanzamientos de dos puntos. Calcula cuántos lanzamientos ha realizado en total sabiendo que ha lanzado 223 tiros libres.

Modo de recibir y entregar un porcentaje

- Cuando un enunciado aporte como dato un porcentaje, casi siempre lo hará con la notación que hemos visto.
- Ejemplo 1: Un jugador tiene un porcentaje de acierto en tiros libres del 84 %.
- Cuando nosotros contestemos a una pregunta con un porcentaje, casi siempre lo haremos con esta notación.
- Ejemplo 2: El 45 % de las crías de una pareja de pingüinos ha sobrevivido.

Modos de operar con un porcentaje

Sin embargo, para hacer las operaciones con porcentajes no usamos solamente el número que acompaña al signo de porcentaje, sino que lo modificamos de hasta tres maneras diferentes:

- **Fracción con denominador 100**. Podemos usar la fracción que corresponde exactamente con el porcentaje, que es la que tiene denominador 100. Al fin y al cabo, es la definición de porcentaje.
- Ejemplo 3: $37\,\% = \dfrac{37}{100}$; ejemplo 4: $71\,\% = \dfrac{71}{100}$;
- **Fracción irreducible**. Podemos simplificar la fracción con denominador 100 hasta llegar a una fracción irreducible.
- Ejemplo 5: $75\,\% = \dfrac{75}{100} = \dfrac{3}{4}$; ejemplo 6: $40\,\% = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$
- **Número decimal**. Podemos hacer la división y obtener un número decimal. Este método es tan importante que el número decimal obtenido tiene nombre propio: se llama **tanto por uno** y será la clave de muchos métodos.
- Ejemplo 7: $31\,\% = \dfrac{31}{100} = 0{,}31$; ejemplo 8: $4\,\% = \dfrac{4}{100} = 0{,}04$

Como tenemos tres métodos de trabajo, siempre intentamos usar el que resulte más rápido en la operación que estemos haciendo.

Conversiones entre expresiones de un porcentaje

Se puede pasar de cualquiera de las cuatro maneras de expresar un porcentaje a cualquiera de las demás con facilidad. Debes entrenarte para hacerlo. Puedes dar pasos intermedios si te parece conveniente. Aquí tienes unos ejemplos:

	Porcentaje	Fracción con denominador 100	Fracción irreducible	Tanto por uno
Ejemplo 9	20 %	$\dfrac{20}{100}$	$\dfrac{1}{5}$	0,2
Ejemplo 10	65 %	$\dfrac{65}{100}$	$\dfrac{13}{20}$	0,65
Ejemplo 11	50 %	$\dfrac{50}{100}$	$\dfrac{1}{2}$	0,5

Observa que todos los números de cada fila tienen exactamente el mismo valor, solo se diferencian en la manera de escribirlos.

Ejemplo 12: $80\,\% = \dfrac{80}{100} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$; ejemplo 13: $7\,\% = \dfrac{7}{100}$ *(irreducible)* $= 0{,}07$

Enunciados

Rellena la siguiente tabla:

	Porcentaje	Fracción con denominador 100	Fracción irreducible	Tanto por uno
①	90 %			
②		$\frac{40}{100}$		
③			$\frac{3}{5}$	
④				0,35
⑤	10 %			
⑥		$\frac{25}{100}$		
⑦			$\frac{3}{4}$	
⑧				0,02

Enunciados

Escribe con la notación de porcentaje los siguientes tantos por uno:

⑨ 0,17	⑩ 0,09	⑪ 0,91	⑫ 0,7
⑬ 0,23	⑭ 0,16	⑮ 0,3	⑯ 0,03

Enunciados

Escribe como tanto por uno los siguientes porcentajes:

⑰ 41 %	⑱ 4 %	⑲ 29 %	⑳ 33 %
㉑ 37 %	㉒ 98 %	㉓ 2 %	㉔ 21 %

Enunciados

Escribe con la notación de porcentaje las siguientes fracciones:

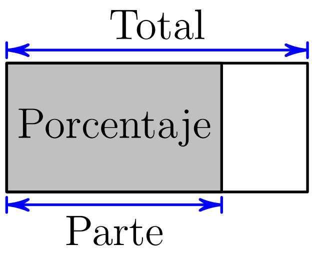
㉕ $\frac{17}{100}$	㉖ $\frac{21}{50}$	㉗ $\frac{4}{25}$	㉘ $\frac{7}{10}$
㉙ $\frac{350}{1000}$	㉚ $\frac{38}{200}$	㉛ $\frac{7}{20}$	㉜ $\frac{4}{5}$

Ejercicios básicos con porcentajes

Dado que cuando trabajamos con porcentajes nos aparecen tres cantidades, los primeros tres ejercicios que hay que resolver son calcular el número desconocido a partir de los otros dos. Afortunadamente, como un porcentaje solo es una manera diferente de escribir una fracción, podemos aplicar los **patrones de problemas** que estudiamos en el nivel 1 sobre problemas con fracción, total y parte.

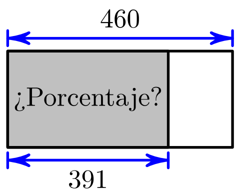
Esquema de los ejercicios

Tenemos que relacionar tres números: una cantidad total, una parte de esa cantidad y el porcentaje que representa la parte respecto al total. Por ejemplo: un jugador ha lanzado 260 tiros libres (total), ha convertido 221 (parte) y su porcentaje de acierto es 85 % (porcentaje). Los ejercicios que debemos resolver son cómo calcular una de las cantidades conocidas las otras dos.



Conocidos una parte y el total, averiguar el porcentaje

Enunciado 1: ¿Qué porcentaje representa 391 respecto a 460?



Resolución: $\text{Porcentaje} = \dfrac{\text{Parte}}{\text{Total}} = \dfrac{391}{460} = \ldots$

Para continuar tenemos varias posibilidades:

✱ Hacer la división y obtener el tanto por uno: $\dfrac{391}{460} = 0{,}85 = 85\,\%$

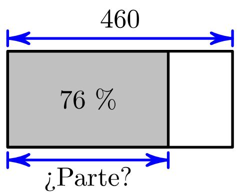
✱ Simplificar la fracción y convertirla a denominador 100: $\dfrac{391}{460} = \dfrac{17}{20} = \dfrac{85}{100} = 85\,\%$

Solución: 85 %

Explicación: estos ejercicios se resuelven directamente por la definición de fracción, ya que el total corresponde con el denominador y la parte corresponde con el numerador. Hay que escribir la fracción y convertirla en porcentaje usando el método que nos parezca más simple.

Conocidos el porcentaje y el total, averiguar la parte

Enunciado 2: Calcula el 76 % de 450.



Resolución: $\text{Parte} = \text{Porcentaje} \cdot \text{Total} = 76\,\% \cdot 450 = \ldots$

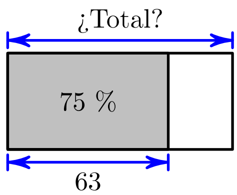
Podemos seguir así: $76\,\% \cdot 450 = \dfrac{76}{100} \cdot 450 = \dfrac{76 \cdot 45}{10} = 38 \cdot 9 = 342$

Solución: 342

Explicación: este ejercicio es el más directo de todos: el cálculo de un porcentaje de un número coincide con la definición de producto de un número y una fracción. Escribiremos el porcentaje de la manera que nos parezca más adecuada.

Conocidos el porcentaje y la parte, averiguar el total

Enunciado 3: ¿De qué cantidad es 63 el 75 %?



Resolución: $\text{Total} = \text{Parte} : \text{Porcentaje} = 63 : 75\% = \ldots$

Podemos seguir así: $63 : 75\,\% = 63 : \dfrac{3}{4} = \dfrac{63 \cdot 4}{3} = 21 \cdot 4 = 84$

Solución: 84

Explicación: si multiplicamos el total por el porcentaje obtenemos la parte; en este problema, que es el inverso, hay que dividir la parte entre el porcentaje.

Cálculos en los ejercicios básicos con porcentajes

Se puede operar con los porcentajes de tres maneras distintas: fracción con denominador 100, fracción irreducible y número decimal (o tanto por uno). Por tanto, en cada operación que haya que hacer a mano, como se pide en este nivel, conviene pensar cuál será el método más cómodo; se haga como se haga, siempre dará el mismo resultado, pero se puede ahorrar tiempo y dificultad.

Enunciados

① ¿Qué porcentaje representa 36 respecto a 150?

② Calcula el 20 % de 385.

③ ¿De qué cantidad es 46 el 23 %?

④ ¿Qué porcentaje representa 77 respecto a 250?

⑤ Calcula el 17 % de 783.

⑥ ¿De qué cantidad es 71 el 50 %?

Resolución

① Lo mejor es hacer la división para llegar al tanto por uno, pero se puede hacer la división con habilidad.

$$\frac{36}{150} = 3{,}6 : 15 = 0{,}24 = 24\,\%. \text{ Solución: } 24\,\%$$

② Lo mejor es usar la fracción irreducible.

$$20\,\% \cdot 385 = \frac{1}{5} \cdot 385 = 385 : 5 = 77. \text{ Solución: } 77$$

③ Como $46 = 2 \cdot 23$, lo mejor es usar la fracción con denominador 100.

$$46 : 23\,\% = 46 : \frac{23}{100} = \frac{46 \cdot 100}{23} = 2 \cdot 100 = 200. \text{ Solución: } 77$$

④ Incluso en operaciones tan cotidianas como esta hay espacio para la creatividad. Vamos a transformar la fracción hasta que tenga denominador 100.

$$\frac{77}{250} = \frac{308}{1000} = \frac{30{,}8}{100} = 30{,}8\,\%. \text{ Solución: } 30{,}8\,\%$$

⑤ En casos como este en los que no hay simplificaciones posibles, no queda más remedio que operar.

$$17\,\% \cdot 783 = \frac{17}{100} \cdot 783 = \frac{17 \cdot 783}{100} = \frac{13311}{100} = 133{,}11. \text{ Solución: } 133{,}11$$

⑥ Lo mejor es usar la fracción irreducible.

$$71 : 50\,\% = 71 : \frac{1}{2} = 71 \cdot 2 = 142. \text{ Solución: } 142$$

Enunciados

① ¿Qué porcentaje representa 41 respecto a 50?

② Calcula el 10 % de 67.

③ ¿De qué cantidad es 15 el 25 %?

④ ¿Qué porcentaje representa 165 respecto a 300?

⑤ Calcula el 23 % de 65.

⑥ ¿De qué cantidad es 432 el 80 %?

⑦ ¿Qué porcentaje representa 82 respecto a 410?

⑧ Calcula el 50 % de 468.

⑨ ¿De qué cantidad es 465 el 75 %?

⑩ ¿Qué porcentaje representa 24 respecto a 40?

⑪ Calcula el 30 % de 85.

⑫ ¿De qué cantidad es 31,7 el 10 %?

⑬ ¿Qué porcentaje representa 456 respecto a 2000?

⑭ Calcula el 25 % de 848.

⑮ ¿De qué cantidad es 162 el 30 %?

⑯ ¿Qué porcentaje representa 204 respecto a 1200?

⑰ Calcula el 35 % de 47.

⑱ ¿De qué cantidad es 720 el 90 %?

⑲ ¿Qué porcentaje representa 26 respecto a 650?

⑳ Calcula el 3 % de 91.

㉑ ¿De qué cantidad es 28 el 5 %?

㉒ ¿Qué porcentaje representa 18 respecto a 45?

㉓ Calcula el 75 % de 448.

㉔ ¿De qué cantidad es 24,8 el 40 %?

㉕ ¿Qué porcentaje representa 324 respecto a 432?

㉖ Calcula el 7 % de 510.

㉗ ¿De qué cantidad es 121 el 11 %?

Enunciados

① En una receta de cocina hay que añadir limón, el 14 % de lo que hayas puesto de harina. Si usamos 400 gramos de harina, ¿cuánto limón debemos añadir?

② La receta de cierto embutido establece que el 45 % debe ser carne. Si una pieza de ese embutido tiene 405 gramos de carne, ¿cuál es su masa total?

③ Una bebida alcohólica tiene 48 cm^3 de alcohol puro por cada 300 cm^3 de bebida. Calcula el porcentaje de alcohol de la bebida. (Este porcentaje se llama graduación alcohólica y se suele llamar «grados».)

④ Sin hacer ninguna operación, di cuál de las siguientes cantidades es mayor:

- El 17 % de 83.
- El 83 % de 17.

⑤ Dedico el 30 % de la superficie de mi huerta a cultivar apio, el 55 % a cebollas y el resto a acelgas. ¿Qué porcentaje de la huerta dedico a cultivar acelgas?

⑥ Una persona gasta la mitad de sus ahorros en una compra y la mitad de lo que le queda en otra compra. ¿Qué porcentaje de sus ahorros le queda disponible?

⑦ Una explotación agraria de 6800 m^2 dedica el 10 % de su superficie a trigo, el 30 % a cebada y el resto a maíz. Calcula la superficie dedicada a maíz.

⑧ En una urna solo hay bolas blancas y negras. El 65 % de las bolas son negras y hay 294 bolas blancas. Calcula cuántas bolas hay en la urna.

⑨ Se convoca una reunión de familias que tengan parejas de niños gemelos, cada pareja de diferentes padres y abuelos. A la reunión asisten las parejas de niños gemelos, sus padres y sus abuelos. Calcula el porcentaje de niños que hay en la reunión.

⑩ Por la mañana gasto el 30 % de mis ahorros y por la tarde el 40 % de lo que me queda. ¿Qué porcentaje de mis ahorros iniciales me queda por la noche?

⑪ A un amigo mío le pusieron una multa de tráfico de 200 euros, pero como tardó en pagarla, le añadieron un recargo del 15 %. ¿Cuánto tuvo que pagar en total?

⑫ Tenemos preparados para la venta 80 kilogramos de un producto, pero descubrimos que el 5 % se encuentra en mal estado. ¿Qué cantidad de producto podremos poner a la venta?

⑬ En una urna solo hay bolas blancas y negras, 8400 en total. El 15 % de las bolas son blancas. Si añadimos 525 bolas blancas, ¿qué porcentaje de las bolas de la urna serán blancas?

⑭ Tres hermanos deben repartirse la herencia de sus padres. El hermano mayor recibe 13 464 euros por el 22 % que le corresponde. Al hermano mediano le corresponde el 55 % de la herencia; calcula cuánto dinero le corresponde al hermano mediano.

Porcentajes mayores de 100

Aunque en principio pueda sorprender, existen los porcentajes mayores de 100. Igual que en las fracciones impropias el numerador es mayor que el denominador, podemos relacionar un número mayor con otro menor que sirva de referencia para obtener un porcentaje.

Ritmo cardíaco

La regla general aproximada del entrenamiento físico establece que el ritmo cardiaco máximo debe ser 220 menos la edad. Por ejemplo, una persona de 20 años tendría un máximo teórico de referencia de 220−20=200 pulsaciones cada minuto (se suele abreviar como **ppm**; en inglés, bpm, *beats per minute*).

Establecido el máximo, se calculan los ritmos más adecuados para cada intensidad de entrenamiento. Por ejemplo, un 75 % corresponde con un nivel moderado; en una persona de 20 años significa entrenar a 75 % · 200 = 150 ppm.

Sin embargo, hay ocasiones excepcionales en las que el ritmo cardiaco supera ese máximo que corresponde con el 100 %. Algunos deportistas de élite lo pueden hacer durante breves periodos de tiempo. (¡No lo intentes tú sin supervisión de un especialista, puede ser peligroso!) Si una persona de 20 años llegara a un ritmo cardiaco de 210 ppm, estaría al $\frac{210}{220-20}=\frac{210}{200}=\frac{105}{100}=105\,\%$ de su máximo teórico.

Cálculos con porcentajes mayores de 100

Se realizan exactamente igual que cualquier otro cálculo con porcentaje. Observa que en estos casos el tanto por uno es mayor que 1.

Enunciados

① Calcula el 125 % de 460.

② ¿Qué porcentaje representa 583 respecto a 550?

③ ¿De qué cantidad es 168 el 120 %?

④ Carlos ha invertido 1000 euros y al cabo de un año recibe 1140 euros. Carmen invierte 3000 euros y al cabo de un año recibe 3390 euros. En términos relativos, ¿quién ha obtenido mayor rendimiento a su inversión?

Resoluciones

① 125 % · 460 = 1,25 · 460 = 575. Solución: 575

② $\frac{583}{550}=1{,}06$ = 106 %. Solución: 106 %

③ 168 : 120 % = 168 : 1,2 = 140. Solución: 140

④ Para hacer la comparación en términos relativos podemos relacionar la cantidad final de cada uno con la cantidad de la que partía; el que tenga mayor porcentaje será el que haya conseguido mayor rendimiento.

Carlos: $\frac{1140}{1000}=\frac{114}{100}=114\,\%$. Carmen: $\frac{3390}{3000}=\frac{339}{300}=\frac{113}{100}=113\,\%$.

Solución: Carlos.

Enunciados

① ¿Puede ser mayor de 100 el porcentaje de acierto en el lanzamiento de un jugador de baloncesto? ¿Por qué?

② Un coche cuesta 24 000 euros, pero si lo pagas a plazos al final tienes que pagar 25 440 euros. ¿Qué porcentaje del precio original del coche pagarás si lo compras a plazos?

③ Si el impuesto por comprar un artículo de lujo fuera el 35 % del valor del artículo, ¿qué porcentaje del precio del artículo deberías pagar?

④ Sin hacer ninguna operación, di cuál de las siguientes cantidades es mayor:

- El 137 % de 143.
- El 143 % de 137.

⑤ Si cada año la población de cierto animal es el 120 % de la población del año anterior y hoy hay 2000 ejemplares, ¿cuántos ejemplares habrá dentro de dos años?

⑥ Los metales se dilatan con el calor. Si un hilo de metal mide a una temperatura muy alta 4545 milímetros y te informan de que ahora mide el 101 % de lo que medía a una temperatura inferior, calcula cúanto medía con esa temperatura inferior. Da el resultado en milímetros.

⑦ Cierta especie animal está siendo estudiada en dos áreas diferentes. En el área mayor, la población ha pasado en un año de 10 000 ejemplares a 12 200; en el área menor la población ha pasado en el mismo tiempo de 4000 ejemplares a 4800. ¿En qué área ha tenido más éxito reproductivo relativo?

⑧ Si a una persona que está entrenando para correr un maratón le recomiendan que corra 75 kilómetros a la semana y una determinada semana corre 78 kilómetros, ¿qué porcentaje de entrenamiento está realizando esa semana?

⑨ Compramos un producto en el extranjero; al ir a pagarlo nos dicen que tiene un recargo del 10 % por algún motivo. Cuando volvemos a nuestro país tenemos que pagar un impuesto del 20 % de lo que pagamos en total por el producto. Queremos saber qué porcentaje del precio original del producto hemos pagado al finalizar toda la operación.

⑩ Podemos calcular un «porcentaje de reproducción» de una población de parejas humanas dividiendo el número de hijos que tienen en el primer parto entre el número de parejas y escribiéndolo como porcentaje. Por ejemplo, si 50 parejas tienen 33 hijos en el primer parto, el índice sería 66 %. ¿Podría ser mayor de 100 este porcentaje? ¿Por qué?

⑪ Una jugadora de fútbol consigue 28 goles en 25 partidos y otra consigue 162 goles en 150 partidos. ¿Cuál podríamos decir que es más eficiente, la primera o la segunda?

Aumentos porcentuales

Existen multitud de ocasiones en las que hemos de calcular el **resultado final** de aumentar una cantidad en un determinado porcentaje.

El impuesto de valor añadido (IVA)

Es un impuesto que se utiliza en muchos países del mundo. Siempre se expresa con un porcentaje que hay que sumar al precio de un producto. Por ejemplo, si un producto cuesta 300 euros y el impuesto es del 21 %, el precio final del producto se calcula aumentando un 21 % la cantidad 300.

Método de cálculo no recomendado

Podríamos pensar en calcular el resultado averiguando primero la parte que corresponde al porcentaje y luego sumar el número original y esa parte. El método es correcto, pero lento.

Ejemplo: aumenta 300 un 21 %.

El 21 % de 300 es: 21 % · 300 = $\frac{21}{100} \cdot 300 = 21 \cdot 3 = 63$

La suma de 300 y el 21 % 300 nos da: 300 + 63 = 363

Solución: 363

Lo malo de este método es que usarlo haría muy complicados algunos cálculos importantes que se nos presentarán más adelante.

Examen detallado de las operaciones

Podemos observar de otra manera y con detalle qué operaciones hacemos con el método no recomendado para así investigar si hay un método más rápido.

La cantidad que nos dan es 300, que podemos escribir como $300 \cdot 1$.

El 21 % de la cantidad se puede calcular como 300 · 21 % = $300 \cdot 0{,}21$

La suma de las dos cantidades se puede escribir así, usando la propiedad distributiva: 300 + 300 · 21 % = $300 \cdot 1 + 300 \cdot 0{,}21 = 300 \cdot (1+0{,}21) = 300 \cdot 1{,}21$

Vemos que podemos resumir todas las operaciones en «multiplica la cantidad por uno más el tanto por uno».

Método de cálculo recomendado

Para aumentar una cantidad en un porcentaje hay que multiplicar la cantidad por uno más el tanto por uno.

Ejemplo: aumenta 300 un 21 %.

Resolución: $300 \cdot 1{,}21 = 363$. Solución: 363

Observa que la operación «uno más el tanto por uno» es tan sencilla que se hace mentalmente.

Aunque se te pueden ocurrir algunos casos en los que el método no recomendado es más rápido que el recomendado, puedes tener por seguro que a la larga es mucho mejor, como irás viendo en este curso.

Índice de variación

Cuando se calcula un aumento porcentual, a la cantidad uno más el tanto por uno se le llama índice de variación.

Ejemplo: cuando se aumenta una cantidad el 21 %, el índice de variación es 1,21.

Disminuciones porcentuales

Existen multitud de ocasiones en las que hemos de calcular el **resultado final** de disminuir una cantidad en un determinado porcentaje.

Las rebajas comerciales

Es práctica común en muchos comercios. Siempre se expresa con un porcentaje que hay que restar al precio de un producto. Por ejemplo, si un producto cuesta 300 euros y la rebaja es del 15 %, el precio final del producto se calcula disminuyendo un 15 % la cantidad 300.

Método de cálculo no recomendado

Podríamos pensar en calcular el resultado averiguando primero la parte que corresponde al porcentaje y luego restar el número original y esa parte. El método es correcto, pero lento.

Ejemplo: disminuye 300 un 15 %.

El 15 % de 300 es: $15\,\% \cdot 300 = \frac{15}{100} \cdot 300 = 15 \cdot 3 = 45$

La diferencia de 300 y el 15 % 300 nos da: $300 - 45 = 255$

Solución: 255

Lo malo de este método es que usarlo haría muy complicados algunos cálculos importantes que se nos presentarán más adelante.

Examen detallado de las operaciones

Podemos observar de otra manera y con detalle qué operaciones hacemos con el método no recomendado para así investigar si hay un método más rápido.

La cantidad que nos dan es 300, que podemos escribir como $300 \cdot 1$.

El 15 % de la cantidad se puede calcular como $300 \cdot 15\,\% = 300 \cdot 0{,}15$

La diferencia de las dos cantidades se puede escribir así:

$300 - 300 \cdot 15\,\% = 300 \cdot 1 - 300 \cdot 0{,}15 = 300 \cdot (1 - 0{,}15) = 300 \cdot 0{,}85$

Vemos que podemos resumir todas las operaciones en «multiplica la cantidad por uno menos el tanto por uno».

Método de cálculo recomendado

Para disminuir una cantidad en un porcentaje hay que multiplicar la cantidad por uno menos el tanto por uno.

Ejemplo: disminuye 300 un 15 %.

Resolución: $300 \cdot 0{,}85 = 255$. Solución: 255

Observa que la operación «uno menos el tanto por uno» es tan sencilla que se hace mentalmente.

Aunque se te pueden ocurrir algunos casos en los que el método no recomendado es más rápido que el recomendado, puedes tener por seguro que a la larga es mucho mejor, como irás viendo en este curso.

Índice de variación

Cuando se calcula una disminución porcentual, a la cantidad uno menos el tanto por uno se le llama índice de variación.

Ejemplo: cuando se disminuye una cantidad el 15 %, el índice de variación es 0,85.

Variaciones porcentuales

Podemos considerar conjuntamente los aumentos y las disminuciones porcentuales, porque tienen muchas cosas en común:

* Cuando se calcula un aumento porcentual, a la cantidad uno **más** el tanto por uno se le llama **índice de variación**.
* Cuando se calcula una disminución porcentual, a la cantidad uno **menos** el tanto por uno se le llama **índice de variación**.

Para aumentar o disminuir una cantidad en un porcentaje hay que **multiplicar** la cantidad por el índice de variación.

La variación como un porcentaje

Existe otra manera de ver las variaciones porcentuales que consiste en que el resultado final que nos piden es un determinado porcentaje de la cantidad dada.

Ejemplo 1

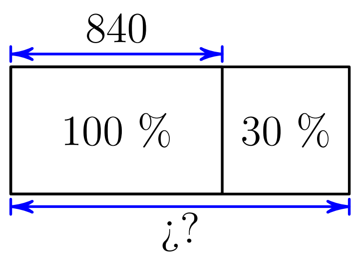
Enunciado: aumenta 840 un 30 %.

Explicación: el resultado final corresponde al

100 % + 30 % = 130 % de 840.

Resolución: 840 · 130 % = 840 · 1,3 = 1092

Solución: 1092



Ejemplo 2

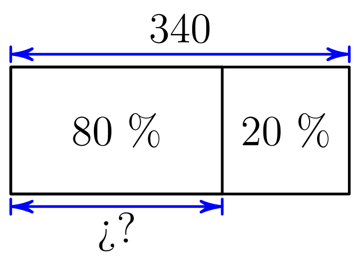
Enunciado: disminuye 360 un 20 %.

Explicación: el resultado final corresponde al

100 % – 20 % = 80 % de 360.

Resolución: 360 · 80 % = 360 · 0,8 = 272

Solución: 272



Métodos de cálculo

Sea cual sea el método de cálculo que elijas, el resultado será el mismo y las operaciones serán muy parecidas, así que en cada caso decidirás lo que te parezca más conveniente. Lo importante, además de hacerlo bien, es conocer el concepto de índice de variación, que es el que nos ayudará a resolver problemas más difíciles.

Enunciados

① Cuando se aumenta una cantidad el 23 %, ¿cuál es el índice de variación?

② Cuando se disminuye una cantidad el 23 %, ¿cuál es el índice de variación?

③ Aumenta 78 un 5 %.

④ Disminuye 78 un 5 %.

Resoluciones

① 1+0,23 = 1,23. Solución: 1,23

② 1–0,23 = 0,73. Solución: 0,73

③ 1+0,05 = 1,05; 78 · 1,05 = 81,9. Solución: 81,9

④ 1–0,05 = 0,95; 78 · 0,95 = 74,1. Solución: 74,1

Enunciados

① Cuando se aumenta una cantidad el 14 %, ¿cuál es el índice de variación?

② Cuando se disminuye una cantidad el 14 %, ¿cuál es el índice de variación?

③ Aumenta 400 un 14 %.

④ Disminuye 400 un 14 %.

⑤ Cuando se aumenta una cantidad el 6 %, ¿cuál es el índice de variación?

⑥ Cuando se disminuye una cantidad el 6 %, ¿cuál es el índice de variación?

⑦ Aumenta 550 un 6 %.

⑧ Disminuye 550 un 6 %.

⑨ Cuando se aumenta una cantidad el 40 %, ¿cuál es el índice de variación?

⑩ Cuando se disminuye una cantidad el 40 %, ¿cuál es el índice de variación?

⑪ Aumenta 320 un 40 %.

⑫ Disminuye 320 un 40 %.

⑬ Aumenta 120 un 50 %.

⑭ Disminuye 120 un 50 %.

⑮ Aumenta 680 un 95 %.

⑯ Disminuye 680 un 95 %.

⑰ Aumenta 2340 un 25 %.

⑱ Disminuye 1700 un 23 %.

⑲ Aumenta 245 un 100 %.

⑳ Disminuye 45 un 1 %.

㉑ Aumenta 860 un 1 %.

㉒ Disminuye 1200 un 99 %.

㉓ Aumenta 880 un 45 %.

㉔ Disminuye 1600 un 45 %.

㉕ Aumenta 850 un 4 %.

㉖ Disminuye 900 un 7 %.

㉗ Cuando se disminuye una cantidad el 100 %, ¿cuál es el índice de variación?

Cantidad inicial y cantidad final en variaciones porcentuales

Ya hemos visto cómo calcular una variación porcentual de una cantidad: basta multiplicar la cantidad por el índice de variación. Ahora nos enfrentamos al problema complementario.

Ejemplo: si aumentamos 740 un 15 % obtenemos $740 \cdot 1{,}15 = 851$
Llamamos a 740 la **cantidad inicial** y a 851 la **cantidad final**.

Hasta ahora, hemos aprendido a calcular la cantidad final cuando sabemos la cantidad inicial y la variación porcentual. Queremos aprender a calcular la cantidad inicial cuando sabemos la cantidad final y la variación porcentual.

Cálculo de la cantidad final

Como ya sabemos, para calcular la cantidad final conocidas la cantidad inicial y la variación porcentual hay que multiplicar la cantidad inicial por el índice de variación:

$$\boxed{\text{Cantidad inicial}} \xrightarrow[\times\ \text{Índice de variación}]{\text{Variación porcentual}} \boxed{\text{Cantidad final}}$$

Cálculo de la cantidad final

Por tanto, para calcular la cantidad inicial conocidas la cantidad final y la variación porcentual hay que dividir la cantidad final entre el índice de variación:

$$\boxed{\text{Cantidad inicial}} \xleftarrow[\div\ \text{Índice de variación}]{\text{Variación porcentual}} \boxed{\text{Cantidad final}}$$

En esta operación el índice de variación se calcula exactamente igual que en la operación anterior.

Enunciados

① ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 12 % se convierte en 616?

② ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 14 % se convierte en 817?

Resoluciones

① El índice de variación para aumentar un 12 % es 1,12.
Por tanto, cantidad inicial = 616 : 1,12 = 550.
Solución: 550

② El índice de variación para disminuir un 14 % es 0,86.
Por tanto, cantidad inicial = 817 : 0,86 = 950.
Solución: 950

Comentario sobre las operaciones

Está bastante claro que para resolver la cuestión del cálculo de la cantidad inicial la división puede resultar algo pesada en algunos casos. Esto se tendrá en cuenta para plantear los ejercicios de este nivel y se resolverá definitivamente en el nivel 3, con el uso de la calculadora. En este nivel, si puedes, usa simplificaciones.

Enunciados

① ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 20 % se convierte en 60?

② ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 30 % se convierte en 56?

③ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 10 % se convierte en 880?

④ ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 10 % se convierte en 810?

⑤ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 50 % se convierte en 36?

⑥ ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 50 % se convierte en 88?

⑦ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 80 % se convierte en 900?

⑧ ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 80 % se convierte en 52?

⑨ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 2 % se convierte en 612?

⑩ ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 40 % se convierte en 570?

⑪ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 90 % se convierte en 570?

⑫ ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 45 % se convierte en 110?

⑬ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 5 % se convierte en 714?

⑭ ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 90 % se convierte en 63?

⑮ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 100 % se convierte en 25?

⑯ ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 35 % se convierte en 78?

⑰ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 13 % se convierte en 904?

⑱ ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 20 % se convierte en 52?

⑲ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 25 % se convierte en 110?

⑳ ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 25 % se convierte en 675?

㉑ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 40 % se convierte en 882?

㉒ ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 95 % se convierte en 3?

㉓ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 2 % se convierte en 969?

㉔ ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 2 % se convierte en 588?

㉕ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 90 % se convierte en 114?

㉖ ¿Cuál es la cantidad que disminuida un 90 % se convierte en 56?

㉗ ¿Cuál es la cantidad que aumentada un 100 % se convierte en 1?

Porcentaje de variación

Cuando una cantidad inicial se convierte en otra cantidad final por algún tipo de proceso, resulta muy conveniente averiguar el porcentaje de aumento o de disminución; el porcentaje suele ser más fácil de apreciar que las cantidades.

Ejemplo 1. Una población de animales pasa en un año de 240 a 276 ejemplares. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

Ejemplo 2. Un pueblo pasa en un año de 1500 habitantes a 1290 habitantes. ¿Cuál es el porcentaje de disminución?

Cálculo del índice de variación

Conocidas la cantidad inicial y la cantidad final es muy fácil calcular el índice de variación:

Como [Cantidad final] = [Índice de variación] · [Cantidad inicial]

Resulta [Índice de variación] = [Cantidad final] : [Cantidad inicial]

Ejemplo 3. Si la cantidad 240 se convierte en 276, el índice de variación es 276 : 240 = 1,15.

Ejemplo 4. Si la cantidad 1500 se convierte en 1425, el índice de variación es 1290 : 1500 = 0,86.

Observa que:

* Cuando hay un aumento porcentual el índice de variación es mayor que 1.
* Cuando hay una disminución porcentual el índice de variación es menor que 1.
* Si multiplicamos una cantidad positiva por un número mayor que 1, la cantidad aumenta. Por ejemplo: 240 · 1,15 = 276.
* Si multiplicamos una cantidad positiva por un número menor que 1, la cantidad diminuye. Por ejemplo: 1500 · 0,86 = 1290.

Cálculo del porcentaje de variación

Conocido el índice de variación, ya solo queda un paso para calcular el porcentaje de variación:

* En un aumento porcentual [Índice de variación] = 1 + [Tanto por uno], luego: [Tanto por uno] = [Índice de variación] – 1.
* En una disminución porcentual [Índice de variación] = 1 – [Tanto por uno], luego: [Tanto por uno] = 1 – [Índice de variación].

Ejemplo 5. Si el índice de variación es 1,15, el tanto por uno es 1,15 – 1 = 0,15

Ejemplo 6. Si el índice de variación es 0,86, el tanto por uno es 1 – 0,86 = 0,14

Enunciados

① Si 240 pasa a 276, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

② Si 1500 pasa a 1290, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

Resoluciones

① 276 : 240 = 1,15; 1,15 – 1 = 0,15 = 15 %. Solución: 15 %.

② 1290 : 1500 = 0,86; 1 – 0,86 = 0,14 = 14 %. Solución: 14 %.

Enunciados

① Si 250 pasa a 280, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

② Si 50 pasa a 44, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

③ Si 450 pasa a 585, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

④ Si 620 pasa a 496, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

⑤ Si 86 pasa a 129, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

⑥ Si 86 pasa a 43, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

⑦ Si 50 pasa a 54, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

⑧ Si 50 pasa a 49, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

⑨ Si 260 pasa a 273, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

⑩ Si 560 pasa a 532, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

⑪ Si 130 pasa a 195, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

⑫ Si 80 pasa a 48, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

⑬ Si 58 pasa a 116, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

⑭ Si 117 pasa a 0, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

⑮ Si 400 pasa a 496, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

⑯ Si 600 pasa a 456, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

⑰ Si 840 pasa a 1512, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

⑱ Si 660 pasa a 396, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

⑲ Si 650 pasa a 676, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

⑳ Si 850 pasa a 833, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

㉑ Si 80 pasa a 156, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

㉒ Si 900 pasa a 594, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

㉓ Si 800 pasa a 1488, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

㉔ Si 950 pasa a 57, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

㉕ Si 850 pasa a 1020, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

㉖ Si 45 pasa a 45, ¿cuál es el porcentaje de disminución?

㉗ Si 45 pasa a 45, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

Encadenamiento de variaciones porcentuales

Una constante de la vida humana es el cambio. Las poblaciones aumentan y disminuyen su número de habitantes, los precios suben y bajan... casi todo cambia, a veces muy deprisa. Como muchos de los cambios se expresan en términos de variaciones porcentuales, nos vemos obligados a calcular la variación porcentual que relaciona una primera cantidad con la última, conocidos los cambios parciales.

Enunciados

① Un producto aumenta su precio un 20 % y posteriormente lo disminuye un 30 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

② Una ciudad aumenta su población un 30 % y posteriormente disminuye un 20 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

Comentarios

✱ **Advertencia importante**: estos problemas **no** se resuelven sumando.

✱ Observa que en estos problemas no es necesario conocer ninguna cantidad concreta, solo los porcentajes de variación.

✱ Es indiferente el orden de las variaciones.

Método de cálculo

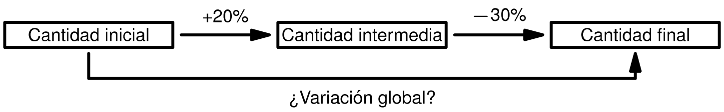
Se **multiplican** los índices de variación parciales para calcular el índice de variación global y se interpreta:

✱ Si el índice de variación es mayor que uno, ha habido un aumento global.

✱ Si el índice de variación es menor que uno, ha habido una disminución global.

Resoluciones

① Ilustramos la situación:



El índice de variación para aumentar un 20 % es 1,2.

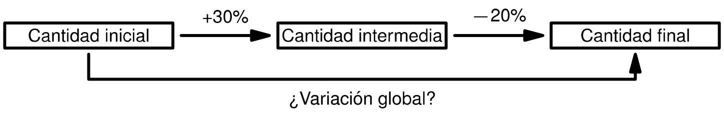
El índice de variación para disminuir un 30 % es 0,7.

El índice de variación global es $1{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}84 < 1 \Rightarrow$ disminución.

$1 - 0{,}84 = 0{,}16 = 16\,\%$.

Solución: ha habido una disminución del 16 %.

② Ilustramos la situación:



El índice de variación para aumentar un 30 % es 1,3.

El índice de variación para disminuir un 20 % es 0,8.

El índice de variación global es $1{,}3 \cdot 0{,}8 = 1{,}04 > 1 \Rightarrow$ aumento.

$1{,}04 - 1 = 0{,}04 = 4\,\%$.

Solución: ha habido un aumento del 4 %.

Enunciados

① Un producto aumenta su precio un 40 % y posteriormente lo disminuye un 30 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

② Una ciudad aumenta su población un 10 % y posteriormente disminuye un 20 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

③ Un producto disminuye su precio un 10 % y posteriormente lo aumenta un 40 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

④ Una ciudad disminuye su población un 20 % y posteriormente aumenta un 20 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

⑤ Un producto aumenta su precio un 10 % y posteriormente lo aumenta un 20 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

⑥ Una ciudad disminuye su población un 10 % y posteriormente disminuye un 20 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

⑦ Un producto disminuye su precio un 50 % y posteriormente lo aumenta un 20 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

⑧ Una ciudad aumenta su población un 20 % y posteriormente disminuye un 50 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

⑨ Un producto disminuye su precio un 40 % y posteriormente lo aumenta un 75 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

⑩ Una ciudad aumenta su población un 35 % y posteriormente disminuye un 40 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

⑪ Un producto disminuye su precio un 15 % y posteriormente lo aumenta un 40 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

⑫ Una ciudad aumenta su población un 30 % y posteriormente disminuye un 30 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

Enunciados

① Un producto aumenta su precio un 25 % y posteriormente lo disminuye un 20 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

② ¿Cuándo aumenta más una cantidad: cuando se aumenta dos veces seguidas un 30 % o cuando se aumenta una sola vez un 60 %?

③ Un producto que valía 400 euros tiene un descuento del 20 %. ¿Qué porcentaje hay que aumentar el precio de un producto que vale 256 euros para que tenga el mismo precio que tiene el primero tras el descuento?

④ Los productos A y B parten del mismo precio. El producto A aumenta su precio un 37 % y posteriormente lo disminuye un 41 %. El producto B disminuye su precio un 41 % y posteriormente lo aumenta 37 %. Sin hacer ninguna operación, averigua cuál de los dos productos es más caro al final de todos los procesos.

⑤ Una persona tiene una colección de objetos de oro y de plata. Los objetos de oro están valorados en 2000 euros y los de plata en 3000 euros. Un cambio en el mercado de metales hace que los objetos de oro se revaloricen un 20 % y los de plata pierdan un 10 % de su valor. Averigua si la colección completa de los objetos de esa persona ha aumentado o disminuido su valor y calcula en qué porcentaje.

⑥ Un producto aumenta su precio un 20 %, posteriormente lo vuelve a aumentar, esta vez un 25 %, y por fin lo disminuye un 30 %. Averigua si globalmente ha habido un aumento o una disminución y calcula su porcentaje.

⑦ Si multiplicamos por 2 una cantidad positiva, la cantidad aumenta. ¿Con qué porcentaje?

⑧ Si aumentamos un 10 % la longitud del lado de un cuadrado, ¿cuál es el porcentaje de aumento de su superficie?

⑨ Para aumentar un 44 % la superficie de un cuadrado, ¿qué porcentaje de aumento debemos aplicar al lado?

⑩ Para disminuir un 19 % la superficie de un cuadrado, ¿qué porcentaje de disminución debemos aplicar al lado?

⑪ Un producto aumenta su precio dos veces seguidas un 50 %. Queremos averiguar qué porcentaje de disminución hay que aplicar ahora para que el aumento global sea solo del 80 %.

⑫ Un comerciante poco avispado pone el siguiente cartel de precios:

Precio por unidad: 1 euro; de 1001 a 2000 unidades: descuento del 10 % en la factura; más de 2000 unidades: descuento del 20 % en la factura.

Una persona necesita comprar 1800 unidades, pero se da cuenta de que con el dinero que le costaría, puede comprar más. ¿Cuántas más?

El comercio

El comercio ha sido un importantísimo motor cultural durante toda la historia de la humanidad. El concepto de trueque y luego el de dinero llevaron a la necesidad de escribir las transacciones comerciales, lo que fue uno de los principales motivos por los que se empezó a usar la escritura.

El interés

Si en una transacción comercial una persona (física, como tú, o jurídica, como un banco) transfiere una cantidad de dinero a otra con la promesa de devolverlo al cabo de un tiempo, surge la idea de pagar una compensación por ese adelanto.

Por ejemplo, para comprar una casa el banco te adelanta una cantidad de dinero, pero al final tú le devuelves al banco más de lo que te prestó.

Esa cantidad que se cobra por el servicio se llama el interés; muchas veces se usa en plural: los intereses.

Hay varias maneras de calcular el interés: simple, compuesto y continuo. En este nivel 2 comenzamos por el más sencillo: el simple.

Interés simple

Comenzamos con el ejemplo de la **imposición a plazo fijo** para entender la idea:

Dejas en el banco 8000 euros para que el banco use ese dinero como le convenga a él; acuerdas que dentro de 5 años lo vas a retirar; a cambio de dejar el dinero allí, el banco se compromete a darte cada año el 4 % del dinero que has puesto. Los 8000 euros se llaman **capital**, el 4 % se llama **rédito** y los 5 años se llaman **tiempo**. Queremos calcular el **interés** que obtienes tú en esta operación.

El 4 % de 8000 euros es $8000 \cdot 4\,\%$; es lo que vas a recibir cada año.

Como vas a tener el dinero 5 años, el interés es $8000 \cdot 4\,\% \cdot 5 = \ldots = 1600$

Es decir, que en 5 años habrás cobrado un interés de 1600 euros. Y, por supuesto, recuperas tus 8000 euros iniciales.

Recuerda que para hacer la operación con el 4 % puedes elegir escribirlo como fracción con denominador 100, como fracción irreducible o como tanto por uno, como consideres tú que te va a ser más fácil.

Fórmula del interés simple

Llamamos C al capital, r al rédito, t al tiempo e I al interés. Entonces

$$\boxed{I = Crt}$$

Enunciados

① Calcula el interés que producen 5000 euros depositados a interés simple del 2 % de rédito anual en 3 años.

② Calcula el interés que producen 3000 euros depositados a interés simple del 8 % de rédito anual en 4 años.

Resoluciones

① $I = Crt = 5000 \cdot 2\,\% \cdot 3 = 300$. Solución: 300 euros

② $I = Crt = 3000 \cdot 8\,\% \cdot 4 = 960$. Solución: 960 euros

Enunciados

① Calcula el interés que producen 2000 euros depositados a interés simple del 10 % de rédito anual en 4 años.

② Calcula el interés que producen 5000 euros depositados a interés simple del 8 % de rédito anual en 3 años.

③ Calcula el interés que producen 1000 euros depositados a interés simple del 15 % de rédito anual en 6 años.

④ Calcula el interés que producen 500 euros depositados a interés simple del 2 % de rédito anual en 10 años.

⑤ Calcula el interés que producen 8000 euros depositados a interés simple del 3 % de rédito anual en 7 años.

⑥ Calcula el interés que producen 800 euros depositados a interés simple del 15 % de rédito anual en 2 años.

⑦ Calcula el interés que producen 4000 euros depositados a interés simple del 1 % de rédito anual en 20 años.

⑧ Calcula el interés que producen 2000 euros depositados a interés simple del 3 % de rédito anual en 5 años.

⑨ Calcula el interés que producen 9000 euros depositados a interés simple del 4 % de rédito anual en 8 años.

⑩ Calcula el interés que producen 3000 euros depositados a interés simple del 5 % de rédito anual en 9 años.

⑪ Calcula el interés que producen 2000 euros depositados a interés simple del 9 % de rédito anual en 5 años.

⑫ Calcula el interés que producen 1000 euros depositados a interés simple del 13 % de rédito anual en 8 años.

⑬ Calcula el interés que producen 6000 euros depositados a interés simple del 4 % de rédito anual en 10 años.

⑭ Calcula el interés que producen 100 euros depositados a interés simple del 1 % de rédito anual en 100 años.

⑮ Calcula el interés que producen 6300 euros depositados a interés simple del 4 % de rédito anual en 6 años.

⑯ Calcula el interés que producen 8400 euros depositados a interés simple del 13 % de rédito anual en 12 años.

⑰ Calcula el interés que producen 9300 euros depositados a interés simple del 11 % de rédito anual en 15 años.

Monomios y polinomios

Los conceptos monomio y polinomio son la base del manejo del álgebra que necesitarás desde este nivel en adelante. Igual que en la educación infantil aprendiste a operar con números sin sospechar la potencia que eso podría llegar a tener, ahora debes aprender a operar con monomios y polinomios con la confianza de que te resultará muy útil en un futuro muy próximo.

Como el estudio de monomios y polinomios puede resultar muy abstracto (y lo es), comenzamos con dos ejemplos de problemas reales en los que aparecen de manera natural monomios y polinomios. Son solo ejemplos para que no te parezcan conceptos ajenos a ti, pero no pretendemos aún usarlos para resolver problemas concretos, eso será más adelante.

Ejemplo 1

Tenemos un patio en casa que es perfectamente cuadrado. Para poder hacer cálculos con generalidad, llamamos «x» a la longitud del lado, medida en metros. Queremos hacer una renovación del patio y un contratista nos dice que cobrará un fijo de 80 euros por la valoración, 27 euros por cada metro del perímetro del cuadrado y 41 euros por cada metro cuadrado de superficie del cuadrado. Queremos averiguar una expresión algebraica que nos diga cuánto nos costará la renovación.

Si el lado mide x metros, el perímetro mide 4x metros. Como cada metro cuesta 27 euros, la renovación del perímetro costará 27·4x euros, que podemos escribir 108x. La expresión 108x es un monomio.

Si el lado mide x metros, el área mide x^2 metros cuadrados. Como cada metro cuadrado cuesta 41 euros, la renovación de la superfice costará $41x^2$. La expresión $41x^2$ es un monomio.

También hay que pagar una cantidad fija de 80 euros. La expresión 80, aunque solo es un número, también se considera un monomio.

La renovación nos costará la suma de las tres cantidades: $41x^2 + 108x + 80$. A esta expresión la llamamos un polinomio.

Solución: $41x^2 + 108x + 80$

Ejemplo 2

Tenemos un patio en casa de forma rectangular. Para poder hacer cálculos con generalidad, llamamos «x» e «y» a sus dimensiones, medidas en metros. Queremos averiguar una expresión algebraica que nos diga cuánto nos costará la renovación con el mismo contratista que en el ejemplo anterior.

El área del patio es xy, luego renovar la superficie costará 41xy.

El perímetro consta de dos lados x más dos lados y, luego su renovación costará 27·2x más 27·2y, es decir, 54x más 54y.

La renovación nos costará la suma de cuatro cantidades:

$41xy + 54x + 54y + 80$. Esta expresión es un polinomio y está formado por la suma de cuatro monomios.

Solución: $41xy + 54x + 54y + 80$.

Las indeterminadas

Cada letra usada en los monomios se llama una indeterminada. En el primer ejemplo el polinomio tiene una indeterminada; en el segundo, dos. Cuando los problemas se complican, pueden aparecer más indeterminadas.

Ejemplos de monomios y polinomios

Antes de definir exactamente qué son los monomios y los polinomios, te mostramos unos cuantos para que veas distintas posibilidades.

Ejemplo 1 → $41x^2 + 108x + 80$ es un polinomio. Está formado por tres monomios.

Ejemplo 2 → $41xy + 54x + 54y + 80$ es un polinomio formado por cuatro monomios.

Ejemplo 3 → $3x^3 - 4x^2 + 8x - 5$ es un polinomio. Está formado por cuatro monomios.

Ejemplo 4 → $6x + 4y - 7z$ es un polinomio formado por tres monomios.

Ejemplo 5 → $x^4 + 9x^3$ es un polinomio. Está formado por dos monomios.

Ejemplo 6 → $6x$ es un polinomio. Está formado por un solo monomio.

Ejemplo 7 → 33 es un polinomio. Está formado por un solo monomio.

Ejemplo 8 → -1 es un polinomio. Está formado por un solo monomio.

Ejemplo 9 → $x^2 + y^2 - 2xy$ es un polinomio formado por tres monomios.

Ejemplo 10 → z es un polinomio. Está formado por un solo monomio.

Ejemplo 11 → $-x^8$ es un polinomio. Está formado por un solo monomio.

Ejemplo 12 → $a + b$ es un polinomio. Está formado por dos monomios.

Ejemplo 13 → $a - b$ es un polinomio. Está formado por dos monomios.

Ejemplo 14 → $a^2 - b^2$ es un polinomio. Está formado por dos monomios.

Operaciones con monomios y polinomios

Tanto los monomios como los polinomios se pueden sumar, restar, multiplicar, elevar a potencias y dividir. En este nivel 2 veremos la suma, la resta, la multiplicación y algún caso sencillo de potencia.

Las operaciones con monomios y polinomios suelen ser más sencillas que las operaciones con números, aunque pueden ser más largas. Si te las tomas con paciencia, las harás muy bien. Conviene repasarlas, porque es fácil que se deslicen pequeños errores.

Las calculadoras de bolsillo, incluso científicas, no hacen operaciones con polinomios. Si algún modelo las pudiera hacer, no se podría usar en los exámenes de enseñanza secundaria. Así que aquí debes comenzar un entrenamiento que usarás muchos años.

Lo que sí existen son programas de ordenador que realizan operaciones con monomios y polinomios. No los debes usar para evitar aprender a hacer las operaciones por ti mismo, pero te pueden resultar útiles para comprobar si has hecho bien las operaciones.

$$(3x^3 - 4x^2 + 6x - 9) + (2x^3 + 2x^2 - 9x + 2)$$

$$\rightarrow \ \mathbf{5\,x^3 - 2\,x^2 - 3\,x - 7}$$

$$(2x^2 - 7x - 5) - (3x^2 + 9x - 3)$$

$$\rightarrow \ \mathbf{-x^2 - 16\,x - 2}$$

$$(2x^2 + 5x - 3)\,(3x^2 - 4x + 5)$$

$$\rightarrow \ \mathbf{6\,x^4 + 7\,x^3 - 19\,x^2 + 37\,x - 15}$$

Definición de monomio

✱ Un **monomio** es una expresión algebraica compuesta por el producto de un número y cualquier cantidad finita de letras (ninguna o más).

Ejemplo 1. La expresión «–7xy» es un monomio.

✱ Si en un monomio aparece la misma letra varias veces es aconsejable, por sencillez, escribirla como **potencia**.

Ejemplo 2. La expresión «8xxxx» es un monomio que se suele escribir «$8x^4$».

Coeficiente de un monomio

✱ El número del monomio se llama **coeficiente** del monomio.

Ejemplo 3. El número «–7» es el coeficiente del mononio «7xy».

Ejemplo 4. El número «8» es el coeficiente del mononio «$-8x^4$».

✱ Si en la expresión de un monomio solo aparecen letras, el coeficiente es «1». El motivo es que a=1·a.

Ejemplo 5. El número «1» es el coeficiente del monomio «z^3».

✱ Si en la expresión de un monomio solo aparece el signo menos delante de las letras, el coeficiente es «–1». El motivo es que –a=–1·a.

Ejemplo 6. El número «–1» es el coeficiente del monomio «$-x^5$».

Parte literal de un monomio

✱ Las letras de un monomio forman la **parte literal** de un monomio.

Ejemplo 7. El producto «xy» es la parte literal del monomio «7xy».

Ejemplo 8. El producto «x^4» es la parte literal del mononio «$-8x^4$».

✱ Un monomio puede no tener ninguna letra; en ese caso, el monomio no tiene parte literal.

Ejemplo 9. La expresión «19» es un monomio sin parte literal.

✱ Puedes pensar que un número por sí solo no es producto, de manera que la expresión «19» no encaja con la definición de monomio; puedes tomarlo como que es un producto de un solo factor o bien pensar que $19=19\cdot x^0$ porque $x^0=1$ y ya tendrías un producto.

Grado de un monomio

El **grado** de un monomio se puede definir de dos maneras equivalentes:

✱ Es el **número total de letras** que hay en la parte literal.

✱ Es la **suma de los exponentes** de todas las letras.

Ejemplo 10. El grado del monomio «$-2x^4y^2z$» es 7, porque:

- La parte literal se puede escribir «xxxxyyz», con 7 letras.
- La suma de los exponentes es 4+2+1=7, ya que $z=z^1$.

Ejemplos

	Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
Ejemplo 11	$21x^3y^4$	21	x^3y^4	7
Ejemplo 12	$-x^8y^9zt$	–1	x^8y^9zt	19
Ejemplo 13	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	(No tiene)	0

Enunciados

Rellena la siguiente tabla:

	Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
①	$4x^3$			
②	$\frac{7}{5}x^4y^6$			
③	$-9xy$			
④	$8{,}34x^2y^3$			
⑤	$-\frac{1}{13}z^2$			
⑥	x^5y^6z			
⑦	$-x$			
⑧	17			
⑨	$7yz^{20}$			
⑩	$-x^4yz$			

Enunciados

Utilizando como letra indeterminada solamente la «x», rellena la siguiente tabla:

	Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
⑪		13		4
⑫		$-\frac{11}{7}$		1
⑬		-4		0
⑭		$0{,}3$		2

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones como monomios del modo más sencillo posible, usando potencias si lo consideras necesario. Si en una expresión hay que usar varias letras indeterminadas, escríbelas en orden alfabético.

⑮ $5xxyyy$

⑯ $-xxxxxxx$

⑰ $4xyxyzxyx$

⑱ $5x^3y4x^6y$

Monomios semejantes

Dos monomios son semejantes cuando tienen exactamente la misma parte literal.

Ejemplo 1: los monomios «$4x^6$» y «$-5x^6$» son monomios semejantes.

Ejemplo 2: los monomios «$8x^3$» y «$8y^3$» no son son monomios semejantes.

Ejemplo 3: los monomios «$7x$» y «$-x$» son monomios semejantes.

Ejemplo 4: los monomios «x» e «y» no son son monomios semejantes.

Varios monomios son semejantes cuando todos ellos tienen exactamente la misma parte literal.

Ejemplo 5: los monomios «$9x^2$», «x^2» y «$-x^2$» son monomios semejantes.

Ejemplo 6: los monomios «$3x^4$», «$3y^4$» y «$3z^4$» no son son monomios semejantes.

Precaución

Puede ocurrir que, a primera vista, pensemos que dos o más monomios no son semejantes cuando sí lo son. Hay que advertir que el mismo producto se puede escribir de formas diferentes.

Ejemplo 7: los monomios «$5x^2$» y «$-3xx$» son monomios semejantes porque $x^2=xx$.

Ejemplo 8: los monomios «$8xy$» y «$-yx$» son monomios semejantes porque $xy=yx$.

Este es uno de los principales motivos por los que casi siempre intentamos escribir los monomios de la manera más sencilla posible, usando potencias, escribiendo por orden alfabético las distintas indeterminadas de un monomio que tenga más de una y colocando el coeficiente al comienzo.

Ejemplo 9: los monomios «$3xyx$», «$4x^2y$» y «$-2yx^2$» son monomios semejantes, ya que $3xyx = 3x^2y$, $4x^2y = 4x^2y$, $-2yx^2 = -2x^2y$ y la parte literal de los tres es «x^2y».

Enunciados

Escribe los siguientes monomios del modo más sencillo posible, usando potencias si es necesario, escribiendo por orden alfabético las distintas indeterminadas y colocando el coeficiente al comienzo. A continuación, di cuáles de los monomios son semejantes:

① (a) $5xxxyy$ (b) $xx3yyx$ (c) $7yyxx$ (d) $-3x^2yxy$ (e) x^25yy (f) yyx^3 (g) y^26xx (h) $8y^3x^3$

② (a) $5xzy$ (b) $8yzx^2$ (c) $9xyzx$ (d) $-3yzx$ (e) x^2zy (f) $5xxyz$ (g) $4zy^2x$ (h) $-7yzyx$

Resoluciones

① (a) $5x^3y^2$ (b) $3x^3y^2$ (c) $7x^2y^2$ (d) $x^3(-3)y^2$ (e) x^25y^2 (f) x^3y^2 (g) $6x^2y^2$ (h) $8x^3y^3$

Los monomios (a), (b), (d) y (f) son semejantes.

Los monomios (c), (e) y (g) son semejantes.

② (a) $5xyz$ (b) $8x^2yz$ (c) $9x^2yz$ (d) $-3xyz$ (e) x^2yz (f) $5x^2yz$ (g) $4xy^2z$ (h) $-7xy^2z$

Los monomios (a) y (d) son semejantes.

Los monomios (b), (c), (e) y (f) son semejantes.

Los monomios (g) y (h) son semejantes.

Enunciados

Escribe los siguientes monomios del modo más sencillo posible, usando potencias si es necesario, escribiendo por orden alfabético las distintas indeterminadas y colocando el coeficiente al comienzo. A continuación, di cuáles de los monomios son semejantes:

① (a) $-xx$ (b) x^2 (c) yy (d) $-yy$ (e) $4y^2$ (f) $x5x$ (g) $y2y$ (h) $5xy$

② (a) $4y^3$ (b) $5yy$ (c) $7y^2y$ (d) $y6y$ (e) $-9y^2$ (f) $-y^26y$ (g) $5z^2$ (h) $8z^3$

③ (a) x^2x^2x (b) $-x^45x$ (c) $x^3(-4)x^3$ (d) $8x^6$ (e) $9x^5$ (f) $5x^4x^2$ (g) $-6(x^2)^3$ (h) x^7

④ (a) $-5x^2x^2$ (b) $7x^2x$ (c) $-x7x^2$ (d) $4(x^2)^2$ (e) $8x^3$ (f) $8z$ (g) $9y$ (h) $x^3(-5)x$

⑤ (a) z^34 (b) $5z^2z^2$ (c) $-x^27x$ (d) $-9x^3$ (e) $7x^2x^2$ (f) $2x^4$ (g) $-3x^3$ (h) $2y$

⑥ (a) $4x^3$ (b) $-5y^3$ (c) $6z^2$ (d) $-z^2$ (e) $-7x^3$ (f) $8y^3$ (g) z^2 (h) $-3y^3$

⑦ (a) $6x^8$ (b) $21x^7$ (c) $-5(x^4)^2$ (d) $-3x^7$ (e) $2(x^2)^4$ (f) $7x^3x^3x$ (g) $6z^7$ (h) $2z^8$

⑧ (a) $-z8z$ (b) $z9z^2$ (c) x^2 (d) $-z^3$ (e) $4z^2$ (f) $3x^3$ (g) zz (h) $-z9z$

⑨ (a) $2x^4x^5$ (b) x^35x^6 (c) $7(x^3)^3$ (d) $-x^6$ (e) $2x^3x^3$ (f) $x((x^2)^2)^2$ (g) $x^2(x^2)^2$ (h) $-5x^5$

⑩ (a) $5x^3$ (b) $-4y^2$ (c) $4xy$ (d) $-y5x$ (e) $8yy$ (f) $-x5x^2$ (g) yx (h) x^2y^2

Convenios para escribir sumas de monomios

Las sumas de monomios se escriben siguiendo las mismas reglas que nos permiten simplificar las expresiones de suma de números enteros, omitiendo paréntesis que complican innecesariamente la expresión. En los siguientes ejemplos reconocerás los casos que ya conoces del nivel 1, cuando aprendiste a sumar números enteros.

Ejemplo 1: «$(+2x^3) + (+5x^4)$» se escribe «$2x^3 + 5x^4$»

Ejemplo 2: «$(+2x^3) + (-5x^4)$» se escribe «$2x^3 - 5x^4$»

Ejemplo 3: «$(-2x^3) + (+5x^4)$» se escribe «$-2x^3 + 5x^4$»

Ejemplo 4: «$(-2x^3) + (-5x^4)$» se escribe «$-2x^3 - 5x^4$»

Suma de dos monomios

Existen tres casos diferentes de suma de dos monomios:

✱ Si los monomios no son semejantes, la suma no se puede expresar como un solo monomio y hay que dejarla indicada. En este caso se dice que los monomios no son sumables.

Ejemplo 5: $2x^3 + 5x^4 \rightarrow$ hay que dejarlo así.

Ejemplo 6: $-2x + 3x^2 \rightarrow$ hay que dejarlo así.

Ejemplo 7: $x + y \rightarrow$ hay que dejarlo así.

✱ Si los monomios son semejantes y sus coeficientes no son números opuestos, el resultado de la suma es un monomio semejante a los dos sumandos y con coeficiente la suma de los coeficientes de los dos sumandos. Este es el caso que utilizarás más a menudo. Es imprescindible que calcules bien las sumas de números enteros.

Ejemplo 8: $2x^3 + 5x^3 = 7x^3$

Ejemplo 9: $-2x^2 + 8x^2 = 6x^2$

Ejemplo 10: $4x - 9x = -5x^2$

Ejemplo 11: $-3x^5 - 4x^5 = -7x^5$

✱ Si los monomios son semejantes y sus coeficientes son opuestos, el resultado es 0. Este caso aparecerá muchas veces cuando busquemos simplificaciones.

Ejemplo 12: $2x^3 - 2x^3 = 0$

Ejemplo 13: $-7x + 7x = 0$

Comentarios

Estas reglas suelen confundir a bastantes estudiantes, pero son bien lógicas si recuerdas que las potencias «no se llevan bien» con las sumas, en el sentido de que no existen fórmulas generales para sumar dos potencias.

Igual que $2^3 + 2^5$ no se puede escribir como una potencia de 2, $x^3 + x^5$ tampoco se puede escribir como una potencia de x. Al fin y al cabo, la letra «x» representa a un número. Este es el motivo de que dos monomios que no son semejantes no son sumables.

Cuando sumamos monomios semejantes puedes pensar que sumamos «cosas», así, en general. Por ejemplo, $7x^5 + 4x^5$ puedes verlo como 7 cosas más 4 cosas; evidentemente, serán 11 cosas, igual que si sumas 7 mesas y 4 mesas tienes 11 mesas. La propiedad distributiva justifica esta regla: $7x^5 + 4x^5 = (7+4)x^5 = 11x^5$.

Enunciados

Calcula las siguientes sumas de monomios. Cuando los monomios no sean sumables, escríbelo.

① $2x+7x$	② $4x-9x$	③ $3x+2x^2$
④ $-5x^3+8x^3$	⑤ $-11x^7+11x^7$	⑥ $4x^2+9x^2$
⑦ $7x-8x$	⑧ $2x^3-7x^3$	⑨ $12x^2-x^2$
⑩ $-x-x$	⑪ x^3+x^4	⑫ $8x^2-8x^2$
⑬ $-9x^2+3x^2$	⑭ $8x-5x$	⑮ $-7x^5+7x^5$
⑯ $2x+x^2$	⑰ $-3x^2-x^2$	⑱ $2x-10x$
⑲ $3x^8+2x^8$	⑳ $5y+y$	㉑ $3x-5y$
㉒ $3y^2-4y^2$	㉓ x^3-x^3	㉔ $8x^9+9x^9$
㉕ $6x^4-8x^4$	㉖ $3x+4x$	㉗ $-9x+9y$
㉘ $9x^2-2x^2$	㉙ $-7y^3+7y^3$	㉚ $2x^4+3x^4$
㉛ $8x-12x$	㉜ $2x^3+5x^3$	㉝ $12x-13x$
㉞ $21x+10x$	㉟ $5x^2-8x^2$	㊱ $6y-9y$
㊲ $2y^2-7y^2$	㊳ x^2+y^2	㊴ $15x^3-8x^3$
㊵ $14x^7-7x^7$	㊶ $16x-20x$	㊷ $-4x^8+4x^8$
㊸ $2x-4x$	㊹ x^2+2x^2	㊺ $6x-x$
㊻ $7x^3-8x^3$	㊼ $2x^2-x$	㊽ $-7x^2-3x^2$
㊾ $5x^3-8x^3$	㊿ $-9x^3+9x^3$	(51) $-7x+10x$
(52) $7z-9z$	(53) $-2y-5y$	(54) y^2+z
(55) $-6x^3-2x^3$	(56) $6x^2-9x^2$	(57) $9z+9y$
(58) $8x^2-9x^2$	(59) $-15y^3+15y^3$	(60) $18x^2-20x^2$
(61) $7x-10x$	(62) x^2-2x^2	(63) $x+x^2$
(64) $7y^5-9y^5$	(65) $6x+9x$	(66) $-7y-8y$
(67) $9x^3-12x^3$	(68) x^2+2x^3	(69) $-8z^5+8z^5$

Suma de más de dos monomios

Existen multitud de casos posibles cuando nos encontramos ante la suma de más de dos monomios, pero no merece la pena examinarlos de uno en uno, porque basta tener en cuenta que el objetivo siempre es escribir la expresión del modo más sencillo posible. Por tanto, simplemente comentaremos algunos ejemplos.

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible.

① $3x^3+6x^4-8x^3$

② $4x+8y-4x+2y$

③ $5x^3-4x^3-8x^2+7x^2$

④ $8x^4+9x^5-8x^4-9x^5$

⑤ $x^2+y^2+z^2$

⑥ $2x+y-3z+4y-6x$

Resoluciones

① $3x^3+6x^4-8x^3 = -5x^3+6x^4$

Podemos sumar los monomios «$3x^3$» y «$-8x^3$» porque son semejantes, pero el monomio «$6x^4$» no es sumable con «$-5x^3$».

② $4x+8y-4x+2y = 4x-4x+8y+2y = 0+12y = 12y$

Hemos dado muchos pasos para que veas lo que ocurre; en un ejercicio real podemos escribir la solución directamente. Como el resultado de «$4x-4x$» es 0, desaparece en la suma final.

③ $5x^3-4x^3-8x^2+7x^2 = x^3-x^2$

Hay dos parejas de monomios semejantes la que tiene parte literal x^3 y la que tiene parte literal x^2. Hacemos las dos sumas y los monomios obtenidos ya no son semejantes, por lo que no son sumables. Observa que es preferible escribir «x^3» mejor que «$1x^3$» y «$-x^2$» mejor que «$-1x^2$», los unos no se suelen escribir (no estaría mal, pero queda raro).

④ $8x^4+9x^5-8x^4-9x^5 = 8x^4-8x^4+9x^5-9x^5 = 0+0 = 0$

Hemos dado muchos pasos para que veas lo que ocurre; en un ejercicio real podemos escribir la solución directamente. Hay dos parejas de monomios cuya suma da 0.

⑤ $x^2+y^2+z^2$

No hay ninguna simplificación posible porque no hay monomios semejantes, así que hay que dejar así la expresión.

⑥ $2x+y-3z+4y-6x = -4x+5y-3z$

Sumamos los monomios que son sumables y dejamos el que no es equivalente.

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible.

① $2x^5+3x^5-8x^2-4x^2$

② $7z+8z^2-7z$

③ $2x^2+6x^2+9x-10x$

④ $7x^3+5y^2-5y^2-7x^3$

⑤ $8x+5x^2-9x$

⑥ $3x^5-9x+x^5-x$

⑦ $5y+6y-3x-11y+2x$

⑧ $2x^2-3x+5x^2-5x$

⑨ $9x-3x^3+2x+2x^3$

⑩ $2x+3x-y-5x-y$

⑪ $9x-6y-8x+4y-x+2y$

⑫ $5z-3z^2+8z-z^2$

⑬ $7y+3y^3-7y+y^3$

⑭ $4x^2+5x^2-3x-7x$

⑮ $10x^3+4x^2-6x^2-9x^3$

⑯ $8x-8x+4z-4z+y$

⑰ $7z^3+6y-3z^3+4y$

⑱ $8x^4-3x^3+2x^4-x^3+x^4$

⑲ $3y^2+5y+7y^2-6y$

⑳ $4x+6x-5x^2-x^2-x^2$

㉑ $8z+7x-12z-13x$

㉒ $y+y^2+y^3+y+y^2+y^3-2y$

㉓ $8x^5+2x^5-9x+x^5+9x$

㉔ $-7y-9y^2-y-y^2$

㉕ $7x+8z-7x+4z^2$

㉖ $3x-5y+4z$

Monomios opuestos

* Dos monomios son opuestos uno del otro cuando son semejantes y sus coeficientes son números opuestos.

  Ejemplo 1. Los monomios «$7x^2$» y «$-7x^2$» son opuestos uno del otro.

  Ejemplo 2. Los monomios «$-5y^3$» y «$5y^3$» son opuestos uno del otro.

  Ejemplo 3. Los monomios «8» y «–8» son opuestos uno del otro.

* El signo para indicar «monomio opuesto de» es el signo «–», igual que para los números racionales.

  Ejemplo 4. El monomio opuesto de «$7x^2$» es «$-7x^2$»: $-(7x^2) = -7x^2$

  Ejemplo 5. El monomio opuesto de «$-7x^2$» es «$7x^2$»: $-(-7x^2) = 7x^2$

  Ejemplo 6. El monomio opuesto de «$-5y^3$» es «$5y^3$»: $-(-5y^3) = 5y^3$

  Ejemplo 7. El monomio opuesto de «$5y^3$» es «$-5y^3$»: $-(5y^3) =-5y^3$

* La suma de dos monomios opuestos es 0.

  Ejemplo 8. $7x^2+(-7x^2) = 0$

  Ejemplo 9. $-5y^3+5y^3 = 0$

Resta de monomios

* Para restar dos monomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

  Ejemplo 10. $12x^2-(7x^2) = 12x^2+(-7x^2) = 5x^2$

  Ejemplo 11. $12x^2-(-7x^2) = 12x^2+(+7x^2) = 19x^2$

  Ejemplo 12. $-8x^3-(-2x^3) = -8x^3+2x^3 = -6x^3$

* El orden en que aparezcan el minuendo y el sustraendo no tiene importancia.

  Ejemplo 13. $-(-2x^3)+4x^3 = 2x^3+4x^3 = 6x^3$

  Ejemplo 14. $-(-4x^5)-10x^5 = 4x^5-10x^5 = -6x^5$

* Puede haber varios minuendos y varios sustraendos.

  Ejemplo 15. $3x-(-7x)-5x-(-x) = 3x+7x-5x+x = 6x$

  Ejemplo 16. $-(-x^2)-10x^2+7x^2-(-3x^2) = x^2-10x^2+7x^2+3x^2 = x^2$

Sumas y restas de monomios en la misma expresión

En el caso de que en una misma expresión aparezcan sumas y restas de monomios, podemos ir haciendo alguna suma en el mismo paso en que calculamos los opuestos de los sustraendos.

Ejemplo 17. $4x^2-7x^2+20x-(-15x) = 11x^2+20x+15x = 11x^2+35x$

Ejemplo 18. $6x^3+2x^3-(-8x)-10x = 8x^3+8x-10x = 8x^3-2x$

Dependerá de nuestra habilidad, pero si son pocos los monomios, podremos hacer muchas operaciones mentalmente; cuando sean más, tendremos que ayudarnos de otras técnicas.

Ejemplo 19. $3x^3-(-8x^2)-12x^2+7x^3 = 10x^3+8x^2-12x^2 = 10x^3-4x^2$

Ejemplo 20. $-(-3x)+x^2-(-9x)+x^3-(+3x)+5x^3-(-x)-6x^2 =$

$= -5x^2+6x^3+3x+9x-3x+x = -5x^2+6x^3+10x$

En un primer paso hemos sumado los monomios semejantes con x^2 y con x^3 y a la vez hemos calculado los monomios opuestos.

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible.

① $-(-6x)+4x+5x^2$

② $9x^2-(-3x^3)+8x^3-(-5x^2)$

③ $-10x-(-3x)-(-2x)$

④ $-(-5x^2)+6x+4x-8x^2$

⑤ $2x-8x^2-(-2x^2)+9x$

⑥ $-7x-9x^2-(-3x)-(-3x^2)$

⑦ $8x^4-(-3x^4)+9x-12x$

⑧ $9x-(+9x)-(-3x^2)-3x^2$

⑨ $12x+2x^3-(-3x)-(-5x^3)$

⑩ $-(-9x^2)+8x^3-(-3x^2)-9x^3$

⑪ $7x+8x-9x^2-(-3x^2)$

⑫ $-(-x)+8x-(-x^2)-7x^2$

⑬ $9x^3-(-3x^2)-(+3x^2)-(-x^3)$

⑭ $7x-(+9x)-10x^2-(+2x^2)$

⑮ $-(9x)+(-8x)-(-2x^7)$

⑯ $-(-9x^2)+9x^4-(-x^4)-10x^2$

⑰ $23x-(-x^2)-17x-(-2x^2)$

⑱ $-(-(-3x))+5x$

⑲ $9x^3-(-2x^2)+2x^3-(-5x^2)$

⑳ $7x^4-(-x)+5x-9x^4$

㉑ $5x^2-(-7x^3)-9x^3-8x^2$

㉒ $-8x-(-2x^2)-2x-9x^2$

㉓ $7x^5-(-x^3)+5x^5-(-2x^3)$

㉔ $8x-(+2x)-(+4x)-(+2x)$

㉕ $x^2-(-4x)-9x-8x^2$

㉖ $5x^3-(-9x)-9x-5x^3$

Producto de monomios

- El producto de monomios siempre es otro monomio.
- El coeficiente del resultado es el producto de los coeficientes de los factores.
- La parte literal del resultado es el producto de la partes literales de los factores.

  Ejemplo 1. $(2x)\cdot(3y) = 6xy$

  Ejemplo 2. $(-4x)\cdot(2y)\cdot(5z) = -40xyz$

  Ejemplo 3. $(5x)\cdot(-2y)\cdot(-3z) = 30xyz$

- Si todos los monomios tienen coeficientes positivos, los paréntesis alrededor de los factores son innecesarios.

  Ejemplo 4. $7x\cdot 2y = 14xy$

  Ejemplo 5. $3x\cdot 4y\cdot 5z = 60xyz$

- Si un monomio del producto tiene coeficiente negativo, el monomio debe ir entre paréntesis, salvo que sea el primero.

  Ejemplo 6. $2x\cdot(-3y) = -6xy$

  Ejemplo 7. $-5x\cdot 3y\cdot(-2z) = 30xyz$

- Cuando la letra indeterminada se repite en algunos monomios, hay que escribirla en el resultado como una potencia.

  Ejemplo 8. $5x\cdot 4x = 20x^2$

  Ejemplo 9. $2x^2\cdot(-4x^3) = -8x^5$

Explicación detallada

Veamos con detalle la explicación de por qué se opera así usando un ejemplo de los que más a menudo te va a aparecer.

Ejemplo 10. $3x^2\cdot 5x^3 = 15x^5$

Los monomios son productos, así que si multiplicamos dos monomios tendremos un producto de productos, es decir: muchos factores.

Los factores son 3, x^2, 5 y x^3.

Como el producto es conmutativo, podemos recolocar todos los factores a nuestra conveniencia: escribiremos primero todos los coeficientes, que son números, y luego las partes literales, que en este ejemplo son potencias.

$3x^2\cdot 5x^3 = 3\cdot 5\cdot x^2\cdot x^3$

Podemos multiplicar los números entre sí y las potencias entre sí; como las potencias son de la misma base, el producto se puede realizar sumando los exponentes.

$3\cdot 5 = 15$; $x^2\cdot x^3 = x^5$

Uniéndolo todo: $3x^2\cdot 5x^3 = 3\cdot 5\cdot x^2\cdot x^3 = 15x^5$

Aplicación para el cálculo práctico

Casi siempre vas a poder hacer los productos mentalmente y de una sola vez. Escribe primero el producto de los coeficientes y luego ve buscando las distintas apariciones de las diferentes letras sumando sus exponentes.

Ejemplo 11. $4x^2y\cdot 2y^3\cdot z^2 = 8x^2y^4z^2$

Ejemplo 12. $-4x^5(-7x^4y)(-10x^3y) = 280x^{12}y^2$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible.

① $-6x \cdot 5x^4$

② $2x^4 \cdot 3x^2$

③ $-9y \cdot 5y$

④ $6x^2 \cdot 10x \cdot 2x^8$

⑤ $8z^2 \cdot (-3z^4)$

⑥ $-7x^3 \cdot (-2x^4)$

⑦ $x \cdot (-4x) \cdot (-6x^2)$

⑧ $7xy \cdot (-xy)$

⑨ $8x^2 \cdot 3x^4$

⑩ $-8x^3y^2 \cdot (-2x^2y^5)$

⑪ $3xyz \cdot (-2x^2y^3z^4)$

⑫ $7x^5 \cdot (-2x^3) \cdot x$

⑬ $8z^4 \cdot 3z^2 \cdot z$

⑭ $(-z) \cdot (-z^2) \cdot (-z^3)$

⑮ $2x^2 \cdot (-5x^4) \cdot (7x^3)$

⑯ $6x^2 \cdot (-6x^5)$

⑰ $5xy^3 \cdot (-3x^3y^2)$

⑱ $4z^6 \cdot (-6z^4)$

⑲ $8x^3 \cdot (-3x^4)$

⑳ $7y^5 \cdot (-y)$

㉑ $8x^5 \cdot 2x^6$

㉒ $10x^8 \cdot (-0{,}5x)$

㉓ $5x^2 \cdot (-3x) \cdot 2y^8$

㉔ $x \cdot x \cdot (-4x^4)$

㉕ $2xy \cdot (-3xz)(-2yz)$

㉖ $(-7x) \cdot (-7x)$

Potencia de exponente natural de un monomio

Para elevar un monomio a un número natural hay que elevar el coeficiente y todas las potencias de la parte literal a ese número natural.

Ejemplo 1: $(2x^3)^4 = 2^4 \cdot (x^3)^4 = 16x^{12}$

Ejemplo 2: $(-5x^6)^3 = (-5)^3 \cdot (x^6)^4 = -125x^{24}$

Ejemplo 3: $(7xy^3)^2 = 7^2 \cdot x^2 \cdot (y^3)^2 = 49x^2y^6$

Ejemplo 4: $(-3x^5yz)^3 = (-3)^3 \cdot (x^5)^3 \cdot y^3 \cdot z^3 = -27x^{15}y^3z^3$

Potencia de exponente 0 de un monomio

Cualquier monomio elevado a 0 da 1.

Ejemplo 5: $(2x^3)^0 = 1$

Ejemplo 6: $(-7y^8)^0 = 1$

Ejemplo 7: $(13xy^3z^7)^0 = 1$

Explicación del método

- Como los monomios son productos, hay que aplicar la propiedad de la potencia de un producto: $(ab)^n = a^nb^n$.
- Cuando elevamos una potencia a otra potencia, hay que multiplicar los exponentes: $(a^n)^m = a^{nm}$.
- Cualquier potencia de exponente 0 da 1: $a^0 = 1$.

Cálculos en un solo paso

Si comienzas por la potencia del coeficiente y continúas por las potencias de cada letra indeterminada, podrás hacer muchas operaciones de potencia de monomios directamente en un solo paso.

Ejemplo 8: $(2x^3)^4 = 16x^{12}$

Ejemplo 9: $(-5x^2yz^7)^2 = 25x^4y^2z^{14}$

Ejemplo 10: $(-x^3y^5)^2 = x^6y^{10}$. Recuerda que $(-1)^2=1$.

Ejemplo 11: $(-x^3y^5)^5 = -x^{15}y^{25}$. Recuerda que $(-1)^5=-1$.

Potencia de exponente entero negativo de un monomio

También se puede calcular este tipo de potencias; pero si el monomio no es de grado 0, el resultado no es un monomio, y por eso no lo estudiamos en este nivel.

Ejemplo 12: $(2x^3)^{-1} = ???$

Ejemplo 13: $(-x^2)^{-5} = ???$

Ejemplo 14: $5^{-2} = \frac{1}{25}$

Potencia de exponente racional de un monomio

En algunos casos, también se puede calcular este tipo de potencias, pero esta cuestión es mucho más profunda y hace falta conocer muchas más cuestiones matemáticas para afrontarla. Lo haremos en su momento. Con los que sabes hasta ahora, puedes empezar a ver que queda mucho conocimiento por delante.

Ejemplo 15: $(5x^4)^{\frac{2}{3}} = ???$

Ejemplo 16: $(-x)^{-\frac{1}{2}} = ???$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible.

① $(2x^5)^2$

② $(-2x^3)^3$

③ $(x^2y^3)^4$

④ $(-x^3y^5)^7$

⑤ $(xyz)^2$

⑥ $(2x^4yz^5)^4$

⑦ $(2x^8)^2$

⑧ $(-2x^3)^5$

⑨ $(15x^9)^0$

⑩ $(-x)^4$

⑪ $(-3x^7y^8z)^2$

⑫ $(-17x^2)^0$

⑬ $(-7x^2)^2$

⑭ $(2xy^3)^5$

⑮ $(x^2yz^3)^8$

⑯ $(-10x^{10})^2$

⑰ $(xyz)^0$

⑱ $(5x^5)^3$

⑲ $(3yz^2)^4$

⑳ $(-3x)^2$

㉑ $(5x^4)^3$

㉒ $(3x^2yz^3)^2$

㉓ $(-x^7y^2)^3$

㉔ $(3x^6y)^3$

㉕ $(-x^{11})^3$

㉖ $(2x^8y^7)^4$

Operaciones combinadas con monomios

La jerarquía de operaciones para hacer cálculos combinados con monomios es la misma que para números racionales. Como de momento no hemos trabajado la división de monomios, la excluimos de la lista, que queda así:

1. Paréntesis, comenzando por los interiores.
2. Potencias.
3. Productos.
4. Sumas y restas.

Como el producto y la suma son conmutativos y la resta se convierte en suma, no es necesario tener en cuenta el orden en que aparezcan estas operaciones, por lo que no se ha especificado «de izquierda a derecha», como tenemos que hacer cuando aparecen divisiones.

Consejos generales

✱ Cuando hacemos operaciones combinadas, nuestro objetivo es dejar la expresión de la manera más sencilla que sea posible.

✱ Si en el resultado final aparecen más de dos monomios, es aconsejable escribirlos ordenados por grados: da igual que sea de menor a mayor o de mayor a menor. Incluso aunque el enunciado no lo especifique, es conveniente hacerlo.

✱ Casi siempre es conveniente ir simplificando cuanto antes, incluso en varios lugares distintos en el mismo paso.

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible.

① $-7x+4x+(3x)^2+2x\cdot(-5x)$

② $(2x^3)(-8x)-(3x^4-(5x^4-9x^4))$

③ $(4x-6x)^4+(5x^2-2x^2)^2$

Resoluciones

① En un primer paso podemos hacer la suma «$-7x+4x$», sin esperar más; también la potencia y el producto.

$-7x+4x+(3x)^2+2x\cdot(-5x) = -3x+9x^2-10x = -13x+9x^2$

Cuando obtenemos la suma de dos monomios que no son semejantes, ya no podemos seguir simplificando. El resultado final también se podría escribir como «$9x^2-13x$».

② En un primer paso podemos hacer el producto y también el paréntesis interior, ya que son resultados independientes.

$(2x^3)(-8x)-(3x^4-(5x^4-9x^4)) = -16x^4-(3x^4-(-4x^4)) = -16x^4-(3x^4+4x^4) =$

$= -16x^4-7x^4 = -23x^4$

③ Hay que empezar por calcular los paréntesis, luego las potencias y por último la suma.

$(4x-6x)^4+(5x^2-2x^2)^2 = (-2x)^4+(3x^2)^2 = 16x^4+9x^4 = 25x^4$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible.

① $x7x-(-4x)^2$

② $(-2x^2)\cdot(-3x)+(4x)^2x$

③ $(4x-3x)^4+((-2x)^2)^2$

④ $x\cdot(3x)-(6x^2-(2x^2-4x^2))$

⑤ $-2x\cdot(-4x^5)+(3x^2)^3$

⑥ $(-2x^4)^2\cdot(6x-8x)^3$

⑦ $(2x^4)^2+(5x^2-6x^2)^4$

⑧ $(-2x)^3\cdot(x2x)^2$

⑨ $(5x^2-7x^2)\cdot(8x^4+x^4)-(-7x^6)$

⑩ $((4x-2x)\cdot(3x^2-4x^2))^3$

⑪ $(-7x+7x)\cdot(1245x^{672})^{23}$

⑫ $2z\cdot(-6z^2)+zzz-(-2z)\cdot(-4z)\cdot(-z)$

⑬ $(2x-(5x-7x))^2$

⑭ $(8x^2+x^2)^2+(-3x)^2\cdot(2x)^2$

⑮ $(11x^3-x^3)^2-x^6$

⑯ $(-3x^3)^3+(3x^3)^3$

⑰ $(8-(-x)^2-8)^4$

⑱ $8x^8\cdot(-4x^4)+(-2x^6)^2-(-x^2)^6$

⑲ $18x^2+(2x)\cdot(-9x)$

⑳ $(4x^3-4x^3)^{25}+(x-1-x)^{15}$

㉑ $(-xy)^3-8(xy)^3$

㉒ $y\cdot(2x^2y)^3+(2x^2)^2\cdot(-2xy^2)^2$

㉓ $((-2x)\cdot(-3y))^2+(5xy)^2$

㉔ $(2x)\cdot(-y))^4+(-xy)^4$

㉕ $(6x^2-4x^2)^3+(-4x^3+2x^3)^2$

㉖ $(23x^2)^7+(-23x^2)^7$

Definición de polinomio

Un polinomio es una expresión algebraica que consiste en la suma de uno o más monomios.

Ejemplo 1. La expresión «$5x^2-6x+1$» es un polinomio que consiste en la suma de los monomios «$5x^2$», «$-6x$» y «1».

Ejemplo 2. La expresión «$-13+9x-5x^2+x^3$» es un polinomio que consiste en la suma de los monomios «-13», «$9x$», «$-5x^2$» y «x^3».

Ejemplo 3. La expresión «$7x^3$» es un polinomio que consiste en el único monomio «$7x^3$». Aunque parece que no es una suma, se considera que lo es. Si no te quedas cómodo porque sigues pensando que no es una suma, piensa que lo podemos escribir como «$7x^3+0$»: ya está, ahí tienes la suma.

Ejemplo 4. La expresión «9» es un polinomio que consiste en el único monomio «9». Aunque parece que no es una suma, se considera que lo es. Si no te quedas cómodo porque sigues pensando que no es una suma, piensa que lo podemos escribir como «$9+0x$»: ya está, ahí tienes la suma.

Denominaciones comunes de algunos polinomios

- Si un polinomio solo tiene un monomio, se llama también monomio (¡claro!).

  Ejemplo 5. La expresión «$11x^2$» es un polinomio y es un monomio.
- Si un polinomio tiene exactamente dos monomios, se llama binomio.

  Ejemplo 6. La expresión «$3x-4$» es un polinomio y es un binomio.
- Si un polinomio tiene exactamente tres monomios, se llama trinomio.

  Ejemplo 7. La expresión «x^2-7x+1» es un polinomio y es un trinomio.

Grado de un polinomio

El grado de un polinomio es el grado que tenga su monomio de mayor grado.

Ejemplo 8. El polinomio «$3x+5$» es de grado 1 porque el monomio «$3x$» es de grado 1, el monomio «5» es de grado 0 y por tanto el monomio de mayor grado es de grado 1.

Ejemplo 9. El polinomio «$-6x^5+4x^3+x$» es de grado 5 porque el monomio «$-6x^5$» es de grado 5, el monomio «$4x^3$» es de grado 3 y el monomio «x» es de grado 1 y por tanto el monomio de mayor grado es de grado 5.

Ejemplo 10. El polinomio «$8x^4$» es de grado 4.

Ejemplo 11. El polinomio «71» es de grado 0.

Escritura de los polinomios

Para ayudarnos a manejar y operar los polinomios es costumbre escribir sus monomios por orden de grados, bien de mayor a menor o de menor a mayor; casi nunca tiene importancia hacerlo de una manera u otra.

Ejemplo 12. El polinomio «$2x-3x^2+1$» se suele escribir «$-3x^2+2x+1$» (con los grados de mayor a menor) o bien «$1+2x-3x^2$» (con los grados de menor a mayor).

Nombres de los polinomios

Cuando hay que trabajar con varios polinomios a la vez, que pueden tener bastantes monomios, es más cómodo poner un nombre al polinomio y así no hay que escribirlo completo. Los polinomios se suelen nombrar con letras latinas mayúsculas y normalmente se añaden entre paréntesis las letras indeterminadas.

Ejemplo 13. $A(x) = 7x^2-4x+3$; ejemplo 14. $B(x,y) = 4x+2y^2$; ejemplo 15. $C(z)=2z$.

Valor númerico de polinomio

Ya conoces, del nivel 1, el concepto de valor numérico de una expresión algebraica cualquiera. Ahora vamos a ver una manera muy cómoda de expresarlo cuando usamos los nombres de los polinomios.

Ejemplo 1

Consideramos el polinomio «$3x^2-8x+2$» y queremos calcular su valor numérico para $x=5$. Sabemos que hay que sustituir en el polimomio todas las apariciones de la letra x por el número 5 y hacer las operaciones:

$3\cdot 5^2-8\cdot 5+2 = 3\cdot 25-40+2 = 75-40+2 = 35+2 = 37$.

Si nombramos con una letra al polinomio podemos escribir $A(x) = 3x^2-8x+2$ (se lee «A **de** equis».

En ese caso, el valor numérico del polinomio $A(x)$ para $x=5$ se escribe $A(5)$ (se lee «A **de** cinco»).

Es decir: $A(x) = 3x^2-8x+2 \Rightarrow A(5) = 3\cdot 5^2-8\cdot 5+2 = 37$.

Ejemplo 2

Enunciado: siendo $B(x) = x^3+3x+13$, calcula $B(-2)$.

Comentario: nos piden, sin decirlo con estas palabras, el valor numérico del polinomio «$x^3+3x+13$» para $x=-2$.

Resolución

$B(-2) = (-2)^3+3\cdot(-2)+13 = -8-6+13 = -1$

Ejemplo 3

Enunciado: siendo $C(y) = y^3+3y+13$, calcula $C(-2)$.

Comentario: nos piden, sin decirlo con estas palabras, el valor numérico del polinomio «$y^3+3y+13$» para $y=-2$.

Resolución

$C(-2) = (-2)^3+3\cdot(-2)+13 = -8-6+13 = -1$

Ejemplo 4

Enunciado: siendo $D(z) = z^2-2z+1$, calcula $D(3)$, $D(-4)$ y $D(0)$.

Resolución

$D(3) = 3^2-2\cdot 3+1 = 9-6+1 = 4$

$D(-4) = (-4)^2-2\cdot(-4)+1 = 16+8+1 = 25$

$D(0) = 0^2-2\cdot 0+1 = 1$

Comentarios

- Cuando escribimos las expresiones que nos permiten empezar a calcular un valor numérico, a veces hay que escribir paréntesis que no están presentes en la expresión del polinomio.
- Si te fijas bien en los ejemplos (2) y (3) podrás apreciar algo importante.
- Algunas operaciones de cálculos numéricos las puedes hacer mentalmente.
- Esta manera de escribir los valores numéricos con la letra del polinomio y el número a continuación entre paréntesis es especialmente importante, porque en el nivel 3 lo generalizaremos para utilizar el concepto de función, que es una de las claves de los últimos niveles de la enseñanza secundaria.

Enunciados

① Dado el polinomio $A(x) = x^2+3x-5$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular A(2), A(−1) y A(0).

② Dado el polinomio $B(y) = 5y+7$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular B(−3), B(1) y B(0).

③ Dado el polinomio $C(z) = z^2-z^3+2z-1$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular C(3), C(−2) y C(0).

④ Dado el polinomio $D(x) = x^4-2x^2+5$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular D(2), D(−2) y D(0).

⑤ Dado el polinomio $E(x) = -7x+4$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular E(−5) y E(4).

⑥ Dado el polinomio $F(y) = 4y^2-3y+2$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular F(−2) y F(5).

⑦ Dado el polinomio $G(x) = x^5-1$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular G(1), G(−1) y G(2).

⑧ Dado el polinomio $H(z) = 2z-3z^2$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular H(3), H(0) y H(−2).

⑨ Dado el polinomio $J(x) = 2x^3-x+2$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular J(−3) y J(1).

⑩ Dado el polinomio $K(x) = x^{10}-x^4$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular K(1), K(0) y K(−1).

⑪ Dado el polinomio $L(x) = 3x^2-7x+1$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular L(−2) y L(3).

⑫ Dado el polinomio $M(z) = 5z^2+5z-10$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular M(2), M(−1) y M(0).

⑬ Dado el polinomio $N(x) = x^3-2x^2+5x-4$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular N(−2) y N(3).

⑭ Dado el polinomio $P(x) = x^6-x^2$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular P(1) y P(−2).

⑮ Dado el polinomio $Q(y) = y^6-y^2$, se pide:
a) Decir su grado. b) Calcular Q(−1) y Q(2).

Suma de polinomios

La suma de polinomios siempre da otro polinomio. Para sumar dos o más polinomios hay que sumar los monomios semejantes de cada uno de los polinomios.

Ejemplo 1

Dados los polinomios $A(x) = 4x^2-5x+8$ y $B(x) = -x^2+3x-4$, hay que calcular la suma de polinomios $A(x)+B(x)$.

Sumamos los monomios de grado 2 de cada polinomio: $4x^2-x^2 = 3x^2$

Sumamos los monomios de grado 1 de cada polinomio: $-5x+3x = -2x$

Sumamos los monomios de grado 0 de cada polinomio: $8-4 = 4$

Por tanto, el resultado final es $A(x)+B(x) = 3x^2-2x+4$

Colocación de las operaciones

Como ves, la idea para sumar polinomios es muy sencilla; lo que queda por ver es cómo colocar los polinomios para hacer la suma. Hay dos posibilidades:

- ✱ Colocar los polinomios uno encima de otro, alineando los monomios del mismo grado, para lo que hay que dejar huecos cuando algún polinomio no tenga monomios del grado correspondiente. Se suele usar este método cuando hay muchos polinomios, o son largos o tienen coeficientes grandes; en definitiva, cuando la operación es compleja.
- ✱ Colocar los polinomios uno a continuación de otro y hacer las sumas de monomios mentalmente. Es el método preferido con las operaciones sencillas.

Ejemplo 2

Dados los polinomios $A(x) = 3x^3+5x-9$, $B(x) = -8x^2-x+2$ y $C(x) = -5x^3+2x^2+3$, calcula $A(x)+B(x)+C(x)$.

Comentarios

- ✱ Cuando escribas los polinomios, deja bastante espacio alrededor de cada monomio porque los números podrían tener más dígitos cuando vayas operando.
- ✱ Cuando vayas haciendo las sumas por columnas, empieza por la que quieras. Como en estas sumas no hay llevadas, las puedes hacer de derecha a izquierda o de izquierda a derecha.
- ✱ Es imprescindible que ordenes por grados los monomios de cada polinomio: de mayor a menor o de menor a mayor, pero todos de la misma manera.

Resolución

$A(x)$	=	$3x^3$		$+5x$	-9
$B(x)$	=		$-8x^2$	$-x$	$+2$
$C(x)$	=	$-5x^3$	$+2x^2$		$+3$
$A(x)+B(x)+C(x)$	=	$-2x^3$	$-6x^2$	$4x$	-4

Solución: $A(x)+B(x)+C(x) = -2x^3-6x^2+4x-4$

Ejemplo 3

Enunciado: calcula $(2x^2+6x-2)+(-2x^2-7x+8)$

Resolución: $(2x^2+6x-2)+(-2x^2-7x+8) = -x+6$. *(¡Así de fácil!)*

Comentario: los paréntesis del enunciado realmente no hacen falta, pero están ahí para que veamos que estamos sumando dos polinomios.

Polinomios opuestos

Se pueden definir polinomios opuestos de dos maneras equivalentes:

- Dos polinomios son opuestos uno del otro cuando todos los monomios de uno son los monomios opuestos de los del otro.
- Dos polinomios son opuestos uno del otro cuando su suma es 0.

Ejemplo 1

Los polinomios $A(x) = 2x^2-3x+5$ y $B(x) = -2x^2+3x-5$ son opuestos uno del otro:

- Todos sus monomios son opuestos:
  - Los monomios «$2x^2$» y «$-2x^2$» son opuestos.
  - Los monomios «$-3x$» y «$3x$» son opuestos.
  - Los monomios «5» y «-5» son opuestos.
- $A(x)+B(x) = 0$.

Notación

El polinomio opuesto se escribe con el signo «–». *(Ya te lo imaginabas).*

Ejemplo 2: $-(2x^2-3x+5) = -2x^2+3x-5$; ejemplo 3: $-(-2x^2+3x-5) = 2x^2-3x+5$

Ejemplo 4: $C(x) = 7x-8 \Rightarrow -C(x) = -7x+8$; ejemplo 5: $D(x) = -x+2 \Rightarrow -D(x) = x-2$

Resta de polinomios

- Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.
  Ejemplo 6: $(x^2+3x-9)-(3x^2-5x+2) = (x^2+3x-9)+(-3x^2+5x-2) = -2x^2+8x-11$
- El orden en que aparezcan el minuendo y el sustraendo no tiene importancia.
  Ejemplo 7: $-(-7x^2+6x-4)+(2x^2-x+1) = (7x^2-6x+4)+(2x^2-x+1) = 9x^2-7x+5$
- Puede haber varios minuendos y varios sustraendos.
  Ejemplo 8: Siendo $A(x) = 5x^3+3x^2+8x-3$, $B(x) = -x^3-5x^2+2x$, $C(x) = 4x^3+x^2-x$ y $D(x) = 7x^2-4x+5$, calcula $A(x)-B(x)+C(x)-D(x)$.

$$\begin{array}{rcrrrr}
A(x) & = & 5x^3 & +3x^2 & +8x & -3 \\
-B(x) & = & x^3 & +5x^2 & -2x & \\
C(x) & = & 4x^3 & x^2 & -x & \\
-D(x) & = & -7x^3 & & +4x & -5 \\
\hline
A(x)-B(x)+C(x)-D(x) & = & 2x^3 & +8x^2 & +9x & -8
\end{array}$$

Solución: $A(x)-B(x)+C(x)-D(x) = 2x^3+8x^2+9x-8$

Ejemplo 9

Enunciado: calcula $(2x^2+6x-2)-(-2x^2-7x+8)$

Comentarios

- Los paréntesis del enunciado realmente no hacen falta, pero están ahí para que veamos que estamos operando con dos polinomios.
- Cuando hacemos la operación, en el primer paso ya hacemos dos cosas: eliminar los paréntesis y calcular el polinomio opuesto.

Resolución

$(2x^2+6x-2)-(-2x^2-7x+8) = 2x^2+6x-2+2x^2+7x-8 = 4x^2+13x-10$

Solución: $4x^2+13x-10$

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes operaciones. Da el resultado ordenando los monomios de mayor a menor grado.

① $(3x^2-2x+7)+(7x^2-5x-1)$

② $(2x^2-5x+3)-(x^2-6x-4)$

③ $-(x^3+3x^2-3)+(5x^2-3x+11)$

④ $(x^2-3x+8)-(3x^2-2)-(-3x+5)$

⑤ $(x^2-7)-(3x^2+6x-4)-(-5x+2)$

⑥ $(3y^3+2y-3)-(-y^2+3y+8)$

⑦ $-(2z-8)+(4z^2-3z+1)-(3z^2-8z)$

⑧ $(3x^3-2x^2+3x-2)-(5x^3+4x^2+3x-4)$

⑨ $(x^3+3x)+(2x^2-4)$

⑩ $-(2x^3-5x+2)+(x^2-3x)-(x^3+3x^2)$

Enunciados

Usando los polinomios $A(x) = 3x^4-2x^3-9x^2+3$, $B(x) = x^4-5x^3-7x+3$, $C(x) = -x^4-5x^2+5x+3$, $D(x) = 7x^3-4x^2+x-1$ y $E(x) = 3x^4-3x^2+6$, calcula el resultado de las siguientes operaciones. Da el resultado ordenando los monomios de mayor a menor grado.

⑪ $A(x)+B(x)-C(x)$

⑫ $-D(x)+E(x)-A(x)$

⑬ $D(x)-B(x)+C(x)$

⑭ $B(x)-A(x)+D(x)$

⑮ $B(x)-E(x)-C(x)$

Enunciados

Usando los polinomios $P(x) = 5x^4-3x^2+6x-1$, $Q(x) = -3x^3+6x^2-2x+2$, $R(x) = 7x^4-6x^3+x+4$, $S(x) = 2x^4-3x^3+2x^2-3$ y $T(x) = -x^4+x^3-2x^2+6x$, calcula el resultado de las siguientes operaciones. Da el resultado ordenando los monomios de mayor a menor grado.

⑯ $P(x)+Q(x)-R(x)$

⑰ $R(x)+S(x)-T(x)$

⑱ $-P(x)+Q(x)-R(x)$

⑲ $T(x)-S(x)-Q(x)$

⑳ $P(x)+R(x)-Q(x)-T(x)$

Producto de un monomio por un polinomio

Ejemplo de lo que queremos realizar: averiguar a qué polinomio es igual el producto del monomio «$3x^2$» y el polinomio «$6x-5$». Con otras palabras, queremos **desarrollar** la expresión «$3x^2\cdot(6x-8)$». El punto es opcional, para indicar el producto no es necesario, ya que tenemos el paréntesis; pero lo vamos a mantener en esta explicación para ganar en claridad.

Si el producto fuera con números, usaríamos la jerarquía de operaciones para averiguar el número resultado final; calcularíamos primero el paréntesis, que tiene una suma, y luego haríamos el producto; por ejemplo: $3\cdot(6-8) = 3\cdot(-2) = -6$.

Pero como los monomios «$6x$» y «-8» que forman el paréntesis no son sumables, no podemos aplicar la jerarquía de operaciones, tenemos que buscar otra manera de operar.

Viene al rescate la propiedad distributiva, que decía $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$.

En nuestro caso, $a=3x^2$, $b=6x$ y $c=-8$.

Procedemos: $3x^2\cdot(6x-8) = 3x^2\cdot 6x + 3x^2\cdot(-8)$

Como vemos, nos quedan dos productos de monomios, que ya sabemos hacer:

$3x^2\cdot 6x = 18x^3$ y $3x^2\cdot(-8)$ $-24x^2$.

Uniendo todo: $3x^2\cdot(6x-8) = 3x^2\cdot 6x + 3x^2\cdot(-8) = 18x^3-24x^2$

Regla para multiplicar un monomio por un polinomio

* Se multiplica el monomio por todos los monomios del polinomio.

  Ejemplo 1: $7x^3\cdot(2x^2-5x+3) = 7x^3\cdot 2x^2+7x^3\cdot(-5x)+7x^3\cdot 3 = 14x^5-35x^4+21x^3$

  Ejemplo 2: $-3x^2\cdot(x^2+2x-5) = -3x^2\cdot x^2-3x^2\cdot 2x-3x^2\cdot(-5) = -3x^4-6x^3+15x^2$

* Casi siempre es posible hacer mentalmente los productos de monomios, sin escribirlos.

  Ejemplo 3: $-2x\cdot(3x^4+x-5) = -6x^5-2x^2+10x$. Hemos hecho mentalmente tres productos: «$-2x\cdot 3x^4 = -6x^5$», «$-2x\cdot x = -2x^2$» y «$-2x\cdot(-5) = +10x$»

* El orden del monomio y el polinomio es indiferente.

  Ejemplo 4: $(5x^2-3x-8)\cdot 3x = 15x^3-9x^2-24x$

  Ejemplo 5: $(-x^5-3x^4+6x-9)\cdot(-4x^3) = 4x^8+12x^7-24x^4+36x^3$

Producto de un número por un polinomio

Como los números también son monomios, el producto de un número por un polinomio no es más que un caso particular del producto de un monomio por un polinomio. Es decir: se multiplica el número por todos los monomios del polinomio.

Ejemplo 6: $3\cdot(7x^3-2x^2+4x-5) = 21x^3-6x^2+12x-15$

Ejemplo 7: $-2\cdot(x^3+4x^2-9x+7) = -2x^3-8x^2+18x-14$

Importancia de las simplificaciones

Recuerda que hemos dicho que los polinomios se suelen trabajar escribiéndolos de la manera más sencilla que sea posible y ordenando sus monomios por grados. Veamos la importancia de hacerlo así cuando hay que multiplicar un monomio por un polinomio. Antes de hacer la multiplicación, hay que simplificar el polinomio.

Ejemplo 8: $5x^3\cdot(6x-3+4x^2-5+3x) = 5x^3\cdot(4x^2+9x-8) = 20x^5+45x^4-40x^3$

Ejemplo 9: $(8xx-3x^4-x^2-3+3x^4+2x)\cdot(-2x) = (7x^2+2x-3)\cdot(-2x) = -14x^3-4x^2+6x$

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes operaciones. Da el resultado ordenando los monomios de mayor a menor grado.

① $7x\cdot(2x^2-5x+8)$

② $4x^2\cdot(3x^3-2x^2+6x-2)$

③ $-3x\cdot(-5x^2+6x-4)$

④ $-5x^3\cdot(3x^2-7x+1)$

⑤ $x^5\cdot(x^3-x^2+9)$

⑥ $(-3x^3+5x-2)\cdot3x$

⑦ $(7x^2+3x-11)\cdot5x^2$

⑧ $(-x^3-5x^2+3x+8)\cdot(-4x)$

⑨ $(5x^2+3x-12)\cdot(-2x^2)$

⑩ $(x^4-2x^3+5x-7)\cdot x^5$

⑪ $2\cdot(3x-4)$

⑫ $-3(7x-2)$

⑬ $5\cdot(2x^2-x+9)$

⑭ $(-2x^3+3x^2-9x-5)\cdot7$

⑮ $(-3x^2+2x-1)\cdot(-4)$

⑯ $3x\cdot(2x-3x^2+1)$

⑰ $-5x\cdot(2+x^3-3x+2x^2)$

⑱ $3x^2(x^2-6x+2-x^2)$

⑲ $-x\cdot(2x^2+3x^2-6x-x+2+4)$

⑳ $2x^5\cdot(-x^3+2x^4+3x^2-x+x^3)$

㉑ $-4x^2\cdot(8x-5x^2+3x+4-11x+3)$

㉒ $5\cdot(x^7-x^6+2x^5-x^6+3x+2x^6)$

㉓ $-2x\cdot(5x-9+4x+9)$

㉔ $781x^3\cdot(37x+5x^2-37x-3x^2-2x^2)$

㉕ $43x^2\cdot(9x-13-8x+12)$

㉖ $(x-2x^2+3)\cdot(-x)$

Producto de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios hay que multiplicar todos los monomios de un polinomio por todos los monomios del otro y luego simplificar los monomios que sean semejantes.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula $(2x+3)\cdot(4x+5)$. También se puede pedir «desarrollar».

Explicación

- ✱ Multiplicamos el primer monomio del primer polinomio por el primer monomio del segundo polinomio: $2x\cdot 4x = 8x^2$
- ✱ Multiplicamos el primer monomio del primer polinomio por el segundo monomio del segundo polinomio: $2x\cdot 5 = 10x$
- ✱ Multiplicamos el segundo monomio del primer polinomio por el primer monomio del segundo polinomio: $3\cdot 4x = 12x$
- ✱ Multiplicamos el segundo monomio del primer polinomio por el segundo monomio del segundo polinomio: $3\cdot 5 = 15$
- ✱ Hemos obtenido cuatro monomios: «$8x^2$», «$10x$», «$12x$» y «15».
- ✱ Hay dos monomios semejantes que podemos sumar: $10x+12x=22x$.

Resolución

Uniendo todo lo anterior, la operación se escribe así:

$(2x+3)\cdot(4x+5) = 8x^2+10x+12x+15 = 8x^2+22x+15$

Justificación del método

Sabemos que este es el método correcto porque podemos aplicar repetidas veces la propiedad distributiva. En el ejemplo anterior se haría así:

$(2x+3)\cdot(4x+5) = 2x\cdot(4x+5)+3\cdot(4x+5) = 2x\cdot 4x+2x\cdot 5+3\cdot 4x+3\cdot 5 = \ldots$

Nunca escribimos tanto, lógicamente. Cuando ya sabemos que el método es correcto y por qué, simplemente lo aplicamos.

Ejemplo 2

Enunciado: calcula $(5x^3+7x)\cdot(8x^4-9)$ y escribe el resultado final colocando los monomios de mayor a menor grado.

Resolución

$(5x^3+7x)\cdot(8x^4-9) = 40x^7-45x^3+56x^5-63x = 40x^7+56x^5-45x^3-63x$

Observaciones

- ✱ En este ejemplo no aparecen monomios semejantes, de modo que en ningún momento es necesario sumar monomios.
- ✱ Si el enunciado no pide un orden concreto en el resultado final, lo elegiremos nosotros, pero se recomienda que siempre el resultado final se dé con los monomios ordenados.

Propiedad

El grado del polinomio obtenido como producto de dos polinomios es la **suma** de los grados de los dos polinomios.

Ejemplo 3: si multiplicamos un polinomio de grado 4 por un polinomio de grado 5 el resultado es un polinomio de grado 9. El motivo es que, si ambos tienen la misma indeterminada, en algún momento habrá que hacer algo como $x^4\cdot x^5=x^9$.

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes operaciones. Da el resultado ordenando los monomios de mayor a menor grado.

① $(2x+6)(5x+3)$

② $(x^2-5)(7x+4)$

③ $(3x^4+2x)(x^5-3)$

④ $(-3x+5)(-4x+7)$

⑤ $(x^3+7x^2)(x^3-1)$

⑥ $(3y+5)(4y-3)$

⑦ $(5z^2+3z)(-2z^2+7)$

⑧ $(8x+4)(4x-2)$

⑨ $(5y+3)(5y-3)$

⑩ $(-4z+9)(4z+9)$

⑪ $(3x+6)(5-9x)$

⑫ $(x^2+5x)(-3+4x^2)$

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes operaciones. Da el resultado ordenando los monomios de menor a mayor grado.

⑬ $(1+4x)(-5+3x)$

⑭ $(6-7x)(2+9x)$

⑮ $(-3+8x)(-1+5x)$

⑯ $(x-4x^2)(1+x^3)$

⑰ $(3-7x^2)(4x+5x^3)$

⑱ $(8-x^4)(3x^2-x^3)$

⑲ $(6y-y^6)(2y^2+y^3)$

⑳ $(z-z^2)(3z^3+7z^4)$

㉑ $(7-2x)(8x-7x^4)$

㉒ $(5z-6z^6)(z^4+3z^5)$

㉓ $(-7+8x)(3x-2)$

㉔ $(9x-2x^2)(3x^2+4x)$

Producto de dos polinomios largos

Cuando los polinomios que hay que multiplicar tienen muchos monomios, es fácil perderse con tantos monomios como pueden aparecer al operar. Por ejemplo, al multiplicar un polinomio de grado 4 con cinco monomios por uno de grado 3 con cuatro monomios nos aparecerán 20 monomios; y luego hay que ponerse a buscar los monomios semejantes. En estos casos, es mejor ayudarse de una buena colocación de los resultados para intentar no cometer errores.

Ejemplo 1

Enunciado: dados los polinomios $A(x)=2x^4-3x^3-5x^2-7x+2$ y $B(x)=x^3+4x^2+6x-3$, calcula $A(x)\cdot B(x)$.

Explicación

- ✱ Colocamos los polinomios uno bajo el otro, ajustados a la derecha del papel para dejar espacio por la izquierda.
- ✱ Se suele escribir debajo el polinomio que tenga menos monomios, pero no es estrictamente necesario.
- ✱ Los polinomios se escriben ordenando sus monomios por orden de grados, en los dos polinomios de la misma manera.
- ✱ Al escribir los factores no es necesario dejar huecos cuando falte algún monomio de algún grado (como hacíamos en la suma), pero se puede hacer.
- ✱ Al ir calculando los productos de los monomios sí que es imprescindible ir colocando los monomios resultantes en su columna correspondiente, dejándolos ya preparados para hacer la suma. Es lo más importante del método.
- ✱ Las multiplicaciones se van haciendo como si fuera la multiplicación de números naturales que aprendiste en la educación primaria.
- ✱ Las sumas de cada columna se pueden hacer en cualquier orden, porque, al contrario de la multiplicación de números naturales, en esta no hay llevadas.

Resolución

			$A(x)=$	$2x^4$	$-3x^3$	$-5x^2$	$-7x$	$+2$
			$B(x)=$		x^3	$+4x^2$	$+6x$	-3
				$-6x^4$	$+9x^3$	$+15x^2$	$+21x$	-6
			$+12x^5$	$-18x^4$	$-30x^3$	$-42x^2$	$+12x$	
		$+8x^6$	$-12x^5$	$-20x^4$	$-28x^3$	$+8x^2$		
	$2x^7$	$-3x^6$	$-5x^5$	$-7x^4$	$+2x^3$			
$A(x)\cdot B(x)=$	$2x^7$	$+5x^6$	$-5x^5$	$-51x^4$	$-47x^3$	$-19x^2$	$+33x$	-6

Solución: $A(x)\cdot B(x) = 2x^7+5x^6-5x^5-51x^4-47x^3-19x^2+33x-6$

Ejemplo 2

Enunciado: calcula $(3x-4)\cdot(x^2-5x-7)$

Resolución

	x^2	$-5x$	-7
		$3x$	-4
	$-4x^2$	$+20x$	$+28$
$3x^3$	$-15x^2$	$-21x$	
$3x^3$	$-19x^2$	$-x$	$+28$

Solución: $(3x-4)\cdot(x^2-5x-7) = 3x^3-19x^2-x+28$

Comentario: hemos colocado arriba el segundo factor y abajo el primero, pero si los hubiéramos colocado al revés, el resultado habría sido el mismo.

Importancia de los coeficientes

Cuando hacemos operaciones con polinomios, necesitamos hacer muchas operaciones con los coeficientes pero muy pocas con las letras. Compara estos ejemplos:

Ejemplo 1 → 2x+3x = 5x	Ejemplo 2 → 2y+3y = 5y	Ejemplo 3 → 2z+3z = 5z

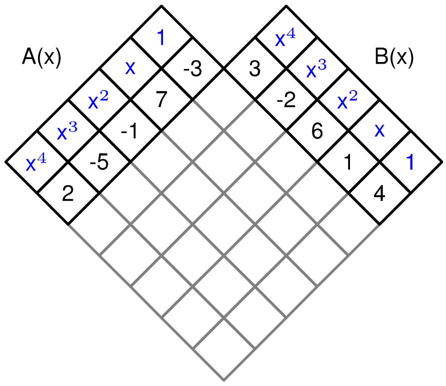
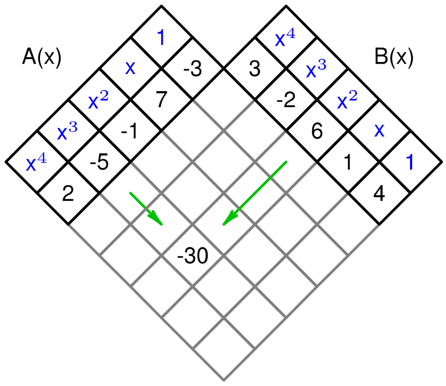
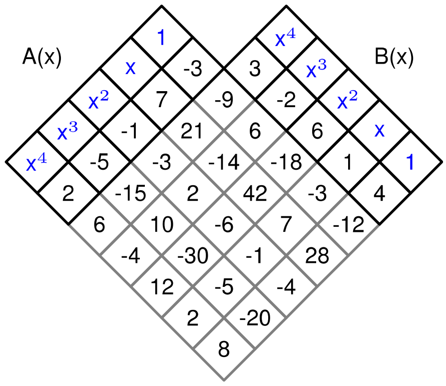
Ves que en todos ellos hay que hacer «2+3=5», pero la letra que utilices realmente no importa para operar, solo importa por su significado en el problema que sea.

Cuando multiplicamos dos polinomios que usan la misma letra indeterminada estamos escribiendo una y otra vez esa letra, aunque realmente las operaciones las hacemos con los coeficientes. Por eso tiene sentido, especialmente en las operaciones largas, buscar un método de operar que no necesite escribir las letras.

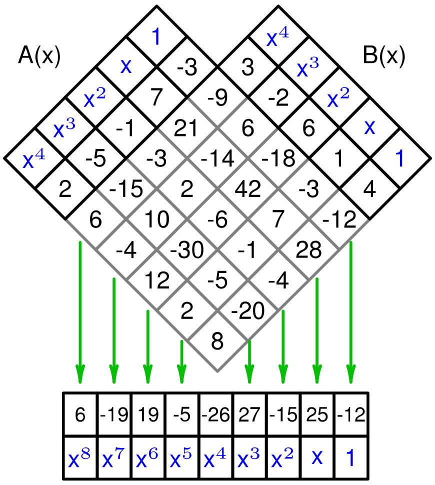
Producto de dos polinomios usando solo los coeficientes

Explicamos el método mientras hacemos un ejemplo, para entenderlo mejor.

Ejemplo 4: dados los polinomios $A(x)=2x^4-5x^3-x^2+7x-3$ y $B(x)=3x^4-2x^3+6x^2+x+4$, calcula $A(x)\cdot B(x)$.

Escribimos los coeficientes de los polinomios respetando el orden mostrado.	Multiplicamos cada coeficiente de un polinomio por cada coeficiente del otro.	En total hay que realizar en este ejemplo 25 multiplicaciones, que quedan ordenadas.
		

Sumamos cada columna y así obtenemos los coeficientes del resultado:



Solución: $A(x)\cdot B(x) = 6x^8-19x^7+19x^6-5x^5-26x^4+27x^3-15x^2+25x-12$

Observación: si en algún polinomio faltara algún monomio de grado menor al grado del polinomio, pondríamos un 0 como coeficiente.

Enunciados

Dados los polinomios

$A(x) = x^2-2x+3$, $B(x) = 2x^2+4x-3$, $C(x) = 5x-2$, $D(x) = -3x+4$, $E(x) = -x^2+5x-7$

calcula el resultado de las siguientes operaciones. Da el resultado ordenando los monomios de mayor a menor grado.

① $A(x)\cdot C(x)$

② $B(x)\cdot D(x)$

③ $A(x)\cdot B(x)$

④ $A(x)\cdot E(x)$

⑤ $B(x)\cdot E(x)$

Enunciados

Dados los polinomios

$F(x) = x^3-x^2+4x-6$, $G(x) = -3x^3-4x^2+7x-3$, $H(x) = 4x^2-3x+5$, $J(x) = x^2-5x-2$

calcula el resultado de las siguientes operaciones. Da el resultado ordenando los monomios de mayor a menor grado.

⑥ $H(x)\cdot J(x)$

⑦ $F(x)\cdot H(x)$

⑧ $G(x)\cdot J(x)$

⑨ $F(x)\cdot G(x)$

Enunciados

Dados los polinomios

$K(x) = 2x^4-3x^3+5x^2-3x-5$, $L(x) = x^4+4x^3-5x^2+7x+2$, $M(x) = -3x^4+2x^3-4x^2-x+5$

calcula el resultado de las siguientes operaciones. Da el resultado ordenando los monomios de mayor a menor grado.

⑩ $K(x)\cdot L(x)$

⑪ $L(x)\cdot M(x)$

⑫ $K(x)\cdot M(x)$

Enunciados

Dados los polinomios

$P(x) = x^5-3x^4+5x^2-x+2$, $Q(x) = x^5+4x^4+3x^2-2x+1$, $R(x) = x^5-x^4-2x^3+7x-3$

calcula el resultado de las siguientes operaciones. Da el resultado ordenando los monomios de mayor a menor grado.

⑬ $P(x)\cdot Q(x)$

⑭ $Q(x)\cdot R(x)$

Potencia de exponente natural de un polinomio

Utilizamos la misma definición que para la potencia de exponente natural de un número natural: un producto repetido.

Si P(x) es un polinomio y n es un número natural, definimos

$$\boxed{(P(x))^n = P(x)\cdot P(x)\cdot\ldots\cdot P(x) \text{ (n factores)}}$$

Potencia de exponente 0 de un polinomio

Utilizamos la misma definición que para la potencia de exponente 0 de un número entero: da 1.

Si P(x) es un polinomio, $(P(x))^0 = 1$.

Otras potencias de polinomios

Se puede elevar un polinomio a otro tipo de números, pero no lo estudiamos en este nivel.

Cálculo de la potencia de un polinomio

Estos cálculos son en general bastante laboriosos, así que es común ayudarse de programas de ordenador cuando hay que hacer varios. Si hay que hacerlo a mano, es mejor pensar la estrategia más corta antes de ponerse a calcular; se trata de hacerlo con la menor cantidad posible de operaciones.

Enunciados

① Calcula $(3x^2+4x-7)^2$

② Calcula $(x^2-3x+2)^3$

③ Calcula $(2x^2-4x+5)^4$

④ Calcula $(4x^3-7x^2+20x-3)^0$

Resoluciones

① $(3x^2+4x-7)^2 = (3x^2+4x-7)\cdot(3x^2+4x-7) = \ldots = 9x^4+24x^3-26x^2-56x+49$

Comentario: no hemos escrito las operaciones del producto porque ahora lo más importante es explicar el método.

② $(x^2-3x+2)^3 = (x^2-3x+2)(x^2-3x+2)(x^2-3x+2) =$

$(x^4-6x^3+13x^2-12x+4)(x^2-3x+2) = x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8$

Comentario: haciendo el ejercicio a mano, este es el método más rápido.

③ En este ejercicio podemos aprovechar que $a^4=(a^2)^2$ y con solo dos multiplicaciones (aunque serán largas), tendremos el resultado: nos ahorramos una.

$(2x^2-4x+5)^2 = (2x^2-4x+5)(2x^2-4x+5) = 4x^4-16x^3+36x^2-40x+25$

$(2x^2-4x+5)^4 = ((2x^2-4x+5)^2)^2 = (4x^4-16x^3+36x^2-40x+25)^2 =$

$= (4x^4-16x^3+36x^2-40x+25)(4x^4-16x^3+36x^2-40x+25) =$

$= 16x^8-128x^7+544x^6-1472x^5+2776x^4-3680x^3+3400x^2-2000x+625$

④ $(4x^3-7x^2+20x-3)^0 = 1$

Productos notables

* Son tres expresiones algebraicas que se utilizan muy a menudo para calcular dos potencias y un producto que tienen una expresión muy particular.
* Las tres expresiones son **identidades**; es decir, que son verdaderas para cualquier valor de las letras utilizadas.
* Debes conocerlas y manejarlas con mucha soltura porque se usan tanto que te las puedes encontrar en cualquier momento.

Cuadrado de una suma

* Es una expresión que relaciona el cuadrado de un binomio con un polinomio.
* Si «a» y «b» son dos monomios cualesquiera, se verifica

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Cuadrado de una diferencia

* Es una expresión que relaciona el cuadrado de un binomio en el que hay un signo «–» con un polinomio.
* Si «a» y «b» son dos monomios cualesquiera, se verifica

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Suma por diferencia

* Es una expresión que relaciona el producto de la suma y la diferencia de dos binomios con un polinomio.
* Si «a» y «b» son dos monomios cualesquiera, se verifica

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Desarrollo y factorización

Los tres productos notables se pueden usar de dos formas diferentes:

* Si convertimos la expresión con paréntesis en la expresión sin paréntesis, decimos que estamos **desarrollando**. Es lo que vamos a practicar en este nivel.
* Si convertimos la expresión sin paréntesis en la expresión con paréntesis, decimos que estamos **factorizando**. Lo practicaremos en el nivel 3.

Ejemplos

Desarrolla las siguientes expresiones:

① $(x+3)^2$ ② $(y-5)^2$ ③ $(2x+7)(2x-7)$

Resoluciones

④ $(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

⑤ $(y-5)^2 = y^2 - 2\cdot y\cdot 5 + 5^2 = y^2 - 10y + 25$

⑥ $(2x+7)(2x-7) = (2x)^2 - 7^2 = 4x^2 - 49$

Observación

No usamos estas identidades cuando los dos monomios son números; en esos casos seguimos la jerarquía de operaciones: $(5+7)^2 = 12^2 = 144$.

Cuadrado de una suma

- ✱ Es una expresión que relaciona el cuadrado de un binomio con un polinomio.
- ✱ Si «a» y «b» son dos monomios cualesquiera, se verifica

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

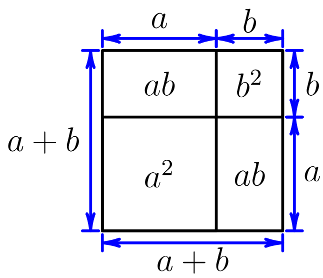
- ✱ Es posible decir la expresión usando solo palabras, sin usar signos: a algunas personas les resulta útil, a otras perjudicial: la suma de un binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primer monomio, más el doble del producto de los dos monomios más el cuadrado del segundo monomio.

Demostración

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$

Visualización

Si asignamos a los monomios «a» y «b» algún valor positivo, podemos dibujar una figura como la de la derecha, en la que se visualiza la igualdad:



- ✱ El lado del cuadrado grande mide «a+b», luego la superficie del cuadrado grande mide «$(a+b)^2$».
- ✱ El cuadrado grande está dividido en cuatro figuras más pequeñas, de superficies «a^2», «b^2», «ab» y «ab».
- ✱ Por tanto, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Enunciados

Desarrolla las siguientes expresiones:

① $(x+8)^2$ ② $(5x^5+4x^3)^2$ ③ $(7y^2+3y)^2$ ④ $(6z^7+3)^2$

Resoluciones

① $(x+8)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 8 + 8^2 = x^2 +16x +64$

② $(3x^5+4x^3)^2 = (3x^5)^2 + 2\cdot 3x^5\cdot 4x^3 + (4x^3)^2 = 9x^{10} +24x^8 +16x^6$

③ $(7y^2+3y)^2 = (7y^2)^2 + 2\cdot 7y^2\cdot 3y + (3y)^2 = 49y^4 +42y^3 +9y^2$

④ $(6z^7+5)^2 = (6z^7)^2 + 2\cdot 6z^7\cdot 5 + 5^2 = 36z^{14} +60z^7 +25$

Comentario: si puedes, intenta saltarte el paso intermedio.

Los dos coeficientes negativos

Si los dos coeficientes de los monomios son negativos, se pueden convertir a positivos antes de desarrollar.

Ejemplo 4: $(–6x–5)^2 = (–6x)^2 + 2(–6x)(–5) + (–5)^2 = 36x^2 +60x +25$

$(6x+5)^2 = (6x)^2 + 2\cdot 6x\cdot 5 + 5^2 = 36x^2 +60x +25$

Ejemplo 5: $(–8x^3–3x^2)^2 = (8x^3+3x^2)^2 = 64x^6 +48x^5 +9x^4$

Los dos binomios son números

En ese caso no se usa el desarrollo, sino que se aplica la jerarquía de operaciones; el resultado sería el mismo si desarrolláramos, pero tardaríamos más.

Ejemplo 6: $(3+5)^2 = 8^2 = 64$

$(3+5)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 5 + 5^2 = 9 +30 +25 = 64$

Enunciados

Desarrolla las siguientes expresiones. Da el resultado ordenando los monomios de mayor a menor grado.

① $(x+7)^2$

② $(2x+1)^2$

③ $(3x+4)^2$

④ $(5x+3)^2$

⑤ $(x^2+x)^2$

⑥ $(3x^2+5x)^2$

⑦ $(y+1)^2$

⑧ $(3z+4)^2$

⑨ $(5y^2+3y)^2$

⑩ $(3x^4+2x^3)^2$

⑪ $(5x^3+9x)^2$

⑫ $(10x+5)^2$

⑬ $(11x^3+10x^2)^2$

⑭ $(5y^3+7y^2)^2$

⑮ $(2z+8)^2$

⑯ $(9x+10)^2$

⑰ $(3x^8+4x^6)^2$

⑱ $(7x^3+2x)^2$

⑲ $(13x+13)^2$

⑳ $(13z+13)^2$

Enunciados

Desarrolla las siguientes expresiones. Da el resultado ordenando los monomios de menor a mayor grado.

㉑ $(4+5x)^2$

㉒ $(3+8x)^2$

㉓ $(2x+x^4)^2$

㉔ $(5y+4y^2)^2$

Cuadrado de una diferencia

- ✱ Es una expresión que relaciona el cuadrado de un binomio en el que hay un signo «–» con un polinomio.
- ✱ Si «a» y «b» son dos monomios cualesquiera, se verifica

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

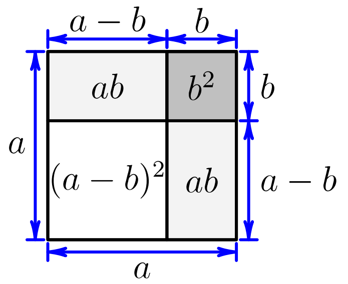
- ✱ Es posible decir la expresión usando solo palabras, sin usar signos: a algunas personas les resulta útil, a otras perjudicial: la diferencia de un binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primer monomio, menos el doble del producto de los dos monomios más el cuadrado del segundo monomio.
- ✱ Aunque «a–b» es realmente una suma, esta expresión se llama cuadrado de una diferencia porque es más cómodo recordarla así, es un atajo.

Demostración

$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Visualización

Si asignamos a los monomios «a» y «b» algún valor positivo, podemos dibujar una figura como la de la derecha, en la que se visualiza la igualdad:



- ✱ El lado del cuadrado grande mide «a», luego la superficie del cuadrado grande mide «a^2».
- ✱ El cuadrado grande está dividido en figuras más pequeñas, de tal modo que la parte que no corresponde a «$(a-b)^2$» es «$2ab-b^2$», ya que la parte «b^2» está contenida en las dos partes «ab».
- ✱ Por tanto, $(a-b)^2 = a^2 - (2ab-b^2) = a^2 - 2ab + b^2$

Enunciados

Desarrolla las siguientes expresiones:

① $(x-7)^2$ ② $(3x^5-6x^3)^2$ ③ $(8y^2-7y)^2$

Resoluciones

① $(x-7)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49$

② $(3x^5-6x^3)^2 = (3x^5)^2 - 2\cdot 3x^5\cdot 6x^3 + (6x^3)^2 = 9x^{10} - 36x^8 + 36x^6$

③ $(8y^2-7y)^2 = (8y^2)^2 - 2\cdot 8y^2\cdot 7y + (7y)^2 = 64y^4 - 112y^3 + 49y^2$

Comentario: si puedes, intenta saltarte el paso intermedio.

El signo menos en el primer monomio

La expresión es aplicable cuando el signo menos está en el primer monomio.

Ejemplo 4: $(-6x+5)^2 = (6x)^2 - 2\cdot 6x\cdot 5 + 5^2 = 36x^2 - 60x + 25$

Los dos binomios son números

En ese caso no se usa el desarrollo, sino que se aplica la jerarquía de operaciones; el resultado sería el mismo si desarrolláramos, pero tardaríamos más.

Ejemplo 5: $(9-3)^2 = 6^2 = 36$

$(9-3)^2 = 9^2 - 2\cdot 9\cdot 3 + 3^2 = 81 - 54 + 9 = 36$

Enunciados

Desarrolla las siguientes expresiones. Da el resultado ordenando los monomios de mayor a menor grado.

① $(x-3)^2$

② $(5x-6)^2$

③ $(8x-1)^2$

④ $(7x-4)^2$

⑤ $(x^2-x)^2$

⑥ $(7x^2-5x)^2$

⑦ $(y-2)^2$

⑧ $(4z-3)^2$

⑨ $(7y^2-2y)^2$

⑩ $(5x^4-x^3)^2$

⑪ $(6x^3-4x^2)^2$

⑫ $(20x-10)^2$

⑬ $(9x^3-10x)^2$

⑭ $(5y^3-11y^2)^2$

⑮ $(8z-2)^2$

⑯ $(-3x+5)^2$

⑰ $(-4x^2+x)^2$

⑱ $(-8y+5)^2$

⑲ $(-7x^4+3)^2$

⑳ $(-13z^2+z)^2$

Enunciados

Desarrolla las siguientes expresiones. Da el resultado ordenando los monomios de menor a mayor grado.

㉑ $(3-4x)^2$

㉒ $(7-x)^2$

㉓ $(-2x+3x^4)^2$

㉔ $(-5y^3+4y^4)^2$

Suma por diferencia

- Es una expresión que relaciona el producto de la suma y la diferencia de dos binomios con un polinomio.
- Si «a» y «b» son dos monomios cualesquiera, se verifica

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

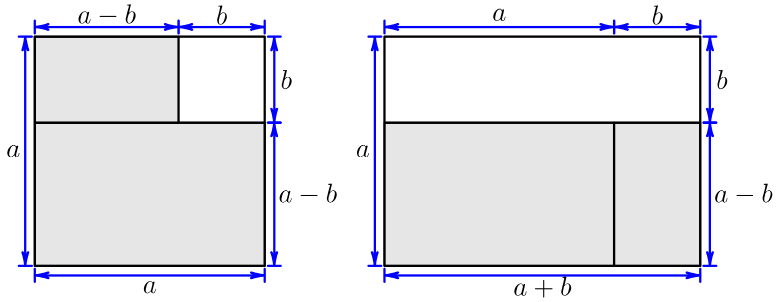
- Es posible decir la expresión usando solo palabras, sin usar signos: a algunas personas les resulta útil, a otras perjudicial: la suma por la diferencia de dos binomios es igual al cuadrado del monomio que suma menos el cuadrado del monomio que resta.

Demostración

$(a+b)(a-b) = aa - ab + ba - bb = a^2 - b^2$

Visualización

Si asignamos a los monomios «a» y «b» algún valor positivo, podemos dibujar:



- La parte en gris en la figura de la izquierda es «a^2-b^2».
- La parte en gris en la figura de la derecha es «$(a+b)\cdot(a-b)$».
- Por tanto, $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

Enunciados

Desarrolla las siguientes expresiones:

① $(x+7)(x-7)$ ② $(2x^4+3x^3)(2x^4-3x^3)$ ③ $(8y^2+7y)(8y^2-7y)$

Resoluciones

① $(x+7)(x-7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$

② $(2x^4+3x^3)(2x^4-3x^3) = (2x^4)^2 - (3x^3)^2 = 4x^8 - 9x^6$

③ $(8y^2+7y)(8y^2-7y) = (8y^2)^2 - (7y)^2 = 64y^4 - 49y^2$

Comentario: si puedes, intenta saltarte el paso intermedio.

Diferencia por suma

Como el producto es conmutativo, la expresión es aplicable cuando se multiplica una diferencia por una suma.

Ejemplo 4: $(7x-4)(7x+4) = (7x)^2 - 4^2 = 49x^2 - 16$

El monomio que suma tiene coeficiente negativo

Otro caso en que es aplicable la expresión es aquel en el que el sumando que permanece igual en los dos paréntesis tiene coeficiente negativo.

Ejemplo 5: $(-6x+5)(-6x-5) = (-6x)^2 - 5^2 = 36x^2 - 25$.

Enunciados

Desarrolla las siguientes expresiones. Da el resultado ordenando los monomios de mayor a menor grado.

① $(x+4)(x-4)$

② $(3x+8)(3x-8)$

③ $(4x^2+5)(4x^2-5)$

④ $(6x^4+3x^2)(6x^4-3x^2)$

⑤ $(7y+2)(7y-2)$

⑥ $(3z^4+10)(3z^4-10)$

⑦ $(2x-4)(2x+4)$

⑧ $(4y^3-3y)(4y^3+3y)$

⑨ $(9x+3)(9x-3)$

⑩ $(8x^2-9)(8x^2+9)$

⑪ $(5x+2)(5x-2)$

⑫ $(7y^4-3y^2)(7y^4+3y^2)$

⑬ $(-x+8)(-x-8)$

⑭ $(-6x+3)(-6x-3)$

⑮ $(-8x-4)(-8x+4)$

⑯ $(-7y^2+5)(-7y^2-5)$

⑰ $(8x^3-4x)(8x^3+4x)$

⑱ $(-2y+3)(-2y-3)$

⑲ $(9x-4)(9x+4)$

⑳ $(-9z^3-10)(-9z^3+10)$

Enunciados

Desarrolla las siguientes expresiones. Da el resultado ordenando los monomios de menor a mayor grado.

㉑ $(2+x)(2-x)$

㉒ $(5x^2+x^3)(5x^2-x^3)$

㉓ $(8x-3x^3)(8x+3x^3)$

㉔ $(-3y+4y^4)(-3y-4y^4)$

Operaciones combinadas con polinomios

La jerarquía de operaciones para hacer cálculos combinados con polinomios es la misma que para monomios. Como de momento no hemos trabajado la división de monomios ni de polinomios, la excluimos de la lista, que queda así:

1. Paréntesis, comenzando por los interiores.
2. Potencias.
3. Productos.
4. Sumas y restas.

Como el producto y la suma son conmutativos y la resta se convierte en suma, no es necesario tener en cuenta el orden en que aparezcan estas operaciones, por lo que no se ha especificado «de izquierda a derecha», como tenemos que hacer cuando aparecen divisiones.

Consejos generales

- ✱ Cuando hacemos operaciones combinadas, nuestro objetivo casi siempre es llegar a un polinomio con sus monomios ordenados por grados.
- ✱ Las operaciones se pueden escribir de varias maneras diferentes, según nos vaya pareciendo conveniente:
    - ■ Si las operaciones son cortas, se puede ir escribiendo todo en horizontal.
    - ■ Si las operaciones son largas, se pueden ir escribiendo en vertical, pero siempre bien ordenadas y escribiendo claramente qué significan.
    - ■ A veces se opta por escribir en horizontal pero ayudándose de alguna operación en vertical.
- ✱ Hay que aprovechar al máximo las expresiones de los productos notables, porque ahorran trabajo.

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible.

① $(2x-3)(5x+1)+(3x-4)^2$

② $((2x+3)(2x-3))^2$

③ $(x-1)^3-(2x+3)^2$

Resoluciones

① En un primer paso podemos hacer el producto y la potencia; a continuación, habrá que sumar monomios semejantes e ir dejándolos colocados.

$$(2x-3)(5x+1)+(3x-4)^2 = 10x^2+2x-15x-3+9x^2-24x+16 = 19x^2-37x+13$$

② Empezamos por el producto, que es el interior de un paréntesis, y luego la potencia. En los dos casos podemos aplicar productos notables.

$$((2x+3)(2x-3))^2 = (4x^2-9)^2 = 16x^4-72x^2+81$$

③ Primero las potencias, luego la resta y por último sumar monomios.

$$(x-1)^3-(2x+3)^2 = (x-1)(x-1)^2-(4x^2+12x+9) = (x-1)(x^2-2x+1)-4x^2-12x-9 =$$
$$= x^3-2x^2+x-x^2+2x-1-4x^2-12x-9 = x^3-7x^2-9x-10$$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible. Da el resultado como un polinomio ordenando sus monomios de mayor a menor grado.

① $(x+1)(x-2)+(x-3)(x+4)$

② $x\cdot(2x^2-3)+x^2\cdot(4x+5)$

③ $(2x-5)^2+3x-2$

④ $x^2+(3x+6)^2$

⑤ $x\cdot(x^2+1)(x^2-1)$

⑥ $x+x^2+(3x-5)(3x+5)$

⑦ $(2x^2+3)(x-5)+(x+3)(x^2-2)$

⑧ $(8x-5)^2+x\cdot(x+8)$

⑨ $(x^2-3)\cdot x^2+(x^2-2)^2$

⑩ $(y^2+1)(y-2)+3y$

⑪ $2z^2+(z-3)^2+6z$

⑫ $(2z+1)(-z+3)+(z+2)(z-2)$

⑬ $(x^2-3x)(x^2+5)+(x-3)(x^2+2)$

⑭ $x-(x+3)(2x-5)$

⑮ $x^2-(x^2+2)+(x+2)^2$

⑯ $3-(x-4)^2$

⑰ $1-(-x+4)(-x-4)+x^2$

⑱ $(3z+1)^2+(3z-1)^2$

⑲ $-5y+(-2y-1)^2$

⑳ $3x-1-(2x-5)^2$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible. Da el resultado como un polinomio ordenando sus monomios de menor a mayor grado.

㉑ $(1-x)(1+x)+(3-x)(5-x)$

㉒ $(2+3y)^2+y\cdot(5-y)$

㉓ $5-(2-z)^2$

㉔ $(-4+x)^2+(-4-x)^2$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible. Da el resultado como un polinomio ordenando sus monomios de mayor a menor grado.

① $x\cdot(3x-7)+3x\cdot(-x+4)$

② $(x+2)(x-3)+(x^2-1)(3x^2+2)$

③ $(x+3)^2-(x-3)^2$

④ $(4x+5)(4x-5)+3x^2-1$

⑤ $-(x+5)(x-5)+(2x+1)^2$

⑥ $(x-x^2)\cdot(2x^2-1)+(3x^2-x)^2$

⑦ $-(4x-3)^2+(5x-3)(5x+3)$

⑧ $x^2\cdot(5x-1)^2+x\cdot(x^2-3)^2$

⑨ $x-(5x+1)-(-3x+2)^2$

⑩ $(y-5)^2+(2y+3)^2$

⑪ $(z+3)(z-3)+(2z-5)(2z+5)$

⑫ $2x-1+(3x-2)\cdot x$

⑬ $1-(3-(x-2)^2)$

⑭ $(x\cdot(2x-3))^2$

⑮ $(x^2+1)(x+1)(x-1)$

⑯ $((x-4)^2-16)\cdot((x+4)^2-16)$

⑰ $((x-2)(x+2))^2-(x^2-2)^2$

⑱ $(-5x-4)(-5x+4)-(5x+4)^2+40x$

⑲ $(-8x-1)^2+(-3x-2)^2$

⑳ $(((z+1)^2-1)^2-4z^3)^2$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible. Da el resultado como un polinomio ordenando sus monomios de menor a mayor grado.

㉑ $(3-x)^2+(5+x)^2$

㉒ $(3-y)(3+y)+(1+2y)(-2+3y)$

㉓ $(4+z^2)\cdot(3-z)+(2-4z)(2+4z)$

㉔ $(5-x)(3-x)+(1+x)(1+x^2)$

Ejemplos de operaciones combinadas con polinomios

Enunciados

① Dados los polinomios

$A(x) = x^2-3x+4$, $B(x) = x^2+2x-5$, $C(x) = x^3+2x^2-6x+3$, $D(x) = x^3-x^2+2x-2$

calcula $A(x)\cdot B(x)+(C(x)-D(x))^2$

② Escribe la siguiente expresión del modo más sencillo que sea posible. Da el resultado como un polinomio ordenando sus monomios de mayor a menor grado.

$(2x-1)^4+(x+3)^4$

Resoluciones

① El orden de cálculo es $A(x)\cdot B(x)$, $C(x)-D(x)$, el cuadrado y por fin la suma.

$$\begin{array}{lrrrrr}
A \rightarrow & & & x^2 & -3x & +4 \\
B \rightarrow & & & x^2 & +2x & -5 \\ \hline
 & & & -5x^2 & +15x & -20 \\
 & & 2x^3 & -6x^2 & +8x & \\
 & x^4 & -3x^3 & +4x^2 & & \\ \hline
AB \rightarrow & x^4 & -x^3 & -7x^2 & +23x & -20
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrrrr}
C \rightarrow & x^3 & +2x^2 & -6x & +3 \\
-D \rightarrow & -x^3 & +x^2 & -2x & +2 \\ \hline
C-D \rightarrow & 0 & +3x^2 & -8x & +5
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrr}
C-D \rightarrow & & & 3x^2 & -8x & +5 \\
C-D \rightarrow & & & 3x^2 & -8x & +5 \\ \hline
 & & & 15x^2 & -40x & +25 \\
 & & -24x^3 & +64x^2 & -40x & \\
 & 9x^4 & -24x^3 & +15x^2 & & \\ \hline
(C-D)^2 \rightarrow & 9x^4 & -48x^3 & +94x^2 & -80x & +25
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrrrrr}
AB \rightarrow & x^4 & -x^3 & -7x^2 & +23x & -20 \\
(C-D)^2 \rightarrow & 9x^4 & -48x^3 & +94x^2 & -80x & +25 \\ \hline
AB+(C-D)^2 \rightarrow & 11x^4 & -49x^3 & +87x^2 & -57x & +5
\end{array}$$

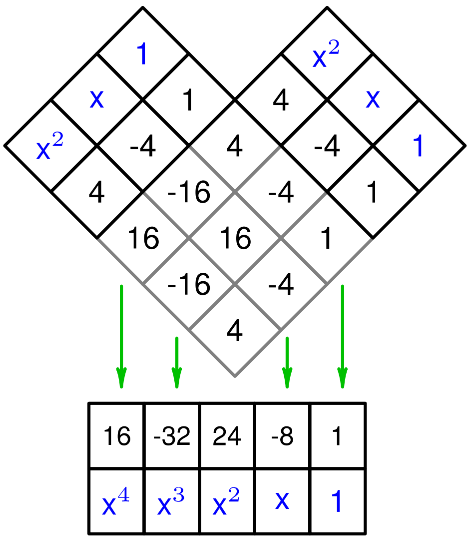
Solución: $A(x)\cdot B(x)+(C(x)-D(x))^2 = 11x^4-49x^3+87x^2-57x+5$

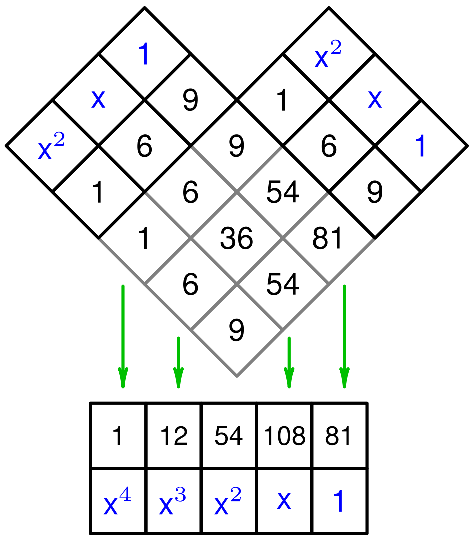
② Para algunas operaciones podemos usar los productos notables, pero otras son más largas y las calculamos aparte.

$(2x-1)^4+(x+3)^4 = ((2x-1)^2)^2+((x+3)^2)^2 = (4x^2-4x+1)^2+(x^2+6x+9)^2 =$

$= 16x^4-32x^3+24x^2-8x+1+x^4+12x^3+54x^2+108x+81 =$

$= 17x^4-20x^3+78x^2+100x+82$





Enunciados

Usando los polinomios dados en cada ejercicio, calcula el resultado de la operación pedida. Da el resultado como un polinomio ordenando sus monomios de mayor a menor grado.

① $A(x) = x^2+3x-2$, $B(x) = x^2+x-3$, $C(x) = 2x^2-5x+2$

Calcula $A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)$

② $A(x) = 5x^4+3x^2+4x-1$, $B(x) = 2x^2+5x-3$, $C(x) = 4x^2-3x+5$

Calcula $A(x)-B(x)\cdot C(x)$

③ $A(x) = x^2+3x-2$, $B(x) = 5x^3-x^2+3x-4$, $C(x) = 4x^3+2x^2-x-7$

Calcula $A(x)\cdot(B(x)-C(x))$

④ $A(x) = x^3+x^2+7x-4$, $B(x) = 4x^2+4x+2$, $C(x) = 2x^2-3x+4$, $D(x) = -3x^2+5x-2$

Calcula $(A(x)-B(x))(C(x)+D(x))$

⑤ $A(x) = 2x^3-4x^2-2x-3$, $B(x) = 4x^2+5x-6$, $C(x) = x^3+2x^2-4x-1$, $D(x) = 3x^2+3x-4$

Calcula $-A(x)\cdot B(x)+C(x)\cdot D(x)$

⑥ $A(x) = x^2+3x-2$, $B(x) = x^2+x-3$, $C(x) = x^3+3x^2+5x+2$, $D(x) = x^3+2x^2+3x-1$

Calcula $A(x)\cdot B(x)+(C(x)-D(x))^2$

⑦ $A(x) = 3x^3-4x^2-3x+8$, $B(x) = x^3+2x^2+x-5$, $C(x) = 4x^3+x^2+3x+2$

Calcula $(A(x)+B(x)-C(x))^2$

⑧ $A(x) = 2x^2-x+4$, $B(x) = x^2+2x-5$, $C(x) = x^2-2x+7$

Calcula $(A(x)+B(x))^2\cdot C(x)$

⑨ $A(x) = 2x^2-x+3$, $B(x) = x^2+2x-1$, $C(x) = -2x^2+x+3$

Calcula $(A(x))^2-(B(x)+C(x))^2$

⑩ $A(x) = x^3-2x^2+x-3$, $B(x) = x^2-x-1$

Calcula $(A(x)+(B(x))^2)^2$

⑪ $A(x) = 4x^4-2x^2+x-5$, $B(x) = 4x^4+x^2-3$, $C(x) = -x^3+2x^2-2x+5$, $D(x) = x^3-x^2+x-3$

Calcula $(A(x)-B(x))^2+(C(x)+D(x))^2$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible. Da el resultado como un polinomio ordenando sus monomios de mayor a menor grado.

⑫ $(x+1)^4+(2x-1)^4$

⑬ $(2x+3)^3$

⑭ $(3x-4)^3$

⑮ $(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)-x^{16}$

Enunciados

Usando los polinomios dados en cada ejercicio, calcula el resultado de la operación pedida. Da el resultado como un polinomio ordenando sus monomios de mayor a menor grado.

① $A(x) = x^2+2x-3$, $B(x) = x^2+2x-1$, $C(x) = 2x^2-3x-2$

Calcula $A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)$

② $A(x) = 7x^4+2x^2+3x-4$, $B(x) = x^2+4x-5$, $C(x) = 5x^2-2x+4$

Calcula $A(x)-B(x)\cdot C(x)$

③ $A(x) = 2x^2+x-3$, $B(x) = 4x^3-2x^2+2x-3$, $C(x) = 3x^3+3x^2-2x-6$

Calcula $A(x)\cdot(B(x)-C(x))$

④ $A(x) = x^3+2x^2-3x-1$, $B(x) = 3x^2-5x+3$, $C(x) = 4x^2-2x+3$, $D(x) = -3x^2+7x-4$

Calcula $(A(x)-B(x))(C(x)+D(x))$

⑤ $A(x) = 2x^3-3x^2-4x+4$, $B(x) = 3x^2-x+2$, $C(x) = x^3-x^2+2x+2$, $D(x) = 4x^2+x-5$

Calcula $-A(x)\cdot B(x)+C(x)\cdot D(x)$

⑥ $A(x) = 2x^2-x-4$, $B(x) = x^2+2x-2$, $C(x) = 4x^2+7x+8$, $D(x) = 3x^2+5x+5$

Calcula $A(x)\cdot B(x)+(C(x)-D(x))^2$

⑦ $A(x) = 6x^3-3x^2-4x+7$, $B(x) = 4x^3+x^2+4x-3$, $C(x) = 10x^3+2x^2+x-1$

Calcula $(A(x)+B(x)-C(x))^2$

⑧ $A(x) = 3x^2-2x+2$, $B(x) = 2x^2+3x-4$, $C(x) = x^2-3x+5$

Calcula $(A(x)+B(x))^2\cdot C(x)$

⑨ $A(x) = x^2-3x+4$, $B(x) = 2x^2-2x+1$, $C(x) = x^2+3x+1$

Calcula $(A(x))^2-(B(x)+C(x))^2$

⑩ $A(x) = 2x^2+2x-1$, $B(x) = x^4+x^3-2x-2$

Calcula $((A(x))^2+B(x))^2$

⑪ $A(x) = 3x^3-4x^2+2x-3$, $B(x) = 4x^3+x^2-1$, $C(x) = 4x^2-3x+1$, $D(x) = -2x^2+4x-2$

Calcula $(A(x)-B(x))^2+(C(x)+D(x))^2$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible. Da el resultado como un polinomio ordenando sus monomios de mayor a menor grado.

⑫ $(2x+1)^4+(3x-1)^4$

⑬ $(x(2x+3)^2)^2$

⑭ $(5x-1)^3$

⑮ $((3x+5)(4x+3))^2-(3x+5)^2(4x+3)^2$

Enunciados

① Dados los polinomios $P(x) = x+4$ y $Q(x) = 2x-3$, calcula

a) $P(2)+Q(2)$ b) $P(-2)\cdot Q(-2)$ c) $P(Q(1))$ d) $Q(P(1))$

② Dados los polinomios $R(x) = 3x-2$ y $S(x) = 4x-6$, calcula

a) $R(1)+S(1)$ b) $R(2)\cdot S(2)$ c) $R(R(1))$ d) $S(S(2))$

③ Dado el polinomio $T(x) = 2x+1$, calcula $T(T(T(T(T(T(T(-1)))))))$

④ Averigua cuál es el polinomio $A(x)$ que verifica estas tres condiciones:

a) $A(x)$ es de grado 1 b) $A(0) = 2$ c) $A(1) = 7$

⑤ Averigua cuál es el polinomio $B(x)$ que verifica estas cuatro condiciones:

a) $B(x)$ es de grado 2 b) $B(0) = 0$ c) $B(1) = 1$ d) $B(-1) = 1$

⑥ Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Asegúrate de pensar algún razonamiento que justifique tu respuesta.

a) Si se multiplican dos monomios de grado 4 siempre se obtiene un monomio de grado 8.

b) Si se suman dos monomios de grado 4 siempre se obtiene un monomio de grado 4.

c) Si se multiplican dos polinomios de grado 3 siempre se obtiene un polinomio de grado 6.

d) Si se suman dos polinomios de grado 3 siempre se obtiene un polinomio de grado 3.

e) Puede ocurrir alguna vez que al sumar dos monomios de grado 2 se obtenga un monomio de grado 1.

⑦ a) ¿Cuál es el número mínimo de multiplicaciones de polinomios que hay que realizar para elevar un polinomio a la octava potencia?

b) Calcula $(x+1)^8$. Da el resultado como un polinomio escribiendo los monomios en orden de mayor a menor.

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo que sea posible. Da el resultado como un polinomio ordenando sus monomios de mayor a menor grado.

⑧ $6\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)$ ⑨ $16\cdot\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)^2$ ⑩ $\left(\frac{45}{2}x+\frac{30}{7}\right)\left(\frac{42}{5}x+\frac{28}{3}\right)$

Enunciados

⑪ Averigua el coeficiente del monomio de grado 7 del polinomio obtenido al desarrollar la expresión $(2x+1)^4\cdot(3x+1)^3$.

⑫ Calcula $237\,456\,823^2 - 237\,456\,824\cdot 237\,456\,822$

⑬ Calcula $237\,456\,823^2 - 237\,456\,833\cdot 237\,456\,813$

Ecuaciones sencillas con una operación

Si en una ecuación la incógita aparece una sola vez, para resolver la ecuación basta con despejar la incógnita. En el nivel 1 aprendiste a hacerlo en cinco casos distintos, que vamos a recordar. Como ya sabemos que la división se puede escribir con la notación de fracción, y esta es normalmente la más cómoda, en los siguientes ejemplos usaremos la notación de fracción para indicar las divisiones.

Ejemplo 1. $x+8=10 \Rightarrow x=10-8 \Rightarrow x=2$	Ejemplo 2. $x-8=10 \Rightarrow x=10+8 \Rightarrow x=18$
Ejemplo 3. $3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$	Ejemplo 4. $\frac{x}{3}=5 \Rightarrow x=5\cdot3 \Rightarrow x=15$
Ejemplo 5. $-x=9 \Rightarrow x=-9$	

Ecuaciones sencillas con dos operaciones

Si en una ecuación la incógita aparece una sola vez pero hay que hacer dos operaciones para llegar al resultado final, hay que tener en cuenta el orden en el que hay que hacer las dos operaciones para saber en qué orden habrá que despejar la incógnita.

Ejemplo 6. Resuelve la ecuación $3x+4=25$

Paso 1. Sumamos -4 a los dos miembros: $3x+4-4=25-4$

Paso 2. Simplificamos: $3x=21$.

Paso 3. Dividimos entre 3 los dos miembros: $\frac{3x}{3}=\frac{21}{3}$

Paso 4. Simplificamos: $x=7$

Vemos el proceso todo seguido: $3x+4=25 \Rightarrow 3x=25-4=21 \Rightarrow x=\frac{21}{3}=7$

Solución: $x=7$

Ejemplo 7. Resuelve la ecuación $3(x+4)=18$

Paso 1. Dividimos entre 3 los dos miembros: $\frac{3(x+4)}{3}=\frac{18}{3}$

Paso 2. Simplificamos: $x+4=6$

Paso 3. Sumamos -4 a los dos miembros: $x+4-4=6-4$

Paso 4. Simplificamos: $x=2$

Vemos el proceso todo seguido: $3(x+4)=18 \Rightarrow x+4=\frac{18}{3}=6 \Rightarrow x=6-4=2$

Solución: $x=2$

Conclusión

- En el ejemplo (6) el orden de cálculo a partir de la incógnita es: primero multiplicar por 3 y luego sumar 4; para despejar, primero eliminamos el 4 y luego el 3.
- En el ejemplo (7) el orden de cálculo a partir de la incógnita es: primero sumar 4 y luego multiplicar por 3; para despejar, primero eliminamos el 3 y luego el 4.

Se despeja en el orden contrario al orden de cálculo

Ecuaciones sencillas con dos operaciones

Si en una ecuación la incógita aparece una sola vez pero hay que hacer dos operaciones para llegar al resultado final, hay que despejar la incógnita en el orden contrario al de cálculo.

Visualización

Vamos a resolver dos ecuaciones que son tan parecidas que solo se diferencian en el orden de cálculo, así comprobarás lo importante que es ese orden, que hace cambiar el resultado.

En vez de hacer la demostración escrita, te mostramos visualmente el proceso como una serie de pasos. Los pasos de izquierda a derecha son el orden de cálculo desde la incógnita hasta el resultado final y los pasos de derecha a izquierda son los del orden para despejar desde el resultado final hasta la incógnita.

Ejemplo 1. $\frac{x-3}{2}=5$	Ejemplo 2. $\frac{x}{2}-3=5$
$\boxed{x} \xrightarrow{-3} \boxed{x-3} \xrightarrow{\div 2} \boxed{\frac{x-3}{2}}$ $\downarrow$ $\boxed{13} \xleftarrow{+3} \boxed{10} \xleftarrow{\times 2} \boxed{5}$	$\boxed{x} \xrightarrow{\div 2} \boxed{\frac{x}{2}} \xrightarrow{-3} \boxed{\frac{x}{2}-3}$ $\downarrow$ $\boxed{16} \xleftarrow{\times 2} \boxed{8} \xleftarrow{+3} \boxed{5}$
Solución: $x=13$	Solución: $x=16$

Escribir la resolución

La manera de escribir la resolución dependerá de ti, según quieras dar más o menos pasos, hacerlo todo mentalmente, despejar directamente o poco a poco. Te mostramos algunas posibilidades para que puedas decidir tú:

* Despejando y operando paso a paso:

$\frac{x-3}{2}=5 \Rightarrow x-3=5\cdot 2=10 \Rightarrow x=10+3=13$	$\frac{x}{2}-3=5 \Rightarrow \frac{x}{2}=5+3=8 \Rightarrow x=8\cdot 2=16$

* En cada paso despejas y operas mentalmente:

$\frac{x-3}{2}=5 \Rightarrow x-3=10 \Rightarrow x=13$	$\frac{x}{2}-3=5 \Rightarrow \frac{x}{2}=8 \Rightarrow x=16$

* Primero despejas en dos pasos y luego operas:

$\frac{x-3}{2}=5 \Rightarrow x-3=5\cdot 2 \Rightarrow x=5\cdot 2+3=13$	$\frac{x}{2}-3=5 \Rightarrow \frac{x}{2}=5+3 \Rightarrow x=2\cdot(5+3)=16$

* Primero despejas en un paso y luego operas:

$\frac{x-3}{2}=5 \Rightarrow x=5\cdot 2+3=13$	$\frac{x}{2}-3=5 \Rightarrow x=2\cdot(5+3)=16$

Resumen

Piensa en qué orden calcularías a partir de la incógnita y despeja en el orden contrario. Escribe los pasos que necesites.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones.

① $5(x+3)=-30$

② $-6x+1=-17$

③ $\frac{x+4}{-3}=5$

④ $-x+9=3$

⑤ $\frac{7x}{8}=63$

⑥ $10+\frac{x}{3}=1$

Resoluciones

① Orden de cálculo a partir de la incógnita: primero el 3 y luego el 5.

Orden para despejar: primero el 5 y luego el 3.

Resolución: $5(x+3)=-30 \Rightarrow x+3=-6 \Rightarrow x=-9$; solución: $x=-9$

② Orden de cálculo a partir de la incógnita: primero el -6 y luego el 1.

Orden para despejar: primero el 1 y luego el -6.

Resolución: $-6x+1=-17 \Rightarrow -6x=-18 \Rightarrow x=3$; solución: $x=3$

③ Orden de cálculo a partir de la incógnita: primero el 4 y luego el -3.

Orden para despejar: primero el -3 y luego el 4.

Resolución: $\frac{x+4}{-3}=5 \Rightarrow x+4=-15 \Rightarrow x=-16$; solución: $x=-16$

④ Orden de cálculo a partir de la incógnita: primero cambiar el signo y luego el 9.

Orden para despejar: primero el 9 y luego cambiar el signo.

Resolución: $-x+9=3 \Rightarrow -x=-6 \Rightarrow x=6$; solución: $x=6$

⑤ Orden de cálculo a partir de la incógnita: en este caso tan particular el orden de cálculo es indiferente, por eso es posible escribir 7x:8 en forma de fracción. Así que elegimos el orden que más nos convenga; es mejor pasar primero el 7 y luego el 8 porque así los números son más sencillos, así que consideramos que en este caso el orden de cálculo es primero el 8 y luego el 7.

Orden para despejar: primero el 7 y luego el 8.

Resolución: $\frac{7x}{8}=63 \Rightarrow \frac{x}{8}=\frac{63}{7}=9 \Rightarrow x=9\cdot 8=72$; solución: $x=72$

Nota: si despejáramos con el otro orden posible, también llegaríamos al resultado correcto, pero con números más altos si no tenemos cuidado:

$\frac{7x}{8}=63 \Rightarrow 7x=63\cdot 8=504 \Rightarrow x=\frac{504}{7}=72$; mejor: $\frac{7x}{8}=63 \Rightarrow x=\frac{63\cdot 8}{7}=9\cdot 8=72$

⑥ Orden de cálculo: primero el 3 y luego el 10.

Orden para despejar: primero el 10 y luego el 3.

Resolución: $10+\frac{x}{3}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}=-9 \Rightarrow x=-27$. Solución: -27

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones:

① $2x-15=-9$

② $2(x-15)=-8$

③ $-3(x+5)=21$

④ $-3x+5=35$

⑤ $\frac{x-5}{2}=-7$

⑥ $\frac{x}{2}-5=-7$

⑦ $7x+56=0$

⑧ $-4x+14=10$

⑨ $-x+8=3$

⑩ $4-5x=34$

⑪ $9-x=-3$

⑫ $9+2x=21$

⑬ $\frac{x-4}{2}=3$

⑭ $-4+\frac{x}{2}=3$

⑮ $10-x=15$

⑯ $5x+2=-18$

⑰ $-3(x+7)=-33$

⑱ $\frac{-x}{4}=5$

⑲ $-(x+4)=-10$

⑳ $7x+13=-1$

㉑ $-17x+345=345$

㉒ $8+9x=-10$

㉓ $\frac{x+14}{3}=4$

㉔ $3(x+14)=30$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones:

① $\frac{x-3}{2}=2$

② $\frac{x}{2}-3=2$

③ $3x+11=-1$

④ $4(x-3)=20$

⑤ $-x+14=8$

⑥ $16+5x=1$

⑦ $-2x+15=9$

⑧ $13-x=16$

⑨ $\frac{2+x}{4}=-3$

⑩ $2+\frac{x}{4}=-3$

⑪ $5(4+x)=30$

⑫ $\frac{6x}{11}=12$

⑬ $4+5x=-16$

⑭ $7x+1=50$

⑮ $7(x+1)=49$

⑯ $-x+15=0$

⑰ $\frac{x}{4}+2=0$

⑱ $-4x+8=0$

⑲ $\frac{x+8}{3}=-3$

⑳ $9x+15=15$

㉑ $7-2x=19$

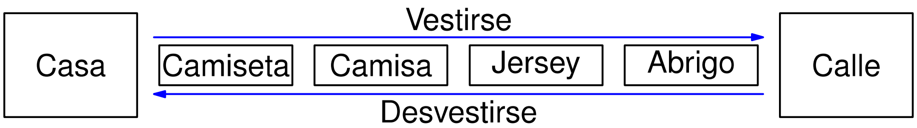
㉒ $\frac{-5x}{8}=30$

㉓ $9x-81=81$

Ecuaciones sencillas con más de dos operaciones

Si en una ecuación la incógita aparece una sola vez pero hay que hacer más de dos operaciones para llegar al resultado final, hay que despejar la incógnita en el orden contrario al de cálculo.

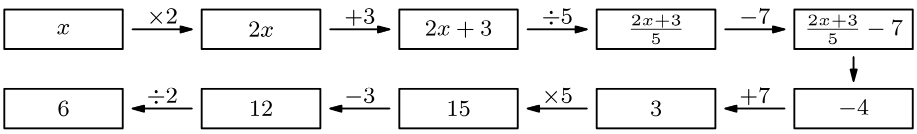
Es lógico que sea así. Pongamos el ejemplo de lo que ocurre cuando te vistes y te desvistes: ¿qué te pones por arriba un día de frío? Primero la camiseta, luego la camisa, luego un jersey y encima de todo un abrigo. Cuando vuelves a casa, primero te quitas el abrigo, luego el jersey, luego la camisa y por último la camiseta. Te desvistes en el orden contrario al que te vestiste.



Ejemplo 1

Enunciado: resuelve la ecuación $\frac{2x+3}{5}-7=-4$

Comentario: el orden de cálculo si partimos de un valor numérico de la incógnita es: primero el 2 (la camiseta), luego el 3 (la camisa), luego el 5 (el jersey) y por último el –7 (el abrigo). Por tanto, para despejar la incógnita debemos empezar por mover el –7, luego el 5, luego el 3 y por último el 2. Lo visualizamos:



Resolución

$$\frac{2x+3}{5}-7=-4 \Rightarrow \frac{2x+3}{5}=-4+7=3 \Rightarrow 2x+3=3\cdot 5=15 \Rightarrow 2x=15-3=12 \Rightarrow x=\frac{12}{2}=6$$

Solución: $x=6$

Aparición de fracciones

Cuando vamos operando para calcular la solución, es muy común que aparezcan divisiones que o bien no son exactas o bien tienen muchas cifras decimales. Normalmente el mejor método para manejar estas operaciones es escribir los resultados como fracciones e ir simplificando en cuanto se pueda.

Ejemplo 2

Enunciado: resuelve la ecuación $6(4x+1)+9=19$

Resolución

$$6(4x+1)+9=19 \Rightarrow 6(4x+1)=19-9=10 \Rightarrow 4x+1=\frac{10}{6}=\frac{5}{3} \Rightarrow 4x=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{3}:4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2}{3\cdot 4}=\frac{1}{3\cdot 2}=\frac{1}{6}$$

Solución: $x=\frac{1}{6}$

Observación: en el nivel 1 aprendiste a resolver esta ecuación eliminando el paréntesis; aún llegando a misma solución, este nuevo método suele ser más rápido.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $\frac{2x-3}{5}=3$

② $2\cdot\left(\frac{x}{3}-1\right)=10$

③ $\frac{5-x}{2}=4$

④ $3(5x-9)=18$

⑤ $\frac{4-3x}{2}=-1$

⑥ $2(8-3x)=28$

⑦ $5\cdot\left(3+\frac{x}{-2}\right)=40$

⑧ $\frac{\frac{x}{2}-4}{5}=-2$

⑨ $\frac{5(x-2)}{4}=35$

⑩ $137(6x+30)=0$

⑪ $\frac{\frac{x}{2}-1}{5}=\frac{1}{4}$

⑫ $3(4x-5)=1$

⑬ $\frac{3}{5}(x-2)=\frac{6}{35}$

⑭ $\frac{1}{2}-\frac{x}{4}=2$

⑮ $4(5x-2)=\frac{20}{3}$

⑯ $\frac{\frac{x}{3}-2}{5}=\frac{2}{15}$

⑰ $3(2-x)=5$

⑱ $\frac{3x+1}{2}=\frac{9}{8}$

Enunciados

Resuelve **mentalmente** las siguientes ecuaciones y escribe la solución en la casilla en blanco:

	A	B	C	D	E
1	$x+8=15$	$x-3=9$	$3x=12$	$\frac{x}{5}=-3$	$-x=8$
2	$x+7=-2$	$x-5=-20$	$-4x=24$	$\frac{x}{-3}=-5$	$-x=-3$
3	$3x-1=8$	$3(x-1)=9$	$-x+8=10$	$-(x+8)=10$	$5x+40=0$
4	$\frac{x}{4}+1=6$	$\frac{x+1}{4}=6$	$\frac{x}{3}-2=-7$	$\frac{x-2}{3}=-7$	$\frac{-4+x}{3}=2$
5	$4+3x=-2$	$-2-5x=18$	$-2(x+5)=8$	$9-x=14$	$5-6x=-13$
6	$2(3x+1)=26$	$\frac{5x-1}{3}=8$	$7\left(\frac{x}{3}-1\right)=42$	$-(3x-2)=8$	$-\frac{x}{2}+4=9$
7	$2(-x+3)=-8$	$-3\left(\frac{x}{2}+5\right)=9$	$\frac{-2x+4}{5}=6$	$-(4-x)=2$	$-3(-x+1)=12$
8	$\frac{7x}{5}=14$	$\frac{9x}{2}=63$	$\frac{3x}{13}=6$	$\frac{5x}{11}=35$	$\frac{2x}{7}=14$
9	$\frac{2x}{7}-11=5$	$\frac{3x}{11}-7=5$	$\frac{3(x-3)}{11}=6$	$\frac{5(x+4)}{2}=35$	$\frac{4(x+1)}{3}=-24$
10	$\frac{3}{5}(2x+6)=12$	$\frac{6x+3}{5}+1=-2$	$\frac{7}{3}(-x+2)=14$	$\frac{\frac{x}{3}+1}{2}+3=-1$	$6(3(x-2)+1)=60$

Método general de resolución de ecuaciones de primer grado

Ya tratamos los casos más sencillos en el nivel 1; ahora vamos a resolver casos un poco más complicados, lo que nos permitirá, además, aprender otro método de simplificación de ecuaciones.

Método general para resolver ecuaciones de primer grado con una sola incógnita:

1. Se eliminan todos los paréntesis y todas las fracciones que aparezcan.
2. Se organizan los sumandos individuales de modo que en un miembro queden todos los sumandos con incógnita y en el otro todos los sumandos que no tengan incógnita.
3. Se simplifica al máximo cada miembro de la ecuación.
4. Si es posible, se aconseja simplificar la ecuación.
5. Se resuelve la ecuación simplificada obtenida.

Observa que, respecto a lo que sabíamos del nivel 1, hemos añadido la eliminación de fracciones; este es el aspecto que vamos a ver ahora con detenimiento.

Eliminación de fracciones en ecuaciones

Para eliminar las fracciones de una ecuación hay que multiplicar los dos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $\frac{x}{2}-x=\frac{x}{3}+2$

② $\frac{x}{2}+\frac{x}{6}=1+\frac{x}{9}$

Resoluciones

① El mínimo común múltiplo de los denominadores es mcm(2,3)=6

Multiplicamos por 6 los dos miembros: $\frac{x}{2}-x=\frac{x}{3}+2 \Rightarrow 6\cdot\left(\frac{x}{2}-x\right)=6\cdot\left(\frac{x}{3}+2\right)$

Aplicamos la propiedad distributiva: $6\cdot\left(\frac{x}{2}-x\right)=6\cdot\left(\frac{x}{3}+2\right) \Rightarrow 6\cdot\frac{x}{2}-6x=6\cdot\frac{x}{3}+6\cdot 2$

Simplificamos: $6\cdot\frac{x}{2}-6x=6\cdot\frac{x}{3}+6\cdot 2 \Rightarrow 3x-6x=2x+12$

Terminamos como ya sabemos: $3x-6x=2x+12 \Rightarrow -3x-2x=12 \Rightarrow -5x=12 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=\frac{12}{-5}=-\frac{12}{5}$. Solución: $x=-\frac{12}{5}$

② El mínimo común múltiplo de los denominadores es mcm(2,6,9)=18

Multiplicamos por 18 los dos miembros y aplicamos la propiedad distributiva:

$\frac{x}{2}+\frac{x}{6}=1+\frac{x}{9} \Rightarrow 18\cdot\frac{x}{2}+18\cdot\frac{x}{6}=18\cdot 1+18\cdot\frac{x}{9}$

Simplificamos y terminamos: $18\cdot\frac{x}{2}+18\cdot\frac{x}{6}=18\cdot 1+18\cdot\frac{x}{9} \Rightarrow 9x+3x=18+2x \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x-2x=18 \Rightarrow 10x=18 \Rightarrow 5x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{5}$. Solución: $x=\frac{9}{5}$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $\frac{11x}{20}+\frac{5x}{4}+2=x+\frac{7x}{5}$ ② $\frac{5x}{6}+\frac{4x}{9}=x+\frac{5x}{18}$ ③ $\frac{3x}{4}-\frac{7x}{12}+3=x-\frac{5x}{6}$

Resolución 1

El mínimo común múltiplo de los denominadores es mcm(20,4,5)=20

Multiplicamos por 20 los dos miembros:

$$\frac{11x}{20}+\frac{5x}{4}+2=x+\frac{7x}{5} \Rightarrow 20\cdot\left(\frac{11x}{20}+\frac{5x}{4}+2\right)=20\cdot\left(x+\frac{7x}{5}\right)$$

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$20\cdot\left(\frac{11x}{20}+\frac{5x}{4}+2\right)=20\cdot\left(x+\frac{7x}{5}\right) \Rightarrow 20\cdot\frac{11x}{20}+20\cdot\frac{5x}{4}+20\cdot 2=20x+20\cdot\frac{7x}{5}$$

Casi siempre hacemos la multiplicación aplicando directamente la propiedad distributiva; así ahorramos escribir varias veces lo mismo.

Simplificamos; en este paso tan importante debes recordar cómo operamos con fracciones, siempre buscando las simplificaciones:

$$20\cdot\frac{11x}{20}+20\cdot\frac{5x}{4}+20\cdot 2=20x+20\cdot\frac{7x}{5} \Rightarrow 11x+25x+40=20x+28x$$

El resto ya lo conocemos:

$$11x+25x-40=20x+28x \Rightarrow 36x-20x-28x=-40 \Rightarrow -12x=-40 \Rightarrow 3x=10 \Rightarrow x=\frac{10}{3}.$$

Solución: $x=\frac{10}{3}$

Resolución 2

El mínimo común múltiplo de los denominadores es mcm(6,9,18)=18

Multiplicamos por 18 los dos miembros, aplicamos la propiedad distributiva y simplificamos, todo en el mismo paso (este el método que al final se acostumbra a seguir casi todo el mundo en cuanto coge un poco de soltura):

$\frac{5x}{6}+\frac{4x}{9}=x+\frac{5x}{18} \Rightarrow 15x+8x=18x+5x$. Observa qué rápido es.

El resto ya sabemos hacerlo (hacemos operaciones mientras cambiamos de miembro algunos sumandos):

$15x+8x=18x+5x \Rightarrow 23x-23x=0 \Rightarrow 0=0 \rightarrow$ cualquier número es solución.

Solución: cualquier número es solución.

Resolución 3

El mínimo común múltiplo de los denominadores es mcm(4,12,6)=12.

En un solo paso multiplicamos por 12 y simplificamos; el resto ya lo sabemos.

$\frac{3x}{4}-\frac{7x}{12}+3=x-\frac{5x}{6} \Rightarrow 9x-7x+36=12x-10x \Rightarrow 2x-2x=-36 \Rightarrow 0=-36 \rightarrow$ sin solución.

Solución: la ecuación no tiene solución.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=\frac{5}{6}$

② $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=1$

③ $\frac{x}{6}-1=x+\frac{x}{3}$

④ $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x}{8}=\frac{3}{16}$

⑤ $\frac{x}{6}-\frac{x}{9}=2$

⑥ $\frac{3x}{4}-\frac{4x}{5}=\frac{3}{20}$

⑦ $\frac{3x}{5}-\frac{7x}{10}=\frac{x}{2}+1$

⑧ $3x+5-\frac{6x}{7}=\frac{5}{14}$

⑨ $\frac{7x}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5x}{6}-\frac{1}{9}$

⑩ $\frac{5x}{6}+\frac{9x}{10}=2x-\frac{4x}{15}$

⑪ $\frac{2x}{3}-2=\frac{2x}{5}$

⑫ $x-\frac{4x}{3}=\frac{1}{6}$

⑬ $\frac{5x}{4}-\frac{2x}{5}=\frac{x}{10}+\frac{3}{20}$

⑭ $\frac{7x}{10}+\frac{x}{30}=\frac{1}{5}+x-\frac{4x}{15}$

⑮ $1+\frac{5x}{6}=x-\frac{2x}{3}$

⑯ $\frac{3x}{5}+\frac{9x}{10}-1=x$

⑰ $\frac{2x}{3}-\frac{x}{15}=\frac{4}{5}$

⑱ $\frac{9x}{10}+1=x-\frac{4x}{5}$

Eliminación de fracciones con sumas en el numerador en ecuaciones

Para realizar correctamente las operaciones debemos recordar que todas las fracciones tienen tres paréntesis implícitos: la expresión $\frac{a}{b}$ realmente significa $\left(\frac{(a)}{(b)}\right)$.

Nos fijamos ahora especialmente en el caso de que el denominador sea un número y en el numerador haya una suma; por ejemplo la expresión $\frac{2x-3}{5}$ debemos considerarla como $\frac{(2x-3)}{5}$ para no cometer errores.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $\frac{2x-3}{5}-\frac{3x-2}{2}=\frac{37}{10}$

② $\frac{5x}{3}-\frac{x-9}{6}=\frac{5}{2}$

Resoluciones

① El mínimo común múltiplo de los denominadores es mcm(2,5,10)=10

Multiplicamos por 10 los dos miembros:

$$\frac{2x-3}{5}-\frac{3x-2}{2}=\frac{37}{10} \Rightarrow 10\cdot\left(\frac{2x-3}{5}-\frac{3x-2}{2}\right)=10\cdot\frac{37}{10}$$

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$10\cdot\left(\frac{2x-3}{5}-\frac{3x-2}{2}\right)=10\cdot\frac{37}{10} \Rightarrow 10\cdot\frac{2x-3}{5}-10\cdot\frac{3x-2}{2}=10\cdot\frac{37}{10}$$

Simplificamos; este paso es importante, observa los paréntesis que aparecen:

$$10\cdot\frac{2x-3}{5}-10\cdot\frac{3x-2}{2}=10\cdot\frac{37}{10} \Rightarrow 2(2x-3)-5(3x-2)=37$$

Hemos llegado a una ecuación que ya no tiene denominadores, pero que ahora tiene unos paréntesis que en la ecuación original solo estaban implícitos. Ya en el nivel 1 aprendimos a terminar de resolver esta ecuación:

$2(2x-3)-5(3x-2)=37 \Rightarrow 4x-6-15x+10=37 \Rightarrow 4x-15x=37-4 \Rightarrow -11x=33 \Rightarrow x=-3$

Solución: x=2

② El mínimo común múltiplo de los denominadores es mcm(2,3,6)=6

Multiplicamos por 6 los dos miembros y aplicamos la propiedad distributiva:

$$\frac{5x}{3}-\frac{x-9}{6}=\frac{5}{2} \Rightarrow 6\cdot\frac{5x}{3}-6\cdot\frac{x-9}{6}=6\cdot\frac{5}{2}$$

Simplificamos; fíjate en el importantísimo paréntesis que aparece; omitirlo es una fuente continua de errores, así que ¡estate atento!:

$$6\cdot\frac{5x}{3}-6\cdot\frac{x-9}{6}=6\cdot\frac{5}{2} \Rightarrow 10x-(x-9)=15 \Rightarrow 10x-x+9=15 \Rightarrow 10x-x=15-9 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$. Solución: $x=\frac{2}{3}$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $\frac{3x-5}{2}-\frac{2x+7}{3}=\frac{1}{6}$

② $\frac{3x}{7}-\frac{x-3}{14}=-\frac{1}{2}$

③ $3x-\frac{4x-7}{2}=3$

④ $\frac{2x-5}{4}+\frac{3x+1}{7}=2$

⑤ $\frac{-3x+2}{5}+\frac{x-3}{2}=-1$

⑥ $1-\frac{4x-5}{4}=\frac{4x+1}{6}+5x$

⑦ $\frac{4x+1}{5}-\frac{2x-5}{3}=\frac{8}{15}$

⑧ $\frac{15}{14}-\frac{x-2}{2}=\frac{x+4}{7}$

⑨ $\frac{3x}{2}-\frac{2x-4}{5}=\frac{5x}{4}-\frac{3x-1}{5}$

⑩ $\frac{20x+4}{21}+\frac{14x+4}{15}=\frac{31x+16}{35}+x$

⑪ $x-\frac{7x-4}{5}=\frac{2}{3}$

⑫ $\frac{x-1}{11}+\frac{x-2}{3}=1$

⑬ $1-\frac{x-1}{2}=\frac{x+3}{13}$

⑭ $x-2=\frac{3x+1}{5}-\frac{1-x}{7}$

⑮ $\frac{5x}{3}+\frac{x+1}{2}=1-\frac{x-15}{4}$

⑯ $\frac{4x+7}{3}-\frac{5x-4}{2}=\frac{5x-3}{6}-\frac{3x-11}{4}$

⑰ $\frac{5x+1}{6}-x=\frac{17x+2}{30}-\frac{11x+1}{15}$

⑱ $\frac{3x-5}{4}+x=1-\frac{9x-5}{8}$

Eliminación de fracciones con operaciones en el numerador en ecuaciones

Cuando haya una operación en el numerador de alguna fracción, puede ser apropiado hacer primero la operación y luego ya eliminar los denominadores o bien eliminar directamente los denominadores. Hacerlo de un modo u otro casi siempre depende de gustos personales. En todo caso, antes de lanzarte a la resolución, piensa qué opción te parece que será más sencilla.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $\frac{3(4x-1)}{5}-\frac{3(3x-4)}{2}=-\frac{3}{10}$ ② $\frac{9x+4-5x+6}{2}=\frac{x}{6}+\frac{4}{3}$

Resoluciones

① El mínimo común múltiplo de los denominadores es mcm(2,5,10)=10

Multiplicamos por 10 los dos miembros y aplicamos la propiedad distributiva:

$$\frac{3(4x-1)}{5}-\frac{3(3x-4)}{2}=-\frac{3}{10} \Rightarrow 10\cdot\frac{3(4x-1)}{5}-10\cdot\frac{3(3x-4)}{2}=-10\cdot\frac{3}{10}$$

Simplificamos; este paso es importante, observa los números que quedan delante de los paréntesis:

$$10\cdot\frac{3(4x-1)}{5}-10\cdot\frac{3(3x-4)}{2}=-10\cdot\frac{3}{10} \Rightarrow 6(4x-1)-15(3x-4)=-3$$

Terminamos:

$$6(4x-1)-15(3x-4)=-3 \Rightarrow 24x-6-45x+60=-3 \Rightarrow 24x-45x=-3+6-60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -21x=-57 \Rightarrow 7x=19 \Rightarrow x=\frac{19}{7}$$

Solución: $x=\frac{19}{7}$

② Nos interesa simplificar la primera fracción:

$$\frac{9x+4-5x+6}{2}=\frac{x}{6}+\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4x+10}{2}=\frac{x}{6}+\frac{4}{3} \Rightarrow 2x+5=\frac{x}{6}+\frac{4}{3}$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores es mcm(3,6)=6

Multiplicamos por 6 los dos miembros y aplicamos la propiedad distributiva:

$$2x+5=\frac{x}{6}+\frac{4}{3} \Rightarrow 6\cdot 2x+6\cdot 5=6\cdot\frac{x}{6}+6\cdot\frac{4}{3}$$

Simplificamos:

$$6\cdot 2x+6\cdot 5=6\cdot\frac{x}{6}+6\cdot\frac{4}{3} \Rightarrow 12x+30=x+8 \Rightarrow 12x-x=8-30 \Rightarrow 11x=-22 \Rightarrow x=-2$$

Solución: $x=-2$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $\frac{2(x+1)}{3}+\frac{3(x+2)}{2}=\frac{61}{6}$

② $\frac{6x-3+2x-1}{4}-\frac{x}{3}=9$

③ $\frac{5(x-3)}{4}+\frac{7(x+1)}{3}=\frac{13}{6}$

④ $-\frac{x}{2}+\frac{6x-4+x-3}{7}=-1$

⑤ $\frac{5(3x-7)}{2}-x=\frac{13(x-1)}{2}$

⑥ $\frac{9x+7-4x+3}{5}-\frac{x-4+7x-20}{8}=5$

⑦ $5(3x-1)-\frac{x-2}{3}=14$

⑧ $\frac{2(2x-3)}{5}=\frac{1}{3}-\frac{23-x}{15}$

⑨ $\frac{3(x+5)}{2}-6(5-x)=35$

⑩ $\frac{3(3x+2)}{2}-\frac{4(3x+1)}{7}=\frac{47}{14}$

⑪ $\frac{2(3x+1)-6}{5}-x=2$

⑫ $\frac{x}{2}-\frac{1}{3}-\frac{x-1}{6}=\frac{5(x+1)}{6}$

⑬ $\frac{5x-4+4x+4}{6}+\frac{6x-7+2x+7}{4}=-7$

⑭ $\frac{3(4x+1)}{2}-\frac{7-4x}{10}=\frac{26}{5}$

⑮ $\frac{5(x+1)}{3}+\frac{7(x-1)}{6}=\frac{3(x+2)}{4}-\frac{x+25}{12}$

⑯ $4(2x-5)-\frac{x-4}{2}=2$

⑰ $\frac{2(x-5)}{5}-\frac{4(x-3)}{7}=1$

⑱ $\frac{3(x+7)}{4}=1-\frac{x-20}{8}$

Eliminación de fracciones dentro de paréntesis en ecuaciones

En el proceso de eliminación de fracciones y paréntesis de una ecuación se pueden presentar muchos casos distintos.

Hemos comenzado estudiando las técnicas más básicas de eliminación, pero eso no agota las posibilidades. Puede ser necesario algunas veces utilizar esas ideas básicas junto con otras más particulares que se nos ocurran.

Vemos ahora algunos casos diferentes a los tratados hasta el momento con la intención de que vayas viendo otras posibilidades.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $10\left(\frac{3x+2}{4}+x\right)=7\left(\frac{x}{2}-\frac{x-3}{7}\right)-28$ ② $2x-3\left(\frac{x}{5}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{10}(4x-6)$

Resoluciones

① Eliminamos los paréntesis que aparecen, simplificando lo que sea posible y escribiendo paréntesis auxiliares. Estudia bien este paso porque es el más novedoso de esta resolución:

$$10\left(\frac{3x+2}{4}+x\right)=7\left(\frac{x}{2}-\frac{x-3}{7}\right)-28 \Rightarrow \frac{5}{2}(3x+2)+10x=\frac{7x}{2}-(x-3)-28$$

Como el único denominador es 2, multiplicamos la ecuación por 2:

$$\frac{5}{2}(3x+2)+10x=\frac{7x}{2}-(x-3)-28 \Rightarrow 5(3x+2)+20x=7x-2(x-3)-56$$

Terminamos:

$5(3x+2)+20x=7x-2(x-3)-56 \Rightarrow 15x+10+20x=7x-2x+6-56 \Rightarrow$
$\Rightarrow 35x-7x+2x=-50-10 \Rightarrow 30x=-60 \Rightarrow x=-2$

Solución: $x=-2$

② Eliminamos los paréntesis que aparecen, simplificando lo que sea posible y escribiendo paréntesis auxiliares.

$$2x-3\left(\frac{x}{5}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{10}(4x-6) \Rightarrow 2x-\frac{3}{5}x-2=\frac{2x}{5}-\frac{3}{5}$$

Como el único denominador es 2, multiplicamos la ecuación por 2:

$$2x-\frac{3}{5}x-2=\frac{2x}{5}-\frac{3}{5} \Rightarrow 10x-3x-10=2x-3$$

Terminamos:

$$10x-3-10=2x-3 \Rightarrow 10x-3x-2x=-3+10 \Rightarrow 5x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{5}$$

Solución: $x=\frac{7}{5}$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $x-6\left(\frac{3x-1}{2}-\frac{x-4}{6}\right)=-8$

② $2\left(\frac{x}{3}-\frac{5x}{6}\right)=4x+5$

③ $\frac{x}{3}+10\left(\frac{5x}{2}-1\right)=4$

④ $5\left(\frac{x}{10}-\frac{7}{20}\right)=1-7\left(\frac{3x}{14}-\frac{13}{28}\right)$

⑤ $\frac{3}{5}\left(\frac{5x}{3}-\frac{10}{9}\right)=1+\frac{7}{2}\left(\frac{x}{7}-\frac{1}{21}\right)$

⑥ $x-7\left(\frac{5x}{14}-1\right)=-\frac{1}{2}$

⑦ $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}-\frac{5}{2}\right)=x+\frac{5}{3}\left(\frac{2x}{5}-\frac{1}{10}\right)$

⑧ $2\left(\frac{5x}{4}-\frac{7}{6}\right)+x=3\left(\frac{4x}{9}+\frac{25}{18}\right)$

⑨ $x+2=5\left(\frac{x}{10}+\frac{7}{15}\right)$

⑩ $\frac{2}{5}\left(\frac{5x}{4}+\frac{15}{2}\right)=\frac{6}{7}\left(\frac{7x}{12}+\frac{21}{2}\right)+1$

⑪ $3\left(x+\frac{5}{6}\right)+x=7\left(\frac{x}{3}-1\right)+2$

⑫ $x-\frac{2}{3}\left(\frac{6x}{5}+\frac{9}{10}\right)=\frac{1}{3}\left(2x-\frac{3}{4}\right)-\frac{7}{5}\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right)$

⑬ $4\left(\frac{x}{8}+\frac{3}{16}\right)-x=7+5\left(\frac{3x}{10}+\frac{7}{20}\right)$

⑭ $\frac{3}{5}\left(5x+\frac{1}{2}\right)-\frac{13}{10}=x+\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{3x}{2}\right)$

⑮ $x-4\left(\frac{5x}{4}-\frac{5}{2}\right)=2+3\left(\frac{7x}{3}-\frac{17}{6}\right)$

⑯ $7\left(\frac{3x}{7}+\frac{1}{14}\right)+5\left(\frac{4x}{5}+\frac{1}{15}\right)-4\left(\frac{x}{4}-\frac{13}{24}\right)=0$

Ecuaciones de primer grado que no lo parecen

Cada tipo de ecuación tiene su propio método de resolución. Por eso es importante entender que solo se sabe el tipo concreto de cada ecuación cuando se simplifica al máximo. No hay que dejarse engañar por las apariencias.

Aunque hasta el momento solo hemos resuelto ecuaciones de primer grado, ya te habrás dado cuenta de que tendremos que resolver también ecuaciones de segundo grado o más.

Pues bien, el proceso general para resolver una ecuación empieza necesariamente por simplificarla al máximo y cuando ya se sabe de qué tipo es, aplicar el método correspondiente.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $(x+7)(x+8)=x^2+46$

② $(6x+4)^2+(8x-2)^2=(10x+6)(10x-6)$

Resoluciones

① Como vemos un «x^2» podríamos pensar que es una ecuación de segundo grado y aún no sabemos resolverla. ¡Tranquilidad! Empezamos por eliminar los paréntesis, tal como hemos aprendido:

$(x+7)(x+8)=x^2+46 \Rightarrow x^2+8x+7x+56=x^2+46$

Ahora comprendemos que las «x^2» de cada miembro se simplifican, y por tanto la ecuación es de primer grado.

$x^2+8x+7x+56=x^2+46 \Rightarrow 8x+7x=46-56 \Rightarrow 15x=-10 \Rightarrow 3x=-2 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$

Solución: $x=-\dfrac{2}{3}$

② En este ejemplo repasamos los productos notables. Comenzamos por desarrollar todas las expresiones:

$(6x+4)^2+(8x-2)^2=(10x+6)(10x-6) \Rightarrow 36x^2+48x+16+64x^2-32x+4=100x^2-36$

Simplificamos al máximo los dos miembros:

$36x^2+48x+16+64x^2-32x+4=100x^2-36 \Rightarrow 100x^2+16x+20=100x^2-36$

Simplificamos el «$100x^2$» que aparece en cada miembro:

$100x^2+16x+20=100x^2-36 \Rightarrow 16x+20=-36$

Vemos que queda una ecuación de primer grado, y sencilla. Terminamos:

$16x+20=-36 \Rightarrow 16x=-36-20 \Rightarrow 16x=-56 \Rightarrow 2x=-7 \Rightarrow x=\dfrac{-7}{2}$

Solución: $x=-\dfrac{7}{2}$

Comentario

En los dos ejemplos han aparecido monomios de grado 2, pero luego se han simplificado. Esto puede ocurrir en cualquier ecuación e incluso con monomios de mayor grado. Por eso definimos cada tipo de ecuación solo por cómo sea su expresión simplificada.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $(x+1)(x+2)=x^2+17$

② $(3x+5)^2+(4x-3)^2=(5x+4)(5x-4)$

③ $x^2=1+(x-4)(x-5)$

④ $(x+6)(x-5)=(x+7)(x-2)$

⑤ $(x+1)^2-(x-1)^2=0$

⑥ $(4x+1)(x-3)=(2x-3)^2$

⑦ $1-(2x+3)^2=(2+2x)(2-2x)$

⑧ $x^2+(3x-8)^2=(2x+2)(5x+1)$

⑨ $(2x+8)^2=4(x-5)^2$

⑩ $(3x+8)^2+(4x-6)^2=(5x-10)(5x+10)$

⑪ $x^2-(x+8)(x+4)+2=0$

⑫ $(5x+2)^2+(12x-1)^2=(13x+1)(13x-1)$

⑬ $(4x+1)(x+3)=(2x+2)(2x+1)+16$

⑭ $\frac{x^2}{2}+\frac{(x-2)^2}{2}=x^2-2$

⑮ $\frac{(2x+3)(2x-3)}{4}=x^2-\frac{x-4}{4}$

⑯ $\frac{(2x+5)^2}{3}-\frac{2x^2+1}{6}=x^2-1$

⑰ $\frac{(3x+3)^2}{9}-\frac{x-1}{3}=x^2+4$

⑱ $\frac{5x^2+x}{6}-\frac{x^2+x}{2}=\frac{x^2+1}{3}+1$

⑲ $\frac{x^2+2x}{3}+\frac{x^2+3x}{4}=\frac{7x^2+5x}{12}$

⑳ $\frac{7x^2+3x}{4}-\frac{x^2+5x}{6}=x^2+\frac{7x^2-x}{12}$

㉑ $x(x^2+1)=x^3-(x+8)$

㉒ $(x^2+4)(x^2-4)=x(x^3-2)$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $3x+5 = 2x-2$

② $2(3x-4)+1 = x+8$

③ $2x-3+5x = x-1-2x$

④ $2x+11+4x-3 = 3x-7$

⑤ $3(2x+10) = 4(5-x)$

⑥ $7-6(4x-2)+5x = 8x-2(1+3x)$

⑦ $3(5x-3)-2(6x-1) = 5$

⑧ $2(3x-5)+\frac{x-1}{2}=\frac{1}{3}$

⑨ $\frac{x}{2}-1=\frac{3}{10}+\frac{2x}{5}$

⑩ $\frac{x+3}{2}-\frac{3x-1}{4}=5$

⑪ $\frac{x}{4}+3=\frac{3x}{2}-2x$

⑫ $\frac{3x-9}{6}+2x=6-\frac{x-4}{2}$

⑬ $\frac{3x}{2}-\frac{2x-1}{6}=\frac{11}{3}$

⑭ $\frac{1}{2}-\frac{x}{2}=3+\frac{x-4}{4}$

⑮ $-\frac{3x}{4}+2=\frac{5}{2}-x$

⑯ $\frac{3x}{5}-\frac{2x-1}{10}=\frac{5}{4}$

⑰ $\frac{5(x-1)}{4}+\frac{3(2x-1)}{5}=\frac{1}{2}$

⑱ $\frac{3(x-4)}{5}-\frac{2(2x-1)}{3}=-\frac{4}{15}$

⑲ $\frac{3x+2}{5}-\frac{1}{4}=x-\frac{7x}{10}+\frac{3}{5}$

⑳ $(3x-1)^2-9x^2 = 6(x+2)+1$

㉑ $(x+2)^2+(x-3)^2 = (x+4)^2+(x-5)^2$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $2(3x+7)-5(x-4) = 31$

② $\frac{x-1}{2}-x=3$

③ $5(x+1)-3(4x-5) = 0$

④ $\frac{3x-2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{x}{2}$

⑤ $\frac{1}{3}(3x+5)=\frac{1}{2}(x-8)$

⑥ $\frac{2(x+3)}{5}+\frac{1}{10}=x$

⑦ $\frac{5(2x-1)}{14}-\frac{3(4x+1)}{10}=1$

⑧ $5(3x-7)-(x+4) = 13$

⑨ $\frac{x+3}{3}-\frac{2x}{7}=-1$

⑩ $-(2x-4)+8 = 6x-10$

⑪ $\frac{x}{2}-1=\frac{x-2}{2}$

⑫ $(x+2)^2-x = (x+1)(x+2)$

⑬ $(x+2)(x-2) = (x-3)^2-13$

⑭ $2x^2 -1 = (2x+3)(x-5)$

⑮ $\frac{(2x+3)(4x+1)}{2}=4x^2+7x+2$

⑯ $\frac{2(x-3)}{5}+\frac{3(x+1)}{2}=\frac{17}{10}x$

⑰ $1+(3-x)^2 = x^2$

⑱ $7(5x+4) = 5(7x+4)+8$

⑲ $(x+1)^2-(x+2)^2 = -2x$

⑳ $x(x^2-1) = x^3+2x$

㉑ $(x-3)^2+x = x^2-1$

㉒ $(3+x)(3-x)+x^2 = (x+6)^2-x^2$

Resolución de problemas usando una ecuación

En el nivel 1 ya viste las primeras ideas aplicables a la resolución de problemas usando una ecuación. Ahora añadimos explícitamente un paso más, que ya apareció de manera velada, pero que no vimos en detalle. Este es el esquema:

1. Escribe qué significado tendrá la incógnita que uses.
2. Plantea una ecuación.
3. Resuelve la ecuación.
4. Discute las soluciones obtenidas.

El punto 4 es el novedoso. La palabra «discutir» en este contexto significa comprobar si las soluciones obtenidas al resolver la ecuación son realmente solución del problema. Ten en cuenta que el problema es más que la ecuación que planteamos, ya que puede tener más información. La ecuación es una ayuda, pero no lo es todo.

Ejemplo 1 de problema resuelto con una ecuación

Enunciado

Averigua un número entero que sumado con la mitad de su siguiente dé como resultado 205.

Observación

Podemos llamar x al número pedido o a su siguiente, de las dos maneras podremos resolver el problema. En general, es mejor elegir como incógnita el número más pequeño de todos los que aparezcan en el enunciado.

Resolución

Llamamos x al número entero pedido. El siguiente es $x+1$.

Planteamos y resolvemos una ecuación: $x+\frac{x+1}{2}=-205 \Rightarrow 2x+x+1=-410 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = -410-1 \Rightarrow 3x = -411 \Rightarrow x = -137$

Discutimos la solución de la ecuación: efectivamente, −137 es un número entero.

Solución: −137

Observación

Si el enunciado nos hubiera pedido un número natural, el problema no tendría solución, porque −137 no es un número natural.

Ejemplo 2 de problema resuelto con una ecuación

Enunciado

Averigua tres múltiplos de 7 consecutivos sabiendo que la suma de la mitad del menor y la tercera parte de la suma de los dos mayores es 133.

Resolución

Llamamos x al menor de los números pedidos. Los otros dos son $x+7$ y $x+14$.

Planteamos y resolvemos la ecuación: $\frac{x}{2}+\frac{(x+7)+(x+14)}{3}=133 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{2x+21}{3}=133 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x+2(2x+21)=798 \Rightarrow 3x+4x+42=798 \Rightarrow 7x=798-42 \Rightarrow 7x=756 \Rightarrow x=108.$

Discutimos la solución de la ecuación: 108 no es múltiplo de 7.

Solución: el problema no tiene solución.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas utilizando una ecuación.

① Averigua un número natural sabiendo que la diferencia entre su mitad y la tercera parte de su siguiente es 18.

② Averigua dos múltiplos de 7 consecutivos sabiendo que la tercera parte del menor y la mitad del mayor suman 91.

③ Averigua un número sabiendo que si a su mitad le sumas 28 te sale lo mismo que si a su triple le restas 82.

④ Averigua un número sabiendo que si a su tercera parte le añades 590 unidades, obtienes el doble del número.

⑤ Averigua dos múltiplos de 11 consecutivos sabiendo que la mitad del menor y el doble del mayor suman 87.

⑥ Los concursantes A, B y C de un concurso se reparten un premio de 3500 euros. A se lleva la mitad que B y B se lleva la mitad que C. Averigua cuánto se lleva cada uno.

⑦ Neo y Morfeo son dos hermanos que hacen en coche un viaje de 800 kilómetros y se van repartiendo el tiempo conduciendo. Sabiendo que Neo ha conducido 100 kilómetros menos que el doble de lo que ha conducido Morfeo, calcula cuántos kilómetros ha conducido cada uno.

⑧ El mes de abril de 2022 un atleta va a ir a entrenar todos los días. Cada día correrá o nadará. Sabiendo que quiere correr seis días más que nadar, dile cuántos días debe ir a nadar y cuántos a correr.

⑨ Una cuadrilla de pintores tenía que pintar dos paredes, una de doble superficie que la otra. Toda la cuadrilla estuvo pintando en la pared grande durante medio día. Por la tarde la mitad de la cuadrilla pintó en la pared pequeña y la otra mitad en la grande. Al finalizar el día solo les quedó un poco por pintar en la pared pequeña, para lo cual fue necesario que pintara un solo pintor el día siguiente completo. ¿Cuántas personas componían la cuadrilla? Nota: la jornada laboral está compuesta por 4 horas antes del mediodía y 4 horas por la tarde. Todos los pintores rinden el mismo trabajo y de forma uniforme.

⑩ Cien personas participan en un baile. Durante la velada una mujer bailó con siete hombres, otra segunda mujer bailó con ocho hombres, una tercera mujer con nueve y así sucesivamente hasta la última que bailó con todos. ¿Cuántas mujeres había en el baile?

⑪ Me estoy bañando en una playa. Toco el fondo con los pies y, cuando no hay olas, la parte de arriba de mi cabeza sobresale sobre el nivel del mar una altura igual a la mitad de la altura del mar que me cubrirá cuando pase la próxima ola, ola que hará que la altura del mar aumente la mitad. Si mido 1,75 metros, ¿cuál es la altura de la ola?

Resolución de problemas de geometría usando una ecuación

La geometría tiene sus propios medios de resolver problemas, pero en muchas ocasiones es muy útil la ayuda de una ecuación para resolver problemas de geometría.

En los enunciados te vas a encontrar con que parece que falta algún dato; pero recuerda que cuando se plantea un problema se supone que ya sabes de antemano alguna característica del mundo. En el caso de la geometría, ya conoces muchas propiedades de las figuras planas. Naturalmente, esto añade dificultad a la resolución de problemas porque además de pensar en los datos que te dan explícitamente (los que están escritoss) deberás considerar los datos que te dan implícitamente (no están escritos, pero se suponen conocidos).

En el mundo de la ciencia los problemas más difíciles son aquellos en los que precisamente falta algún conocimiento del mundo y hay que investigar para averiguarlo. Los problemas de la técnica muchas veces impulsan el avance de la ciencia.

Ejemplo

Enunciado

Averigua cuánto miden los ángulos de un triángulo sabiendo que el mayor es 30° mayor que el mediano y el mediano es 15° mayor que el pequeño.

Observaciones

- ✱ Podemos llamar x a cualquiera de los ángulos del triángulo, de las tres maneras podremos resolver el problema. En general, es mejor elegir como incógnita el número más pequeño de todos los que aparezcan en el enunciado.
- ✱ Como el problema trata de un triángulo, debemos recordar alguna propiedad del triángulo que nos pueda ayudar. En este caso, debemos recordar que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°.
- ✱ Podemos hacer un dibujo de la figura o no, normalmente es una decisión personal y depende mucho de la complejidad del problema.
- ✱ En muchos problemas ni siquiera escribimos la discusión de las soluciones, porque nos parece muy obvio. Aunque no escribas la discusión, al menos piensa en ella.
- ✱ Obtenido el valor de un ángulo, los otros dos se calculan inmediatamente; como sus cálculos son operaciones muy sencillas, podemos escribirlas o no.

Resolución

Llamamos x a la medida en grados del menor de los ángulos del triángulo. El mediano medirá $x+15$ y el mayor medirá $x+45$.

Planteamos y resolvemos una ecuación:

$x + (x+15) + (x+45) = 180 \Rightarrow x+x+15+x+45 = 180 \Rightarrow x+x+x=180-15-45 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x=120 \Rightarrow x=40$

Solución: los ángulos miden 40°, 55° y 85°.

Comprobación

Si queremos comprobar si tenemos bien este problema debemos realizar las operaciones que propone el enunciado explícitamente y también que los tres valores pueden formar parte de un cuadrado:

85°−55°=30°; 55°−40°=15°; 40°+55°+85°=180°.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas utilizando una ecuación.

① Averigua el valor de las amplitudes de los tres ángulos de un triángulo isósceles sabiendo que el menor es 30° menor que cada uno de los dos mayores.

② Averigua el valor de las amplitudes de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo sabiendo que la diferencia entre el triple del mayor y el doble del menor es 55°.

③ Averigua el valor de las amplitudes de los dos ángulos diferentes de un rombo sabiendo que el mayor es 30° mayor que el menor.

④ Calcula el valor de las amplitudes de los cuatro ángulos de un cuadrilátero sabiendo que si se ordenan de menor a mayor, todos son el doble que el anterior, con la excepción obvia del menor.

⑤ Calcula el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 54 metros y que una de las dimensiones es el doble que la otra.

⑥ Calcula el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 190 metros y que una de las dimensiones es 3 metros mayor que la otra.

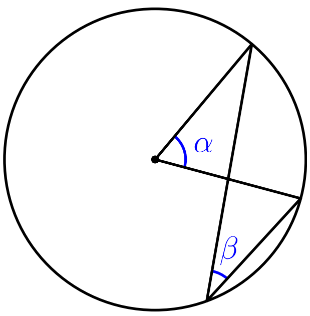
⑦ Calcula el área de un triángulo isósceles sabiendo que su perímetro mide 98 metros y que cada uno de los lados mayores mide 13 metros más que el lado menor.

⑧ Calcula el perímetro de un trapecio isósceles de 40 metros de altura sabiendo que su área mide 2200 metros cuadrados y la diferencia de las bases es 18 metros.

⑨ Un pentágono tiene dos ángulos iguales entre sí y otros tres ángulos iguales entre sí. Sabemos que cada uno de los tres ángulos iguales entre sí es 5° mayor que cualquiera de los dos ángulos iguales entre sí. Averigua cuánto miden los cinco ángulos.

⑩ Dividimos una cuerda que mide 12 metros en dos partes. Con cada parte construimos un cuadrado. La diferencia de las áreas de los dos cuadrados es 6 metros cuadrados. Calcula cuánto mide cada parte de la cuerda.

⑪ Calcula el valor del ángulo α de la figura sabiendo que $2\alpha+3\beta=231°$.



Ecuaciones de segundo grado

- Una ecuación de segundo grado es aquella que, cuando se simplifica al máximo, se expresa como un polinomio de grado 2 con una sola letra indeterminada igualado a cero.
- Ejemplos: las siguientes ecuaciones son de segundo grado y todas ellas están expresadas del modo más sencillo posible:

Ejemplo 1 → $6x^2-7x-5=0$	Ejemplo 2 → $4x^2+9x=0$	Ejemplo 3 → $x^2-25=0$

Número de soluciones

Una ecuación de segundo grado solo puede tener ninguna, una o dos soluciones. No hay ninguna otra posibilidad.

Expresión general

La expresión general de una ecuación de segundo grado en la que la incógnita sea la letra «x» es

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

donde «a», «b» y «c» representan números, llamados **coeficientes** de la ecuación.

- «a» es el coeficiente del monomio de grado 2. Si una ecuación es realmente de segundo grado, siempre se verifica que $a\neq 0$.
- «b» es el coeficiente del monomio de grado 1.
- «c» es el coeficiente del monomio de grado 0 y también se llama **término independiente**.

Ecuaciones completas e incompletas

- La ecuación de segundo grado «$ax^2+bx+c=0$» se dice que es una ecuación de segundo grado completa cuando $a\neq 0$, $b\neq 0$ y $c\neq 0$.
- Ejemplos: las siguientes ecuaciones son todas de segundo grado completas y están expresadas del modo más sencillo posible:

Ejemplo 4 → $x^2-5x-6=0$	Ejemplo 5 → $x^2-x-12=0$	Ejemplo 6 → $2x^2+x-3=0$

- La ecuación de segundo grado «$ax^2+bx+c=0$» se dice que es una ecuación de segundo grado incompleta cuando $b=0$ o $c=0$.
- Ejemplos: las siguientes ecuaciones son todas de segundo grado incompletas y están expresadas del modo más sencillo posible:

Ejemplo 7 → $x^2-5x=0$	Ejemplo 8 → $3x^2+11x=0$	Ejemplo 9 → $x^2+4=0$

Métodos de resolución

Las ecuaciones de segundo grado se resuelven usando tres métodos distintos, según sea el tipo de ecuación.

- Si la ecuación de segundo grado es una ecuación completa, se resuelve aplicando una fórmula.
- Si la ecuación de segundo grado es una ecuación incompleta sin término independiente, se resuelve convirtiéndola en dos ecuaciones de primer grado.
- Si la ecuación de segundo grado es una ecuación incompleta sin monomio de grado 1, se resuelve despejando la incógnita.

Ecuaciones x^2 igual a un número

La diferencia principal entre las ecuaciones de primer grado y las ecuaciones de segundo grado es que en estas aparece un monomio de grado 2, que no aparece en aquellas.

Por tanto, para poder comprender bien cómo resolver ecuaciones de segundo grado hay que detenerse en resolver las más simples de todas, como estas:

Ejemplo 1 → $x^2=9$	Ejemplo 2 → $x^2=0$	Ejemplo 3 → $x^2=-7$	Ejemplo 4 → $x^2=\frac{16}{25}$

Método

Queremos averiguar todos los números que elevados al cuadrado nos dan como resultado el número del segundo miembro. Será imprescindible recordar algunas propiedades de las potencias y de las raíces cuadradas:

* Un número negativo elevado al cuadrado da un número positivo.
* No hay ningún número que elevado al cuadrado dé un número negativo.
* Algunas fracciones positivas tienen como raíz cuadrada otra fracción.

Si el número es positivo

Estudiamos el ejemplo 1 → $x^2=9$

Sabemos que la raíz cuadrada de 9 es un número que elevado al cuadrado da 9, así que $x=\sqrt{9}=3$ es una solución de la ecuación. Pero, por las propiedades de las potencias, también –3 es solución, ya que $(-3)^2=9$. Así pues, hemos encontrado dos soluciones: 3 y –3.

Como en estos casos siempre vamos a encontrar dos soluciones (la raíz cuadrada y su opuesto), es común usar el símbolo «±» para designar las dos a la vez; así: $x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$.

Esta notación es muy cómoda, pero a veces lleva a errores; así pues, en este curso se usará en algunos pasos intermedios pero nunca para dar las soluciones finales, que escribiremos dando las dos soluciones juntas con una llave; así:

$$x^2=9 \Rightarrow x=\begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}$$

Usando lo que hemos visto, estudiamos el ejemplo 4 → $x^2=\frac{16}{25} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\begin{cases} \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{cases}$

Si el número es cero

Estudiamos el ejemplo 2 → $x^2=0$. Como solo hay un número que elevado al cuadrado dé cero, esta ecuación solo tiene una solución, el cero.

$$x^2=0 \Rightarrow x=0$$

Si el número es negativo

Estudiamos el ejemplo 3 → $x^2=-7$. Como no hay ningún número que elevado al cuadrado dé un número negativo, esta ecuación no tiene solución.

$$x^2=-7 \rightarrow \text{sin solución}$$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $x^2=100$

② $x^2=36$

③ $x^2=0$

④ $x^2=-13$

⑤ $x^2=1$

⑥ $x^2=-1$

⑦ $x^2=\frac{9}{16}$

⑧ $x^2=\frac{4}{25}$

⑨ $x^2=-\frac{100}{9}$

⑩ $x^2=121$

⑪ $x^2=\frac{1}{49}$

⑫ $x^2=-\frac{144}{169}$

⑬ $x^2=81$

⑭ $x^2=-12$

⑮ $x^2=4$

⑯ $x^2=\frac{169}{9}$

⑰ $x^2=64$

⑱ $x^2=-64$

Ecuaciones de segundo grado sin monomio de grado 1

- ✱ Son ecuaciones que, cuando se expresan de la manera más sencilla, se escriben «$ax^2+c=0$», donde «x» es la incógnita y «a» y «c» son dos números.
- ✱ Ejemplos: las siguientes ecuaciones son de segundo grado sin monomios de grado 1 y todas ellas están expresadas del modo más sencillo posible:

Ejemplo 1 → $4x^2–9=0$	Ejemplo 2 → $5x^2+7=0$	Ejemplo 3 → $x^2=0$

Número de soluciones

Una ecuación de segundo grado sin monomio de grado 1 solo puede tener ninguna, una o dos soluciones. No hay ninguna otra posibilidad.

Método de resolución

Si una ecuación de segundo grado no tiene monomio de grado 1, la incógnita aparece solo una vez y podemos aplicar la idea general de despejar la incógnita.

Dada la ecuación «$ax^2+c=0$» el orden de cálculo a partir de la incógnita es: primero el cuadrado, luego multiplicar por «a» y luego sumar «c». Por tanto, el orden para despejar será: primero la «c», luego la «a» y por último el cuadrado.

Resolución 1

Comentario. El esquema del orden de cálculo y del orden para despejar:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{x} \arrow[r, "(\ \ )^2"] & \boxed{x^2} \arrow[r, "\times 4"] & \boxed{4x^2} \arrow[r, "-9"] & \boxed{4x^2-9} \arrow[d] \\
\boxed{\pm\sqrt{\frac{9}{4}}} & \boxed{\frac{9}{4}} \arrow[l, "\pm\sqrt{\ }"'] & \boxed{9} \arrow[l, "\div 4"'] & \boxed{0} \arrow[l, "+9"']
\end{tikzcd}$$

Resolución

$$4x^2–9=0 \Rightarrow 4x^2=9 \Rightarrow x^2=\frac{9}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\begin{cases}\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{cases}. \text{ Solución: } x=\begin{cases}\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{cases}$$

Resolución 2

$$5x^2+7=0 \Rightarrow 5x^2=–7 \Rightarrow x^2=-\frac{7}{5} \rightarrow \text{sin solución}$$

Ejemplo 4

Enunciado. Resuelve la ecuación $13x^2=0$.

Comentarios

- ✱ Esta ecuación es del tipo de las que estamos resolviendo, pero un poco particular, porque en ella no hay término independiente, lo que significa que c=0 (igual que en el ejemplo 3).
- ✱ La ecuación no está escrita de la manera más sencilla posible, porque se pueden dividir entre 13 los dos miembros. De hecho, esa operación será la primera de la resolución; y como 0:13=0, parecerá que el 13 desaparece.

Resolución

$13x^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$. Solución: $x=0$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $9x^2-4=0$

② $8x^2+7=0$

③ $17x^2=0$

④ $x^2-16=0$

⑤ $x^2+16=0$

⑥ $100x^2-1=0$

⑦ $23x^2=0$

⑧ $25x^2-81=0$

⑨ $13x^2+17=0$

⑩ $-49x^2+4=0$

⑪ $-13x^2-41=0$

⑫ $-31x^2=0$

⑬ $x^2-121=0$

⑭ $-64x^2+9=0$

⑮ $-43x^2-1=0$

⑯ $121x^2=0$

⑰ $81x^2-144=0$

Ecuaciones de segundo grado sin monomio de grado 0

- ✱ Son ecuaciones que, cuando se expresan de la manera más sencilla, se escriben «$ax^2+bx=0$», donde «x» es la incógnita y «a» y «b» son dos números.
- ✱ Ejemplos: las siguientes ecuaciones son de segundo grado sin monomios de grado 0 y todas ellas están expresadas del modo más sencillo posible:

Ejemplo 1 → $5x^2-7x=0$	Ejemplo 2 → $x^2+2x=0$	Ejemplo 3 → $3x^2+x=0$

Número de soluciones

Una ecuación de segundo grado sin monomio de grado 0 siempre tiene dos soluciones. No hay ninguna otra posibilidad.

Método de resolución

Este tipo de ecuaciones presentan el primer desafío importante que afrontamos en el curso resolviendo ecuaciones. Por un lado la incógnita aparece en más de un sitio; por otro lado, aparece en monomios de distinto grado que nunca podrán ser sumables; esto quiere decir que no nos sirve ninguno de los métodos que conocemos hasta el momento.

El método de resolución es sumamente interesante, porque tiene nuevas ideas que se podrán aplicar en otras ecuaciones. Consiste en dos pasos:

- ✱ Aplicar la propiedad distributiva para convertir la suma «ax^2+bx» en un producto aprovechando que en los dos sumandos aparece el factor «x». Esto se llama «extraer factor común» y lo estudiaremos con detalle en el nivel 3.
- ✱ Como aparecerá un producto igualado a cero, contemplaremos que cualquiera de los dos factores puede ser cero, lo que nos dará dos soluciones.

Resoluciones

① Extraemos factor común «x»: $5x^2-7x=0 \Rightarrow x(5x-7)=0$

Como el producto es cero, puede ser cero cualquiera de los dos factores:

$x(5x-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 5x-7=0 \end{cases}$ (Es decir, cualquiera de las dos podría ser válida.)

Aparecen dos ecuaciones de primer grado, y la primera ya está resuelta, así que solo falta resolver la segunda: $\begin{cases} x=0 \\ 5x-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{7}{5} \end{cases}$. Solución: $x=\begin{cases} 0 \\ \dfrac{7}{5} \end{cases}$

② $x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$. Solución: $x=\begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

③ $3x^2+x=0 \Rightarrow x(3x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$. Solución: $x=\begin{cases} 0 \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Comentarios

- ✱ En estas ecuaciones una de las soluciones siempre es 0.
- ✱ Observa cómo hemos extraído factor común en el ejemplo (3): hemos aprovechado que $x=x\cdot 1$, por eso aparece un 1 dentro del paréntesis.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $7x^2-4x=0$

② $8x^2+3x=0$

③ $x^2-9x=0$

④ $x^2+11x=0$

⑤ $8x^2-x=0$

⑥ $17x^2+x=0$

⑦ $x^2-x=0$

⑧ $-x^2+8x=0$

⑨ $-12x^2+11x=0$

⑩ $15x^2+7x=0$

⑪ $x^2-14x=0$

⑫ $7x^2-x=0$

⑬ $-3x^2+4x=0$

⑭ $x^2+x=0$

⑮ $9x^2-7x=0$

Ecuaciones de segundo grado completas

Son ecuaciones que, cuando se expresan de la manera más sencilla, se escriben «$ax^2+bx+c=0$», donde «x» es la incógnita y «a», «b» y «c» son tres números distintos de cero.

Fórmula para resolver las ecuaciones de segundo grado completas

El método para resolver las ecuaciones de segundo grado completas es lo suficientemente largo como para que merezca la pena aprender de memoria una fórmula que resuma todo el proceso. En el nivel 3 veremos el proceso y la demostración general de la fórmula; en este nivel nos concentraremos en entender cómo aplicar la fórmula. Aquí está (debes aprenderla de memoria):

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Uso de la fórmula

Aunque la fórmula puede parecer intimidante la primera vez que la ves, te acostumbrarás a ella. Basta saber que iremos haciendo las operaciones aplicando la jerarquía de operaciones. Más adelante, incluso podrás hacer pasos mentalmente.

Paso 1. Determinar los valores de los coeficientes; siempre incluyen el signo. Si te parece que no hay coeficiente, recuerda que puede ser 1 o –1.

Paso 2. Sustituir en la fórmula las letras por sus valores.

Paso 3. Hay tres operaciones independientes de las demás que podemos realizar en el mismo paso:

- El opuesto de «b»: $-b$.
- El cuadrado de «b»: b^2.
- El producto de «–4», «a» y «c»: $-4ac$.
- El producto de «2» y «a»: $2a$.

Paso 4. La suma que hay dentro de la raíz cuadrada: b^2-4ac.

Paso 5. La raíz cuadrada: $\sqrt{b^2-4ac}$

Paso 6. Usando el símbolo «±», obtener dos operaciones distintas.

Paso 7. Realizar las sumas en los numeradores de cada operación.

Paso 8. Si es posible, simplificar las fracciones.

Ejemplo

Enunciado: resuelve la ecuación $12x^2+x-1=0$.

Resolución paso a paso

$a=12,\ b=1,\ c=-1$ ← Paso 1

$$\underset{\text{Paso 2}}{x=}\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 12\cdot(-1)}}{2\cdot 12}\underset{\text{Paso 3}}{=}\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{24}\overset{\text{Paso 4}}{=}\frac{-1\pm\sqrt{49}}{24}\underset{\text{Paso 5}}{=}\frac{-1\pm 7}{24}\overset{\text{Paso 6}}{=}\begin{cases}\dfrac{-1+7}{24}\\[2mm]\dfrac{-1-7}{24}\end{cases}\underset{\text{Paso 7}}{=}\begin{cases}\dfrac{6}{24}\\[2mm]\dfrac{-8}{24}\end{cases}\overset{\text{Paso 8}}{=}\begin{cases}\dfrac{1}{4}\\[2mm]-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Solución: $x=\begin{cases}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{3}\end{cases}$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $x^2-3x-28=0$ ② $2x^2-5x+3=0$ ③ $6x^2+7x-5=0$ ④ $x^2-x-6=0$

Método

Usaremos la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado completas:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Resoluciones

① $x^2-3x-28=0 \Rightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-28)}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{9+112}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{121}}{2}=$

$$=\frac{3\pm11}{2}=\begin{cases}\frac{3+11}{2}\\ \frac{3-11}{2}\end{cases}=\begin{cases}\frac{14}{2}\\ \frac{-8}{2}\end{cases}=\begin{cases}7\\ -4\end{cases}.\ \text{Solución: } x=\begin{cases}7\\ -4\end{cases}$$

② $2x^2-5x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{5\pm1}{4}=$

$$=\begin{cases}\frac{5+1}{4}\\ \frac{5-1}{4}\end{cases}=\begin{cases}\frac{6}{4}\\ \frac{4}{4}\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{2}\\ 1\end{cases}.\ \text{Solución: } x=\begin{cases}\frac{3}{2}\\ 1\end{cases}$$

③ $6x^2+7x-5=0 \Rightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot6\cdot(-5)}}{2\cdot6}=\frac{-7\pm\sqrt{49+120}}{12}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{12}=$

$$=\frac{-7\pm13}{12}=\begin{cases}\frac{-7+13}{12}\\ \frac{-7-13}{12}\end{cases}=\begin{cases}\frac{6}{12}\\ \frac{-20}{12}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{3}\end{cases}.\ \text{Solución: } x=\begin{cases}\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{3}\end{cases}$$

④ En este ejemplo vamos a hacer algunos pasos mentalmente. Si te animas tú también a hacer algunos pasos así, recuerda que debes escribir suficiente información como para que los demás puedan seguir tu razonamiento.

$$x^2-x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm5}{2}=\begin{cases}3\\ -2\end{cases}$$

Solución: $x=\begin{cases}3\\ -2\end{cases}$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $x^2+2x-3=0$

② $2x^2+5x+3=0$

③ $3x^2-x-2=0$

④ $x^2+4x-45=0$

⑤ $35x^2-19x+2=0$

⑥ $12x^2+5x-3=0$

⑦ $x^2-6x-27=0$

⑧ $x^2+4x-21=0$

⑨ $3x^2+35x+50=0$

⑩ $5x^2+7x-6=0$

⑪ $x^2-2x-15=0$

⑫ $x^2+2x-15=0$

⑬ $3x^3-8x-3=0$

⑭ $x^2-6x-7=0$

⑮ $2x^2-x-10=0$

Número de soluciones de una ecuación de segundo grado completa

Una ecuación de segundo grado completa solo puede tener ninguna, una o dos soluciones. No hay ninguna otra posibilidad.

Examinamos unos ejemplos para ver cuándo tienen una sola solución y cuándo no tienen ninguna.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $x^2+4x+4=0$ ② $4x^2-12x+9=0$ ③ $x^2+x+2=0$ ④ $2x^2-x+7=0$

Resoluciones

① $x^2+4x+4=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{0}}{2}=\dfrac{-4\pm0}{2}=$

$=\dfrac{-4}{2}=-2$. Solución: $x=-2$

② $4x^2-12x+9=0 \Rightarrow x=\dfrac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot4\cdot9}}{2\cdot4}=\dfrac{12\pm\sqrt{144-144}}{8}=\dfrac{12\pm\sqrt{0}}{8}=$

$=\dfrac{12\pm0}{8}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$. Solución: $x=\dfrac{3}{2}$

③ $x^2+x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}\rightarrow$ sin solución

Solución: la ecuación no tiene solución.

④ $2x^2-x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-8}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{-7}}{4}\rightarrow$ sin solución

Solución: la ecuación no tiene solución.

Estudio

✱ En los ejemplos (1) y (2) vemos que si $b^2-4ac=0$ entonces $-b\pm\sqrt{0}=-b$ y por tanto la ecuación solo tiene una solución.

✱ En los ejemplos (3) y (4) vemos que si b^2-4ac es negativo entonces $\sqrt{b^2-4ac}$ no existe y por tanto la ecuación no tiene ninguna solución.

Discriminante de una ecuación de segundo grado

Llamamos discriminante de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ a la cantidad b^2-4ac porque es la que discrimina (decide) cuántas soluciones tiene la ecuación. Se suele denominar con la letra griega delta mayúscula («Δ»).

$$\boxed{\text{Discriminante de } ax^2+bx+c=0 \rightarrow \Delta=b^2-4ac}$$

✱ Si el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones.
✱ Si el discriminante es cero, la ecuación tiene una sola solución.
✱ Si el discriminante es negativo, la ecuación no tiene ninguna solución.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $x^2-8x+16=0$

② $5x^2-x+1=0$

③ $x^2+5x+7=0$

④ $16x^2-8x+1=0$

⑤ $25x^2+10x+1=0$

⑥ $-3x^2+4x-2=0$

⑦ $25x^2+20x+4=0$

⑧ $134x^2+x+234=0$

⑨ $x^2+24x+144=0$

⑩ $-9x^2+24x-16=0$

⑪ $49x^2-28x+4=0$

⑫ $x^2+10x+26=0$

Enunciados

Dadas las siguientes ecuaciones, se pide para cada una:

(a) Calcular el discriminante (b) Decir cuántas soluciones tiene

⑬ $x^2-x-12=0$

⑭ $4x^2+20x+25=0$

⑮ $x^2-4x+13=0$

⑯ $9x^2-6x+1=0$

⑰ $x^2-2x+17=0$

⑱ $x^2-x-20=0$

⑲ $x^2-6x+10=0$

⑳ $6x^2+7x+2=0$

㉑ $100x^2-60x+9=0$

㉒ $x^2-4x+8=0$

㉓ $x^2-15x+56=0$

㉔ $25x^2-10x+1=0$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $x^2-7x+10=0$

② $x^2-6x+13=0$

③ $16x^2-24x+9=0$

④ $6x^2+x-2=0$

⑤ $x^2-4x-21=0$

⑥ $4x^2-12x+9=0$

⑦ $x^2+22x+121=0$

⑧ $x^2+4x+5=0$

⑨ $2x^2-9x-5=0$

⑩ $2x^2-3x+1=0$

⑪ $x^2-2x+1=0$

⑫ $x^2-2x+2=0$

⑬ $x^2+2x-8=0$

⑭ $x^2-2x-8=0$

⑮ $3x^2-5x-2=0$

⑯ $25x^2-70x+49=0$

⑰ $x^2-4x-5=0$

⑱ $x^2+6x+25=0$

⑲ $x^2-6x+9=0$

⑳ $20x^2+13x-15=0$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $16x^2=0$

② $x^2-16=0$

③ $x^2+16=0$

④ $x^2-16x=0$

⑤ $x^2+16x=0$

⑥ $x^2+16x+64=0$

⑦ $x^2-x+16=0$

⑧ $x^2-10x+16=0$

⑨ $100x^2-20x+1=0$

⑩ $7x^2+5x=0$

⑪ $16x^2-81=0$

⑫ $3x^2+13=0$

⑬ $x^2-3x=0$

⑭ $2x^2-9x=0$

⑮ $36x^2-1=0$

⑯ $49x^2-21x+2=0$

⑰ $72x^2+31x-28=0$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $x^2-10x+21=0$

② $x^2-10x+26=0$

③ $15x^2=0$

④ $5x^2+12=0$

⑤ $5x^2+x=0$

⑥ $5x^2-4x-1=0$

⑦ $151x^2+x+357=0$

⑧ $9x^2-30x+25=0$

⑨ $25x^2-30x+9=0$

⑩ $6x^2-13x+6=0$

⑪ $3x^2-2x=0$

⑫ $2x^2+3=0$

⑬ $x^2-2x-15=0$

⑭ $x^2+2x-15=0$

⑮ $10x^2-101x+10=0$

⑯ $6x^2+17x+7=0$

⑰ $25x^2+40x-16=0$

⑱ $x^2+3x+3=0$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $6x^2-7x+2=0$

② $6x^2-5x+1=0$

③ $3x^2-x-2=0$

④ $3x^2-7x+2=0$

⑤ $18x^2+3x-1=0$

⑥ $10x^2+9x+2=0$

⑦ $3x^2-8x-3=0$

⑧ $20x^2-3x-2=0$

⑨ $4x^2+9x+2=0$

⑩ $12x^2+5x-3=0$

⑪ $6x^2+7x-3=0$

⑫ $5x^2-17x+14=0$

⑬ $x^2+2x-15=0$

⑭ $x^2-3x-10=0$

⑮ $4x^2+9x+2=0$

⑯ $x^2+4x-32=0$

⑰ $2x^2+15x+7=0$

⑱ $x^2-7x+6=0$

Problema preliminar

Te proponemos un problema para que busques por tanteo su solución:

> En un bar todos los bocadillos tienen el mismo precio y todos los refrescos tienen el mismo precio. Un día que tenía más hambre que sed compré dos bocadillos y un refresco y pagué cinco euros. Otro día que tenía más sed que hambre compré un bocadillo y dos refrescos y pagué cuatro euros. Averigua cuánto cuesta cada bocadillo y cuánto cuesta cada refresco.

Si lo piensas un rato seguro que lo sacas. Solución: cada bocadillo cuesta dos euros y cada refresco cuesta un euro.

Traducción algebraica

Llamamos «x» al precio en euros de cada bocadillo.

Llamamos «y» al precio en euros de cada refresco.

Como dos bocadillos y un refresco cuestan cinco euros: $2x+y=5$

Como un bocadillo y dos refrescos cuestan cinco euros: $x+2y=4$

Para escribir que las dos ecuaciones se deben verificar a la vez, las unimos con una llave: $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2y=4 \end{cases}$. A esto lo llamamos «un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas»

Para expresar la solución del sistema también unimos con una llave los valores de las incógnitas: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$. Esto es **una** solución del sistema.

Para comprobar que la solución propuesta es correcta hay que comprobar que se verifican las dos ecuaciones del sistema: $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot 2+1=5 \\ 2+2\cdot 1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=5 \ ✓ \\ 4=4 \ ✓ \end{cases}$

Observa que $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ no es solución del sistema porque verifica la primera ecuación pero no verifica la segunda: $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 2-1=5 \\ 3+2\cdot(-1)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=5 \ ✓ \\ 1=4 \ ✗ \end{cases}$

Observa que $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ no es solución del sistema porque verifica la segunda ecuación pero no verifica la primera: $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 0+2=5 \\ 0+2\cdot 2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=5 \ ✗ \\ 4=4 \ ✓ \end{cases}$

Sistemas para resolver por tanteo

Si pruebas un poco, seguro que encuentras las soluciones de estos sistemas:

① $\begin{cases} 3x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 5x+y=1 \\ 7x+y=1 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 8x+3y=5 \\ 13x+5y=8 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} 7x+117y=35 \\ 2x+159y=10 \end{cases}$

Soluciones

① $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones

En general, un sistema de ecuaciones consiste en un conjunto de dos o más ecuaciones que deben satisfacerse simultáneamente; es decir: hay que encontrar los valores de las incógnitas que verifiquen todas las ecuaciones.

Los sistemas de ecuaciones más sencillos de todos son los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. La palabra «lineales» se usa para decir que las dos ecuaciones son de primer grado. Son los que comenzaremos a estudiar en este nivel.

Hay sistemas de ecuaciones no lineales, hay sistemas de ecuaciones con más de dos ecuaciones y hay sistemas de ecuaciones con más de dos incógnitas.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
$\begin{cases} 4x+3y=11 \\ -3x+5y=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x+y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=8 \\ 2x-5y+3z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y=5 \\ -2x+7y=12 \\ 5x-y=3 \end{cases}$
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	Sistema de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas	Sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas	Sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

✱ Pueden tener una, ninguna o infinitas soluciones. En este nivel solo vamos a tratar con sistemas que tengan una solución.

✱ En este nivel vamos a aprender tres métodos de resolución, aunque hay más.

✱ Los tres métodos de resolución consiguen obtener una ecuación de primer grado con una incógnita a partir de las dos ecuaciones, pero cada uno utiliza una técnica distinta.

✱ Con cualquiera de los tres métodos de resolución se llega a la misma solución y con operaciones muy parecidas.

✱ Tienes que aprender los tres métodos porque más adelante te encontrarás con sistemas de ecuaciones no lineales que solo podrán ser resueltos con uno de los métodos y debes estar preparado.

Los tres métodos de resolución

✱ **Método de reducción.** La idea clave de este método es sumar (o restar) las dos ecuaciones de modo que en la ecuación resultante haya desaparecido una de las dos incógnitas.

✱ **Método de sustitución.** Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones y se sustituye la expresión en la otra ecuación.

✱ **Método de igualación.** Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan las expresiones.

Al principio debes prestar atención para aprender bien las técnicas de cada método, pero cuando te permitan elegir cuál de los métodos usar irás viendo cuál conviene más porque resulta más sencillo. Incluso se pueden mezclar ideas de los tres métodos para resolver de otra manera los sistemas. Como suele ocurrir en matemáticas, si haces transformaciones correctas, no tienes por qué ceñirte a lo que te explican los métodos, hay espacio para que apliques tus propias ideas.

Método de reducción

Paso 1. Si es necesario para dar el siguiente paso correctamente, multiplica o divide de cualquiera de las ecuaciones por los números que quieras.

Paso 2. Suma o resta las dos ecuaciones para obtener una nueva ecuación pero que tenga una sola incógnita.

Paso 3. Resuelve la nueva ecuación y así obtienes el valor de una de las incógnitas.

Paso 4. Para obtener el valor de la otra incógnita, sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones originales el valor de la incógnita que ya conoces y resuelve la ecuación resultante.

Paso 5. Escribe correctamente la solución del sistema.

Ejemplo

Resuelve el siguiente sistema utilizando el método de reducción: $\begin{cases} x+3y=14 \\ 2x+5y=22 \end{cases}$

Valoración preliminar

Podemos eliminar cualquiera de las dos incógnitas; de ambas maneras obtendremos la solución correcta, pero siempre elegimos el método que nos parezca más sencillo.

Para eliminar la incógnita «x» podemos multiplicar la primera ecuación por 2 y luego restar las ecuaciones: $\begin{cases} x+3y=14 \\ 2x+5y=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+6y=28 \\ 2x+5y=22 \end{cases} \Rightarrow y=6$

También podríamos multiplicar la primera ecuación por –2 y luego sumar las ecuaciones: $\begin{cases} x+3y=14 \\ 2x+5y=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-6y=-28 \\ 2x+5y=22 \end{cases} \Rightarrow -y=-6 \Rightarrow y=6$

Sin embargo, para eliminar la incógnita «y» habría que multiplicar la primera ecuación por 5, la segunda por 3 y restar:

$$\begin{cases} x+3y=14 \\ 2x+5y=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+15y=70 \\ 6x+15y=66 \end{cases} \Rightarrow -x=4 \Rightarrow x=-4$$

También podríamos multiplicar una de las dos por el opuesto del número anterior y luego sumar:

$$\begin{cases} x+3y=14 \\ 2x+5y=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x-15y=-70 \\ 6x+15y=66 \end{cases} \Rightarrow x=-4$$

$$\begin{cases} x+3y=14 \\ 2x+5y=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+15y=+70 \\ -6x-15y=-66 \end{cases} \Rightarrow -x=4 \Rightarrow x=-4$$

Una vez hecha la valoración, procederemos a escribir la resolución.

Resolución

Obtenemos el valor de una de las incógnitas: $\begin{cases} x+3y=14 \\ 2x+5y=22 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2x+6y=28 \\ 2x+5y=22 \end{vmatrix} \; y=6$

Obtenemos el valor de la otra: $x+3y=14 \Rightarrow x+3\cdot 6=14 \Rightarrow x+18=14 \Rightarrow x=-4$

También podríamos haber usado la segunda ecuación (pero sería más difícil):

$2x+5y=22 \Rightarrow 2x+5\cdot 6=22 \Rightarrow 2x=22-30=-8 \Rightarrow x=-4$

Solución: $\begin{cases} x=-4 \\ y=6 \end{cases}$

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

① $\begin{cases} 3x-5y=39 \\ -x+4y=-20 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+5y=6 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 7x+4y=-5 \\ 5x-2y=11 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} 6x+7y=9 \\ 10x+9y=7 \end{cases}$

Resoluciones

① El método de reducción es particularmente bueno cuando en una de las ecuaciones aparece una incógnita con coeficiente 1 o –1, porque en ese caso solo hay que multiplicar esa ecuación, no hay que multiplicar la otra.

$$\begin{cases} 3x-5y=39 \\ -x+4y=-20 \end{cases} \left| \begin{matrix} 3x-5y=39 \\ -3x+12y=-60 \end{matrix} \right| 7y=-21 \Rightarrow y=-3$$

$-x+4y=-20 \Rightarrow -x+4\cdot(-3)=-20 \Rightarrow -x-12=-20 \Rightarrow -x=-8 \Rightarrow x=8$

Solución: $\begin{cases} x=8 \\ y=-3 \end{cases}$

② Este es el caso más incómodo para resolver usando el método de reducción, porque hay que multiplicar las dos ecuaciones.

Cuando restamos las dos ecuaciones, podemos restar la segunda menos la primera si vemos que así conseguimos que el coeficiente de la incógnita queda positivo y ahorramos algo de trabajo.

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+5y=6 \end{cases} \left| \begin{matrix} 6x+9y=15 \\ 6x+10y=12 \end{matrix} \right| y=-3$$

$2x+3y=5 \Rightarrow 2x+3\cdot(-3)=5 \Rightarrow 2x-9=5 \Rightarrow 2x=14 \Rightarrow x=7$

Solución: $\begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}$

③ No hay que lanzarse rápidamente a multiplicar usando la primera opción que veamos: en este caso lo más rápido es multiplicar la segunda ecuación por 2.

$$\begin{cases} 7x+4y=-5 \\ 5x-2y=11 \end{cases} \left| \begin{matrix} 7x+4y=-5 \\ 10x-4y=22 \end{matrix} \right| 17x=17 \Rightarrow x=1$$

$7x+4y=-5 \Rightarrow 7\cdot 1+4y=-5 \Rightarrow 4y=-12 \Rightarrow y=-3$

Solución: $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

④ En casos complicados como este viene bien calcular el mínimo común múltiplo de los coeficientes: mcm(6,10)=30

$$\begin{cases} 6x+7y=9 \\ 10x+9y=7 \end{cases} \left| \begin{matrix} 30x+35y=45 \\ 30x+27y=21 \end{matrix} \right| 8y=24 \Rightarrow y=3$$

$6x+7y=9 \Rightarrow 6x+7\cdot 3=9 \Rightarrow 6x=9-21=-12 \Rightarrow x=-2$

Solución: $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción.

1	$\begin{cases} 2x+5y=15 \\ x+3y=8 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x-2y=-11 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$	3	$\begin{cases} 4x+y=-2 \\ 5x-2y=17 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 7x+5y=25 \\ -4x+y=-22 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x+3y=-5 \\ 3x+2y=-10 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 4x+7y=-2 \\ 2x+5y=-4 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 7x+3y=2 \\ 5x+6y=13 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x+y=-1 \\ 4x+7y=-22 \end{cases}$
9	$\begin{cases} -x+7y=35 \\ 3x-2y=-29 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 3x-y=-7 \\ 2x+5y=-16 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 2x+5y=9 \\ -x+7y=-14 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 7x+9y=4 \\ 5x+9y=8 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 10x+3y=1 \\ 15x+7y=-6 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 7x+3y=7 \\ 4x-3y=-29 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 2x+9y=-24 \\ x+5y=-14 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 5x+2y=48 \\ -5x+9y=-59 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 3x+7y=2 \\ 2x+5y=1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 5x-y=-16 \\ 3x+2y=6 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 4x-5y=-32 \\ -4x+7y=40 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 5x+y=-23 \\ 3x-2y=-32 \end{cases}$
21	$\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=-46 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 5x+4y=23 \\ 3x-2y=27 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 4x+3y=-15 \\ -6x+5y=13 \end{cases}$	24	$\begin{cases} -5x+3y=-55 \\ 10x+7y=45 \end{cases}$
25	$\begin{cases} 5x+3y=-11 \\ 7x+5y=-13 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x+6y=3 \\ -x+8y=-17 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 4x-3y=-37 \\ 5x+6y=-17 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 15x-4y=0 \\ 7x+2y=0 \end{cases}$
29	$\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2x+7y=25 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 7x-3y=-58 \\ 5x+2y=0 \end{cases}$	31	$\begin{cases} x+5y=22 \\ -3x+2y=19 \end{cases}$	32	$\begin{cases} 8x-y=15 \\ 2x-y=9 \end{cases}$
33	$\begin{cases} -x+6y=-17 \\ 5x+y=23 \end{cases}$	34	$\begin{cases} 4x-3y=23 \\ 3x+5y=-19 \end{cases}$	35	$\begin{cases} 9x+7y=-30 \\ x-y=-14 \end{cases}$	36	$\begin{cases} 15x-8y=7 \\ 3x+5y=8 \end{cases}$
37	$\begin{cases} 2x+5y=-1 \\ -6x+7y=-19 \end{cases}$	38	$\begin{cases} 5x-2y=-21 \\ -7x+2y=23 \end{cases}$	39	$\begin{cases} -6x+5y=17 \\ -3x+4y=10 \end{cases}$	40	$\begin{cases} x-3y=-31 \\ x+2y=34 \end{cases}$
41	$\begin{cases} 7x+12y=16 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$	42	$\begin{cases} 4x+5y=-7 \\ -x+2y=-8 \end{cases}$	43	$\begin{cases} 6x+y=3 \\ 5x-2y=-23 \end{cases}$	44	$\begin{cases} 9x-4y=26 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$
45	$\begin{cases} 7x+5y=-16 \\ -x+3y=6 \end{cases}$	46	$\begin{cases} -x+2y=-16 \\ 6x+5y=14 \end{cases}$	47	$\begin{cases} 4x-7y=13 \\ 2x-9y=1 \end{cases}$	48	$\begin{cases} -x+8y=1 \\ -2x+9y=-5 \end{cases}$
49	$\begin{cases} 14x+13y=12 \\ 7x+8y=9 \end{cases}$	50	$\begin{cases} 5x-2y=29 \\ 4x-3y=33 \end{cases}$	51	$\begin{cases} 6x+7y=10 \\ 3x+8y=-4 \end{cases}$	52	$\begin{cases} 7x-6y=-27 \\ 5x+6y=-9 \end{cases}$
53	$\begin{cases} x+2y=1 \\ 6x-7y=44 \end{cases}$	54	$\begin{cases} 10x+y=1 \\ 7x-y=16 \end{cases}$	55	$\begin{cases} 5x-y=39 \\ 7x+2y=41 \end{cases}$	56	$\begin{cases} 5x-3y=25 \\ 10x+7y=-15 \end{cases}$
57	$\begin{cases} x-8y=34 \\ 2x-3y=29 \end{cases}$	58	$\begin{cases} 7x+5y=-34 \\ 2x-y=-17 \end{cases}$	59	$\begin{cases} 2x+y=17 \\ 3x+4y=23 \end{cases}$	60	$\begin{cases} 2x+7y=-15 \\ 3x+4y=-3 \end{cases}$
61	$\begin{cases} 7x+10y=13 \\ 11x+15y=19 \end{cases}$	62	$\begin{cases} 26x+7y=2 \\ 13x+5y=7 \end{cases}$	63	$\begin{cases} 5x-13y=38 \\ 4x+13y=7 \end{cases}$	64	$\begin{cases} 7x+2y=9 \\ 5x-2y=-21 \end{cases}$
65	$\begin{cases} -5x+4y=-19 \\ 5x+6y=9 \end{cases}$	66	$\begin{cases} 7x-3y=28 \\ 4x+y=-3 \end{cases}$	67	$\begin{cases} 4x+7y=43 \\ x-3y=-13 \end{cases}$	68	$\begin{cases} 5x+4y=36 \\ 3x+2y=22 \end{cases}$

Método de sustitución

Paso 1. Despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

Paso 2. Sustituye en la otra ecuación la expresión que has obtenido al despejar.

Paso 3. Resuelve la ecuación resultante y calculas el valor de una de las incógnitas.

Paso 4. Para obtener el valor de la otra incógnita, sustituye el valor de la incógnita que ya conoces en la expresión que despejaste en el primer paso.

Paso 5. Escribe correctamente la solución del sistema.

Ejemplo 1

Resuelve el siguiente sistema utilizando el método de sustitución: $\begin{cases} x-5y=22 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$

Valoración preliminar

Podemos despejar cualquiera de las dos incógnitas de cualquiera de las dos ecuaciones; de cualquier manera obtendremos la solución correcta, pero siempre elegimos el método que nos parezca más sencillo.

El método de sustitución resulta muy conveniente cuando alguna de las incógnitas tiene coeficiente 1 o –1; esa será la incógnita que despejaremos. Así no aparecen fracciones en la resolución.

Por tanto, en este caso despejaremos la «x» de la primera ecuación y sustituiremos en la segunda ecuación la expresión obtenida. Escribiremos las dos cosas en el mismo paso, respetando la colocación de las ecuaciones para facilitar la comprensión de quien lea nuestra resolución.

Resolución

Despejamos y sustituimos: $\begin{cases} x-5y=22 \\ 2x+3y=5 \end{cases} \left| \begin{matrix} x=22+5y \\ 2(22+5y)+3y=5 \end{matrix} \right|$

Resolvemos la segunda ecuación:

2(22+5y)+3y=5 ⇒ 44+10y+3y=5 ⇒ 10y+3y=5–44 ⇒ 13y=–39 ⇒ y=–3

Sustituimos el valor obtenido de la «y» en la expresión en la que despejamos la «x»:

x=22+5y=22+5(–3)=22–15=7

Solución: $\begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}$

Ejemplo 2

Resuelve el siguiente sistema utilizando el método de sustitución: $\begin{cases} 3x+5y=31 \\ 4x-y=3 \end{cases}$

Resolución

$\begin{cases} 3x+5y=31 \\ 4x-y=3 \end{cases} \left| \begin{matrix} 3x+5(4x-3)=31 \\ 4x-3=y \end{matrix} \right|$ 3x+20x–15=31 ⇒ 23x=46 ⇒ x=2

y=4x–3=4·2–3=8–3=5. Solución: $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$

Comentario

Cuando el coeficiente de la incógnita es –1 es mejor despejarla en el segundo miembro.

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución:

① $\begin{cases} -9x+5y=53 \\ 4x+3y=13 \end{cases}$ ② $\begin{cases} -2x+7y=41 \\ 9x-5y=-52 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 4x+3y=6 \\ 6x+7y=4 \end{cases}$

Resoluciones

① Solemos elegir para despejar la incógnita que tenga el coeficiente más sencillo; en este caso, despejamos la «y» de la segunda ecuación.

$$\begin{cases} -9x+5y=53 \\ 4x+3y=13 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} -9x+5\cdot\dfrac{13-4x}{3}=53 \\ y=\dfrac{13-4x}{3} \end{array} \right|$$

La ecuación que nos queda por resolver tiene fracciones, pero solamente una, así que basta con multiplicar por su denominador (3) para eliminarlo.

Observa que aparece un paréntesis rodeando el numerador de la fracción.

$-9x+5\cdot\dfrac{13-4x}{3}=53 \Rightarrow -27x+5\cdot(13-4x)=159 \Rightarrow -27x+65-20x=159 \Rightarrow$

$\Rightarrow -27x-20x=159-65 \Rightarrow -47x=94 \Rightarrow x=-2$

$y=\dfrac{13-4x}{3}=\dfrac{13-4(-2)}{3}=\dfrac{13+8}{3}=\dfrac{21}{3}=7$. Solución: $\begin{cases} x=7 \\ y=-2 \end{cases}$

② El coeficiente más sencillo es –2, luego lo lógico es despejar la «x» de la primera ecuación. Hay que recordar que el –2 pasará dividiendo.

$$\begin{cases} -2x+7y=41 \\ 9x-5y=-52 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} x=\dfrac{41-7y}{-2} \\ 9\cdot\dfrac{41-7y}{-2}-5y=-52 \end{array} \right|$$

Ahora tenemos varias posibilidades equivalentes para trabajar con la segunda ecuación: podemos multiplicar por –2 la ecuación completa, podemos convertir el –2 en 2 cambiando el signo de toda la ecuación o podemos llevar el signo menos del –2 al 9; de cualquiera de las maneras, llegaremos a lo mismo. Vamos a optar por la segunda opción.

$9\cdot\dfrac{41-7y}{-2}-5y=-52 \Rightarrow 9\cdot\dfrac{41-7y}{2}+5y=52 \Rightarrow 9(41-7y)+10y=104 \Rightarrow$

$369-63y+10y=104 \Rightarrow -63y+10y=104-369 \Rightarrow -53y=-265 \Rightarrow y=5$

$x=\dfrac{41-7y}{-2}=\dfrac{41-7\cdot 5}{-2}=\dfrac{41-35}{-2}=\dfrac{6}{-2}=-3$. Solución: $\begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$

③ Despejando la «x» de la primera ecuación aprovecharemos una simplificación.

$$\begin{cases} 4x+3y=6 \\ 6x+7y=4 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} x=\dfrac{6-3y}{4} \\ 6\cdot\dfrac{6-3y}{4}+7y=4 \end{array} \right| \quad 3\cdot\dfrac{6-3y}{2}+7y=4 \Rightarrow 18-9y+14y=8 \Rightarrow 5y=-10 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y=-2$; $x=\dfrac{6-3y}{4}=\dfrac{6-3(-2)}{4}=3$. Solución: $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución.

1	$\begin{cases} x+3y=32 \\ 3x+5y=68 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 5x+2y=-5 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$	3	$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 5x+3y=-1 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 3x-5y=17 \\ x-2y=6 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ -x+7y=-23 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 6x-y=26 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$	7	$\begin{cases} -x+7y=-50 \\ 3x-5y=38 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 3x-5y=-37 \\ 8x-y=-37 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x+7y=-40 \\ 3x+5y=-27 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 4x+3y=2 \\ 5x+6y=-2 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 2x+5y=18 \\ 4x+7y=24 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 3x-5y=-20 \\ 4x-3y=-1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x+3y=-3 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 3x+7y=35 \\ x+5y=33 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 2x-5y=-9 \\ 7x+9y=-5 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 5x+22y=8 \\ 9x+33y=21 \end{cases}$
17	$\begin{cases} x-2y=8 \\ 3x-4y=18 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x-y=8 \\ 3x+4y=23 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 3x+5y=12 \\ 5x+2y=39 \end{cases}$	20	$\begin{cases} -x+7y=65 \\ 3x+4y=30 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 2x-7y=23 \\ 4x-9y=41 \end{cases}$	22	$\begin{cases} -5x+6y=35 \\ 3x+y=2 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 4x+5y=-3 \\ 2x-y=23 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 7x+2y=20 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$
25	$\begin{cases} -2x+5y=22 \\ -3x+7y=31 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x+y=17 \\ 5x+2y=25 \end{cases}$	27	$\begin{cases} x-2y=-9 \\ 2x+y=37 \end{cases}$	28	$\begin{cases} -4x+3y=6 \\ x-y=-1 \end{cases}$
29	$\begin{cases} x-2y=-5 \\ 3x-4y=-3 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 2x+y=1 \end{cases}$	31	$\begin{cases} 13x-5y=23 \\ 26x-7y=40 \end{cases}$	32	$\begin{cases} 4x+3y=3 \\ -x+7y=38 \end{cases}$
33	$\begin{cases} 7x+y=4 \\ 9x-2y=15 \end{cases}$	34	$\begin{cases} 3x+4y=7 \\ 4x+3y=13 \end{cases}$	35	$\begin{cases} x-9y=12 \\ 3x-11y=20 \end{cases}$	36	$\begin{cases} 9x+10y=15 \\ -7x+5y=-50 \end{cases}$
37	$\begin{cases} x+3y=9 \\ 3x+11y=13 \end{cases}$	38	$\begin{cases} 7x-2y=48 \\ 5x-y=30 \end{cases}$	39	$\begin{cases} 14x+5y=22 \\ 21x+9y=27 \end{cases}$	40	$\begin{cases} 9x-y=16 \\ 11x+3y=-10 \end{cases}$
41	$\begin{cases} 3x+7y=19 \\ -x+9y=5 \end{cases}$	42	$\begin{cases} x-4y=3 \\ 2x-5y=12 \end{cases}$	43	$\begin{cases} 3x+7y=32 \\ 5x+14y=65 \end{cases}$	44	$\begin{cases} 8x+y=25 \\ 7x+2y=23 \end{cases}$
45	$\begin{cases} 7x-3y=28 \\ 4x-y=11 \end{cases}$	46	$\begin{cases} 5x+3y=9 \\ 7x-2y=25 \end{cases}$	47	$\begin{cases} 6x+7y=39 \\ 8x+11y=47 \end{cases}$	48	$\begin{cases} 11x+8y=-18 \\ 13x+5y=1 \end{cases}$
49	$\begin{cases} x-5y=-3 \\ 4x-7y=14 \end{cases}$	50	$\begin{cases} 3x+7y=5 \\ 9x+13y=-1 \end{cases}$	51	$\begin{cases} -3x+y=0 \\ 4x+5y=19 \end{cases}$	52	$\begin{cases} 2x+7y=9 \\ -x+9y=-17 \end{cases}$
53	$\begin{cases} 35x-9y=17 \\ 40x-3y=34 \end{cases}$	54	$\begin{cases} x+2y=-9 \\ 2x+y=15 \end{cases}$	55	$\begin{cases} 3x-5y=4 \\ 4x-7y=5 \end{cases}$	56	$\begin{cases} 2x-7y=24 \\ x-3y=10 \end{cases}$
57	$\begin{cases} 5x+y=62 \\ 3x+7y=50 \end{cases}$	58	$\begin{cases} x+7y=-10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$	59	$\begin{cases} 3x+4y=23 \\ 5x+8y=37 \end{cases}$	60	$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 7x-4y=37 \end{cases}$
61	$\begin{cases} x+11y=-4 \\ 2x+13y=1 \end{cases}$	62	$\begin{cases} 5x-y=12 \\ 7x-3y=28 \end{cases}$	63	$\begin{cases} 2x+5y=21 \\ 3x+7y=30 \end{cases}$	64	$\begin{cases} 3x+2y=29 \\ 2x+y=23 \end{cases}$
65	$\begin{cases} 3x-5y=27 \\ 8x-y=-2 \end{cases}$	66	$\begin{cases} x-4y=12 \\ 7x-11y=67 \end{cases}$	67	$\begin{cases} 5x+7y=-65 \\ 4x-3y=34 \end{cases}$	68	$\begin{cases} 2x+9y=-4 \\ -3x+y=-23 \end{cases}$

Método de igualación

Paso 1. Despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.

Paso 2. Iguala las dos expresiones que has obtenido al despejar.

Paso 3. Resuelve la ecuación resultante y calculas el valor de una de las incógitas.

Paso 4. Para obtener el valor de la otra incógnita, sustituye el valor de la incógnita que ya conoces en una de las expresiones que despejaste en el primer paso.

Paso 5. Escribe correctamente la solución del sistema.

Comentarios

- ✱ Podemos despejar cualquiera de las dos incógnitas; de cualquier manera obtendremos la solución correcta, pero siempre elegimos el método que nos parezca más sencillo.
- ✱ El método de igualación presenta las operaciones de una manera muy fácil de seguir cuando ninguna de las incógnitas tiene coeficiente 1 o –1. Además, permite ver algunas simplificaciones con claridad.

Ejemplo 1

Resuelve el siguiente sistema utilizando el método de igualación: $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+5y=6 \end{cases}$

Resolución

Despejamos e igualamos: $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+5y=6 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x=\dfrac{5-3y}{2} \\ x=\dfrac{6-5y}{3} \end{array} \right| \dfrac{5-3y}{2}=\dfrac{6-5y}{3}$

Para resolver esta segunda ecuación lo más sencillo es verla como una proporción y utilizar que el producto de extremos es igual que el producto de medios:

$3(5–3y)=2(6–5y) \Rightarrow 15–9y=12–10y \Rightarrow –9y+10y=12–15 \Rightarrow y=–3$

Sustituimos el valor obtenido de la «y» en la expresión más sencilla en la que despejamos la «x» (la otra también valdría):

$x=\dfrac{5-3y}{2}=\dfrac{5-3(-3)}{2}=\dfrac{5+9}{2}=\dfrac{14}{2}=7$. Solución: $\begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}$

Ejemplo 2

Resuelve el siguiente sistema utilizando el método de igualación: $\begin{cases} 15x+7y=-5 \\ 25x+9y=5 \end{cases}$

Resolución

$\begin{cases} 15x+7y=-5 \\ 25x+9y=5 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x=\dfrac{-5-7y}{15} \\ x=\dfrac{5-9y}{25} \end{array} \right| \dfrac{-5-7y}{15}=\dfrac{5-9y}{25} \Rightarrow \textit{(simplificación)} \Rightarrow \dfrac{-5-7y}{3}=\dfrac{5-9y}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(–5–7y)=3(5–9y) \Rightarrow –25–35y=15–27y \Rightarrow –35y+27y=15+25 \Rightarrow –8y=40 \Rightarrow y=–5$

$x=\dfrac{-5-7y}{15}=\dfrac{-5-7(-5)}{15}=\dfrac{-5+35}{15}=\dfrac{30}{15}=2$. Solución: $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación:

① $\begin{cases} -2x+5y=16 \\ 3x-7y=-23 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 5x+7y=1 \\ 3x+14y=30 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 3x-y=6 \\ 4x+y=43 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} 13x+7y=12 \\ 13x+11y=4 \end{cases}$

Resoluciones

① Cuando despejamos una incógnita con coeficiente negativo, el coeficiente pasa dividiendo, conservando su signo. Ya lo sabes, pero olvidarse del signo en estas situaciones es un error común.

$$\begin{cases} -2x+5y=16 \\ 3x-7y=-23 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x=\dfrac{16-5y}{-2} \\ x=\dfrac{-23+7y}{3} \end{array} \right| \dfrac{16-5y}{-2}=\dfrac{-23+7y}{3} \Rightarrow 3(16-5y)=-2(-23+7y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow 48-15y=46-14y \Rightarrow -15y+14y=46-48 \Rightarrow -y=-2 \Rightarrow y=2$

$x=\dfrac{16-5y}{-2}=\dfrac{16-5\cdot 2}{-2}=\dfrac{16-10}{-2}=\dfrac{6}{-2}=-3$. Solución: $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

② Aunque los coeficientes de «x» son más sencillos que los de «y», si despejamos «y» podremos simplificar mucho más.

$$\begin{cases} 5x+7y=1 \\ 3x+14y=30 \end{cases} \left| \begin{array}{l} y=\dfrac{1-5x}{7} \\ y=\dfrac{30-3x}{14} \end{array} \right| \dfrac{1-5x}{7}=\dfrac{30-3x}{14} \Rightarrow 1-5x=\dfrac{30-3x}{2} \Rightarrow$$

$2(1-5x)=30-3x \Rightarrow 2-10x=30-3x \Rightarrow -10x+3x=30-2 \Rightarrow -7x=28 \Rightarrow x=-4$

$y=\dfrac{1-5x}{7}=\dfrac{1-5(-4)}{7}=\dfrac{1+20}{7}=\dfrac{21}{7}=3$. Solución: $\begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases}$

③ Este sistema se puede resolver con mucha facilidad mediante el método de reducción, casi se puede hacer mentalmente. Pero si nos obligan a usar el método de igualación, también será sencillo.

$$\begin{cases} 3x-y=6 \\ 4x+y=43 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 3x-6=y \\ y=43-4x \end{array} \right| 3x-6=43-4x \Rightarrow 3x+4x=43+6 \Rightarrow 7x=49 \Rightarrow x=7$$

$y=3x-6=3\cdot 7-6=21-6=15$. Solución: $\begin{cases} x=7 \\ y=15 \end{cases}$

④ Este sistema es similar al anterior, aunque hay que buscar la simplificación.

$$\begin{cases} 13x+7y=12 \\ 13x+11y=4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x=\dfrac{12-7y}{13} \\ x=\dfrac{4-11y}{13} \end{array} \right| \dfrac{12-7y}{13}=\dfrac{4-11y}{13} \Rightarrow 12-7y=4-11y \Rightarrow 4y=-8 \Rightarrow y=-2$$

$x=\dfrac{4-11y}{13}=\dfrac{4-11(-2)}{13}=\dfrac{4+22}{13}=\dfrac{26}{13}=2$. Solución: $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación.

1 $\begin{cases}2x-5y=3\\3x-7y=5\end{cases}$	2 $\begin{cases}11x+2y=3\\7x+3y=-5\end{cases}$	3 $\begin{cases}3x-2y=12\\4x+3y=-1\end{cases}$	4 $\begin{cases}3x+4y=5\\9x+5y=22\end{cases}$
5 $\begin{cases}5x+4y=10\\-7x+8y=54\end{cases}$	6 $\begin{cases}2x+3y=43\\3x+2y=47\end{cases}$	7 $\begin{cases}5x-4y=37\\-4x+5y=-26\end{cases}$	8 $\begin{cases}-2x+7y=-1\\-3x+11y=80\end{cases}$
9 $\begin{cases}11x-3y=37\\11x+5y=-3\end{cases}$	10 $\begin{cases}6x+5y=22\\5x+6y=22\end{cases}$	11 $\begin{cases}5x+3y=-3\\7x+18y=51\end{cases}$	12 $\begin{cases}2x+9y=5\\5x+11y=24\end{cases}$
13 $\begin{cases}7x-2y=24\\5x-3y=25\end{cases}$	14 $\begin{cases}x+9y=4\\x+13y=0\end{cases}$	15 $\begin{cases}7x+2y=5\\6x+5y=24\end{cases}$	16 $\begin{cases}-3x+5y=31\\2x+7y=31\end{cases}$
17 $\begin{cases}15x-7y=9\\25x-11y=17\end{cases}$	18 $\begin{cases}4x+5y=19\\7x+9y=32\end{cases}$	19 $\begin{cases}5x-3y=18\\7x+11y=10\end{cases}$	20 $\begin{cases}-15x+4y=65\\5x+8y=25\end{cases}$
21 $\begin{cases}4x-7y=54\\-7x+5y=-80\end{cases}$	22 $\begin{cases}11x+7y=27\\13x+15y=5\end{cases}$	23 $\begin{cases}14x+15y=23\\7x+5y=24\end{cases}$	24 $\begin{cases}3x-8y=-7\\4x-7y=-2\end{cases}$
25 $\begin{cases}7x+2y=18\\8x+3y=17\end{cases}$	26 $\begin{cases}10x+9y=-33\\5x-4y=43\end{cases}$	27 $\begin{cases}-4x+3y=52\\7x+5y=-9\end{cases}$	28 $\begin{cases}11x+7y=58\\22x+5y=98\end{cases}$
29 $\begin{cases}7x-4y=-23\\2x-5y=-22\end{cases}$	30 $\begin{cases}5x+7y=-1\\7x+5y=13\end{cases}$	31 $\begin{cases}4x-y=67\\5x+y=68\end{cases}$	32 $\begin{cases}7x+2y=50\\6x+11y=15\end{cases}$
33 $\begin{cases}-3x+2y=-33\\2x+3y=-4\end{cases}$	34 $\begin{cases}3x+10y=8\\9x+5y=49\end{cases}$	35 $\begin{cases}3x+4y=16\\7x-3y=25\end{cases}$	36 $\begin{cases}2x-5y=12\\3x-7y=17\end{cases}$
37 $\begin{cases}12x+11y=15\\6x+7y=3\end{cases}$	38 $\begin{cases}4x+7y=-18\\-6x+5y=-4\end{cases}$	39 $\begin{cases}2x+3y=32\\5x+4y=59\end{cases}$	40 $\begin{cases}-x+2y=9\\3x+7y=-1\end{cases}$
41 $\begin{cases}6x+25y=81\\12x+5y=27\end{cases}$	42 $\begin{cases}2x+3y=4\\5x-4y=33\end{cases}$	43 $\begin{cases}5x+4y=19\\-7x+8y=55\end{cases}$	44 $\begin{cases}9x+7y=80\\6x+5y=55\end{cases}$
45 $\begin{cases}11x+4y=32\\7x-3y=37\end{cases}$	46 $\begin{cases}13x+6y=14\\17x+12y=10\end{cases}$	47 $\begin{cases}5x-2y=3\\7x-3y=5\end{cases}$	48 $\begin{cases}2x+3y=10\\3x+2y=-5\end{cases}$
49 $\begin{cases}5x-3y=11\\7x-11y=29\end{cases}$	50 $\begin{cases}12x-3y=48\\18x-5y=76\end{cases}$	51 $\begin{cases}-15x+8y=61\\15x+7y=-31\end{cases}$	52 $\begin{cases}2x+7y=25\\3x-7y=20\end{cases}$
53 $\begin{cases}13x+4y=7\\39x+16y=41\end{cases}$	54 $\begin{cases}5x-3y=23\\2x-9y=17\end{cases}$	55 $\begin{cases}2x+11y=1\\2x+13y=-1\end{cases}$	56 $\begin{cases}3x-7y=51\\5x-2y=56\end{cases}$
57 $\begin{cases}4x+15y=17\\8x+5y=59\end{cases}$	58 $\begin{cases}-7x+5y=-3\\5x-7y=-15\end{cases}$	59 $\begin{cases}-2x+7y=-49\\7x-2y=59\end{cases}$	60 $\begin{cases}5x+3y=21\\2x+y=9\end{cases}$
61 $\begin{cases}4x+21y=9\\12x+7y=-29\end{cases}$	62 $\begin{cases}2x+11y=-4\\3x+13y=1\end{cases}$	63 $\begin{cases}8x-5y=47\\7x+10y=-2\end{cases}$	64 $\begin{cases}5x-2y=9\\11x-3y=17\end{cases}$
65 $\begin{cases}3x-2y=16\\4x-7y=17\end{cases}$	66 $\begin{cases}5x-4y=30\\8x+3y=1\end{cases}$	67 $\begin{cases}2x+3y=16\\7x+5y=67\end{cases}$	68 $\begin{cases}7x+4y=-19\\11x+6y=-31\end{cases}$

Elección del método de resolución

Aunque todos los métodos llevan a la correcta solución cuando se usan bien, en general se piensa que hay métodos más sencillos que otros en algunos sistemas en particular:

* Si una incógnita tiene coeficientes iguales u opuestos en las dos ecuaciones, el método de reducción es muy apropiado.
  - Como caso particular, si una incógnita tiene tiene coeficientes iguales y la otra los tiene opuestos, se puede utilizar la llamada reducción doble, que consiste en sumar y restar las ecuaciones en el mismo paso y así calcular las dos incógnitas simultáneamente.
* Si una incógnita tiene coeficiente 1 o –1 en una ecuación, el método de sustitución es muy bueno.
* Cuando resultan incómodos tanto el método de reducción como el de sustitución, entonces facilita las cosas el método de igualación.

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas:

① $\begin{cases} 2x+3y=26 \\ -2x+4y=2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=11 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x+3y=9 \\ 5x-2y=11 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} 2x-5y=17 \\ 3x-4y=22 \end{cases}$

Resoluciones

① Usamos el método de reducción.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=26 \\ -2x+4y=2 \end{array}\right| \quad 7y=28 \Rightarrow y=4;\ 2x+3y=26 \Rightarrow 2x+3\cdot 4=26 \Rightarrow x=7. \text{ Solución: } \begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases}$$

② Usamos el método de reducción doble.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=11 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} 2x=12 \\ 2y=-10 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=6 \\ y=-5 \end{array}\right. . \text{ Solución: } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

③ Usamos el método de sustitución.

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y=9 \\ 5x-2y=11 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=9-3y \\ 5(9-3y)-2y=11 \end{array}\right| \quad 45-15y-2y=11 \Rightarrow -17y=-34 \Rightarrow y=2$$

$$x=9-3y=9-3\cdot 2=3. \text{ Solución: } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

④ Usamos el método de igualación.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=17 \\ 3x-4y=22 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x=\frac{17+5y}{2} \\ x=\frac{22+4y}{3} \end{array}\right| \quad \frac{17+5y}{2}=\frac{22+4y}{3} \Rightarrow 3(17+5y)=2(22+4y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 51+15y=44+8y \Rightarrow 15y-8y=44-51 \Rightarrow 7y=-7 \Rightarrow y=-1$$

$$x=\frac{17+5y}{2}=\frac{17+5(-1)}{2}=\frac{17-5}{2}=\frac{12}{2}=6. \text{ Solución: } \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \end{cases}$$

Obtención directa de la solución

Si un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene una única solución, esta se calcula con las mismas operaciones sea cual sea el método utilizado. Elegimos uno u otro método solamente para facilitarnos el desarrollo e intentar minimizar errores.

Pero realmente existe una manera de calcular la solución sin más que hacer las operaciones. La presentamos aquí no para que la aprendas de memoria y la utilices, sino para que veas que la solución solo depende de los seis números que aparecen en el sistema. En el nivel 6 del curso verás una manera fácil de recordar la fórmula.

$$\boxed{\begin{cases} \text{◰}\,x+\text{◳}\,y=\triangle \\ \text{◱}\,x+\text{◲}\,y=\triangledown \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\triangle\cdot\text{◲}-\text{◳}\cdot\triangledown}{\text{◰}\cdot\text{◲}-\text{◳}\cdot\text{◱}} \\[2ex] y=\dfrac{\text{◰}\cdot\triangledown-\triangle\cdot\text{◱}}{\text{◰}\cdot\text{◲}-\text{◳}\cdot\text{◱}} \end{cases}}$$

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas:

① $\begin{cases} 2x+5y=87 \\ 7x+9y=194 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 3x+4y=19 \\ 5x-3y=-36 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 4x+5y=-17 \\ -3x+7y=-41 \end{cases}$

Resoluciones

① $$\begin{cases} 2x+5y=87 \\ 7x+9y=194 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{87\cdot 9-5\cdot 194}{2\cdot 9-5\cdot 7} \\[2ex] y=\dfrac{2\cdot 194-87\cdot 7}{2\cdot 9-5\cdot 7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{783-970}{18-35} \\[2ex] y=\dfrac{388-609}{18-35} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-187}{-17} \\[2ex] y=\dfrac{-221}{-17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=13 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x=11 \\ y=13 \end{cases}$

② $$\begin{cases} 3x+4y=19 \\ 5x-3y=-36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{19\cdot(-3)-4\cdot(-36)}{3\cdot(-3)-4\cdot 5} \\[2ex] y=\dfrac{3\cdot(-36)-19\cdot 5}{3\cdot(-3)-4\cdot 5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-57+144}{-9-20} \\[2ex] y=\dfrac{-108-95}{-9-20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{87}{-29} \\[2ex] y=\dfrac{-203}{-29} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=7 \end{cases}$. Solución: $\begin{cases} x=-3 \\ y=7 \end{cases}$

③ $$\begin{cases} 4x+5y=-17 \\ -3x+7y=-41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{(-17)\cdot 7-5\cdot(-41)}{4\cdot 7-5\cdot(-3)} \\[2ex] y=\dfrac{4\cdot(-41)-(-17)\cdot(-3)}{4\cdot 7-5\cdot(-3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-119+205}{28+15} \\[2ex] y=\dfrac{-164-51}{28+15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{86}{43} \\[2ex] y=\dfrac{-215}{43} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$. Solución: $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas.

(1) $\begin{cases} 2x-7y=37 \\ -2x+5y=-31 \end{cases}$	(2) $\begin{cases} 4x+5y=-14 \\ -3x+y=-18 \end{cases}$	(3) $\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=16 \end{cases}$	(4) $\begin{cases} 2x-5y=11 \\ 3x+7y=2 \end{cases}$
(5) $\begin{cases} 4x-7y=-1 \\ 4x+7y=41 \end{cases}$	(6) $\begin{cases} 5x-y=-44 \\ 7x+4y=-13 \end{cases}$	(7) $\begin{cases} 3x-7y=29 \\ 4x+7y=6 \end{cases}$	(8) $\begin{cases} -x+4y=-18 \\ x+4y=2 \end{cases}$
(9) $\begin{cases} 8x-7y=16 \\ 4x-5y=-4 \end{cases}$	(10) $\begin{cases} -2x+3y=9 \\ x+4y=1 \end{cases}$	(11) $\begin{cases} 7x+2y=41 \\ -x+5y=10 \end{cases}$	(12) $\begin{cases} 2x-3y=23 \\ 5x+6y=-10 \end{cases}$
(13) $\begin{cases} -x+7y=31 \\ 3x+2y=-24 \end{cases}$	(14) $\begin{cases} 4x+5y=19 \\ -2x+3y=-15 \end{cases}$	(15) $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 7x+5y=62 \end{cases}$	(16) $\begin{cases} 7x-6y=51 \\ 9x+y=22 \end{cases}$
(17) $\begin{cases} 3x+2y=14 \\ -3x+2y=-10 \end{cases}$	(18) $\begin{cases} x+4y=-25 \\ 5x-8y=71 \end{cases}$	(19) $\begin{cases} 4x+y=26 \\ -2x+3y=-6 \end{cases}$	(20) $\begin{cases} 5x+2y=5 \\ -x+3y=-18 \end{cases}$
(21) $\begin{cases} 4x+7y=-2 \\ 6x+5y=-8 \end{cases}$	(22) $\begin{cases} -2x+13y=3 \\ -6x+11y=37 \end{cases}$	(23) $\begin{cases} x-6y=-11 \\ 5x-7y=14 \end{cases}$	(24) $\begin{cases} -3x+8y=12 \\ -5x+7y=1 \end{cases}$
(25) $\begin{cases} 5x+4y=43 \\ -2x-5y=-24 \end{cases}$	(26) $\begin{cases} x+9y=-15 \\ 3x+7y=15 \end{cases}$	(27) $\begin{cases} -x+5y=-92 \\ x+5y=-18 \end{cases}$	(28) $\begin{cases} 7x+2y=3 \\ 5x+3y=-1 \end{cases}$
(29) $\begin{cases} -3x+y=-33 \\ 4x+7y=19 \end{cases}$	(30) $\begin{cases} 5x-3y=37 \\ x+9y=-31 \end{cases}$	(31) $\begin{cases} 4x+5y=38 \\ -x+3y=-1 \end{cases}$	(32) $\begin{cases} 3x-y=-22 \\ 6x+7y=19 \end{cases}$
(33) $\begin{cases} 11x-4y=47 \\ 13x-6y=67 \end{cases}$	(34) $\begin{cases} 3x+2y=17 \\ 7x+4y=41 \end{cases}$	(35) $\begin{cases} x+7y=-8 \\ 2x+9y=-1 \end{cases}$	(36) $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=100 \end{cases}$
(37) $\begin{cases} -3x+2y=8 \\ 6x+5y=-7 \end{cases}$	(38) $\begin{cases} 5x+y=17 \\ 8x-9y=6 \end{cases}$	(39) $\begin{cases} x-7y=50 \\ 4x-3y=25 \end{cases}$	(40) $\begin{cases} 5x-9y=29 \\ 10x-7y=47 \end{cases}$
(41) $\begin{cases} 7x+3y=47 \\ 8x-5y=20 \end{cases}$	(42) $\begin{cases} -2x+y=-7 \\ 5x+7y=8 \end{cases}$	(43) $\begin{cases} 3x-7y=29 \\ x-5y=23 \end{cases}$	(44) $\begin{cases} 4x-5y=44 \\ -2x+7y=-58 \end{cases}$
(45) $\begin{cases} 2x+y=31 \\ -2x+y=-25 \end{cases}$	(46) $\begin{cases} 9x-7y=-44 \\ 7x-5y=-32 \end{cases}$	(47) $\begin{cases} x+8y=-6 \\ 2x+5y=10 \end{cases}$	(48) $\begin{cases} -3x+8y=-17 \\ 6x+11y=7 \end{cases}$
(49) $\begin{cases} 5x-4y=42 \\ x-7y=-4 \end{cases}$	(50) $\begin{cases} 15x+7y=16 \\ 10x+11y=-2 \end{cases}$	(51) $\begin{cases} 9x+y=26 \\ 7x+3y=18 \end{cases}$	(52) $\begin{cases} 4x+7y=27 \\ 2x-3y=7 \end{cases}$
(53) $\begin{cases} 7x+9y=46 \\ -7x+9y=-10 \end{cases}$	(54) $\begin{cases} x+6y=-1 \\ 3x-2y=17 \end{cases}$	(55) $\begin{cases} 5x-3y=11 \\ 7x-y=9 \end{cases}$	(56) $\begin{cases} 2x+5y=7 \\ -x+3y=-9 \end{cases}$
(57) $\begin{cases} 7x-3y=-2 \\ 3x-4y=-9 \end{cases}$	(58) $\begin{cases} 3x+y=19 \\ -4x+3y=-34 \end{cases}$	(59) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=19 \end{cases}$	(60) $\begin{cases} x+8y=42 \\ 3x+5y=31 \end{cases}$
(61) $\begin{cases} 8x+7y=29 \\ 4x-3y=47 \end{cases}$	(62) $\begin{cases} -2x+y=10 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$	(63) $\begin{cases} 7x+2y=16 \\ -7x+6y=-8 \end{cases}$	(64) $\begin{cases} 2x-9y=31 \\ x-7y=18 \end{cases}$
(65) $\begin{cases} 4x+5y=59 \\ 4x-5y=-11 \end{cases}$	(66) $\begin{cases} x+7y=18 \\ 2x-3y=2 \end{cases}$	(67) $\begin{cases} 14x+5y=12 \\ 7x+10y=66 \end{cases}$	(68) $\begin{cases} -x+7y=11 \\ 3x-2y=24 \end{cases}$

Soluciones con fracciones

Algunos de los ejercicios que te pueden suponer más dificultad en este nivel cuando resuelves sistemas son aquellos en las que alguna de las soluciones es una fracción. Tendrás que operar a la vez con sistemas y con fracciones; por lo demás, no habrá ninguna diferencia. Recuerda la importancia de las simplificaciones.

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas:

① $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ x+14y=2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 7x+5y=-1 \\ 14x-15y=13 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 5x-4y=9 \\ 7x-6y=12 \end{cases}$

Resoluciones

① Usamos el método de sustitución.

$\begin{cases} 5x-2y=4 \\ x+14y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5(2-14y)-2y=4 \\ x=2-14y \end{vmatrix} \Rightarrow 10-70y-2y=4 \Rightarrow -72y=-6 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\dfrac{-6}{-72}=\dfrac{1}{12}$

$x=2-14y=2-14\cdot\dfrac{1}{12}=2-\dfrac{7}{6}=\dfrac{5}{6}$. Solución: $\begin{cases} x=\dfrac{5}{6} \\ y=\dfrac{1}{12} \end{cases}$

② Usamos el método de reducción.

$\begin{cases} 7x+5y=-1 \\ 14x-15y=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 14x+10y=-2 \\ 14x-15y=13 \end{vmatrix} \Rightarrow 25y=-15 \Rightarrow y=\dfrac{-15}{25}=-\dfrac{3}{5}$

$7x+5y=-1 \Rightarrow 7x+5\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-1 \Rightarrow 7x-3=-1 \Rightarrow 7x=2 \Rightarrow x=\dfrac{2}{7}$. Solución: $\begin{cases} x=\dfrac{2}{7} \\ y=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$

③ Usamos el método de igualación.

$\begin{cases} 5x-4y=9 \\ 7x-6y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} y=\dfrac{9-5x}{-4} \\ y=\dfrac{12-7x}{-6} \end{vmatrix} \Rightarrow \dfrac{9-5x}{-4}=\dfrac{12-7x}{-6} \Rightarrow \dfrac{9-5x}{2}=\dfrac{12-7x}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(9-5x)=2(12-7x) \Rightarrow 27-15x=24-14x \Rightarrow -15x+14x=24-27 \Rightarrow -x=-3 \Rightarrow x=3$

$y=\dfrac{9-5x}{-4}=\dfrac{9-5\cdot 3}{-4}=\dfrac{9-15}{-4}=\dfrac{-6}{-4}=\dfrac{3}{2}$

Solución: $\begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas. Da la solución con los números expresados del modo más sencillo posible (número entero o fracción irreducible).

①	$\begin{cases} x-6y=2 \\ 10x+10y=13 \end{cases}$	②	$\begin{cases} 4x+3y=-7 \\ 8x+7y=-13 \end{cases}$	③	$\begin{cases} 3x+2y=9 \\ 3x-2y=-5 \end{cases}$	④	$\begin{cases} 3x-4y=-25 \\ 5x+6y=-10 \end{cases}$
⑤	$\begin{cases} 10x+3y=10 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$	⑥	$\begin{cases} 10x+3y=1 \\ 15x+9y=5 \end{cases}$	⑦	$\begin{cases} 3x+5y=6 \\ 15x-15y=2 \end{cases}$	⑧	$\begin{cases} 5x-7y=2 \\ 15x+21y=-14 \end{cases}$

Resolución de problemas usando un sistema de ecuaciones

Cuando se intenta resolver un problema usando un sistema de ecuaciones hay que añadir una serie de consejos a los habituales sobre resolución de problemas:

1. Escribe qué significado tendrán las incógnitas que uses.
2. Plantea un sistema de ecuaciones.
3. Resuelve el sistema de ecuaciones.

Estos tres consejos son la parte central de la resolución del problema; antes, debes entender el problema y pensar cómo resolverlo; después, tienes que redactar la solución del problema. Ten en cuenta que

- Muchas veces se puede resolver un problema con diferentes ecuaciones o sistemas de ecuaciones.
- Si no escribes qué significan las incógnitas, no se entenderá tu resolución.
- Para plantear el sistema de ecuaciones tienes que traducir al lenguaje algebraico dos frases del enunciado del problema. Puede que tengas que recordar alguna propiedad aplicable a los elementos del problema.
- La solución del sistema de ecuaciones no es la solución del problema.
- En la redacción de la solución del problema no deben aparecer las letras que usaste como incógnitas.

Ejemplo de problema resuelto con un sistema de ecuaciones

Enunciado

En un bar todos los bocadillos tienen el mismo precio y todos los refrescos tienen el mismo precio. Una pareja de personas compra dos bocadillos y tres refrescos y paga nueve euros. Otra pareja compra tres bocadillos y cuatro refrescos y paga trece euros. Averigua cuánto cuesta cada bocadillo y cuánto cuesta cada refresco.

Resolución

Llamamos x al precio en euros de cada bocadillo.

Llamamos y al precio en euros de cada refresco.

Como dos bocadillos y tres refrescos cuestan nueve euros, $2x+3y=9$

Como tres bocadillos y cuatro refrescos cuestan trece euros, $3x+4y=13$

Planteamos y resolvemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x+4y=13 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x=\dfrac{9-3y}{2} \\ x=\dfrac{13-4y}{3} \end{array} \right| \quad \frac{9-3y}{2}=\frac{13-4y}{3} \Rightarrow 3(9-3y)=2(13-4y) \Rightarrow 27-9y=26-8y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9y+8y=26-27 \Rightarrow -y=-1 \Rightarrow y=1$$

$$x=\frac{9-3y}{2}=\frac{9-3\cdot 1}{2}=\frac{6}{2}=3. \text{ Solución del sistema: } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

Solución: cada bocadillo cuesta tres euros y cada refresco cuesta un euro.

Comentarios

- No es necesario que indiques qué método utilizas para resolver el sistema.
- Si el problema es complicado, deberías explicar cómo obtienes cada ecuación; si te parece sencillo (como el ejemplo), escribe directamente el sistema.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas utilizando un sistema de ecuaciones.

① Calcula la amplitud de los ángulos de un triángulo isósceles sabiendo que la diferencia entre la suma de los dos mayores y el menor es 68°.

② En un garaje hay motos y coches, en total 78 vehículos; hay 238 ruedas en contacto con el suelo. Calcula cuántas motos y cuántos coches hay.

Resoluciones

① Llamamos x a la amplitud de cada uno de los dos ángulos mayores.

Llamamos y a la amplitud del ángulo menor.

El enunciado nos indica que 2x–y=68° y sabemos que los tres ángulos deben sumar 180°.

$$\begin{cases} 2x-y=68 \\ 2x+y=180 \end{cases} \left| \begin{matrix} 4x=248 \\ 2y=112 \end{matrix} \right| \begin{matrix} x=62 \\ y=56 \end{matrix}$$

Solución del sistema: $\begin{cases} x=62 \\ y=56 \end{cases}$

Solución: los ángulos miden 62°, 62° y 56°.

② Llamamos x al número de motos; llamamos y al número de coches.

$$\begin{cases} x+y=78 \\ 2x+4y=238 \end{cases} \left| \begin{matrix} x+y=78 \\ x+2y=119 \end{matrix} \right| \; y=41;\ x+y=78 \Rightarrow x+41=78 \Rightarrow x=37$$

Solución del sistema: $\begin{cases} x=37 \\ y=41 \end{cases}$

Solución: hay 37 motos y 41 coches.

Comentarios al primer problema

✱ No escribimos el símbolo de grado sexagesimal en el sistema de ecuaciones porque ya nos hemos asegurado de que todas las medidas utilicen la misma unidad.

✱ En la resolución del sistema hemos utilizado el método de reducción, multiplicando la segunda ecuación por ½; es decir, dividiéndola entre 2.

✱ En la solución no es necesario especificar cuáles son los ángulos mayores y menores, ya que es obvio.

Comentarios al segundo problema

✱ El extraño enunciado nos indica que no debemos contar las posibles ruedas de repuesto que podrían tener los vehículos.

✱ El problema se podría haber resuelto fácilmente con una ecuación, ya que si llamamos x al número de motos, el de coches debe ser $78-x$ y por tanto, con el dato de las ruedas, se puede plantear la ecuación «2x+4(78–x)=238».

✱ Hemos utilizado un sistema de ecuaciones porque el enunciado así lo exige; si no lo hiciera, sería decisión nuestra resolver el problema usando una ecuación o un sistema.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas utilizando un sistema de ecuaciones.

① Calcula dos números de manera que su diferencia sea cinco y la suma del mayor con el doble del menor sea 35.

② Calcula dos números de modo que su diferencia sea 129 y la diferencia entre el triple del mayor y el doble del menor sea 720.

③ Un grupo de 26 parejas con hijos se da cuenta en una reunión, en la que no falta nadie, de que cada pareja o tiene dos hijos o tiene tres hijos. Sabemos que en la reunión hay 113 personas. Averigua cuántas parejas tienen dos hijos y cuántas parejas tienen tres hijos.

④ Si en una frutería compro cinco kilogramos de naranjas y siete de kiwis, me cobran 31 euros; cuando compro quince kilogramos de naranjas y trece de kiwis, me cobran 69 euros. Averigua cuánto cuesta cada kilogramo de naranjas y cada kilogramo de kiwis.

⑤ Calcula las amplitudes de los ángulos de un triángulo isósceles sabiendo que uno de los ángulos es igual a la suma de los otros dos.

⑥ En trapecio isósceles de 48 metros de perímetro la base mayor es 4 metros más larga que la base menor y los lados que no son paralelos miden lo mismo que la base menor. Calcula cuánto miden las bases.

⑦ Un pentágono tiene tres ángulos iguales entre sí y otros dos ángulos iguales entre sí. Sabemos que cualquiera de los tres ángulos iguales es 30° mayor que cualquiera de los otros dos ángulos iguales. Averigua las amplitudes de los ángulos mayores y de los menores.

⑧ Un fabricante de pelotas de goma de juguete diseña pelotas rojas que tienen todas cierto número de adornos blancos y cierto número de adornos negros; también fabrica pelotas verdes, con los números de adornos blancos y negros al revés de las pelotas rojas. Si compramos cuatro pelotas rojas y cinco verdes, podremos contar en total 37 adornos blancos y 35 negros. Averigua cuántos adornos negros tiene cada pelota verde.

Enunciado

⑨ Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones. Da las soluciones como números decimales:

$$\begin{cases} 0{,}4\,x+0{,}5\,y=2{,}7 \\ 0{,}8\,x+1{,}5\,y=7{,}5 \end{cases}$$

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

⑩ $$\begin{cases} 2\,x-3\,y=71 \\ 5\,x+y=50 \\ x+y+2\,z=62 \end{cases}$$

⑪ $$\begin{cases} x=3-y \\ 3\,x-2\,y-2\,z=4 \\ z=7-2\,y \end{cases}$$

Relaciones entre dos magnitudes

Cuando estudiamos la proporcionalidad vimos que, algunas veces, dos magnitudes son directamente proporcionales; otras, son inversamente proporcionales. Esto nos permitió resolver muchos problemas concretos, pero ahora debemos volver a examinar estas situaciones con otra perspectiva: nos queremos fijar en el hecho de que dos magnitudes pueden estar relacionadas o no y también en el hecho de que, si están relacionadas, lo pueden estar de varias maneras (conocemos dos maneras hasta el momento, pero hay más).

Tablas de valores

Una tabla de valores es una disposición de los valores de dos magnitudes que permite estudiar y resumir la posible relación de esas dos magnitudes.

Cuando resolvías problemas de proporcionalidad ya viste que una manera de ordenar los datos y la incógnita era escribirlos en forma de tabla: eso ya era una pequeña tabla de valores; ahora, las vamos a ampliar.

Ejemplo con magnitudes directamente proporcionales

Una familia compra 5 kilogramos de aguacates y paga por ellos 20 euros. Queremos obtener una tabla de valores que nos indique cuánto habrá que pagar por cualquier cantidad de aguacates que queramos comprar, entre 1 y 10 kilogramos.

Magnitud	**Unidad**	**Valores**									
Masa	kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dinero	eur					20					

Observamos que la masa de aguacates comprada y el dinero necesario para pagarla son magnitudes directamente proporcionales.

Por tanto, para rellenar la tabla podríamos plantear nueve problemas de proporcionalidad directa o bien usar nueve reglas de tres directas. Pero estos serían métodos muy ineficientes.

Es mucho mejor utilizar el método llamado **reducción a la unidad**, que consiste en averiguar la constante de proporcionalidad e interpretarla como el dinero que cuesta comprar una unidad de masa.

La constante de proporcionalidad es: $\frac{20\,\text{eur}}{5\,\text{kg}}=4\,\frac{\text{eur}}{\text{kg}}$

Ahora sabemos que cada kilogramo cuesta 4 euros y por tanto para rellenar la tabla solo hace falta ir multiplicando por 4 cada valor de la masa:

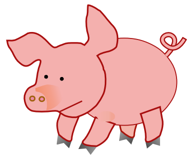
$$\boxed{\text{dinero} = 4 \cdot \text{masa}}$$

La tabla queda así:

Magnitud	**Unidad**	**Valores**									
Masa	kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dinero	eur	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Ejemplo con magnitudes inversamente proporcionales

Una granja porcina dispone de pienso para alimentar a 20 cerdos durante 50 días. Queremos obtener una tabla de valores que nos indique cuánto cuánto tiempo nos duraría la comida según el número de cerdos que tuviéramos.



Magnitud	**Unidad**	**Valores**									
Núm. cerdos	sin unidad	1	10	20	40	50	100	125	250	500	1000
Tiempo	día			50							

Observamos que el número de cerdos y el tiempo que les durará la comida son magnitudes inversamente proporcionales.

Por tanto, para rellenar la tabla podríamos plantear nueve problemas de proporcionalidad inversa o bien usar nueve reglas de tres inversas. Pero estos serían métodos muy ineficientes.

Es mucho mejor utilizar el método llamado **reducción a la unidad**, que consiste en averiguar cuánto tiempo le duraría la comida a un solo cerdo y posteriormente usar ese número para calcular el resto de valores.

Si llamamos «c» al tiempo que le duraría la comida a un cerdo:

$1 \cdot c = 20 \cdot 50 \Rightarrow c = 1000$ días

Ahora que tenemos ese dato, podemos averiguar fácilmente cuánto tiempo le durará la comida a cualquier número de cerdos, porque

(número de cerdos) · (tiempo) = 1000 y, despejando:

$$\boxed{\text{tiempo} = 1000 : (\text{número de cerdos})}$$

Finalmente, para rellenar la tabla solo hace falta ir dividiendo 1000 entre cada valor del número de cerdos:

La tabla queda así:

Magnitud	**Unidad**	**Valores**									
Núm. cerdos	sin unidad	1	10	20	40	50	100	125	250	500	1000
Tiempo	día	1000	100	50	25	20	10	8	4	2	1

Observa que todos los valores obtenidos son números naturales. Esto se debe a que hemos elegido cuidadosamente los datos originales para que sea así y evitarte operaciones laboriosas. En la realidad, habrá que manejar muchas divisiones que no serán exactas.

Ejemplo con otra relación entre magnitudes

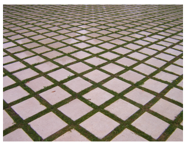
En un parque de atracciones nos cobran un euro por subir a una atracción y además dos euros por cada vuelta completa que demos en ella. Queremos rellenar una tabla con el dinero que nos cobrarán por dar entre 1 y 8 vueltas. Es fácil, piensa:

Magnitud	**Unidad**	**Valores**							
Núm. vueltas	sin unidad	1	2	3	4	5	6	7	8
Dinero	eur	3	5	7	9	11	13	15	17

① Una persona viaja en bicicleta a una velocidad que, por simplicidad, vamos a suponer constante. Consigue hacer 100 kilómetros en 4 horas. Rellena la siguiente tabla de valores:

Magnitud	**Unidad**	**Valores**									
Tiempo	h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Longitud	km										

② Un equipo de trabajadores debe colocar baldosas en el suelo de un gran patio en un edificio público. Si utilizan baldosas de 20 metros cuadrados, necesitan colocar 150 para cubrir el patio. Rellena la siguiente tabla de valores:



Magnitud	**Unidad**	**Valores**							
Superficie	m^2	1	2	5	10	15	20	30	40
Núm. baldosas	sin unidad								

③ Una empresa de transporte cobra una cantidad fija de 5 euros por cada encargo, a la que hay que añadir 3 euros por cada kilogramo que tenga la entrega. Rellena la siguiente tabla de valores:

Magnitud	**Unidad**	**Valores**									
Masa	kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dinero	eur										

④ Una persona decide ahorrar cada mes una cantidad de dinero. Al cabo de un año ahorrando, ve que ya ha conseguido reunir 900 euros. Rellena la siguiente tabla de valores:

Magnitud	**Unidad**	**Valores**							
Tiempo	mes	1	3	6	10	12	18	24	36
Dinero	eur								

⑤ Una persona decide comprar un coche nuevo y una parte la va a pagar a plazos. Quiere saber cuánto deberá pagar al mes según en cuantos meses decida pagar. La financiera le ha informado de que si pagara en dos años, tendría que pagar 750 euros al mes. Rellena la siguiente tabla de valores:

Magnitud	**Unidad**	**Valores**							
Tiempo	mes	1	12	18	24	30	36	45	48
Dinero	eur								

Representación gráfica de una tabla de valores

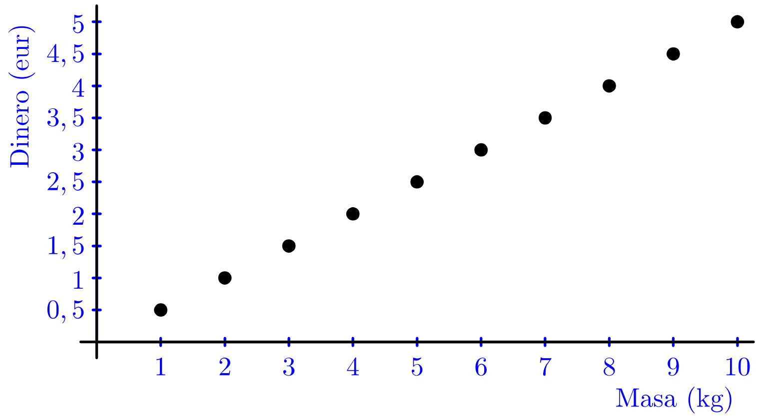
* A partir de una tabla de valores se puede realizar una representación gráfica usando coordenadas.
* Si la tabla de valores está escrita en horizontal, los valores de la magnitud que esté arriba se representan en el eje de abscisas. Si la tabla de valores está escrita en vertical, los valores de la magnitud que esté a la izquierda se representan en el eje de abscisas.
* Si la tabla de valores está escrita en horizontal, los valores de la magnitud que esté abajo se representan en el eje de ordenadas. Si la tabla de valores está escrita en vertical, los valores de la magnitud que esté a la derecha se representan en el eje de ordenadas.
* Por cada pareja de valores de la tabla se representa un punto en la gráfica.

Ejemplo 1

A partir de esta tabla de valores

Magnitud	**Unidad**	**Valores**									
Masa	kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dinero	eur	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5

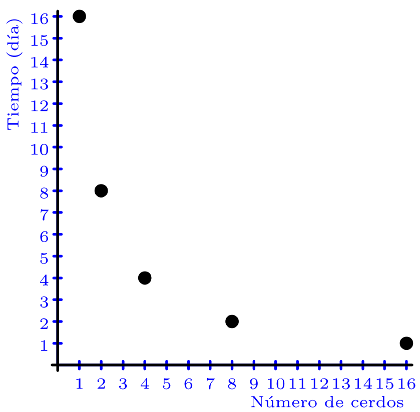
Se obtiene esta representación gráfica



Ejemplo 2

A partir de la tabla de valores de la izquierda se obtiene la representación gráfica de la derecha.

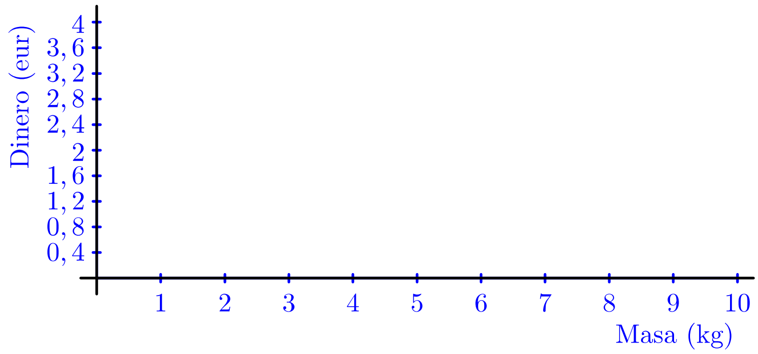
Magnitud	Núm. cerdos	Tiempo
Unidad	sin unidad	día
Valores	1	16
	2	8
	4	4
	8	2
	16	1



Enunciados

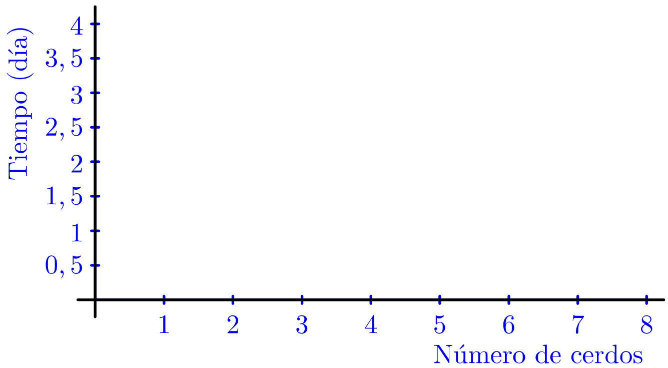
① Representa gráficamente la siguiente tabla de valores:

Magnitud	**Unidad**	**Valores**									
Masa	kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dinero	eur	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4



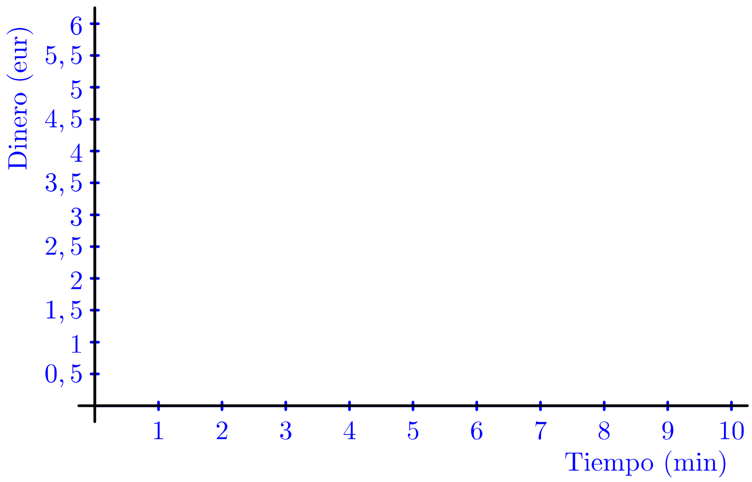
② Representa gráficamente la siguiente tabla de valores:

Magnitud	Núm. cerdos	Tiempo
Unidad	sin unidad	día
Valores	1	4
	2	2
	4	1
	8	0,5



③ Representa gráficamente la siguiente tabla de valores:

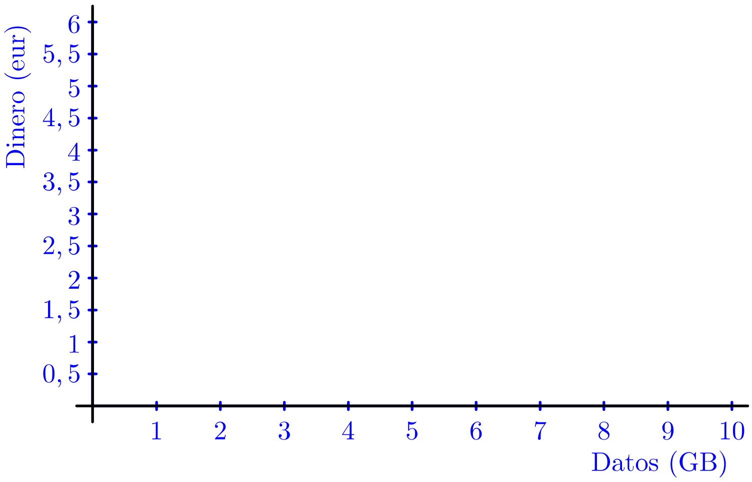
Magnitud	**Unidad**	**Valores**									
Tiempo	min	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dinero	eur	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6



Enunciados

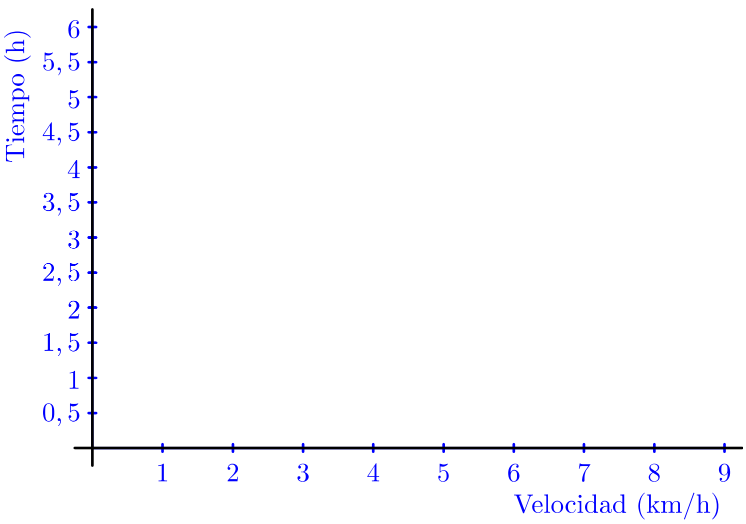
① Una compañía de telecomunicaciones vende tarjetas de acceso a internet, con un coste fijo por tarjeta de 1 euro más 0,5 euros por cada gigabyte de datos. Rellena la siguiente tabla de valores y represéntala gráficamente.

Magnitud	**Unidad**	**Valores**									
Datos	GB	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dinero	eur										



② Una persona se desplaza habitualmente de un pueblo a otro. Si lo hace con una velocidad media de 6 km/h, tarda 3 horas en hacer el recorrido. Rellena la siguiente tabla de valores y represéntala gráficamente.

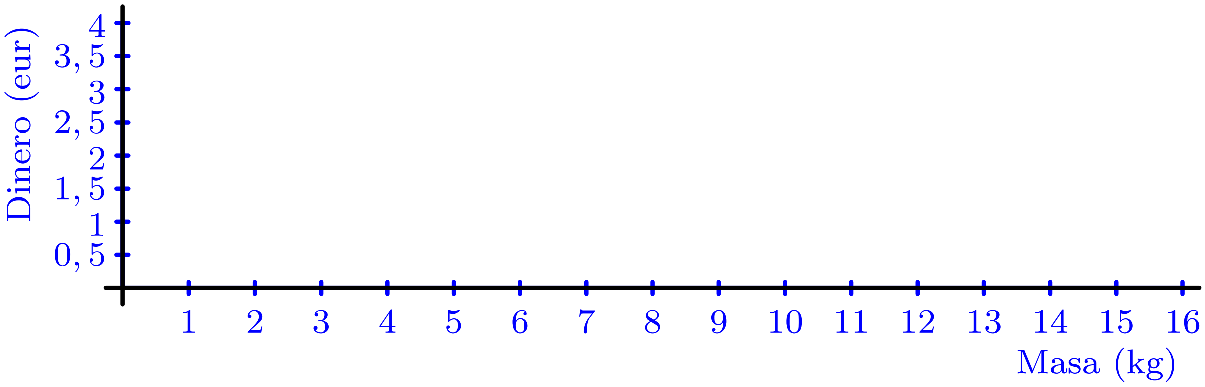
Magnitud	**Unidad**	**Valores**			
Velocidad	km/h	3	4	6	9
Tiempo	h				



Enunciados

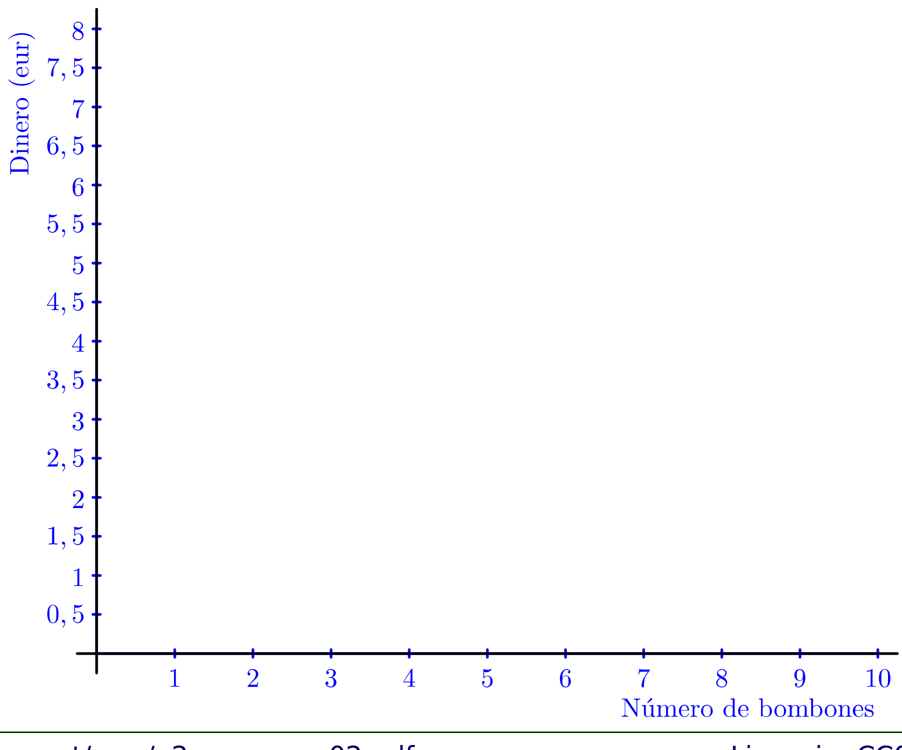
① Una panadería necesita comprar harina. Por un saco de 10 kilogramos le cobran 2,5 euros. Rellena la siguiente tabla de valores y represéntala gráficamente.

Magnitud	**Unidad**	**Valores**						
Masa	kg	4	6	8	10	12	14	16
Dinero	eur							



② En una tienda venden bombones de calidad. Te cobran 0,5 euros por la caja en la que ponen los bombones y 0,75 euros por cada bombón. Rellena la siguiente tabla de valores y represéntala gráficamente.

Magnitud	**Unidad**	**Valores**				
Núm. bombones	sin unidad	2	4	6	8	10
Dinero	eur					



Poliedro

- Un poliedro es la región del espacio delimitada por cuatro o más polígonos que tienen un lado común diferente cada dos polígonos.
- Los polígonos se llaman **caras** del poliedro.
- Los lados de los polígonos se llaman **aristas** del poliedro.
- Los vértices de los polígonos se llaman **vértices** del poliedro.
- Los segmentos que unen dos vértices que no pertenezcan a la misma cara se llaman **diagonales** del poliedro.

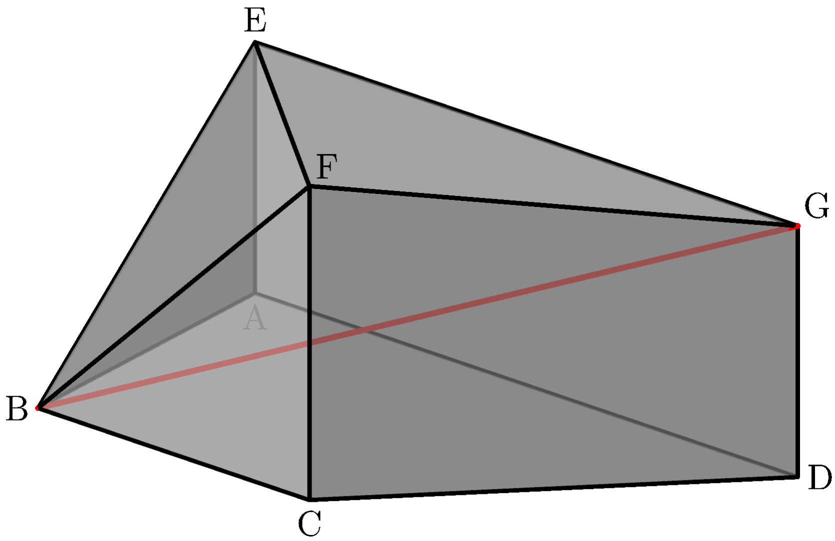
Problema de representación

Los poliedros son figuras tridimensionales, pero las hojas de papel y las pantallas son bidimensionales, así que los poliedros no pueden ser representados exactamente ni en papel ni en pantalla. Para hacer la representación se suele utilizar un dibujo en perspectiva, que presentará las caras con distintos degradados de color y puede tener trasparencia que permita ver a través de las caras las partes ocultas.

- Existen programas de ordenador que te permiten rotar la representación para facilitarte la comprensión de las tres dimensiones.
- Aunque uses esos programas, es recomendable que utilices modelos reales de los poliedros para que los puedas tocar y familiarizarte con su realidad.
- Hay a la venta muchos juegos de figuras. Otras posibilidades son:
  - Prepararlas tú mismo doblando y pegando figuras de papel a partir del **desarrollo plano** del poliedro, que puedes dibujar o imprimir.
  - Usando impresión 3D.

Ejemplo

Consideramos el poliedro de la figura:

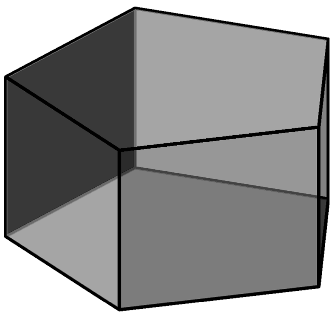
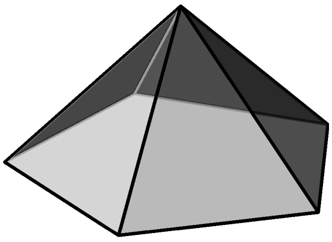
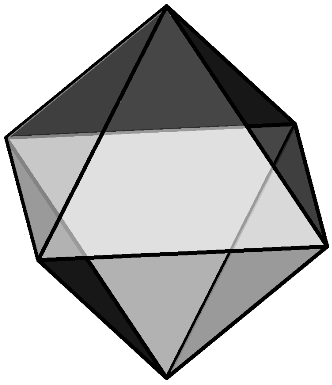
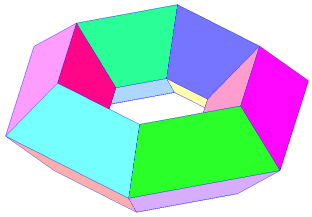


- Tiene **siete caras**: los triángulos ABE, BEF, BCF y EFG y los cuadriláteros ABCD, CDGF y ADGE. Tres de las caras están ocultas, pero las podemos ver en el dibujo por la trasparencia de las caras que están delante.
- Tiene **doce aristas**: AB, AD, AE, BC, BE, BF, CD, CF, DG, EF, EG y FG. Las aristas AB, AD y AE están ocultas.
- Tiene **siete vértices**: A, B, C, D, E, F y G. El vértice A está oculto.
- Hemos representado con color rojo una de las diagonales, la BG.

Tipos de poliedros

- Existe una gran variedad de tipos de poliedros, desde los más simples hasta los más complicados.
- En este nivel estudiaremos con detalle tres tipos: prismas, pirámides y poliedros regulares.
- Existen otros tipos de poliedros interesantes, que no estudiaremos, como los antiprismas, los troncos de pirámide y los sólidos arquimedianos, entre otros.

Ejemplos

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
			
Un prisma	Una pirámide	Un poliedro regular	Otro tipo diferente

Característica de Euler

Si llamamos «V» al número de vértices de un poliedro, «A» al número de aristas y «C» al número de caras, llamamos característica de Euler al número

$$\boxed{\chi = V - A + C}$$

La letra «χ» es la letra griega ji minúscula. El número se llama así en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).

Ejemplos

Incluso en los poliedros sencillos, contar los números de vértices, aristas y caras requiere atención y método: hay que contarlos con concentración y siguiendo algún tipo de orden. En el caso de que las caras no sean trasparentes, es necesario tener en cuenta los elementos ocultos. Para poliedros complicados, existen algunas técnicas de ayuda para calcular estos números.

Usando la notación anterior, resolvemos los cuatro ejemplos:

① $V=10,\ A=15,\ C=7,\ \ \chi=10-15+7=2$

② $V=6,\ A=10,\ C=6,\ \ \chi=6-10+6=2$

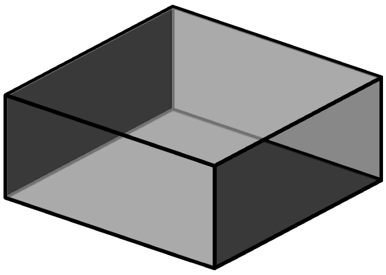
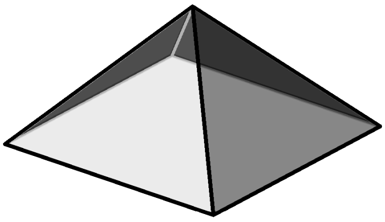
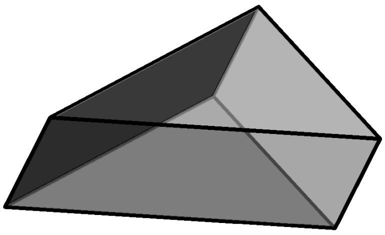
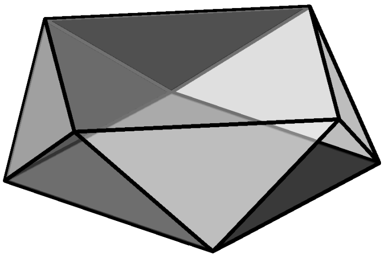
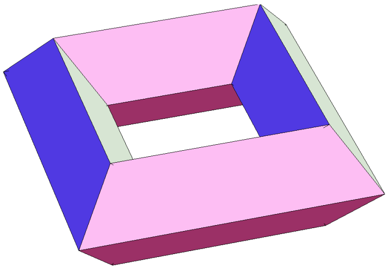
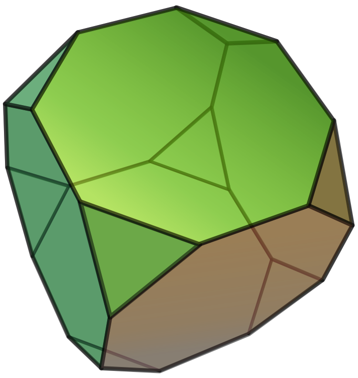
③ $V=6,\ A=12,\ C=8,\ \ \chi=6-12+8=2$

④ En la representación las caras no son trasparentes. Las bases para las operaciones son que la figura está compuesta por seis segmentos idénticos y que presenta simetría respecto al plano central.

$V=24,\ A=48,\ C=24,\ \ \chi=24-48+24=0$

Enunciados

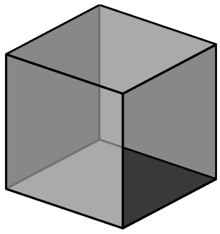
Averigua el número de vértices, aristas y caras de los siguientes poliedros y calcula su característica de Euler.

①		Vértices: Aristas: Caras: Característica de Euler:
②		Vértices: Aristas: Caras: Característica de Euler:
③		Vértices: Aristas: Caras: Característica de Euler:
④		Vértices: Aristas: Caras: Característica de Euler:
⑤		Vértices: Aristas: Caras: Característica de Euler:
⑥		Vértices: Aristas: Caras: Característica de Euler:

Desarrollo plano de un poliedro

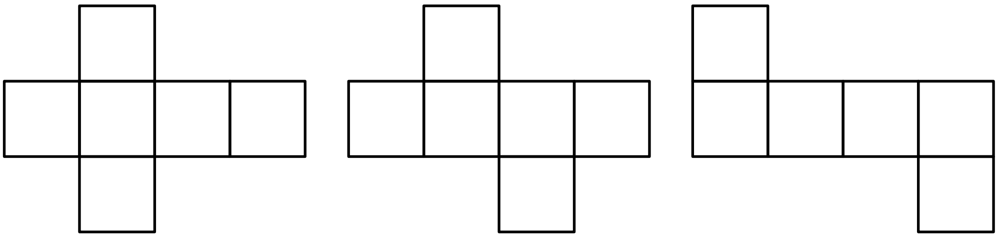
- Como las caras de un poliedro son polígonos, todas ellas se pueden dibujar en un plano.
- Como dos caras de un poliedro siempre comparten una arista, las caras se pueden dibujar en el plano de modo que vayan compartiendo un lado.
- El **desarrollo plano** de un poliedro es el dibujo plano formado por toda las caras unidas por sus aristas comunes.
- Hay más de una manera de dibujar el desarrollo plano de un poliedro, pero todas son equivalentes.

Ejemplo



Seguramente conoces desde la educación primaria el poliedro llamado cubo. Tienes un ejemplo a la derecha. Es uno de los poliedros más sencillos. También es la forma más habitual de los dados para jugar a muchos juegos de azar.

El cubo tiene seis caras que son cuadrados. Cualquiera de estas figuras es un desarrollo plano del cubo (y hay más):



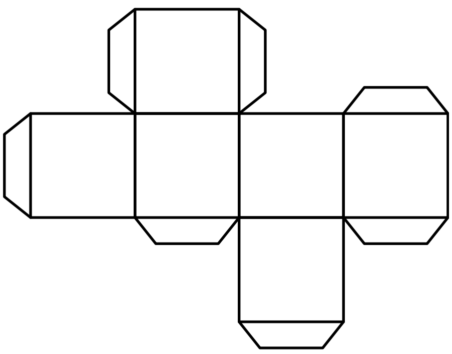
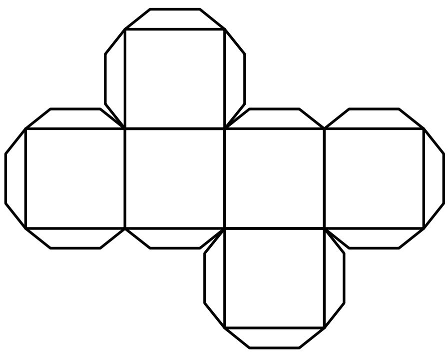
Construcción del poliedro en papel

Se puede usar el desarrollo plano de un poliedro para construirlo en papel:

- Hay que disponer el desarrollo, bien porque lo descargues de internet, lo fotocopies de un modelo o lo dibujes tú mismo.
- Luego hay que doblarlo por las aristas comunes.
- Por último, hay que pegarlo.

Para poder pegar unas caras con otras te hará falta que en el desarrollo plano haya dibujadas en algunas de las aristas que quedan libres unas pestañas, que es donde se aplica el pegamento. Hay varias técnicas de dibujo de pestañas:

- Se dibujan a lo largo del perímetro del dibujo en una arista sí y en la siguiente no; luego se pega pestaña con cara. Como en el dibujo de abajo a la izquierda.

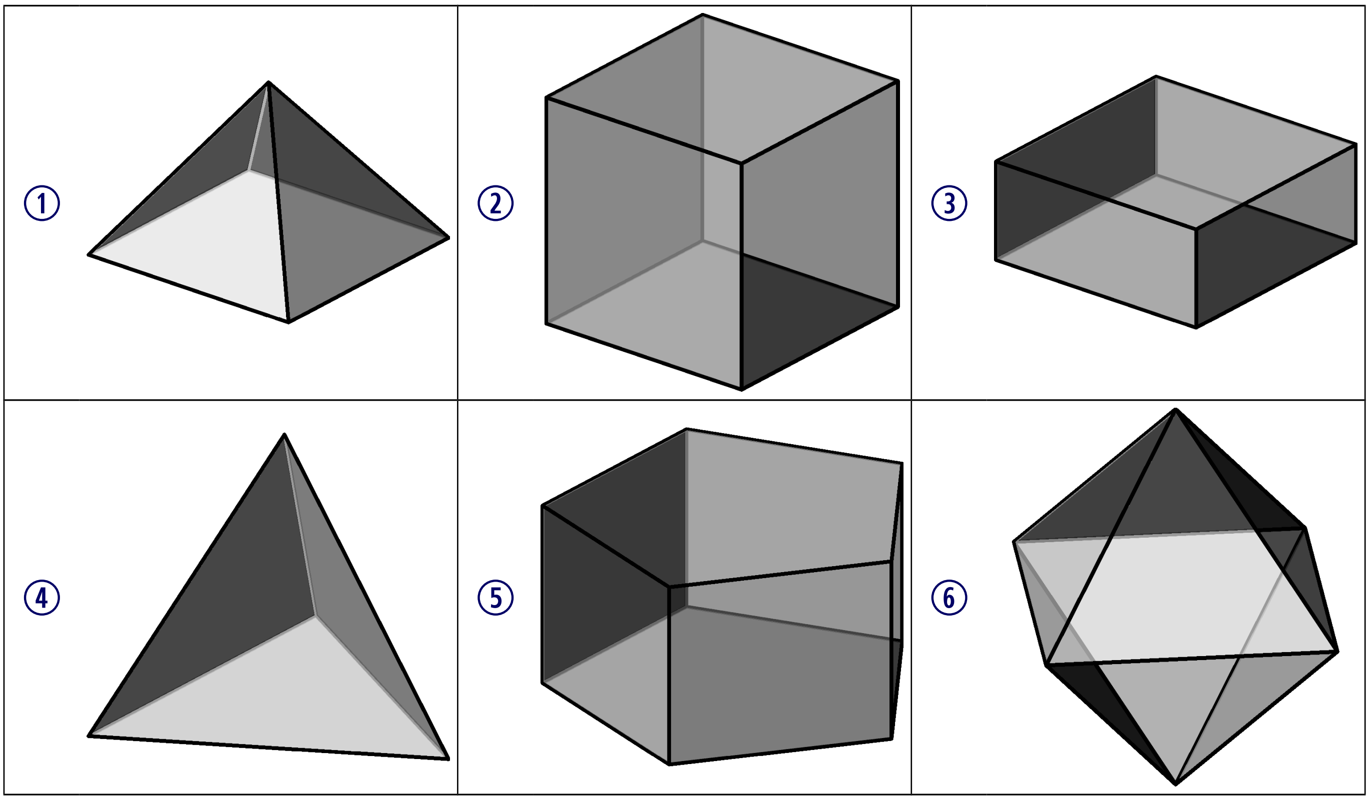



- Se dibujan pestañas en todas las aristas libres y luego se pega pestaña con pestaña. Como en el dibujo de arriba a la derecha.

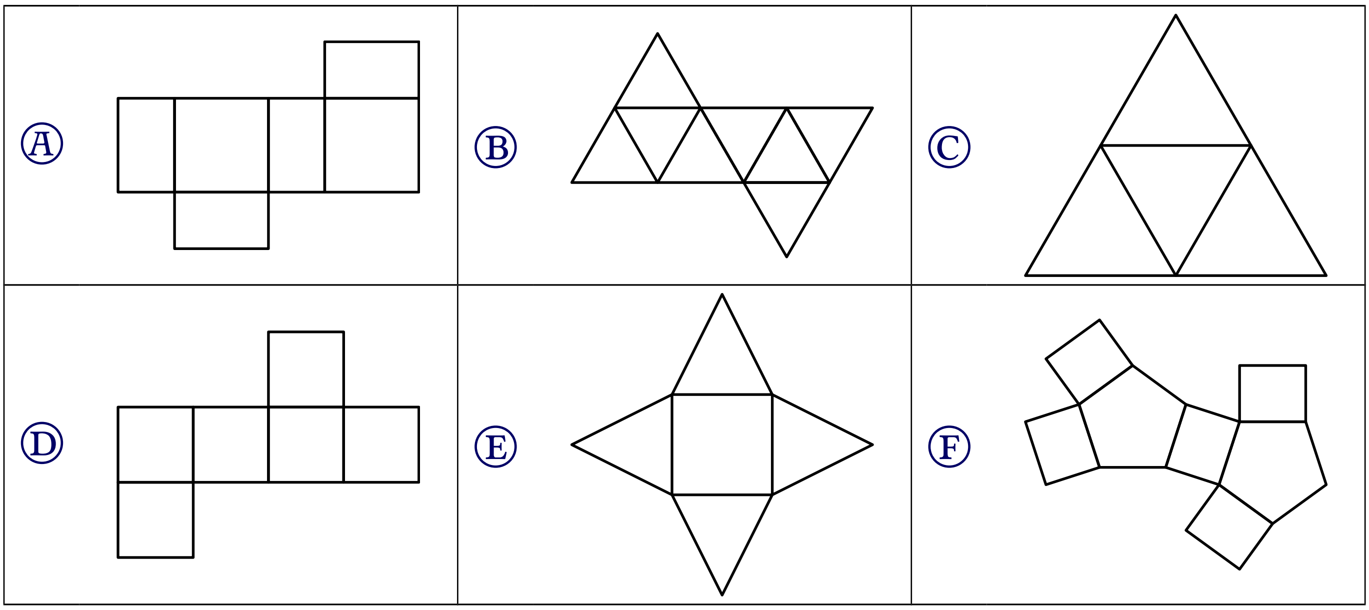
Enunciados

Averigua cuál es el desarrollo plano de cada uno de los siguientes poliedros. Contesta diciendo la letra del desarrollo.

Los poliedros



Los desarrollos planos

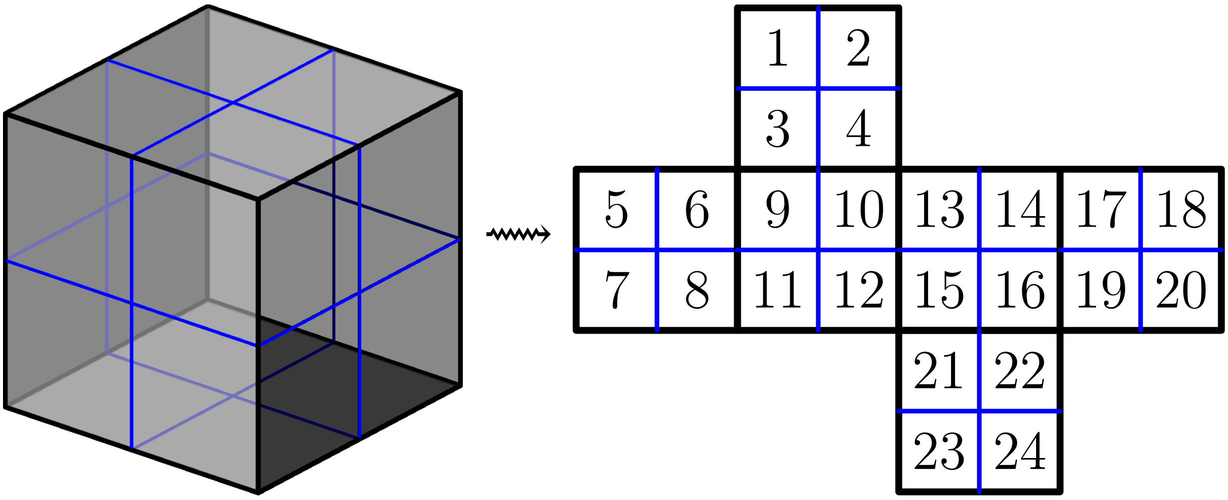


Área de un poliedro

- El área de un poliedro se define como la suma de las áreas de todas sus caras.
- Por tanto, se mide en unidades de superficie.
- La definición se aplica en cada tipo de poliedro buscando la manera más sencilla de realizar el cálculo.
- El desarrollo plano del poliedro suele ser de gran ayuda para calcular el área.

Ejemplo

Vamos a visualizar el área de un cubo cuyo lado mida 2 unidades de longitud.



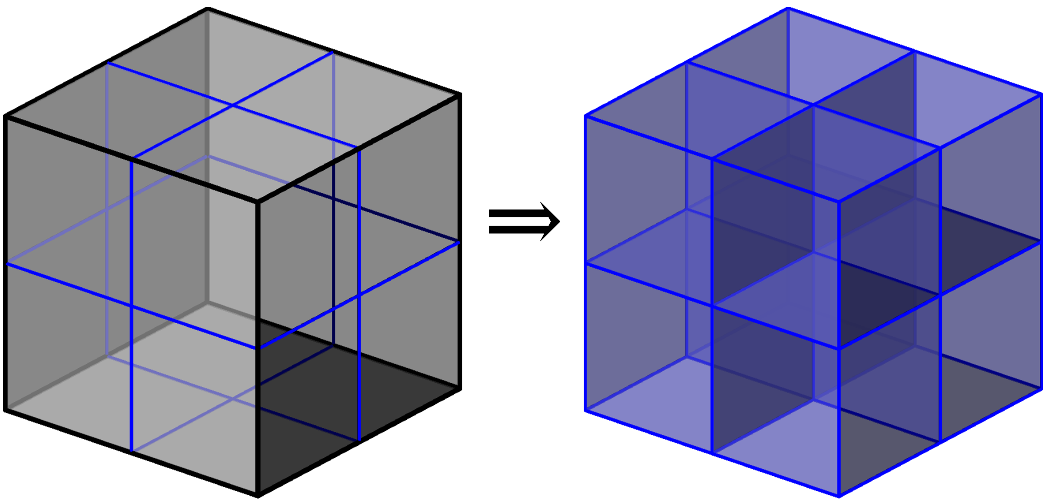
Vemos que tiene 24 unidades cuadradas de superficie.

Volumen de un poliedro

- El volumen de un poliedro es la medida de la parte de espacio que ocupa.
- Naturalmente, se mide en unidades de volumen.
- La definición se aplica en cada tipo de poliedro buscando la manera más sencilla de realizar el cálculo.

Ejemplo

Vamos a visualizar el volumen de un cubo cuyo lado mida 2 unidades de longitud.



Vemos que tiene 8 unidades cúbicas de volumen.

Definición de prisma

Un prisma es un poliedro que tiene dos polígonos idénticos paralelos unidos por paralelogramos.

Elementos de un prisma

- Los dos polígonos idénticos se llaman **bases** del prisma.
- Los paralelogramos se llaman **caras laterales** del prisma.
- **Altura** de un prisma es cualquier segmento que una las dos bases y sea perpendicular a ambas.

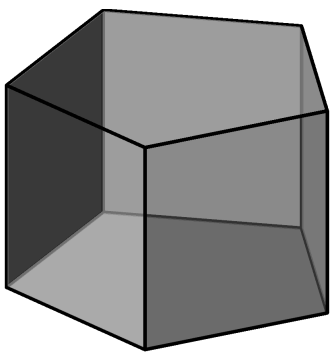
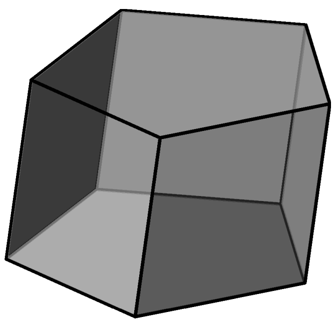
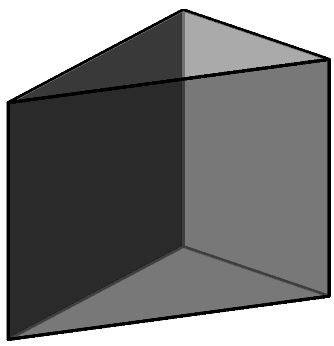
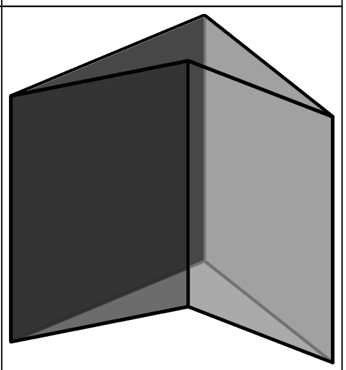
Prismas rectos y prismas oblicuos

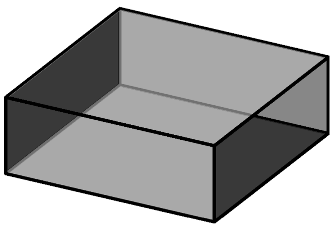
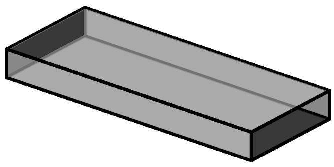
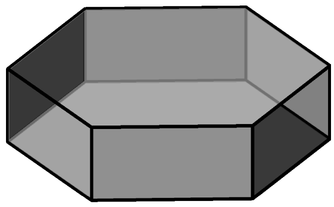
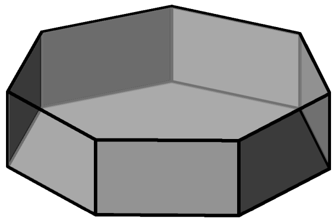
- Si todos los parelologramos son rectángulos, el prisma se llama prisma recto.
- Si no todos los parelologramos son rectángulos, el prisma se llama prisma oblicuo.
- Si no se especifica si un prisma es recto u oblicuo, casi siempre entendemos que se trata de un prima recto.

Nombres de los prismas

La mayor parte de los prismas que se utilizan tienen como bases polígonos sencillos, como triángulos, cuadriláteros o polígonos regulares. Por esta razón, se suelen denominar los prismas a partir del tipo de polígono que tengan como base: prisma triangular, prisma cuadrangular, prisma pentagonal, etc.

Ejemplos de prismas

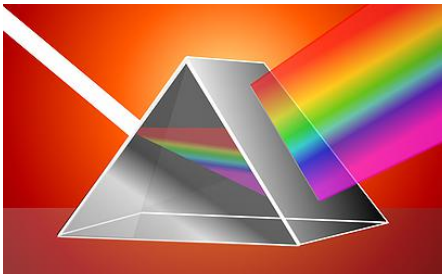
Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
			
Prisma recto de bases pentagonales	Prisma oblicuo de bases pentagonales	Prisma recto de bases triangulares	Prisma recto de bases cuadrangulares

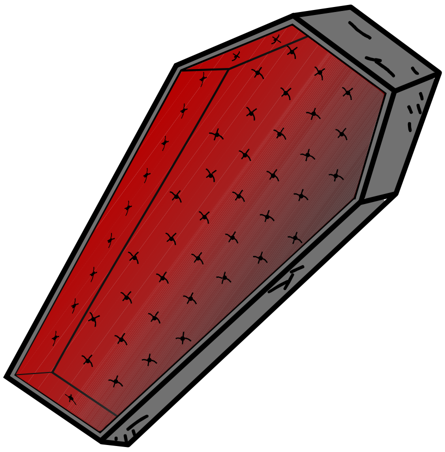
Ejemplo 5	Ejemplo 6	Ejemplo 7	Ejemplo 8
			
Prisma recto de bases cuadradas	Prisma recto de bases rectangulares	Prisma recto de bases hexagonales	Prisma recto de bases heptagonales

Prismas en la vida real

Los prismas, especialmente los más sencillos, se usan muy a menudo en la vida real. Naturalmente, en la vida real no hay prismas **exactos**, pero sí se puede apreciar que en el proceso de diseño de muchos objetos se ha partido de un prisma.

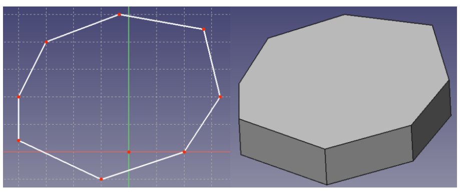
Ejemplos

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		
Los **prismas ópticos** que se usan para descomponer la luz blanca en los colores del arco iris son prismas de base triángular.	La **Puerta de Europa** es un conjunto de dos edificios de Madrid, España. Ambos son prismas inclinados de base cuadrada (paralelepípedos).	El **cajón** es un instrumento musical de percusión de origen peruano. Es un prisma recto de base rectangular (ortoedro).

Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6
		
En el universo Star Trek la especie borg utiliza **naves** con forma de prisma con seis caras cuadradas (hexaedro).	En algunas ilustraciones el **ataúd** de Drácula es un prisma con bases hexagonales que no son regulares.	Algunas **cajas** para regalo de bonito diseño son prismas con bases hexagonales regulares.

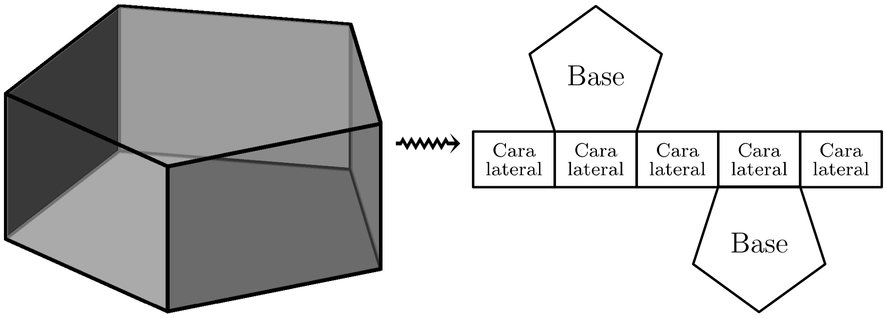
La extrusión

Los prismas son tan importantes que los programas de diseño 3D suelen disponer de una herramienta llamada **extrusión** que permite generar un prisma a partir de cualquier polígono.



Desarrollo plano de un prisma recto

Como ejemplo presentamos el desarrollo plano de un prisma recto con bases polígonos regulares de cinco lados:



En el desarrollo aparecen las dos bases y tantos rectángulos como lados tengan las bases.

Número de elementos de un prisma recto de base regular

No buscamos fórmulas (aunque las hay), sino darte métodos para hacer tú mismo los cálculos. Por ello, vamos a calcular el número de vértices, aristas, caras y diagonales así como la característica de Euler del prisma recto con bases polígonos regulares de cinco lados que vemos en la ilustración de más arriba.

Número de vértices

Hay dos grupos de cinco vértices cada uno: los de la base de arriba y los de la base de abajo. $2 \cdot 5 = 10$ vértices.

Número de aristas

Hay tres grupos de cinco aristas: el de la base de arriba, el de la base de abajo y el de las caras laterales. $3 \cdot 5 = 15$ aristas.

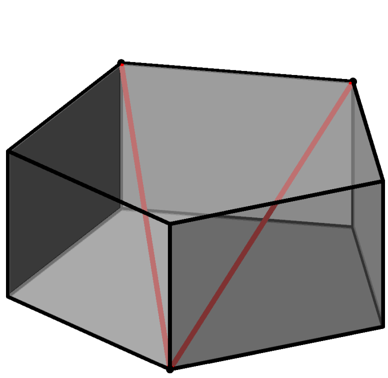
Número de caras

Hay dos bases y cinco caras laterales. $2 + 5 = 7$ caras.

Característica de Euler

$\chi = \text{V} - \text{A} + \text{C} = 10 - 15 + 7 = 2$

Número de diagonales



Nos fijamos en uno cualquiera de los vértices de la base de abajo. Desde él no puede salir ninguna diagonal a los vértices de la base de abajo (porque esos segmentos estarían en la base de abajo); tampoco puede salir ninguna diagonal al vértice que está encima de él (porque ese segmento es una arista) ni a ninguno de los dos que están justo a cada lado del vértice de arriba (porque esos segmentos estarían en una cara lateral); solo quedan disponibles dos vértices de la cara de arriba. Por tanto, de un vértice de la cara de abajo solo pueden salir dos diagonales.

$5 \cdot 2 = 10$ diagonales.

Observa que en este razonamiento también hemos tenido en cuenta las diagonales que salen de la cara de arriba.

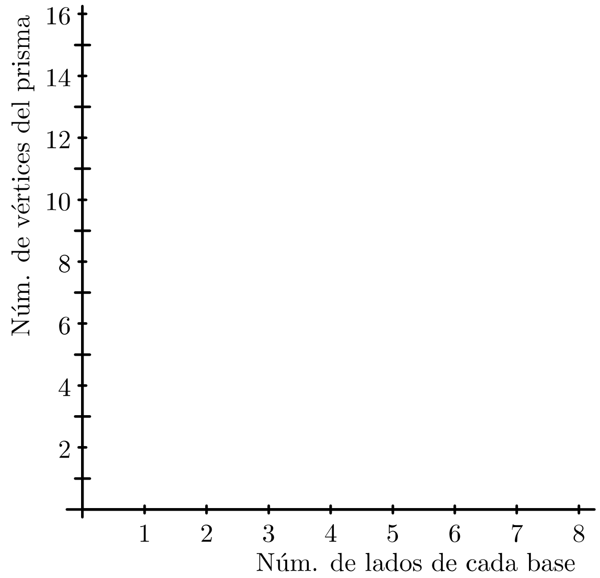
Enunciado

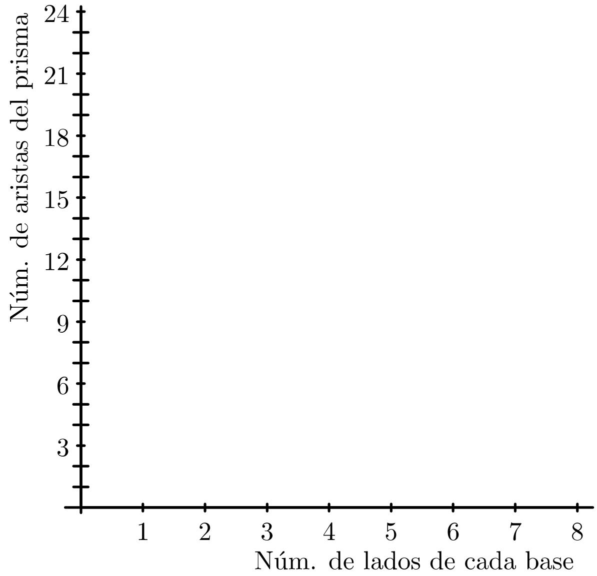
① Estudiamos prismas rectos que tienen como bases polígonos regulares. Queremos averiguar cómo varía el número de algunos de sus elementos según cuántos lados tengan cada una de las bases. Rellena la siguiente tabla de valores:

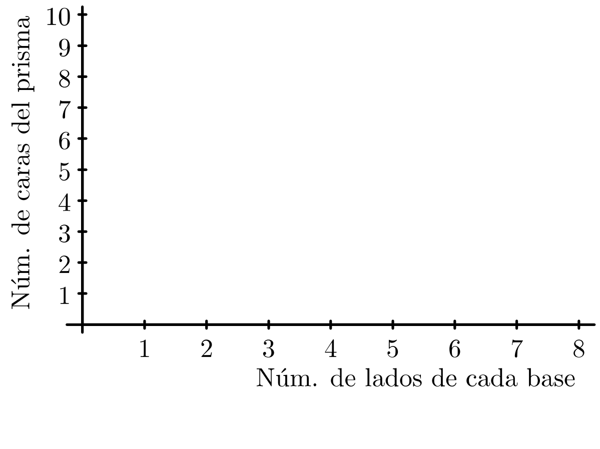
Número de lados de cada base	3	4	5	6	7	8
Número de vértices del prisma						
Número de aristas del prisma						
Número de caras del prisma						
Característica de Euler del prisma						
Número de diagonales del prisma						

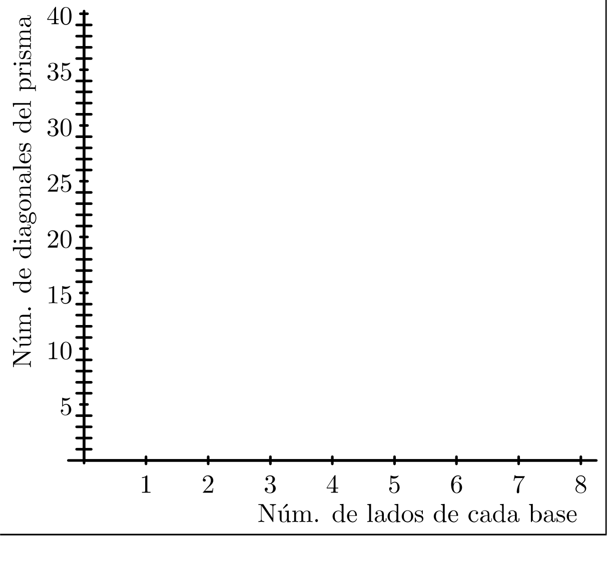
Enunciados

Usando los datos obtenidos en el ejercicio anterior, completa las siguientes representaciones gráficas:

②


③


④


⑤


Área de un prisma recto

- ✱ Para calcular el área de un prisma recto se considera que tiene dos bases iguales y varias caras laterales. Llamamos área lateral al área que suman todas las caras laterales. Si llamamos A al área del prisma, A_B al área de la base y A_L al área lateral, se verifica:

$$\boxed{A = 2 \cdot A_B + A_L}$$

- ✱ Para calcular el área de la base habrá que utilizar un método u otro, dependiendo del tipo de polígono que sea.
- ✱ Para calcular el área lateral lo más rápido es tener en cuenta que todas las caras laterales forman, en el desarrollo plano del prisma, un rectángulo: una de sus dimensiones es el perímetro de la base del prisma y la otra es la altura del prisma. Por tanto, si llamamos P al perímetro de la base del prisma y h a la altura del prisma, tenemos:

$$\boxed{A_L = P \cdot h}$$

Volumen de un prisma

- ✱ El volumen de un prisma (sea recto u oblicuo) es el producto del área de la base por la altura del prisma.
- ✱ Si llamamos V al volumen, A_B al área de la base y h a la altura del prisma:

$$\boxed{V = A_B \cdot h}$$

Ejemplo

Enunciado

Calcula el área y el volumen de un prisma recto de 3 metros de altura cuyas bases son pentágonos regulares de 2 metros de lado sabiendo que la apotema de un pentágono regular de 2 metros de lado mide 1,4 metros.

Resolución

Perímetro de la base: $P = 5 \cdot 2 = 10$

Área de la base: $A_B = 10 \cdot 1{,}4 : 2 = 7$

Área lateral: $A_L = P \cdot h = 10 \cdot 3 = 30$

Área: $A = 2 \cdot A_B + A_L = 2 \cdot 7 + 30 = 14 + 30 = 44$

Volumen: $V = A_B \cdot h = 7 \cdot 3 = 21$

Solución: el área es 44 m^2 y el volumen es 21 m^3

Observaciones

- ✱ El dibujo suele ser opcional, hazlo si lo necesitas.
- ✱ Como los datos están en metros, obtendremos las soluciones en las unidades adecuadas, con lo que no es necesario escribirlas en la resolución.
- ✱ Procura escribir con orden e indicando brevemente lo que haces.
- ✱ No es necesario escribir las fórmulas, puedes aplicarlas directamente.
- ✱ Puedes calcular el área lateral mientras calculas el área del prisma.
- ✱ Escribe claramente la solución; en ella sí deben aparecer las unidades.

Enunciados

Calcula el área y el volumen de los siguientes prismas rectos. Todas las medidas están en metros.

① La altura mide 10 y la base es un pentágono regular cuyo lado mide 20 y su apotema mide 14.

② La altura mide 2 y la base es un hexágono regular cuyo lado mide 1 y su apotema mide 0,87.

③ La altura mide 4 y la base es un decágono regular cuyo lado mide 10 y su apotema mide 15.

④ La altura mide 5 y la base es un pentágono regular cuyo lado mide 12 y su apotema mide 8,3.

⑤ La altura mide 3 y la base es un heptágono regular cuyo lado mide 14 y su apotema mide 15.

⑥ La altura mide 20 y la base es un octógono regular cuyo lado mide 5 y su apotema mide 6.

⑦ La altura mide 15 y la base es un hexágono regular cuyo lado mide 10 y su apotema mide 4,3.

⑧ La altura mide 40 y la base es un pentágono regular cuyo lado mide 20 y su apotema mide 14.

⑨ La altura mide 4 y la base es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12.

⑩ La altura mide 10 y la base es un triángulo cuyos lados miden 5, 5 y 6.

⑪ La altura mide 5 y la base es un rectángulo cuyas dimensiones miden 2 y 3.

⑫ La altura mide 8 y la base es un cuadrado cuyo lado mide 5.

⑬ La altura mide 4 y la base es un rombo cuyas diagonales miden 10 y 24.

⑭ La altura mide 7 y la base es un trapecio rectángulo cuyas bases miden 4 y 10 y cuya altura mide 8.

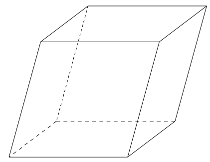
⑮ La altura mide 20 y la base es un trapecio isósceles cuyas bases miden 6 y 30 y sus otros dos lados miden 13.

Enunciados

⑯ Calcula el área y el volumen de un prisma recto sabiendo que su altura mide 30 metros, el área cada una de sus bases mide 10 m² y el perímetro de cada una de sus bases mide 20 metros.

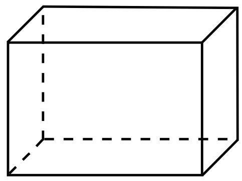
⑰ Calcula el volumen de un prisma oblicuo sabiendo que su altura mide 7 metros y el área cada una de sus bases mide 30 m².

Paralelepípedo



- ✱ Un paralelepípedo es un prisma que tiene todas las caras paralelogramos.
- ✱ De la definición se puede deducir que los paralelepípedos tienen las caras paralelas e iguales dos a dos.

Ortoedro



- ✱ Un ortoedro es un paralelepípedo que tiene todas las caras rectángulos.
- ✱ Un ortoedro queda perfectamente definido por sus tres dimensiones.
- ✱ Las dimensiones de un ortoedro reciben distintos nombres según el uso que se le dé: longitud, anchura, altura, profundidad..., pero desde el punto de vista matemático es indiferente el nombre que reciban.

Área y volumen de un ortoedro

Se pueden utilizar la fórmulas generales para el cálculo del área y el volumen de un prisma para calcular el área y el volumen de un ortoedro, pero es más sencillo utilizar fórmulas que aprovechen las particularidaes del ortoedro.

Si llamamos «a», «b» y «c» a las dimensiones de un ortoedro, se verifica:

$$\boxed{\text{Área} = 2(ab+ac+bc)} \qquad \boxed{\text{Volumen} = abc}$$

Ejemplo 1

Enunciado: calcula el área y el volumen del ortoedro de dimensiones 2 m, 5 m y 6 m.

Resolución

Área = $2(2\cdot5+2\cdot6+5\cdot6) = 2(10+12+30) = 2\cdot52 = 104$

Volumen = $2\cdot5\cdot6 = 60$

Solución: el área mide 104 m^2 y el volumen mide 60 m^3

Cubo

- ✱ Un cubo es ortoedro que tiene todas las caras cuadrados.
- ✱ Un cubo queda perfectamente determinado por la longitud de su lado.

Área y volumen de un ortoedro

Si llamamos «d» a la longitud del lado de un cubo, se verifica:

$$\boxed{\text{Área} = 6d^2} \qquad \boxed{\text{Volumen} = d^3}$$

Ejemplo 2

Enunciado: calcula el área y el volumen del cubo cuyo lado mide 7 m.

Resolución

Área = $6\cdot7^2 = 6\cdot49 = 294$; volumen = $7^3 = 343$

Solución: el área mide 294 m^2 y el volumen mide 343 m^3

Observaciones

- ✱ Todos los cubos son ortoedros, paralelepípedos y prismas.
- ✱ Todos los ortoedros son paralelepípedos y prismas.

Enunciados

En los siguientes enunciados todas las medidas están en metros.

① Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones miden 2, 3 y 4.

② Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones miden 1, 5 y 10.

③ Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones miden 3, 10 y 15.

④ Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones miden 1, 3 y 8.

⑤ Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones miden 5, 6 y 7.

⑥ Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones miden 10, 11 y 12.

⑦ Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones miden 4, 5 y 9.

⑧ Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones miden 3, 5 y 10.

⑨ Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones miden 7, 8 y 11.

⑩ Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones miden 4, 5 y 7.

⑪ Calcula el área y el volumen de un cubo cuyo lado mide 3.

⑫ Calcula el área y el volumen de un cubo cuyo lado mide 4.

⑬ Calcula el área y el volumen de un cubo cuyo lado mide 5.

⑭ Calcula el área y el volumen de un cubo cuyo lado mide 6.

⑮ Calcula el área y el volumen de un cubo cuyo lado mide 7.

⑯ Calcula el área y el volumen de un cubo cuyo lado mide 8.

⑰ Calcula el área y el volumen de un cubo cuyo lado mide 9.

⑱ Calcula el área y el volumen de un cubo cuyo lado mide 10.

⑲ Calcula el área y el volumen de un cubo cuyo lado mide 50.

⑳ Calcula el área y el volumen de un cubo cuyo lado mide 100.

Definición de pirámide

Una pirámide es un poliedro con estas características:

- Una de las caras es un polígono cualquiera, llamado **base**.
- Solo hay un vértice que no pertenezca a la base. Este vértice suele llamarse, de una manera ciertamente confusa, **vértice de la pirámide**; pero también se puede denominar **ápice** o **cúspide**, que son designaciones mucho más claras.
- Todas las demás caras son triángulos que tienen como uno de los vértices el ápice. Estas caras se llaman **caras laterales**.

Elementos de una pirámide

- **Altura** de una pirámide es cualquier segmento que una el ápice con la base y sea perpendicular a la base.
- Si las caras laterales son todas iguales, se llama **apotema** de la pirámide a la altura de la cara lateral.

Pirámides rectas y pirámides oblicuas

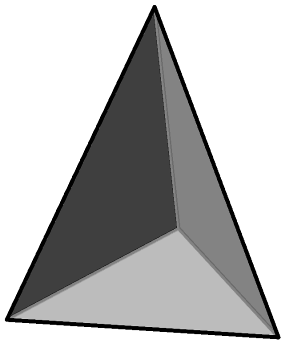
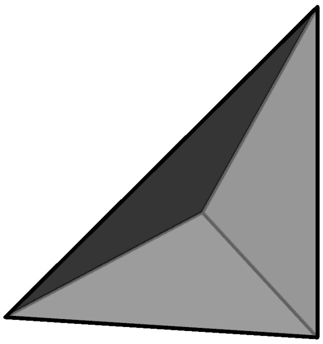
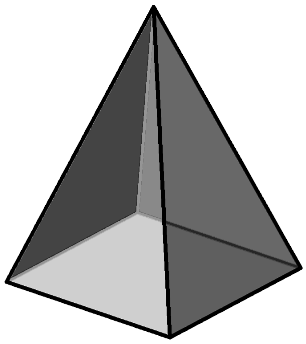
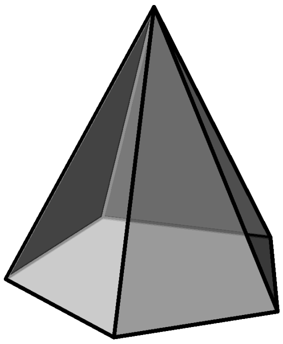
- Si todas las caras laterales son iguales, la pirámide se llama pirámide recta.
- Si no todas las caras laterales son iguales, la pirámide se llama pirámide oblicua.
- Si no se especifica si una pirámide es recta u oblicua, casi siempre entendemos que se trata de una pirámide recta.

Nombres de las pirámides

La mayor parte de las pirámides que se utilizan tienen como base un polígono regular; en ese caso la pirámide se llama **pirámide regular**.

Se suelen denominar las pirámides a partir del tipo de polígono que tengan como base: pirámide triangular, pirámide cuadrangular, pirámide pentagonal, etc.

Ejemplos de pirámides

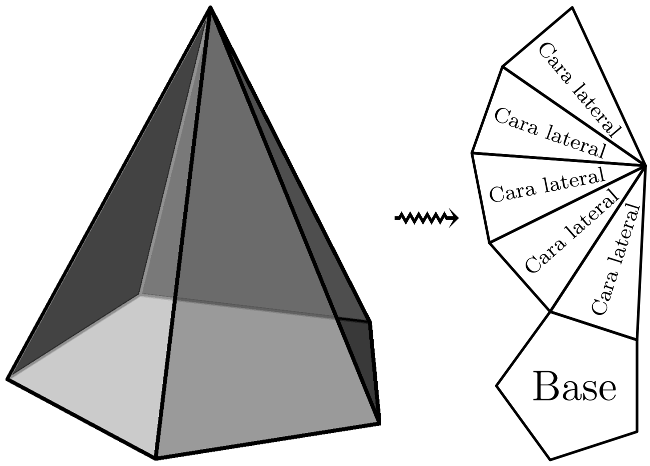
Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
			
Pirámide recta de base triangular	Pirámide oblicua de base triangular	Pirámide recta de base cuadrada	Pirámide recta de base pentagonal

Pirámides de Egipto

Seguramente son las pirámides más famosas. La mayor parte de ellas son pirámides de base cuadrada. En la fotografía de la derecha vemos las pirámides de Guiza.

Desarrollo plano de una pirámide recta

Como ejemplo presentamos el desarrollo plano de una pirámide recta con base un polígono regular de cinco lados:



En el desarrollo aparece la base y tantos triángulos iguales como lados tiene la base.

Número de elementos de una pirámide recta de base regular

No buscamos fórmulas (aunque las hay), sino darte métodos para hacer tú mismo los cálculos. Por ello, vamos a calcular el número de vértices, aristas, caras y diagonales así como la característica de Euler de la pirámide recta con base un polígono regular de cinco lados que vemos en la ilustración de más arriba.

Número de vértices

Hay un grupo de cinco vértices en la base y además el ápice.

$5 + 1 = 6$ vértices.

Número de aristas

Hay dos grupos de cinco aristas: el de la base y el de las caras laterales.

$2 \cdot 5 = 10$ aristas.

Número de caras

Hay una base y cinco caras laterales.

$1 + 5 = 6$ caras.

Característica de Euler

$\chi = V - A + C = 6 - 10 + 6 = 2$

Número de diagonales

La pirámide no tiene ninguna diagonal, porque:

- ✱ Cualquier segmento que una dos vértices de la base estará contenido en ella.
- ✱ Cualquier segmento que una un vértice de la base con el ápice será una arista asociada a dos caras laterales.

Enunciado

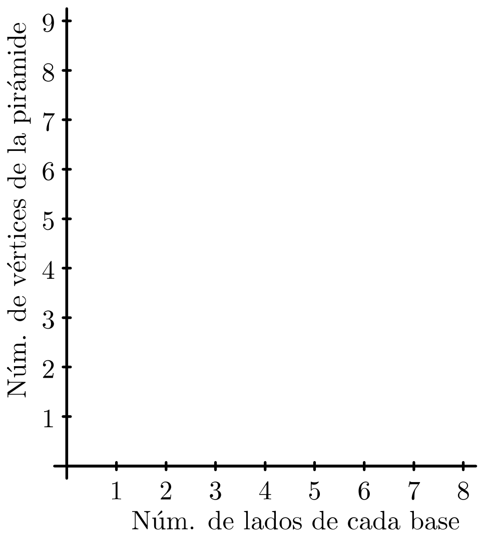
① Estudiamos pirámides rectas que tienen como base un polígono regular. Queremos averiguar cómo varía el número de algunos de sus elementos según cuántos lados tenga la base. Rellena la siguiente tabla de valores:

Número de lados de la base	3	4	5	6	7	8
Número de vértices de la pirámide						
Número de aristas de la pirámide						
Número de caras de la pirámide						
Característica de Euler de la pirámide						
Número de diagonales de la pirámide						

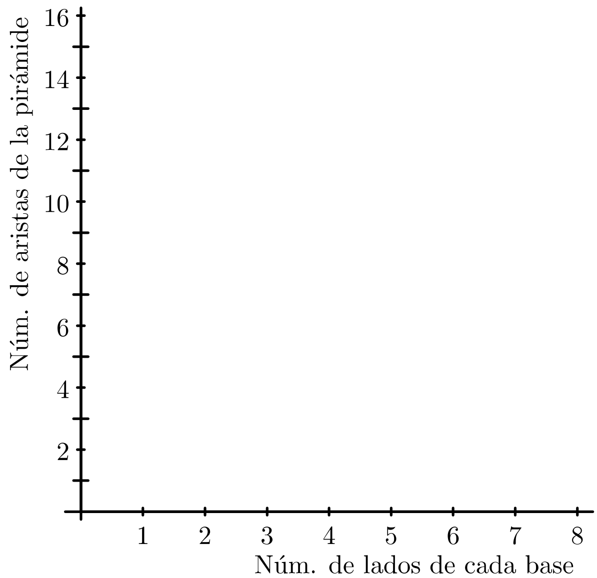
Enunciados

Usando los datos obtenidos en el ejercicio anterior, completa las siguientes representaciones gráficas:

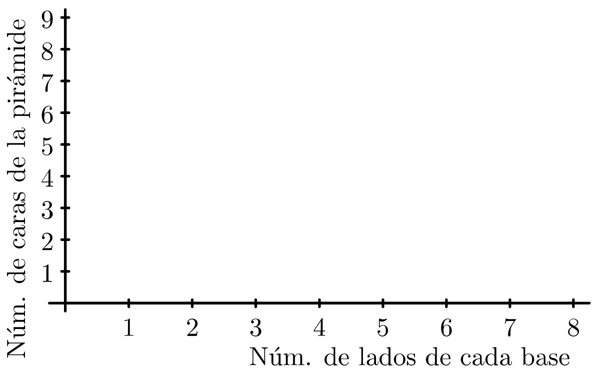
②



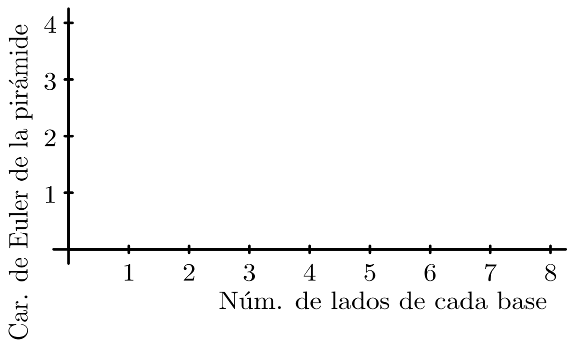
③



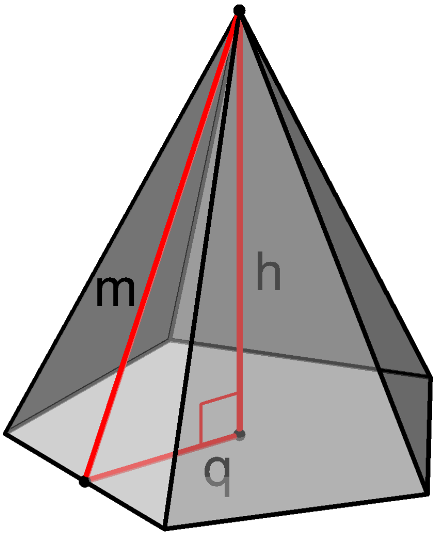
④



⑤



Relación entre elementos de una pirámide regular recta



- ✱ La altura de la pirámide que pasa por el ápice, la apotema de la pirámide y la apotema de la base forman un triángulo rectángulo.
- ✱ Los catetos del triángulo rectángulo son la altura de la pirámide que pasa por el ápice y la apotema de la base.
- ✱ La hipotenusa del triángulo rectángulo es la apotema de la pirámide.
- ✱ Como consecuencia, podemos aplicar el teorema de Pitágoras y así relacionar las longitudes de los tres segmentos.
- ✱ Si llamamos *h* a la longitud de la altura de la pirámide que pasa por el ápice, *m* a la longitud de la apotema de la pirámide y *q* a la longitud de la apotema de la base, se verifica

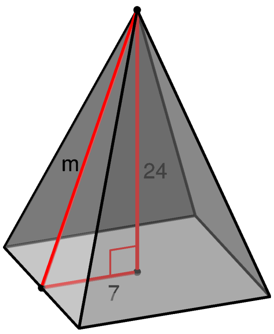
$$\boxed{m^2 = h^2 + q^2}$$

- ✱ Esta relación es muy importante porque en ejercicios y problemas solo dispondremos de dos de los datos y quizá necesitemos calcular el tercero.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula la longitud de la apotema de una pirámide recta de 24 metros de altura que tiene como base un cuadrado de 14 metros de lado.

Resolución



El cuadrado es un polígono regular de cuatro lados. La apotema de un cuadrado mide la mitad del lado. Por tanto, si el lado mide 14, la apotema mide 7.

En este problema tenemos estos datos:

Altura de la pirámide: 24; apotema de la base: 7.

Llamamos *m* a la longitud de la apotema de la pirámide.

$m^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 \Rightarrow p = \sqrt{625} = 25$

Solución: 25 metros.

Ejemplo 2

Enunciado: calcula la longitud del lado del cuadrado de la base de una pirámide recta de 15 m de altura sabiendo que la apotema de la pirámide mide 17 m.

Resolución

En este problema tenemos estos datos:

Altura de la pirámide: 15; apotema de la pirámide: 17.

Llamamos *q* a la longitud de la apotema de base.

$17^2 = q^2 + 15^2 \Rightarrow q^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64 \Rightarrow q = \sqrt{64} = 8.$

Como en un cuadrado el lado mide el doble que la apotema, lado $= 2 \cdot 8 = 16$

Solución: 16 metros.

Área de una pirámide recta

- Para calcular el área de una pirámide recta se considera que tiene una base y varias caras laterales. Llamamos área lateral al área que suman todas las caras laterales. Si llamamos A al área de la pirámide, A_B al área de la base y A_L al área lateral, se verifica:

$$\boxed{A = A_B + A_L}$$

- Para calcular el área de la base habrá que utilizar un método u otro, dependiendo del tipo de polígono que sea.
- El área lateral hay que calcularla como la suma de las áreas de varios triángulos isósceles iguales, lo que permite encontrar una fórmula rápida de hacerlo.

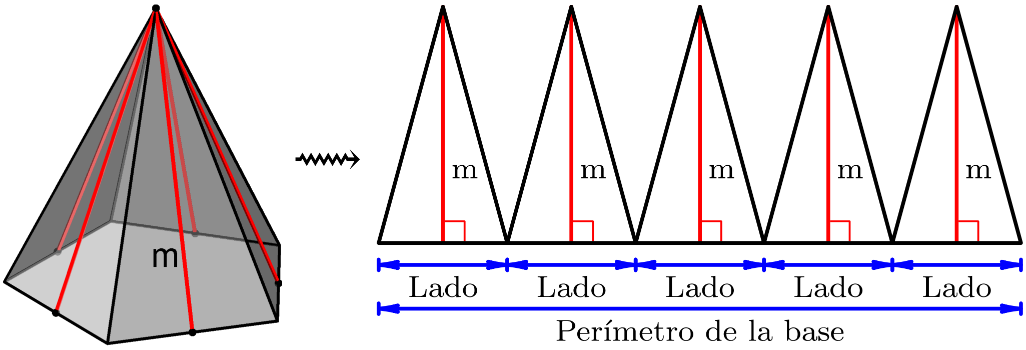
Área lateral de una pirámide recta

Si llamamos «P» al perímetro de la base y «m» a la apotema de la pirámide, se verifica que:

$$\boxed{A_L = \frac{1}{2} \cdot P \cdot m}$$

Demostración

La demostración la dirigimos viendo el desarrollo plano de las caras laterales de la pirámide, pero colocado de una manera algo distinta a lo habitual:



Las caras laterales son triángulos cuya base es el lado de la base de la pirámide y cuya altura es la apotema de la pirámide.

El área de cada cara lateral es $\frac{1}{2} \cdot \text{Lado} \cdot \text{m}$.

Si llamamos «n» al número de lados de la base de la pirámide, el área lateral se calcula multiplicando por «n» el área de cada cara lateral:

$A_L = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{Lado} \cdot m = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \text{Lado} \cdot m = \frac{1}{2} \cdot P \cdot m$, ya que $n \cdot \text{Lado} = P$.

Ejemplo

Enunciado: calcula el área de una pirámide recta de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 5 metros y la apotema de la pirámide mide 7 metros.

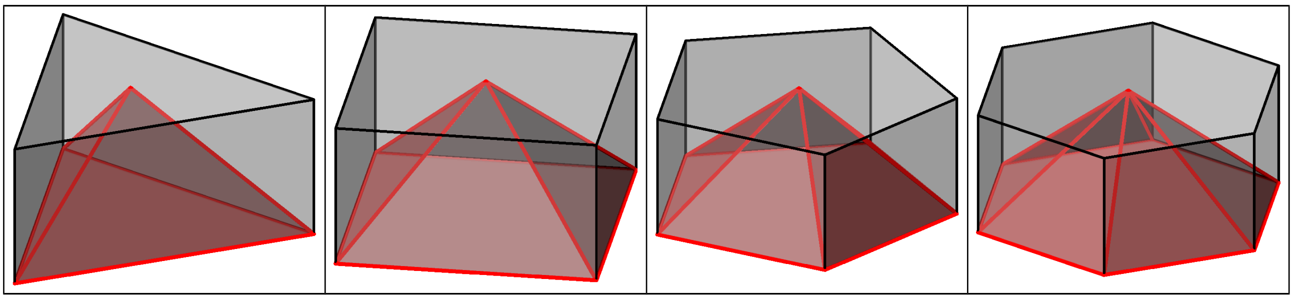
Resolución

$A = A_B + A_L = 5^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 25 + 2 \cdot 35 = 25 + 70 = 95$

Solución: 95 m^2

Volumen de una pirámide

- ✱ El volumen de una pirámide (sea recta u oblicua) es un tercio del volumen que tenga un prisma con la misma base y la misma altura.
- ✱ Vemos cuál es la idea: las pirámides (en rojo) que hay dentro de los prismas (en negro) tienen la tercera parte de volumen.

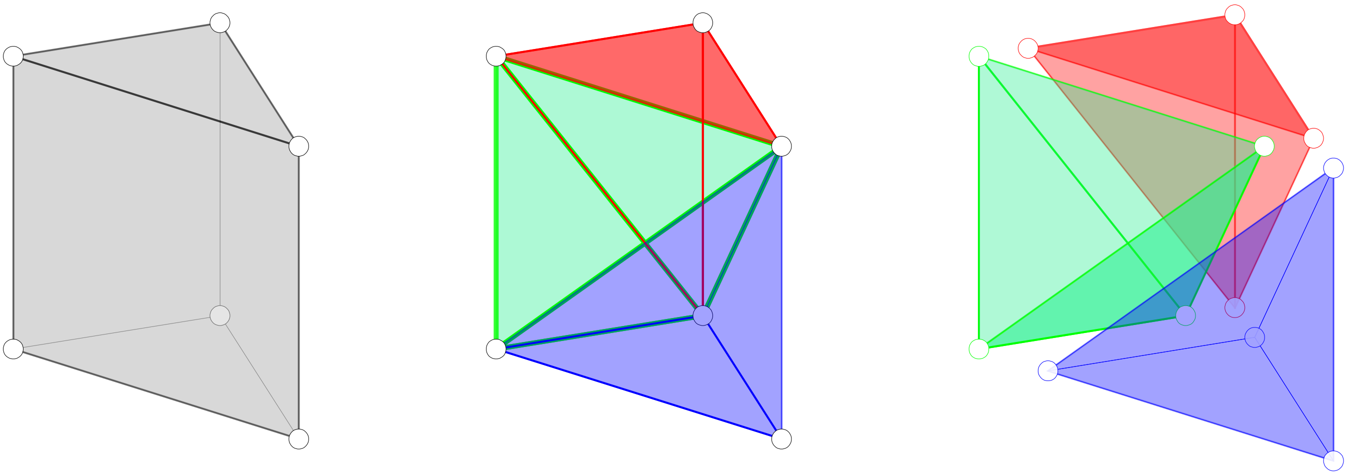


- ✱ Si llamamos V al volumen, A_B al área de la base y h a la altura de la pirámide:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h}$$

Demostración

La demostración no está al alcance de este nivel de conocimientos de matemáticas, pero puedes ver en esta ilustración cómo se descompone con habilidad un prisma en tres pirámides idénticas que tienen la misma base y altura que el prisma original:



Ejemplo

Enunciado

Calcula el volumen de una pirámide de 6 metros de altura sabiendo que su base tiene un área de 5 metros cuadrados.

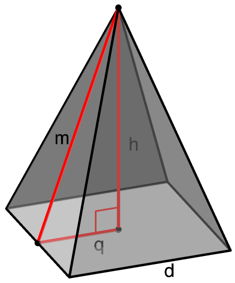
Resolución

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 6 = 5 \cdot 2 = 10$$

Solución: 10 m^3

Cálculo de área y volumen de una pirámide

En la mayoría de los casos estos cálculos son inexactos y es mejor afrontarlos con la ayuda de una calculadora. Por esta razón, en este nivel vamos a trabajar con casos especialmente seleccionados: pirámides rectas de base cuadrada.



Vamos a usar en todos los ejemplos esta notación:

- Área: A; área de la base: A_B; área lateral: A_L; volumen: V.
- Altura de la pirámide: h; apotema de la pirámide: m.
- Lado de la base: d; apotema de la base: q.

Con esta notación, sabemos que se verifica:

- $m^2 = h^2 + q^2$; $d = 2q$.

Enunciados

Calcula el área y el volumen de las pirámides de base cuadrada con los datos de cada caso. Todas las medidas están en metros.

① $d = 32$, $m = 65$ ② $h = 60$, $m = 61$ ③ $h = 45$, $d = 56$

Resoluciones

① $d = 32 \Rightarrow q = d:2 = 32:2 = 16$

$h^2+q^2 = m^2 \Rightarrow h^2+16^2 = 65^2 \Rightarrow h^2 = 65^2-16^2 = 4225-256 = 3969 \Rightarrow h= \sqrt{3969} =63$

$$A = A_B+A_L = d^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot d\cdot h = 32^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 32\cdot 65 = 1024 + 2\cdot 2080 = 5184$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot A_B\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 32^2\cdot 63 = 1024\cdot 21 = 21\,504$$

Solución: el área es 5184 m^2 y el volumen es 21 504 m^3

② $h^2+q^2 = m^2 \Rightarrow 60^2+q^2 = 61^2 \Rightarrow q^2 = 61^2-60^2 = 3721-3600 = 121 \Rightarrow q = \sqrt{121} = 11$

$q = 11 \Rightarrow d = 2\cdot q = 2\cdot 11 = 22$

$$A = A_B+A_L = d^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot d\cdot h = 22^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 22\cdot 61 = 484 + 2\cdot 1342 = 3168$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot A_B\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 22^2\cdot 60 = 484\cdot 20 = 9680$$

Solución: el área es 3168 m^2 y el volumen es 9680 m^3

③ $d = 56 \Rightarrow q = d:2 = 56:2 = 28$

$m^2 = h^2 + q^2 \Rightarrow m^2 = 45^2 + 28^2 = 2025+784 = 2809 \Rightarrow m = \sqrt{2809} = 53$

$$A = A_B+A_L = d^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot d\cdot h = 56^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 56\cdot 53 = 3136 + 2\cdot 2968 = 9072$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot A_B\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 56^2\cdot 45 = 3136\cdot 15 = 47\,040$$

Solución: el área es 9072 m^2 y el volumen es 47 040 m^3

Enunciados

Calcula el área y el volumen de las siguientes pirámides rectas de base cuadrada. Todas las medidas están en metros.

① El lado de la base mide 6 y la apotema de la pirámide mide 5.

② La altura mide 12 y la apotema de la pirámide mide 13.

③ El lado de la base mide 14 y la altura mide 24.

④ El lado de la base mide 16 y la apotema de la pirámide mide 17.

⑤ La altura mide 40 y la apotema de la pirámide mide 41.

⑥ El lado de la base mide 70 y la altura mide 12.

⑦ El lado de la base mide 168 y la apotema de la pirámide mide 85.

⑧ La altura mide 63 y la apotema de la pirámide mide 65.

⑨ El lado de la base mide 40 y la altura mide 21.

⑩ El lado de la base mide 160 y la apotema de la pirámide mide 89.

⑪ La altura mide 33 y la apotema de la pirámide mide 65.

⑫ El lado de la base mide 154 y la altura mide 36.

⑬ El lado de la base mide 110 y la apotema de la pirámide mide 73.

⑭ La altura mide 72 y la apotema de la pirámide mide 97.

⑮ El lado de la base mide 72 y la altura mide 15.

⑯ El lado de la base mide 40 y la apotema de la pirámide mide 101.

⑰ La altura mide 69 y la apotema de la pirámide mide 269.

⑱ El lado de la base mide 182 y la altura mide 60.

⑲ El lado de la base mide 238 y la apotema de la pirámide mide 169.

⑳ La altura mide 189 y la apotema de la pirámide mide 389.

㉑ El lado de la base mide 266 y la altura mide 156.

㉒ El lado de la base mide 638 y la apotema de la pirámide mide 481.

㉓ La altura mide 209 y la apotema de la pirámide mide 241.

㉔ El lado de la base mide 448 y la altura mide 207.

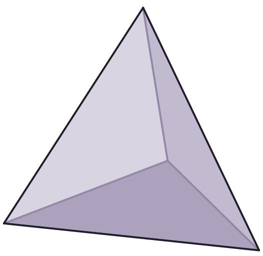
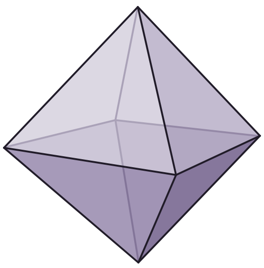
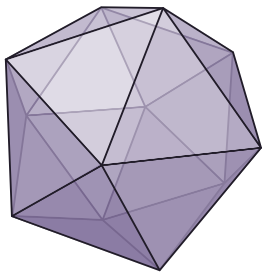
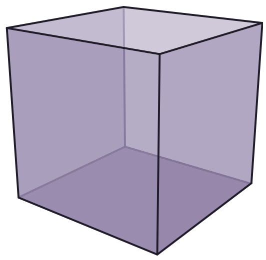
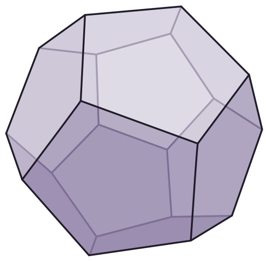
Definición de poliedro regular

Un poliedro regular es un poliedro que cumple estas tres condiciones:

1. Todas sus caras son **polígonos regulares**. Es decir: pueden ser triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares. Ya veremos que no pueden ser polígonos de más lados.
2. Todas sus caras son **idénticas**. Es decir, son todas exactamente iguales, no se pueden mezclar diferentes polígonos regulares ni tamaños.
3. Todos los vértices pertenecen al **mismo número de caras**. También se puede decir esta propiedad como que en cada vértice concurre el mismo número de caras.

Poliedros regulares

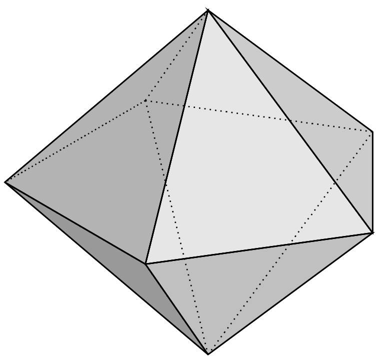
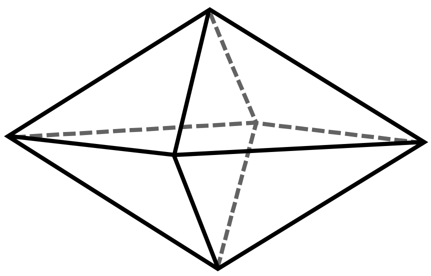
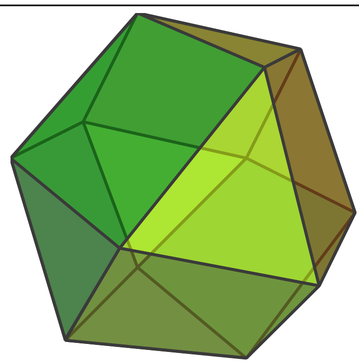
Como veremos, solo hay cinco. Los nombres que reciben provienen del número de caras que tienen, expresado con prefijos que provienen del griego.

Tetraedro	**Octaedro**	**Icosaedro**	**Hexaedro**	**Dodecaedro**
				
Cuatro caras	Ocho caras	Veinte caras	Seis caras	Doce caras

* El tetraedro es un caso particular de pirámide.
* El hexaedro es un caso particular de prisma, de paralelepípedo y de ortoedro.
* El hexaedro también se llama cubo; las dos palabras son sinónimas. Pero cuando nos referimos a él como uno de los poliedros regulares, es costumbre elegir la denominación hexaedro.

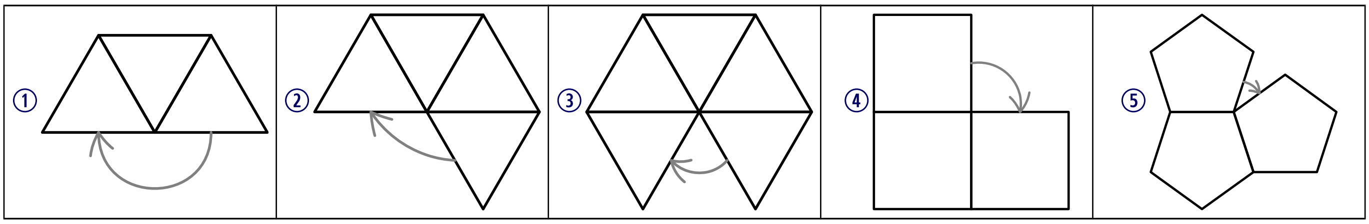
Algunos poliedros que no son regulares

Entre la gran variedad de poliedros, los hay que no son poliedros regulares porque no cumplen todas las condiciones, aunque sí cumplen algunas de ellas.

Bipirámide pentagonal con triángulos equiláteros	**Bipirámide cuadrangular con triángulos isósceles**	**Cuboctaedro**
		
Cumple (1) y (2). No cumple (3)	Cumple (2) y (3). No cumple (1)	Cumple (1) y (3). No cumple (2)

Obtención de los poliedros regulares

Es posible deducir metódicamente cuántos y cuáles son los poliedros regulares.



Las caras son triángulos equiláteros

Los ángulos de un triángulo equilátero tienen una amplitud de 60°.

* Si concurren tres triángulos equiláteros en cada vértice, suman 180° y por tanto se podrán doblar en el espacio. Así obtenemos el tetraedro (1).
* Si concurren cuatro triángulos equiláteros en cada vértice, suman 240° y por tanto se podrán doblar en el espacio. Así obtenemos el octaedro (2).
* Si concurren cinco triángulos equiláteros en cada vértice, suman 300° y por tanto se podrán doblar en el espacio. Así obtenemos el icosaedro (3).
* Si concurren seis triángulos equiláteros en cada vértice, suman 360° y por tanto no se podrán doblar en el espacio.
* No pueden concurrir más de seis triángulos equiláteros en un vértice porque sumarían más de 360°.

Las caras son cuadrados

Los ángulos de un cuadrado tienen una amplitud de 90°.

* Si concurren tres cuadrados en cada vértice, suman 270° y por tanto se podrán doblar en el espacio. Así obtenemos el hexaedro (4).
* Si concurren cuatro cuadrados en cada vértice, sumarán 360° y por tanto no se podrán doblar en el espacio.
* No pueden concurrir más de cuatro cuadrados en cada vértice porque sumarían más de 360°.

Las caras son pentágonos regulares

Los ángulos de un pentágono regular tienen una amplitud de 108°.

* Si concurren tres pentágonos regulares en cada vértice, sumarán 324° y por tanto se podrán doblar en el espacio. Así obtenemos el dodecaedro (5).
* No se pueden reunir cuatro pentágonos regulares en cada vértice porque sumarán 432° en ese vértice.
* No pueden concurrir más de cuatro pentágonos regulares en cada vértice porque sumarían más de 360°.

Las caras son hexágonos regulares

Los ángulos de un hexágono regular tienen una amplitud de 120°.

* Si concurren tres hexágonos regulares en cada vértice, sumarán 360° y por tanto no se podrán doblar en el espacio.
* No pueden concurrir más de tres hexágonos regulares en cada vértice porque sumarían más de 360°.

Las caras son polígonos regulares de más de seis lados

Cada ángulo sería mayor de 128° y no podrían concurrir ni tres en un vértice.

Número de elementos de los poliedros regulares

Vamos a examinar cúantas caras, aristas y vértices tienen cada uno de los cinco poliedros regulares. Debes saberte de memoria el número de caras de cada uno, porque es lo que les da nombre. Para el resto de los elementos tienes dos opciones:

* **Contarlos**. En los casos más sencillos (tetraedro, octaedro y hexaedro), basta visualizar el poliedro y contar.
* **Calcularlos**. En los casos más complicados (icosaedro y dodecaedro), hay que hacer una operación, que explicaremos.

Los cinco poliedros regulares

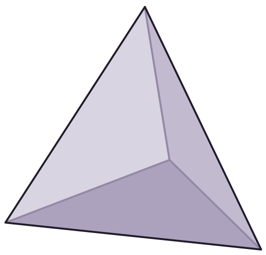
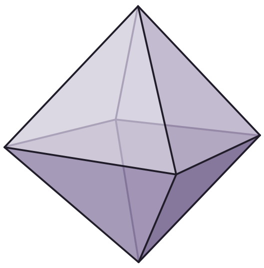
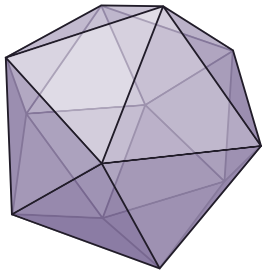
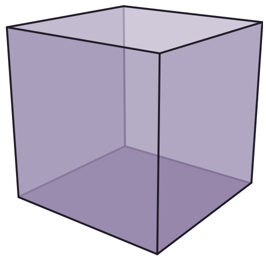
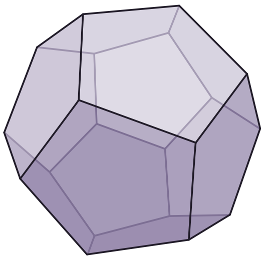
Tetraedro	Octaedro	Icosaedro	Hexaedro	Dodecaedro
				

Tabla con los datos

Nombre	Tetraedro	Octaedro	Icosaedro	Hexaedro	Dodecaedro
Número de caras	4	8	20	6	12
Núm. de aristas	6	12	30	12	30
Núm. de vértices	4	6	12	8	20
Car. de Euler	2	2	2	2	2

Técnicas de cálculo

* **Aristas del icosaedro**. El icosaedro tiene 20 caras, cada cara tiene 3 aristas y cada arista pertenece a 2 caras.

  Por tanto: número de aristas del icosaedro = $20 \cdot 3 : 2 = 30$.
* **Vértices del icosaedro**. El icosaedro tiene 20 caras, cada cara tiene 3 vértices y cada vértice pertenece a 5 caras.

  Por tanto: número de vértices del icosaedro = $20 \cdot 3 : 5 = 12$.
* **Aristas del dodecaedro**. El dodecaedro tiene 12 caras, cada cara tiene 5 aristas y cada arista pertenece a 2 caras.

  Por tanto: número de aristas del dodecaedro = $12 \cdot 5 : 2 = 30$.
* **Vértices del dodecaedro**. El dodecaedro tiene 12 caras, cada cara tiene 5 vértices y cada vértice pertenece a 3 caras.

  Por tanto: número de vértices del dodecaedro = $12 \cdot 5 : 3 = 20$.

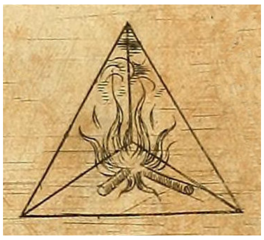
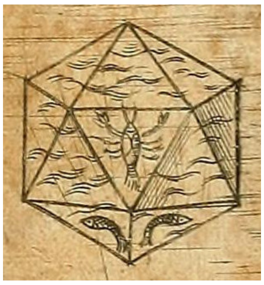
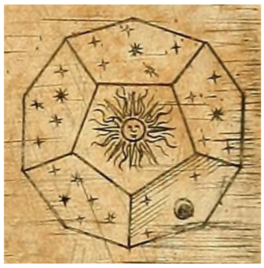
Consejo

Entiende bien estas técnicas de cálculo (que realmente son todas la misma, aplicada a distintos casos) porque te pueden dar buenas indicaciones para resolver otros problemas similares.

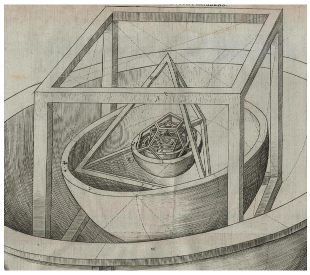
Los poliedros regulares en la Grecia Antigua

La humanidad conoce la existencia de los poliedros regulares desde antes de la Grecia Antigua, pero en ella fueron estudiados con mucho detenimiento. De hecho, los cinco poliedros regulares también se conocen como **sólidos platónicos**, en honor al filósofo griego Platón (387 a. e. c. - 347 a. e. c.).

Este asoció los poliedros regulares con los elementos que él pensaba que constituían la naturaleza (como le sobraba uno, asoció el dodecaedro con el orden del universo). El astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) representó esta asociación en su obra *Mysterium Cosmographicum* así:

Tetraedro	**Octaedro**	**Icosaedro**	**Hexaedro**	**Dodecaedro**
				
Fuego	Aire	Agua	Tierra	Universo

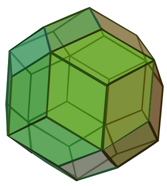
Los poliedros regulares en Johannes Kepler



Cuando vivía Johannes Kepler, solo eran conocidos seis planetas: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. El astrónomo intentó durante mucho tiempo, infructuosamente, asociar las órbitas de los cinco planetas que no son la Tierra a cada uno de los cinco poliedros regulares. Aún así, llegó a enunciar correctamente las tres leyes que llevan su nombre y describen algunas propiedades de las órbitas de los planetas. A la derecha vemos uno de los dibujos que realizó.

Los poliedros regulares en los juegos de azar

Las características de los poliedros regulares los hacen muy adecuados para su uso en los juegos de azar. El dado más conocido es el formado a partir del hexaedro, que se usa en multitud de juegos, pero también existen dados fabricados a partir de los otros cuatro. Salvo en el caso del tetraedro, siempre queda una de las caras en la parte superior.



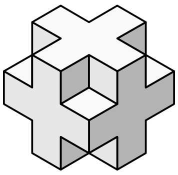
Los poliedros regulares no son los únicos poliedros que usan para la creación de dados, porque hay interesantes poliedros que tienen todas las caras exactamente iguales. A la derecha vemos el triacontaedro rómbico, que tiene treinta caras que son rombos idénticos.

Enunciados

① Las dimensiones de un ortoedro son 3 metros, 4 metros y 12 metros. Calcula la longitud de cualquiera de sus diagonales.

② Vamos a pintar un contenedor de forma ortoédrica de 2,5 metros de altura que tiene una base de 5 metros por 4 metros con una pintura que cuesta 1,4 euros cada metro cuadrado. En las paredes solo daremos una mano de pintura pero en el techo daremos tres y no hay que pintar el suelo. ¿Cuánto nos costará la pintura?

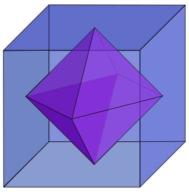
③ Calcula el área y el volumen del poliedro de la figura sabiendo que todas sus aristas miden un metro y todos sus ángulos son rectos.



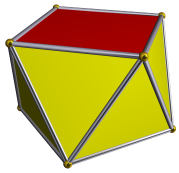
④ En una escultura con forma de cubo perfecto de un metro de lado queremos pintar una línea que vaya desde uno de sus vértices hasta el vértice diagonalmente opuesto gastando la menor cantidad posible de pintura. Calcula la longitud de la línea y da el resultado en metros redondeando a la décima.

⑤ En una escultura con forma de ortoedro perfecto de dimensiones 12 metros, 12 metros y 4 metros queremos pintar una línea que vaya desde uno de sus vértices hasta el vértice diagonalmente opuesto gastando la menor cantidad posible de pintura. Calcula la longitud de la línea y da el resultado en metros.

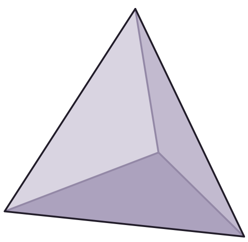
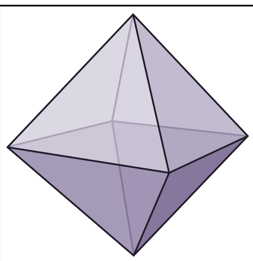
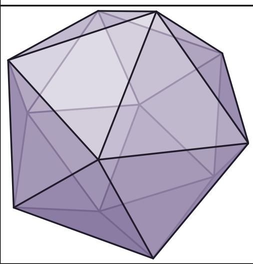
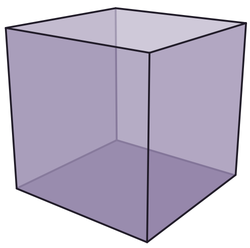
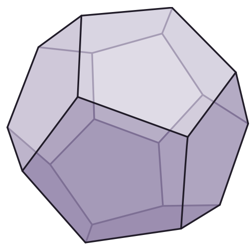
⑥ Si se unen los puntos centrales de las caras de un hexaedro se obtiene un octaedro (se dice que octaedro es el poliedro **dual** del hexaedro). Si la arista del hexaedro mide dos metros, calcula la longitud de la arista del octaedro y da el resultado en metros redondeando a la décima.



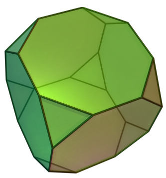
⑦ Los **antiprismas** son poliedros con dos bases, como los prismas, pero unidas entre sí mediante triángulos isósceles. Calcula el área de un antiprisma de bases cuadradas sabiendo que el lado de los cuadrados mide diez metros y las aristas laterales miden trece metros.



⑧ Averigua el número de diagonales de los poliedros regulares.

Tetraedro	**Octaedro**	**Icosaedro**	**Hexaedro**	**Dodecaedro**
				

⑨ Averigua el número de caras, aristas y vértices del **hexaedro truncado**, poliedro obtenido recortando los vértices de un hexaedro en triángulos equiláteros hasta que las caras originales pasan a ser hexágonos regulares. ¿Cuál es su característica de Euler?

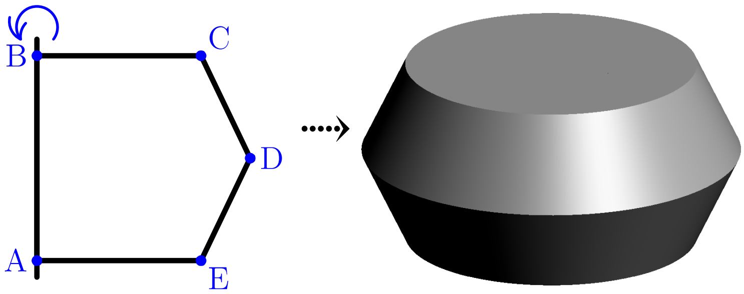


Definición de cuerpo de revolución

- Un cuerpo de revolución es una figura tridimensional obtenida al hacer girar una figura plana alrededor de una recta, llamada eje de giro.
- Es importante observar que todos los puntos del polígono describen una circunferencia, excepto los puntos que están en el eje de giro.

Ejemplo 1

Si hacemos girar el polígono ABDCE alrededor de la recta que contiene al lado AB, se obtiene el cuerpo de revolución que se ve a la derecha:

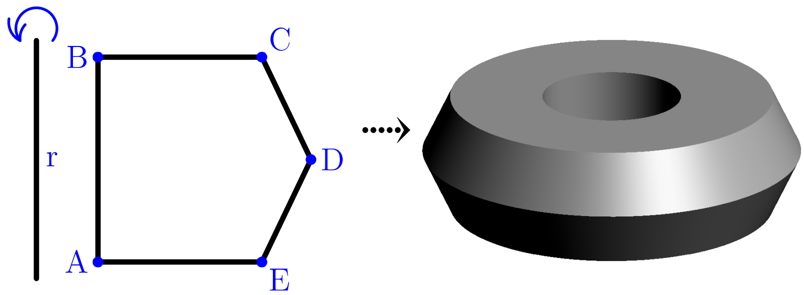


Observación

El eje de giro puede ser cualquier recta, que no es obligatorio ni que contenga a algún lado del polígono ni que pase por el polígono

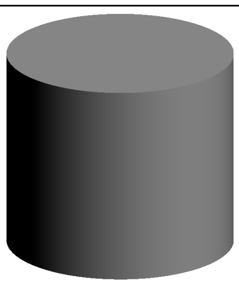
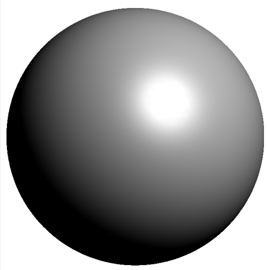
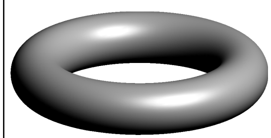
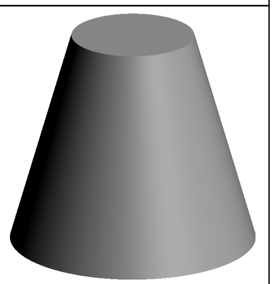
Ejemplo 2

Si hacemos girar el polígono ABDCE alrededor de la recta r, se obtiene el cuerpo de revolución que se ve a la derecha, que tiene lo que podríamos denominar «un agujero».



Cuerpos de revolución importantes

Mostramos los cuerpos de revolución más conocidos y estudiados:

Cilindro	Cono	Esfera	Toro	Tronco de cono
				

Cuerpos de revolución en la industria

Desde tiempos inmemoriales la humanidad ha estado utilizado distintos tipos de cuerpos de revolución. Incluso ha inventado herramientas para crearlos.

Ejemplos

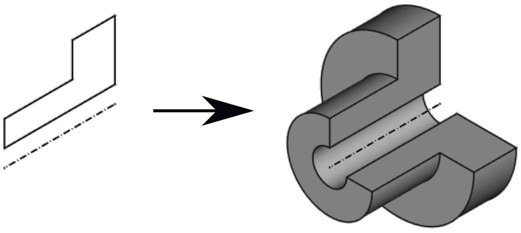
Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		
Los alfareros llevan siglos creando cuerpos de revolución girando sus tornos	Se pueden trabajar piezas de madera con tornos eléctricos para darles forma	Muchos soportes para las tartas son cuerpos de revolución

Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6
		
Los donuts son tan populares que su nombre se usa comúnmente para el toro	La parte principal de las campanas es un cuerpo de revolución	Las bombillas, eliminando la rosca, también son cuerpos de revolución

Cuerpos de revolución en programas de diseño

Muchos programas de diseño 3D disponen de una herramienta que permite generar un cuerpo de revolución a partir de cualquier figura plana.

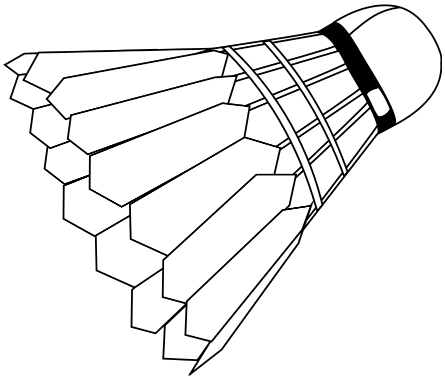
En esta ilustración, tomada del manual del programa *FreeCAD*, vemos un ejemplo del uso de esta herramienta, con la salvedad de que la rotación de la figura plana no ha sido completa, sino solo de 270°. Esto se hace muy a menudo para mostrar cómo son las piezas por dentro; se supone que en el diseño final la rotación será completa.

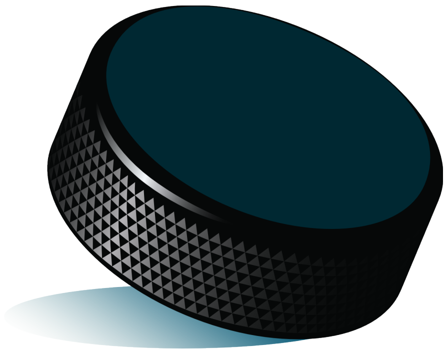


Cuerpos de revolución en el deporte

El hecho de que los cuerpos de revolución presenten superficies curvas que suelen ser uniformes los hace muy adecuados para su uso en varios deportes.

Ejemplos

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		
En muchos deportes se usan balones o pelotas que son esferas	En rugby el balón no es una esfera, para introducir incertidumbre en cada bote	La estructura general del volante del badmington es un cuerpo de revolución

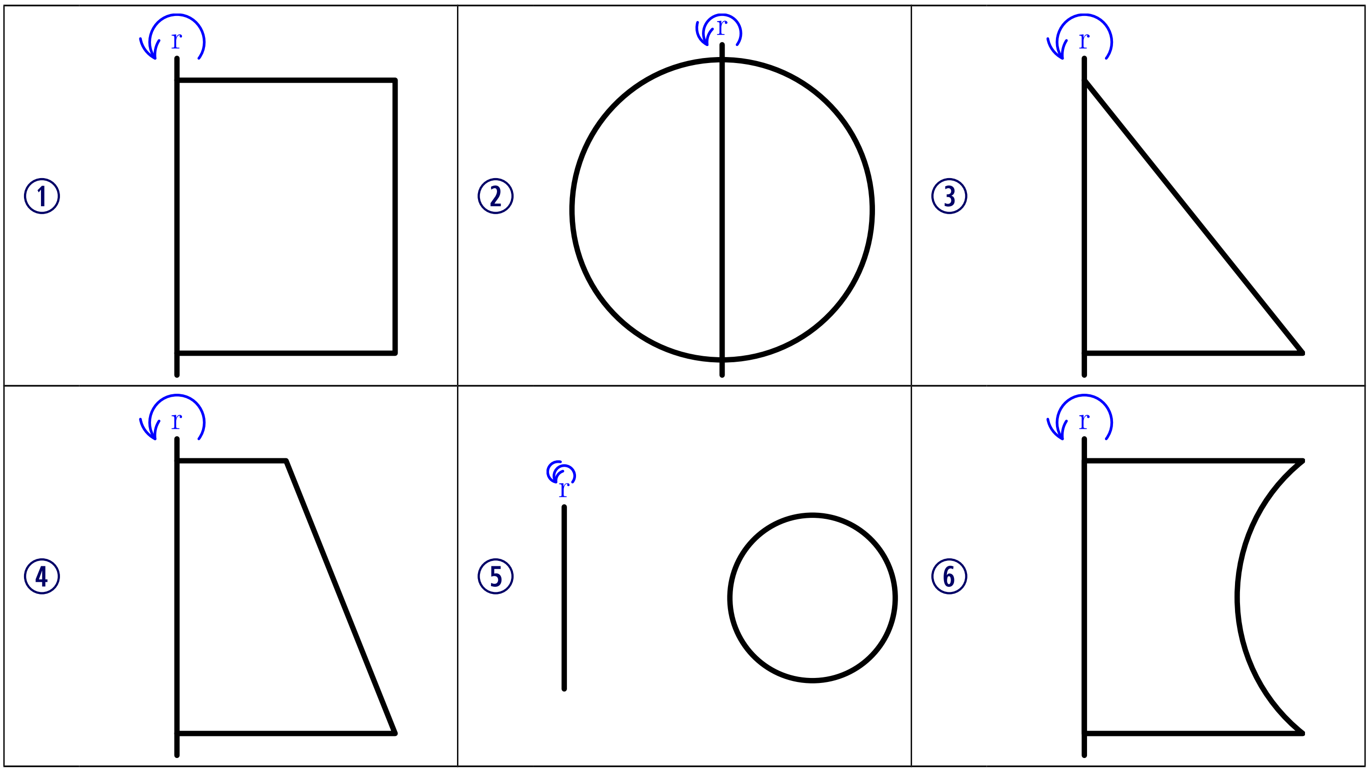
Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6
		
En hockey sobre hielo el *puck* tiene forma de cilindro	Las piedras del *curling* son cuerpos de revolución	Los bolos y las bolas de los juegos tradicionales

Ejemplo 7	Ejemplo 8	Ejemplo 9
		
Una parte de las llantas de los vehículos es un cuerpo de revolución	Una parte del aro usado en baloncesto es un cuerpo de revolución	El *tee* se usa en golf para levantar la bola en el primer golpe de cada hoyo

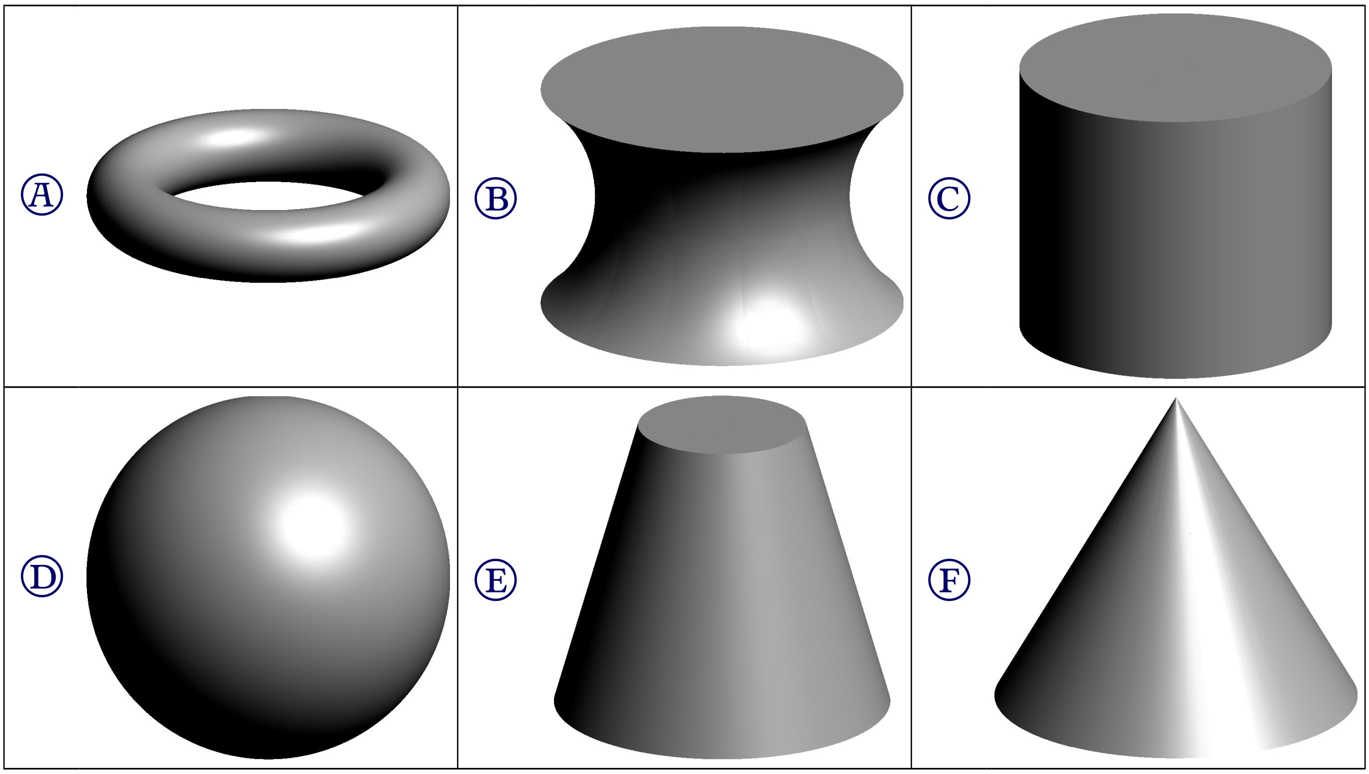
Enunciados

Averigua cuál es el cuerpo de revolución que corresponde con cada uno de las siguientes figuras planas y ejes de giro. Contesta diciendo la letra del cuerpo de revolución.

Las figuras planas y los ejes de giro (r)

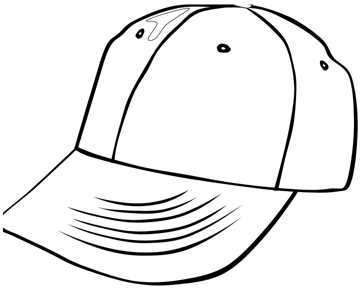
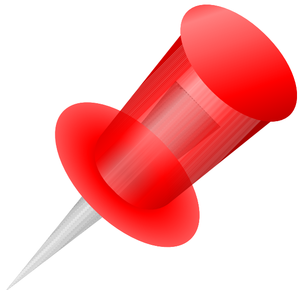
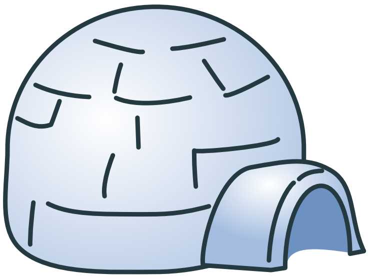
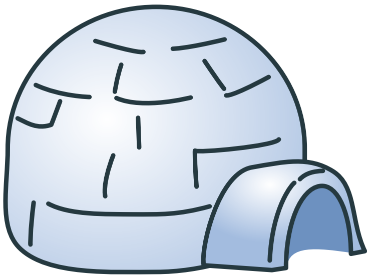


Los cuerpos de revolución



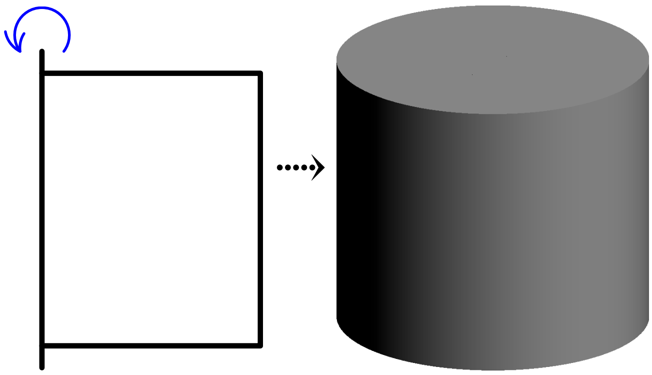
Enunciados

Aunque en la realidad no hay ningún objeto que sea exactamente un cuerpo de revolución perfecto, sí que hay algunos objetos que han sido diseñados y calculados como cuerpos de revolución. Clasifica los siguientes objetos como que **Sí** son cuerpos de revolución o **No** lo son.

① El típico flotador 	② Una gorra con visera 	③ Una chincheta 
④ Un globo aerostático 	⑤ La entrada de un iglú 	⑥ Un iglú que no tuviera entrada 
⑦ Esta capilla de Helsinki 	⑧ Esta caracola 	⑨ Cada torre de refrigeración de una central nuclear 
⑩ Un tornillo 	⑪ La cúpula dorada de esta mezquita 	⑫ Esta chimenea 

Definición de cilindro

El cilindro es el cuerpo de revolución que se obtiene cuando un rectángulo gira respecto a una recta que contiene a uno de sus lados.



Límites del cilindro

El cilindro está limitado por:

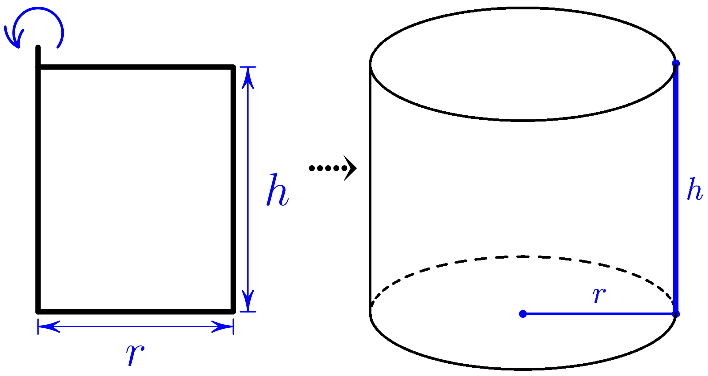
* Dos círculos, llamados bases.
* La superficie lateral, que es curva.

Dimensiones del cilindro

Para conocer perfectamente un cilindro se usan normalmente dos datos:

* La longitud del radio de las bases, que coincide con la longitud del lado que no está contenido en el eje de giro del rectángulo.
* La longitud de la altura, que es la distancia entre las bases y coincide con la longitud del lado que está contenido en el eje de giro del rectángulo.

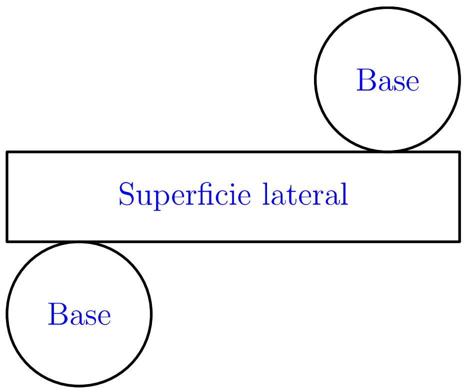
Si llamamos r al radio de las bases y h a la altura del cilindro:



Desarrollo plano del cilindro

El desarrollo plano de un cilindro está formado por:

* Los dos círculos de las bases.
* Un rectángulo, que corresponde con la superficie lateral.



Si se necesita montar el cilindro a partir de su desarrollo plano es necesario añadir pestañas en las bases, para poder pegarlas a la superficie lateral. Se suelen preparar bastantes pestañas triangulares más bien finas.

Área de un cilindro

- Para calcular el área de un cilindro se considera que tiene dos bases iguales y una superficie lateral. Llamamos área lateral al área de la superficie lateral. Si llamamos A al área del cilindro, A_B al área de la base y A_L al área lateral:

$$\boxed{A = 2 \cdot A_B + A_L}$$

- Para calcular el área de la base se utiliza la fórmula del área de un círculo. Si llamamos r al radio de la base del cilindro:

$$\boxed{A_B = \pi \cdot r^2}$$

- Para calcular el área lateral se utiliza que en el desarrollo plano del cilindro la superficie lateral se convierte en un rectángulo: una de sus dimensiones es la longitud de la circunferencia de la base del cilindro y la otra es la altura del cilindro. Por tanto, si llamamos r al radio de la base y h a la altura del cilindro:

$$\boxed{A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}$$

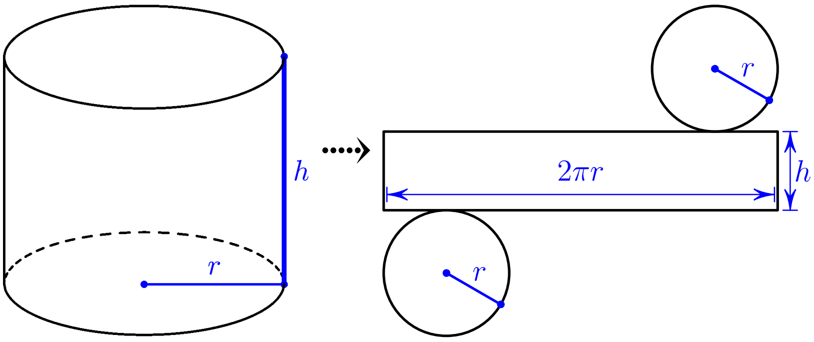
- Uniendo todas las fórmulas, llegamos a este desarrollo:

  $A = 2 \cdot A_B + A_L = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$

  En el último paso hemos aplicado la propiedad distributiva para extraer factor común. Esto hace más precisas y cómodas las operaciones. Esta fórmula se puede usar cuando solo nos interesa el área del cilindro, sin pasar por el área de la base ni el área lateral.

Visualización

En esta ilustración se puede ver la justificación de las fórmulas anteriores:



Ejemplos

En los siguientes enunciados las medidas están en metros. Utiliza como valor de π la aproximación 3,14.

① Calcula el área lateral de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 8 y la altura mide 13.

② Calcula el área de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 11 y la altura mide 7.

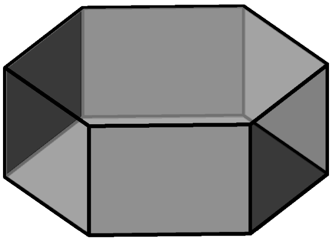
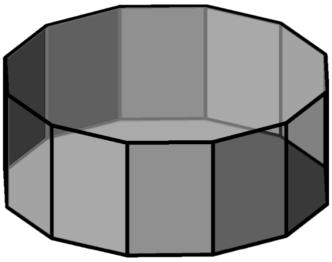
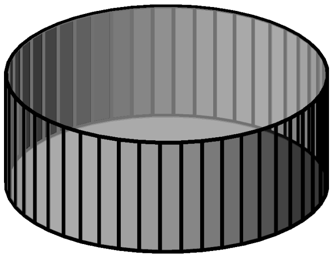
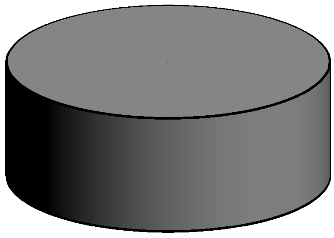
Resoluciones

① Área lateral = $2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 13 = 3{,}14 \cdot 208 = 653{,}12$. Solución: 653,12 m^2

② Área = $2 \cdot \pi \cdot 11 \cdot (11+7) = 22 \cdot 3{,}14 \cdot 18 = 3{,}14 \cdot 396 = 1243{,}44$. Solución: 1243,44 m^2

Aproximación de un cilindro mediante prismas

El cilindro es una figura que plantea dificultades para calcular su volumen. Un método para intentar resolver el problema es pensar en la relación que hay entre un cilindro y un prisma que tenga como bases un polígono regular con un alto número de lados. Aquí vemos varios ejemplos:

Prisma con base de 6 lados	Prisma con base de 12 lados	Prisma con base de 48 lados	Cilindro
			

Un prisma que tuviera como bases polígonos regulares con un elevado número de lados sería en la práctica indistinguible de un cilindro.

Volumen de un cilindro

Ya que el volumen de un prisma es igual al producto del área de la base por la altura del prisma, es razonable pensar que la misma fórmula también es aplicable al cilindro.

✱ Efectivamente, si llamamos V al volumen del cilindro, A_B al área de la base y h a la altura del cilindro:

$$\boxed{V = A_B \cdot h}$$

✱ Para calcular el área de la base se utiliza la fórmula del área de un círculo. Si llamamos r al radio de la base del cilindro:

$$\boxed{A_B = \pi \cdot r^2}$$

✱ Uniendo las dos fórmulas anteriores:

$$\boxed{V = \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Ejemplos

En los siguientes enunciados las medidas están en metros. Utiliza como valor de π la aproximación 3,14.

① Calcula el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 8 y la altura mide 13.

② Calcula el volumen un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 11 y la altura mide 7.

Resoluciones

① Volumen = $\pi \cdot 8^2 \cdot 13 = 3{,}14 \cdot 832 = 2612{,}48$. Solución: 2612,48 m^3

② Volumen = $\pi \cdot 11^2 \cdot 7 = 3{,}14 \cdot 847 = 2659{,}58$. Solución: 2659,58 m^3

Cálculo de área y volumen de un cilindro

Ya que existen varias áreas (total, de la base y lateral) y también varias fórmulas, usaremos un camino u otro dependiendo de lo que pida exactamente el enunciado. Como idea general, conviene realizar multiplicación por π lo más tarde posible.

Enunciados

En los siguientes enunciados las medidas están en metros. Utiliza como valor de π la aproximación 3,14.

① Calcula el área lateral y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 7 y la altura mide 4.

② Calcula el área de la base y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 14 y la altura mide 17.

③ Calcula el área de la base, el área lateral, el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 2 y la altura mide 9.

④ Calcula el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 4 y la altura mide 3.

⑤ Calcula el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 8 y la altura mide 8.

Resoluciones

① Área lateral = $2 \cdot \pi \cdot 7 \cdot 4 = 3{,}14 \cdot 56 = 175{,}84$

Volumen = $\pi \cdot 7^2 \cdot 4 = 3{,}14 \cdot 49 \cdot 4 = 3{,}14 \cdot 196 = 615{,}44$

Solución → área lateral: 175,84 m^2; volumen: 615,44 m^3

② Área de la base: $A_B = \pi \cdot 14^2 = 3{,}14 \cdot 196 = 615{,}44$

Volumen = $A_B \cdot 17 = 615{,}44 \cdot 17 = 10\,462{,}48$

Solución → área de la base: 615,44 m^2; volumen: 10 462,48 m^3

③ Área de la base: $A_B = \pi \cdot 2^2 = 3{,}14 \cdot 4 = 12{,}56$

Área lateral: $A_L = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 9 = 3{,}14 \cdot 36 = 113{,}04$

Área: $A = 2 \cdot A_B + A_L = 2 \cdot 12{,}56 + 113{,}04 = 138{,}16$

Volumen = $A_B \cdot 9 = 12{,}56 \cdot 9 = 113{,}04$

Solución → área de la base: 12,56 m^2; área lateral: 113,04 m^2, área: 138,16 m^2; volumen: 113,04 m^3

④ Área = $2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot (4+3) = 8 \cdot \pi \cdot 7 = 3{,}14 \cdot 56 = 175{,}84$

Volumen = $\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = \pi \cdot 16 \cdot 3 = 3{,}14 \cdot 48 = 150{,}72$

Solución → área: 175,84 m^2; volumen: 150,72 m^3

⑤ Área = $2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot (8+8) = 16 \cdot \pi \cdot 16 = 3{,}14 \cdot 256 = 803{,}84$

Volumen = $\pi \cdot 8^2 \cdot 8 = \pi \cdot 64 \cdot 8 = 3{,}14 \cdot 512 = 1607{,}68$

Solución → área: 803,84 m^2; volumen: 1607,68 m^3

Enunciados

En los siguientes enunciados las medidas están en metros. Utiliza como valor de π la aproximación 3,14.

① Calcula el área lateral y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 5 y la altura mide 10.

② Calcula el área de la base y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 3 y la altura mide 7.

③ Calcula el área de la base, el área lateral, el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 1 y la altura mide 1.

④ Calcula el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 4 y la altura mide 3.

⑤ Calcula el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 5 y la altura mide 100.

⑥ Calcula el área lateral y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 2 y la altura mide 6.

⑦ Calcula el área de la base y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 6 y la altura mide 1.

⑧ Calcula el área de la base, el área lateral, el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 5 y la altura mide 2.

⑨ Calcula el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 10 y la altura mide 2.

⑩ Calcula el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 4 y la altura mide 8.

⑪ Calcula el área lateral y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 2 y la altura mide 3.

⑫ Calcula el área de la base y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 15 y la altura mide 2.

⑬ Calcula el área de la base, el área lateral, el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 0,2 y la altura mide 5.

⑭ Calcula el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 3 y la altura mide 4.

⑮ Calcula el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 2 y la altura mide 4.

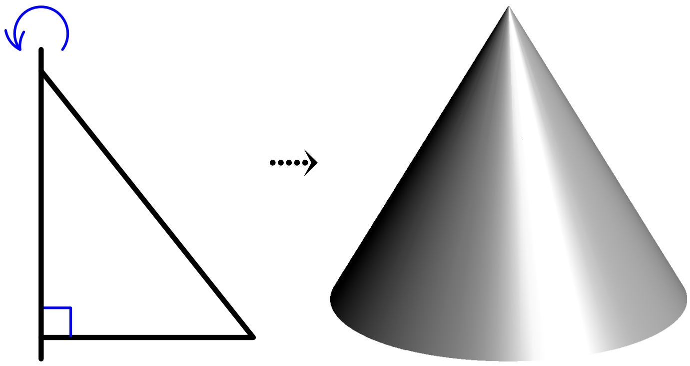
⑯ Calcula el área y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 4 y la altura mide 25.

⑰ Calcula el área de la base y el área lateral de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 7 y la altura mide 2.

⑱ Calcula el área lateral y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de las bases mide 2 y la altura mide 5.

Definición de cono

El cono es el cuerpo de revolución que se obtiene cuando un triángulo rectángulo gira respecto a una recta que contiene a uno de sus catetos.



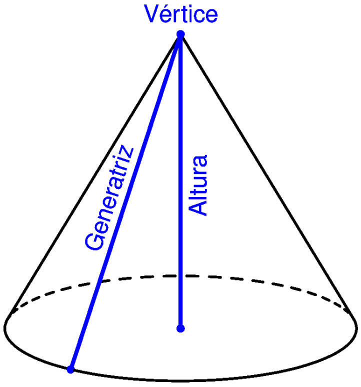
Límites del cono

El cono está limitado por:

* Un círculo, llamado base.
* La superficie lateral, que es curva.

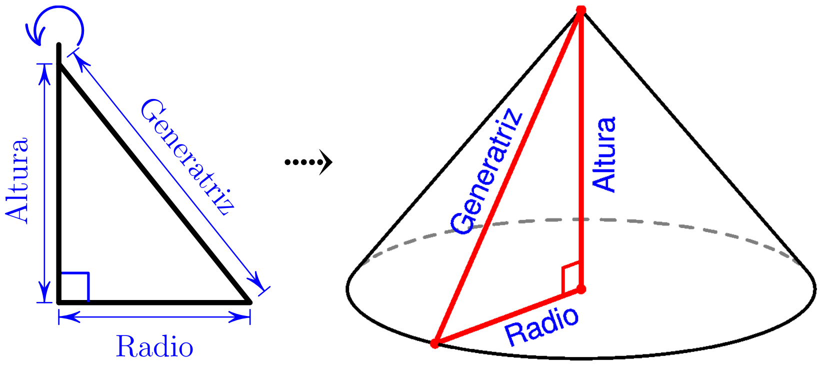
Elementos del cono

* **Vértice** del cono es el punto del espacio que corresponde con el punto de corte de la hipotenusa del triángulo rectángulo con el eje de giro.
* **Altura** del cono es el segmento que une perpendicularmente el vértice y la base.
* La línea generatriz, llamada simplemente **generatriz**, es cualquier segmento que una el vértice del cono con un punto de la circunferencia del círculo de la base. La generatriz se corresponde con la hipotenusa del triángulo rectángulo. Recibe el nombre porque esta línea es la que genera la superficie lateral.



Relación fundamental del cono

* Los tres lados del triángulo rectángulo original se transforman tras la revolución en tres líneas del cono: el cateto del eje de giro en la altura, el otro cateto en el radio de la base y la hipotenusa en la generatriz.
* El radio de la base, la altura y cualquier generatriz forman un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa es la generatriz.



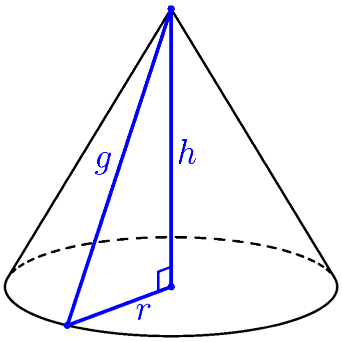
Dimensiones del cono

Para conocer un cono hay que saber el valor de dos de estos tres datos:

* La longitud del radio de la base.
* La longitud de la altura.
* La longitud de la generatriz.

Si es necesario en algún momento el tercer dato, lo calcularemos utilizando el teorema de Pitágoras, como vemos a continuación.

Fórmula fundamental del cono



* Sabemos que el radio de la base, la altura y cualquier generatriz forman un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa es la generatriz.
* Por tanto, si llamamos g a la longitud de la generatriz, h a la longitud de la altura y r a la longitud del radio de la base, se verifica:

$$\boxed{g^2 = h^2 + r^2}$$

Enunciados

En los siguientes ejercicios todas las medidas están en metros.

① Calcula la longitud de la generatriz de un cono sabiendo que el radio de la base mide 11 y la altura mide 60.

② Calcula la longitud de la altura de un cono sabiendo que el radio de la base mide 28 y la generatriz mide 53.

③ Calcula la longitud del radio de la base de un cono sabiendo que la altura mide 77 y la generatriz mide 85.

Resoluciones

Utilizamos la notación anterior en todas las resoluciones.

① $g^2 = h^2 + r^2 = 60^2 + 11^2 = 3600 + 121 = 3721 \Rightarrow g = \sqrt{3721} = 61$

Solución: 61 m

② $h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow h^2 + 28^2 = 53^2 \Rightarrow h^2 = 53^2 - 28^2 = 2809 - 784 = 2025 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{2025} = 45$

Solución: 45 m

③ $h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow 77^2 + r^2 = 85^2 \Rightarrow r^2 = 85^2 - 77^2 = 7225 - 5929 = 1296 \Rightarrow$

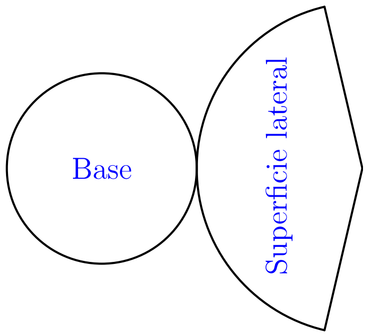
$\Rightarrow r = \sqrt{1296} = 36$

Solución: 36 m

Desarrollo plano del cono

El desarrollo plano de un cono está formado por:

* El círculo de la base.
* Un sector circular, que corresponde con la superficie lateral.



Si se necesita montar el cono a partir de su desarrollo plano es necesario añadir pestañas en la base, para poder pegarla a la superficie lateral. Se suelen preparar bastantes pestañas triangulares más bien finas.

Área de un cono

* El cono tiene una base y una superficie lateral. Llamamos área lateral al área de la superficie lateral. Si llamamos A al área del cono, A_B al área de la base y A_L al área lateral, se verifica:

$$\boxed{A = A_B + A_L}$$

* Para calcular el área de la base se utiliza la fórmula del área de un círculo. Si llamamos r al radio de la base del cono:

$$\boxed{A_B = \pi \cdot r^2}$$

* El área lateral se calcula utilizando una propiedad de los sectores circulares.

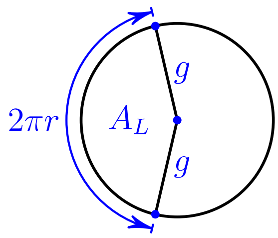
Área lateral de un cono

Si llamamos r al radio de la base y g a la generatriz del cono, se verifica que:

$$\boxed{A_L = \pi \cdot r \cdot g}$$

Demostración

* El desarrollo plano de la superficie lateral del cono es un sector circular cuyo radio mide g y cuyo arco mide $2 \cdot \pi \cdot r$.
* Observamos que en un sector circular la longitud del arco y el área son magnitudes directamente proporcionales.
* Podemos, por tanto, relacionar mediante una proporción el área y el arco de nuestro sector circular con el área y el arco del círculo completo de radio g.
* El área de nuestro sector circular es A_L y su arco mide $2 \cdot \pi \cdot r$.
* El área del círculo completo de radio g es $\pi \cdot g^2$ y su arco mide $2 \cdot \pi \cdot g$ (la circunferencia completa).
* Deducimos: $\frac{A_L}{2\pi r} = \frac{\pi g^2}{2\pi g} \Rightarrow \frac{A_L}{r} = \frac{\pi g^2}{g} \Rightarrow \frac{A_L}{r} = \pi g \Rightarrow A_L = \pi \cdot r \cdot g$



Cálculo del área de un cono

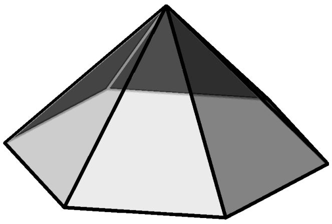
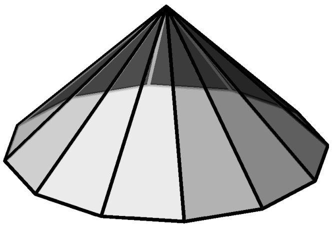
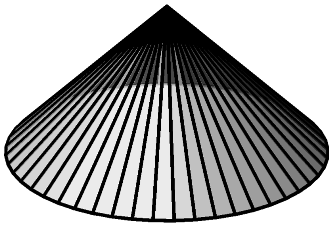
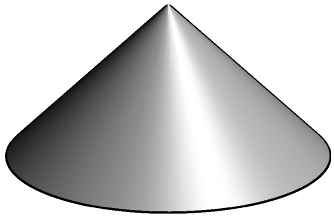
Uniendo las tres fórmulas anteriores, llegamos a este desarrollo:

$A = A_B + A_L = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot r \cdot (r + g)$

En el último paso hemos aplicado la propiedad distributiva para extraer factor común. Esto hace más precisas y cómodas las operaciones. Esta fórmula se puede usar cuando solo nos interesa el área del cono, sin pasar por el área de la base ni el área lateral.

Aproximación de un cono mediante pirámides

El cono es una figura que plantea dificultades para calcular su volumen. Un método para intentar resolver el problema es pensar en la relación que hay entre un cono y una pirámide que tenga como base un polígono regular con un alto número de lados. Aquí vemos varios ejemplos:

Pirámide con base de 6 lados	Pirámide con base de 12 lados	Pirámide con base de 48 lados	Cono
			

Una pirámide que tuviera como base un polígono regular con un elevado número de lados sería en la práctica indistinguible de un cono.

Volumen de un cono

Ya que el volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura del pirámide, es razonable pensar que la misma fórmula también es aplicable al cono.

- ✱ Efectivamente, si llamamos V al volumen del cono, A_B al área de la base y h a la altura del cono:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h}$$

- ✱ Para calcular el área de la base se utiliza la fórmula del área de un círculo. Si llamamos r al radio de la base del cono:

$$\boxed{A_B = \pi \cdot r^2}$$

- ✱ Uniendo las dos fórmulas anteriores:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Ejemplo

Enunciado

Calcula el volumen de un cono sabiendo que el radio de la base mide 7 metros y la altura mide 15 metros. Utiliza como valor de π la aproximación 3,14.

Resolución

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7^2 \cdot 15 = 3{,}14 \cdot 49 \cdot 5 = 3{,}14 \cdot 245 = 769{,}3$$

Solución: $769{,}3\ m^3$

Cálculo de área y volumen de un cono

Ya que existen varias áreas (total, de la base y lateral) y también varias fórmulas, usaremos un camino u otro dependiendo de lo que pida exactamente el enunciado. Como idea general, conviene realizar multiplicación por π lo más tarde posible.

Enunciados

En los siguientes enunciados las medidas están en metros. Utiliza como valor de π la aproximación 3,14.

① Calcula el área lateral y el volumen de un cono sabiendo que el radio de la base mide 13 y la altura mide 84.

② Calcula el área de la base, el área lateral, el área y el volumen de un cono sabiendo que el radio de la base mide 16 y la generatriz mide 65.

③ Calcula el área y el volumen de un cono sabiendo que la generatriz mide 97 y la altura mide 72.

Resoluciones

① Comenzamos por calcular la longitud de la generatriz (g):

$g^2 = h^2 + r^2 = 84^2 + 13^2 = 7056 + 169 = 7255 \Rightarrow \mathrm{g} = \sqrt{7255} = 85$

Área lateral $= \pi \cdot 13 \cdot 85 = 3{,}14 \cdot 1105 = 3469{,}7$

Volumen $= \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 13^2 \cdot 84 = 3{,}14 \cdot 169 \cdot 28 = 3{,}14 \cdot 4732 = 14\,858{,}48$

Solución → área lateral: 3469,7 m²; volumen: 14 858,48 m³

② Área de la base: $A_B = \pi \cdot 16^2 = 3{,}14 \cdot 256 = 803{,}84$

Área lateral: $A_L = \pi \cdot 16 \cdot 65 = 3{,}14 \cdot 1040 = 3265{,}6$

Área $= A_B + A_L = 803{,}84 + 3265{,}6 = 4096{,}44$

Calculamos la altura (h):

$h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow h^2 + 16^2 = 65^2 \Rightarrow h^2 = 65^2 - 16^2 = 4225 - 256 = 3969 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{3969} = 63$

Volumen $= \dfrac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 803{,}84 \cdot 63 = 803{,}84 \cdot 21 = 16\,880{,}64$

Solución → área de la base: 803,84 m²; área lateral: 3265,6 m²
área: 4096,44 m²; volumen: 16 880,64 m³

③ Comenzamos por calcular la longitud del radio de la base (r):

$h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow 72^2 + r^2 = 97^2 \Rightarrow \mathrm{r}^2 = 97^2 - 72^2 = 9409 - 5184 = 4225 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{r} = \sqrt{4225} = 65$

Área $= \pi \cdot 65 \cdot (65 + 97) = 3{,}14 \cdot 65 \cdot 162 = 3{,}14 \cdot 10\,530 = 33\,064{,}2$

Volumen $= \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 65^2 \cdot 72 = 3{,}14 \cdot 4225 \cdot 24 = 3{,}14 \cdot 101\,400 = 318\,396$

Solución → área: 33 064,2 m²; volumen: 318 396 m³

Enunciados

En los siguientes enunciados las medidas están en metros. Utiliza como valor de π la aproximación 3,14.

① Calcula el área lateral y el volumen de un cono sabiendo que el radio de la base mide 4 y la altura mide 3.

② Calcula el área de la base, el área lateral, el área y el volumen de un cono sabiendo que el radio de la base mide 9 y la generatriz mide 15.

③ Calcula el área y el volumen de un cono sabiendo que la generatriz mide 13 y la altura mide 12.

④ Calcula el área lateral de un cono sabiendo que el radio de la base mide 9 y la altura mide 40.

⑤ Calcula el área de la base de un cono sabiendo que la generatriz mide 29 y la altura mide 21.

⑥ Calcula el volumen de un cono sabiendo que el radio de la base mide 11 y la generatriz mide 61.

⑦ Calcula el área de la base, el área lateral, el área y el volumen de un cono sabiendo que la generatriz mide 17 y la altura mide 15.

⑧ Calcula el área de la base, el área lateral, el área y el volumen de un cono sabiendo que el radio de la base mide 12 y la generatriz mide 15.

⑨ Calcula el volumen de un cono sabiendo que el radio de la base mide 28 y la generatriz mide 53.

⑩ Calcula el área de la base, el área lateral, el área y el volumen de un cono sabiendo que la generatriz mide 73 y la altura mide 48.

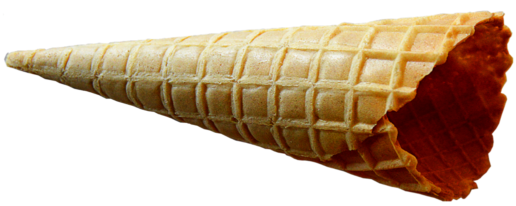
⑪ Calcula el volumen de un cono sabiendo que el radio de la base mide 40 y la generatriz mide 41.

⑫ Calcula el área de la base, el área lateral, el área y el volumen de un cono sabiendo que el radio de la base mide 35 y la altura mide 37.

⑬ Calcula el volumen de un cono sabiendo que el radio de la base mide 56 y la generatriz mide 65.

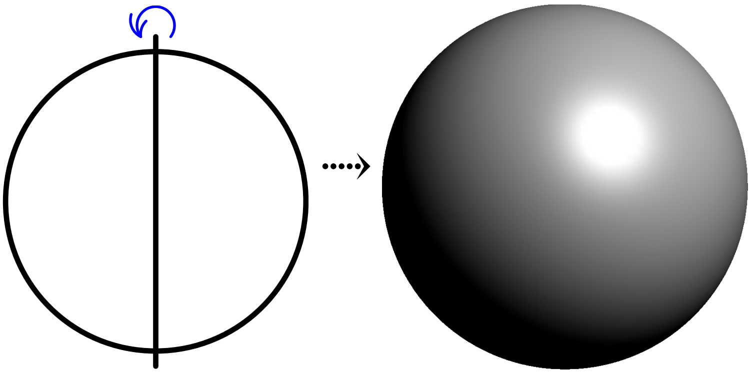
⑭ Calcula el área de la base, el área lateral, el área y el volumen de un cono sabiendo que la generatriz mide 85 y la altura mide 36.

⑮ Calcula el área de la base, el área lateral, el área y el volumen de un cono sabiendo que la generatriz mide 89 y la altura mide 39.



Definición de esfera

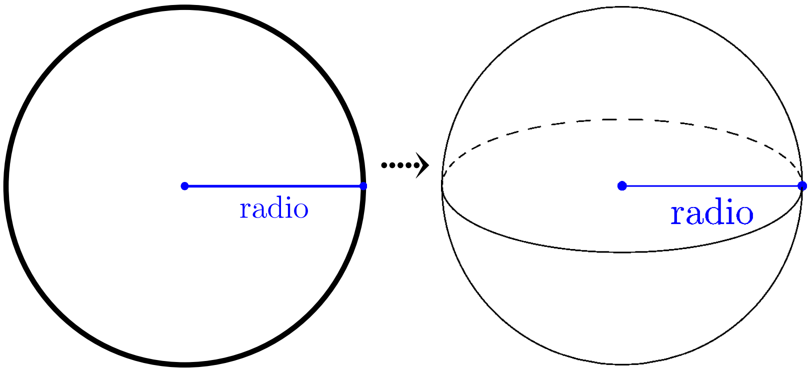
La esfera es el cuerpo de revolución que se obtiene cuando un círculo gira respecto a una recta que contiene a uno de sus diámetros.



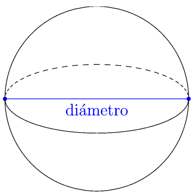
Una manera muy simple de comprobar en acción esta definición es tomar una moneda y hacerla girar sobre una mesa: tus ojos verán una esfera.

Dimensión de una esfera

Una esfera queda determinada por la longitud del radio del círculo que la genera, que también se llama radio de la esfera.



Diámetro de una esfera



Igual que hacíamos con la circunferencia y el círculo, llamamos diámetro a cualquier segmento que pasa por el centro de la esfera y conecta dos puntos del exterior. La longitud del diámetro es el doble que la del radio.

Desarrollo plano de una esfera

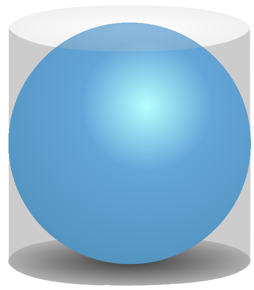
La esfera no tiene desarrollo plano. Podríamos decir que es un cuerpo curvo «puro», ya que, al contrario del cilindro y el cono, no tiene ninguna parte que se pueda desarrollar en un plano.

Quizá hayas podido comprobar esta propiedad alguna vez si se te ha roto una pelota de goma: puedes tomar cualquier trozo de la pelota, aunque sea pequeño, y verás que es imposible «aplastarla» perfectamente contra una superficie plana.

Esferas en la naturaleza

El agua tiene un valor de tensión superficial muy alto, que obliga a cualquier cantidad de ella a ocupar la menor cantidad posible de volumen. Por ese motivo, una gota de agua tiende a ser esférica, especialmente en entornos sin gravedad.

Área de una esfera

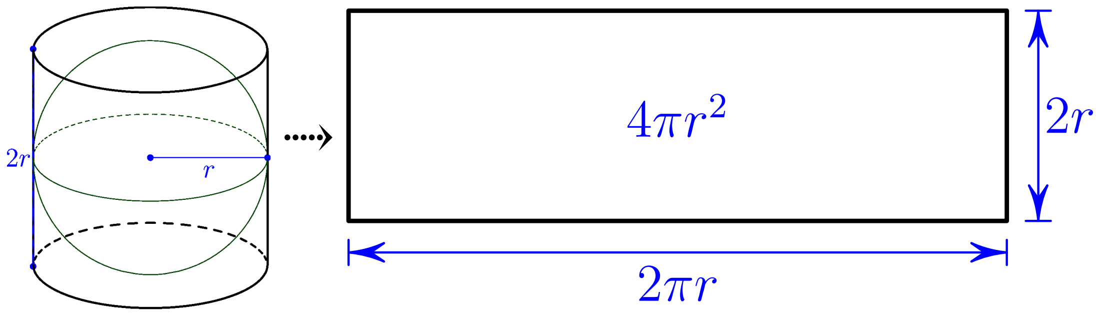


Como la esfera no tiene desarrollo plano, no podemos aplicar los métodos que hemos utilizado para calcular el área del cilindro y del cono. La primera idea conocida para calcular el área de la esfera se debe a uno de los mejores matemáticos de la historia, el griego Arquímedes de Siracusa, que vivió en el siglo III a.e.c.

Arquímedes consiguió demostrar que el área de una esfera es igual al área lateral del menor cilindro que contiene a la esfera. A la derecha se ve una ilustración de lo que significa la frase.

Si llamamos r al radio de la esfera, las dimensiones de este cilindro son:

* Radio de la base: r (igual que la esfera).
* Longitud de la circunferencia de la base: $2 \cdot \pi \cdot r$
* Altura: $2 \cdot r$ (igual que el diámetro de la esfera).

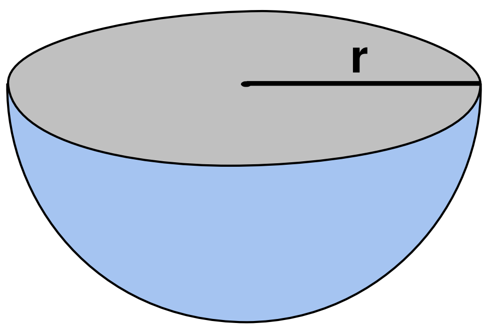


El área lateral de este cilindro, por tanto, será $(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot (2 \cdot r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Si llamamos A al área de la esfera, queda

$$\boxed{A = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

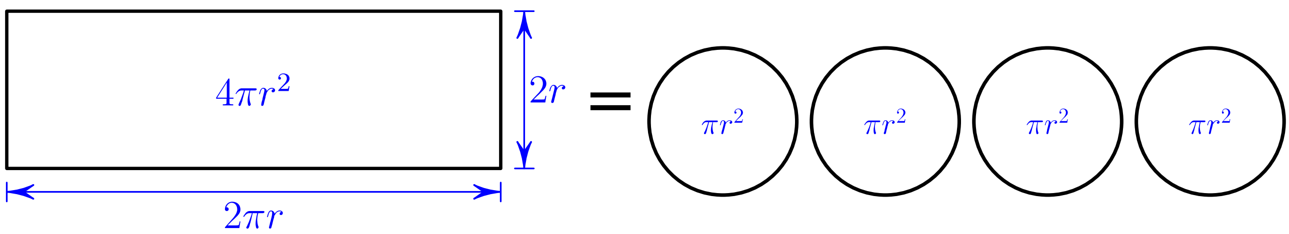
Círculo máximo de la esfera



Si cortamos una esfera mediante un plano que contenga a un diámetro, la dividimos en dos semiesferas. Es lo que haces cuando cortas por la mitad una naranja para extraer su zumo.

Cada semiesfera está limitada por la mitad de la superficie de la esfera original y por un círculo. Ese círculo es lo que llamamos círculo máximo de la esfera (en gris en la ilustración). Observa que este círculo tiene el mismo radio que la esfera.

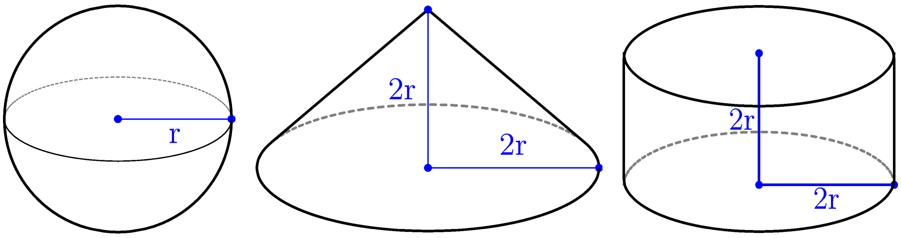
La fórmula del área de la esfera nos indica que el área de una esfera es igual al área de exactamente cuatro círculos máximos.



Volumen de una esfera

En el profundo estudio que hizo Arquímedes de la esfera también consiguió demostrar una fórmula para calcular su volumen. Para ello, utilizó tres figuras:

- Una esfera de radio r. Llamaremos V a su volumen.
- Un cono de radio de la base y altura $2 \cdot r$ (igual que el diámetro de la esfera). Llamaremos V_{Cono} a su volumen.
- Un cilindro de radio de la base y altura $2 \cdot r$ (igual que el diámetro de la esfera). Llamaremos $V_{Cilindro}$ a su volumen.



Aristóteles demostró usando un razonamiento basado en la ley de las palancas (que había estudiado con anterioridad) y en dar cortes muy finos a las tres figuras que $2 \cdot (V + V_{Cono}) = V_{Cilindro}$. A partir de esa relación se puede llegar a la fórmula del volumen de la esfera con bastante sencillez:

$$2 \cdot (V + V_{Cono}) = V_{Cilindro} \Rightarrow 2 \cdot \left(V + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2r)^2 \cdot (2r)\right) = \pi \cdot (2r)^2 \cdot (2r) \Rightarrow$$

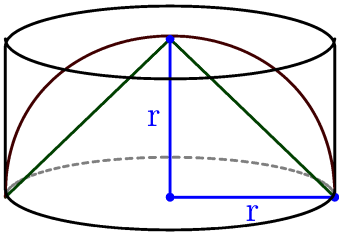
$$\Rightarrow 2 \cdot \left(V + \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot r^3\right) = 8 \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow V + \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 4 \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 4 \cdot \pi \cdot r^3 - \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

La fórmula del volumen de la esfera, por tanto, queda así:

$$\boxed{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$

Volúmenes de semiesfera, cilindro y cono de las mismas dimensiones



Consideramos tres figuras que encajan perfectamente una dentro de otra:

- Un cono de radio de la base r y altura r.

  Su volumen es $V_{Cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r = \frac{\mathbf{1}}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

- Una semiesfera de radio r.

  Su volumen es la mitad del de la esfera: $V_{Semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{\mathbf{2}}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

- Un cilindro de radio de la base r y altura r.

  Su volumen se puede escribir así: $V_{Cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot r = \frac{\mathbf{3}}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Observamos que las relaciones entre los volúmenes siguen la misma relación que los números naturales 1, 2 y 3 y que

$$\boxed{V_{Cono} + V_{Semiesfera} = V_{Cilindro}}$$

Cálculo de área y volumen de una esfera

Aunque las operaciones para calcular el área y el volumen de una esfera no son cómodas, se pueden apuntar dos ideas complementarias para facilitar el proceso:

- ✱ Simplificar todo lo posible antes de multiplicar por π.
- ✱ Realizar la multiplicación por π lo más tarde posible.

Enunciados

En los siguientes enunciados las medidas están en metros. Utiliza como valor de π la aproximación 3,14.

① Calcula el área y el volumen de una esfera sabiendo que su radio mide 12.

② Calcula el área de una esfera sabiendo que su radio mide 7.

③ Calcula el volumen de una esfera sabiendo que su radio mide 15.

④ Calcula el volumen de una semiesfera sabiendo que su radio mide 21.

⑤ Calcula el área de una semiesfera sabiendo que su radio mide 8.

Resoluciones

① $\text{Área} = 4 \cdot \pi \cdot 12^2 = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 144 = 3{,}14 \cdot 576 = 1808{,}64$

$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 = 3{,}14 \cdot \frac{4}{3} \cdot 1728 = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 576 =$

$= 3{,}14 \cdot 2304 = 7234{,}56$

Solución → área: 1808,64 m^2; volumen: 7234,56 m^3

② $\text{Área} = 4 \cdot \pi \cdot 7^2 = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 49 = 3{,}14 \cdot 196 = 615{,}44$

Solución: 615,44 m^2

③ $\text{Volumen} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3 = 3{,}14 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3375 = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 1125 = 3{,}14 \cdot 4500 = 14\,130$

Solución: 14 130 m^3

④ El volumen de la semiesfera es la mitad del volumen de la esfera, por eso vamos a multiplicar por un medio.

$\text{Volumen} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 21^3 = 3{,}14 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9261 = 3{,}14 \cdot 2 \cdot 3087 =$

$= 3{,}14 \cdot 6174 = 19\,386{,}36$

Solución: 19 386,36 m^3

⑤ El área de la semiesfera se obtiene sumando la mitad del área de la esfera con el área de un círculo máximo.

$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 8^2 = 2 \cdot \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 8^2 = 3 \cdot \pi \cdot 8^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 64 =$

$= 3{,}14 \cdot 192 = 602{,}88$

Solución: 602,88 m^2

Enunciados

En los siguientes enunciados las medidas están en metros. Utiliza como valor de π la aproximación 3,14.

① Calcula el área y el volumen de una esfera sabiendo que su radio mide 3.

② Calcula el área de una esfera sabiendo que su radio mide 2.

③ Calcula el volumen de una esfera sabiendo que su radio mide 9.

④ Calcula el volumen de una semiesfera sabiendo que su radio mide 6.

⑤ Calcula el área de una semiesfera sabiendo que su radio mide 4.

⑥ Calcula el área y el volumen de una esfera sabiendo que su radio mide 60.

⑦ Calcula el área de una esfera sabiendo que su radio mide 10.

⑧ Calcula el volumen de una esfera sabiendo que su radio mide 0,3.

⑨ Calcula el volumen de una semiesfera sabiendo que su radio mide 12.

⑩ Calcula el área de una semiesfera sabiendo que su radio mide 5.

⑪ Calcula el área y el volumen de una esfera sabiendo que su radio mide 18.

⑫ Calcula el área de una esfera sabiendo que su radio mide 11.

⑬ Calcula el volumen de una esfera sabiendo que su radio mide 33.

⑭ Calcula el volumen de una semiesfera sabiendo que su radio mide 0,6.

⑮ Calcula el área de una semiesfera sabiendo que su radio mide 7.

⑯ Calcula el área y el volumen de una esfera sabiendo que su radio mide 21.

⑰ Calcula el área de una esfera sabiendo que su radio mide 13.

⑱ Calcula el volumen de una esfera sabiendo que su radio mide 45.

⑲ Calcula el volumen de una semiesfera sabiendo que su radio mide 36.

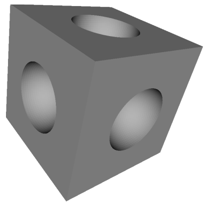
⑳ Calcula el área de una semiesfera sabiendo que su radio mide 17.

Enunciados

Utiliza como valor aproximado de π el número decimal 3,14.

① Para llevar a cabo un oleoducto se van a utilizar unas piezas de tubería con forma cilíndrica de 10 metros de largo. El diámetro exterior de cada pieza será 2 metros y el grosor será 10 centímetros. Calcula el volumen de cada pieza. Da el resultado en metros cúbicos redondeando a la centésima.

② Una persona diseñadora profesional concibe un objeto de decoración que consiste en partir de un hexaedro macizo de acero de cuatro decímetros de lado y extraer media esfera de cada cara, con un diámetro de dos decímetros. Calcula el área y el volumen de la figura diseñada. Da el resultado en decímetros cuadrados y decímetros cúbicos redondeando a la unidad.



③ Una esfera de diez metros de radio se corta por un plano de modo que el círculo resultante tiene doce metros de diámetro. ¿Cuál es la distancia del centro de la esfera a ese plano? Da el resultado en metros.

④ Para proteger una caja con forma de ortoedro recortamos unas esferas de modo que encajen perfectamente en las esquinas (los vértices del ortoedro acaban en el centro de la esfera). Sabiendo que las esferas eran originalmente de tres centímetros de radio, calcula el volumen total de todas las protecciones. Da el resultado en centímetros cúbicos redondeando a la décima.

⑤ Tenemos dos piedras esféricas, una de nueve centímetros de radio y otra de cuatro centímetros de radio; las ponemos en el suelo, tocándose, y encima apoyamos un tablón en equilibrio. Calcula la distancia que hay entre los puntos de contacto del tablón con cada piedra. Da el resultado en centímetros.

⑥ Un bote contiene tres pelotas colocadas en vertical. La altura del bote mide 24 centímetros. Calcula el volumen de aire que hay entre el bote y las pelotas. Da el resultado en centímetros cúbicos redondeando a la unidad.

⑦ En un importante concurso internacional de heladería se va a conceder un premio simbolizado por una figura de oro macizo con forma de cucurucho de helado con su correspondiente bola. Se sabe que la altura total de la figura es doce centímetros y mide por su parte más ancha seis centímetros. Calcula el volumen de la figura del premio. Da el resultado en centímetros cúbicos redondeando a la unidad.

⑧ Llamamos r al radio de una semiesfera y A a su área. Deduce la fórmula más sencilla posible que permita calcular A conociendo r.

⑨ Llamamos d al diámetro de una esfera y A a su área. Deduce la fórmula más sencilla posible que permita calcular A conociendo d.

⑩ Llamamos d al diámetro de una esfera y V a su volumen. Deduce la fórmula más sencilla posible que permita calcular V conociendo d.

Estadística y probabilidad

La estadística y la teoría de la probabilidad son dos ramas de la matemática fuertemente relacionadas. Las dos estudian colecciones de datos, con perspectivas ligeramente diferentes, pero complementarias.

Colecciones de datos

En el mundo real estamos rodeados de datos numéricos, muchas veces en cantidades tan grandes que cuesta hacerse una idea de cuánto. Su procesamiento adecuado es tan importante hoy en día que se ha creado el concepto de *big data* para agrupar todas las técnicas bajo una única denominación. Tanto la estadística como la teoría de la probabilidad tienen un papel determinante en el *big data*.

Las colecciones de datos se mantendrán en ordenadores usando el formato que resulte más adecuado (algún tipo de **base de datos**). Pero para estudiarlos en la enseñanza secundaria se te presentarán escritos uno tras otro, quizá colocados en una tabla para que los puedas ver bien.

Valores y repeticiones

Cuando estudiamos una colección de datos lo primero que debemos estudiar es qué valores diferentes aparecen en ella. Un mismo valor puede repetirse cualquier número de veces y es importante reconocerlo.

Ejemplo 1

En una urbanización hay veinte casas. En cada casa vive una familia. Hacemos una encuesta casa por casa preguntando cuántos hijos hay en cada familia. Vamos anotando los datos obtenidos y al final tenemos una colección con veinte datos. Por ejemplo, podría ser así:

2	3	0	2	1	0	4	3	2	1	1	0	3	3	1	4	2	2	0	1

Observamos que en la colección de datos solo hay cinco valores diferentes (0, 1, 2, 3 y 4) pero que cada uno de ellos aparece más de una vez.

Ejemplo 2

Usamos un dado con forma de hexaedro con las caras numeradas del 1 al 6; es decir, el típico dado de muchos juegos de azar. Lanzamos 25 veces el dado y vamos anotando los números que van saliendo. Por ejemplo, podríamos obtener esto:

3	1	2	1	5	4	5	5	6	2	6	3	3	3	6	3	2	4	6	4	1	3	3	5	4

Observamos que en la colección de datos solo hay seis valores diferentes (1, 2, 3, 4, 5 y 6) pero que cada uno de ellos aparecen más de una vez.

Diferencia en los dos ejemplos

Los dos ejemplos presentados permiten comenzar a hacerse una idea de la diferencia entre estadística y probabilidad.

- En el ejemplo (1) debemos comenzar por tomar los datos de la realidad y, **después** de obtenerlos, los estudiaremos. Este tipo de colecciones se estudian en estadística.
- En el ejemplo (2) podríamos estudiar qué resultados esperamos obtener **antes** de realizar los lanzamientos del dado. Este tipo de colecciones se estudian en teoría de la probabilidad.

Recuento

El primer paso para estudiar una colección de datos es averiguar cuántas veces aparece cada uno de los valores. Si los datos se almacenan en un ordenador, se utilizan sencillas técnicas informáticas para averiguarlo. Pero si se requiere hacerlo a mano, conviene utilizar un método que sea lo más rápido y fiable que sea posible.

Llamamos **recuento** al proceso de averiguar cuántas veces aparece cada valor en una colección de datos.

Técnica para el recuento

Primer paso: preparar una tabla con tres columnas y tantas filas como valores diferentes haya en la colección, más una para la cabecera con la información.

Segundo paso: anotar en la tabla todos los valores que aparecen en la colección. Para que sea lo más sencillo posible, si los datos son numéricos, se aconseja escribirlos en orden creciente (es decir, de menor a mayor).

Tercer paso: ir recorriendo de uno en uno todos los valores de la colección y dibujar un palito en la casilla correspondiente de la segunda columna cada vez que aparezca un valor concreto. El quinto palito conviene hacerlo transversal, para luego contar grupos de cinco.

Cuarto paso: anotar en la tercera columna el número de palitos de cada valor.

Quinto paso: como es fácil cometer algún error en el proceso, es conveniente comprobar que la suma de todas las apariciones de todos los valores efectivamente coincide con el número de datos.

Ejemplo

En una urbanización hay cuarenta casas. En cada casa vive una familia. Hacemos una encuesta casa por casa preguntando cuántos hijos hay en cada familia. Anotamos los datos obtenidos y al final tenemos una colección con estos cuarenta datos:

2	3	0	2	1	0	4	3	2	1	1	0	3	3	1	4	2	2	0	1
2	2	0	2	3	4	0	1	2	3	2	4	0	1	2	2	3	2	4	1

Realizamos el recuento:

Valor	Recuento	Apariciones
0	~~IIII~~ II	7
1	~~IIII~~ III	8
2	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13
3	~~IIII~~ II	7
4	~~IIII~~	5

Comprobación: 7 + 8 + 13 + 7 + 5 = 40 ✔

Ventaja del método

Podrías pensar otro método diferente para hacer el recuento: contar cuántos ceros hay en la colección, luego cuántos unos, etc. Pero este método es mucho más lento que el propuesto y mostrado, porque tendrías que hacer cinco pasadas a los datos, mientras que con el método que hemos elegido solo se da una pasada.

Enunciados

① Preguntamos a veinte personas cuántos teléfonos móviles poseen, tanto en uso como guardados por ahí y obtenemos estas respuestas:

0	3	2	3	0	1	2	2	2	2	3	3	2	2	2	1	3	3	0	3

Realiza el recuento utilizando esta tabla:

Valor	Recuento	Apariciones

② Preguntamos en veinticinco hogares cuántos aparatos de televisión tienen en casa y obtenemos estas respuestas:

3	1	1	2	1	1	2	3	3	2	1	2	2	2	2	1	2	2	3	1	2	0	1	3	3

Realiza el recuento utilizando esta tabla:

Valor	Recuento	Apariciones

③ Lanzamos tres monedas a la vez y contamos cuántas caras han salido. Realizamos cuarenta lanzamientos como el expuesto y obtenemos este resultado:

1	1	3	2	1	1	2	1	3	2	1	1	2	1	0	2	0	1	3	1
1	0	1	3	2	2	0	0	3	1	2	3	2	2	2	2	2	0	0	2

Realiza el recuento utilizando esta tabla:

Valor	Recuento	Apariciones

Enunciados

① Preguntamos a veinte personas cuántos trajes poseen y obtenemos estas respuestas:

1	1	1	2	3	4	0	1	2	2	1	2	0	2	1	0	2	3	0	2

Realiza el recuento utilizando esta tabla:

Valor	Recuento	Apariciones

② Preguntamos en veinticinco hogares cuántos mascotas tienen y obtenemos estas respuestas:

4	0	2	3	1	0	0	2	3	2	3	0	1	2	2	2	4	3	2	1	2	2	0	0	4

Realiza el recuento utilizando esta tabla:

Valor	Recuento	Apariciones

③ Lanzamos cuatro monedas a la vez y contamos cuántas caras han salido. Realizamos cuarenta lanzamientos como el expuesto y obtenemos este resultado:

3	2	2	2	1	1	2	3	3	2	4	1	1	1	0	1	3	1	3	1
0	2	3	3	2	4	2	1	3	0	2	4	2	2	2	2	1	2	1	1

Realiza el recuento utilizando esta tabla:

Valor	Recuento	Apariciones

Enunciados

Lanzamos dos dados hexaédricos con las caras numeradas de 1 a 6 y sumamos los números obtenidos en los dos dados. Repetimos el lanzamiento sesenta veces y anotamos los resultados. Repetimos el proceso completo dos veces (para que puedas hacer dos ejercicios). Realiza los recuentos utilizando las tablas de más abajo.

①

6	6	5	8	6	8	3	7	10	11	7	2	8	10	5	8	9	7	8	7
6	3	6	8	11	5	7	7	8	6	6	10	9	11	10	9	8	8	7	9
8	7	7	8	8	3	7	7	5	4	9	12	7	6	11	4	6	7	9	11

②

7	4	6	10	10	6	4	10	11	9	11	4	12	4	4	2	9	9	5	8
5	7	7	10	11	6	6	9	10	6	7	10	6	3	7	5	7	6	6	6
10	2	3	6	6	7	8	7	4	2	9	10	6	4	11	7	8	6	11	10

Respuestas

①		
Valor	Recuento	Apariciones

②		
Valor	Recuento	Apariciones

Frecuencia absoluta

Dada una colección de datos, se llama frecuencia absoluta de un valor al número de veces que se repite el valor en la colección de datos.

Observa que cuando hacemos el recuento de una colección de datos, estamos realmente hallando las frecuencias absolutas de todos los valores.

La suma de las frecuencias absolutas de todos los valores es igual a la cantidad total de datos de la colección.

Ejemplo 1

Enunciado

En una urbanización hay cincuenta casas. Hacemos una encuesta casa por casa preguntando cuántos ordenadores hay disponibles, sean fijos o portátiles. Anotamos los datos obtenidos y obtenemos estas respuestas:

0	3	3	3	1	4	3	3	5	0	4	5	4	5	4	3	5	5	4	4	4	5	4	6	4
2	4	1	1	4	2	4	3	0	5	4	4	4	2	4	6	3	1	6	4	1	1	0	5	1

Realiza el recuento y rellena una tabla con las frecuencias absolutas de todos los valores.

Resolución

Valor	Recuento	Frecuencia absoluta
0	||||	4
1	卌 ||	7
2	|||	3
3	卌 |||	8
4	卌 卌 卌 ||	17
5	卌 |||	8
6	|||	3

Ejemplo 2

Enunciado

Lanzamos una moneda diez veces y anotamos si obtenemos cara o cruz, con este resultado:

Cara	Cruz	Cruz	Cruz	Cara	Cruz	Cara	Cara	Cruz	Cruz

Realiza el recuento y rellena una tabla con las frecuencias absolutas de todos los valores.

Resolución

Valor	Recuento	Frecuencia absoluta
Cara	||||	4
Cruz	卌 |	6

Frecuencia absoluta acumulada

Dada una colección de datos numéricos, se llama frecuencia absoluta acumulada de un valor a la suma de las frecuencias absolutas de todos los datos que son menores o iguales que ese valor.

Cálculo de todas las frecuencias absolutas acumuladas

La manera más sencilla de averiguar las frecuencias absolutas acumuladas de todos los valores de una colección de datos numéricos es partir de la tabla de frecuencias absolutas con los valores en orden creciente e ir sumando a cada frecuencia absoluta la frecuencia absoluta acumulada del valor anterior.

Ejemplo

Enunciado

En una urbanización hay cincuenta casas. Hacemos una encuesta casa por casa preguntando cuántos ordenadores hay disponibles, sean fijos o portátiles. Anotamos los datos obtenidos y construimos la tabla de las frecuencias absolutas:

Valor	Frecuencia absoluta
0	4
1	7
2	3
3	8
4	17
5	8
6	3

Añade a la tabla una columna más por la derecha y calcula en ella las frecuencias absolutas acumuladas de todos los valores.

Resolución

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	*Explicación*
0	4	4	0 es el menor valor
1	7	11	$7 + 4 = 11$
2	3	14	$3 + 11 = 14$
3	8	22	$8 + 14 = 22$
4	17	39	$17 + 22 = 39$
5	8	47	$8 + 39 = 47$
6	3	50	$3 + 47 = 50$

Propiedad

La frecuencia absoluta acumulada del valor mayor es igual al número de datos de la colección. En el ejemplo, la frecuencia absoluta acumulada del valor «6» es 50, que es el total de datos obtenidos en la encuesta.

Enunciados

Completa la columna de las frecuencias absolutas acumuladas de las siguientes tablas de valores y frecuencias absolutas.

①

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada
0	4	
1	7	
2	9	
3	12	

②

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada
0	8	
1	10	
2	16	
3	12	
4	7	
5	4	

③

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada
0	1	
1	5	
2	3	
3	8	
4	2	

④

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada
0	3	
1	3	
2	8	
3	9	
4	5	
5	2	

Frecuencia relativa

Dada una colección de datos, se llama frecuencia relativa de un valor al cociente entre su frecuencia absoluta y el número total de datos de la colección.

* Como la frecuencia absoluta de un valor no puede ser menor que 0 ni mayor que el número total de datos de la colección, deducimos que la frecuencia absoluta de un valor siempre es un número que está entre 0 y 1.
* Se suelen utilizar las frecuencias relativas en su forma decimal.
* Las frecuencias relativas se pueden interpretar inmediatamente como el porcentaje de datos de la colección que representan las apariciones de un valor.
* La suma de todas las frecuencias relativas siempre es 1.

Ejemplo

Enunciado

En una clase de universidad hay cincuenta personas. Hacemos una encuesta preguntando cuántos bolígrafos lleva a clase cada persona. Anotamos los datos obtenidos y obtenemos estas respuestas:

1	1	3	0	1	2	1	3	3	1	2	1	1	1	3	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1
0	2	1	1	2	1	2	1	1	3	0	2	1	0	2	1	1	2	1	1	1	2	1	2	0

Realiza el recuento y rellena una tabla con las frecuencias absolutas y las frecuencias relativas de todos los valores.

Resolución

Valor	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	*Explicación*
0	𝍸 |||	8	0,16	$8 : 50 = 0{,}16$
1	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	27	0,54	$27 : 50 = 0{,}54$
2	𝍸 𝍸	10	0,2	$10 : 50 = 0{,}2$
3	𝍸	5	0,1	$5 : 50 = 0{,}1$

Comentarios

Comprobación: $0{,}16 + 0{,}54 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$

Podemos interpretar la columna de las frecuencias relativas como porcentajes, diciendo, por ejemplo, que el 54 % de los asistentes a clase llevan exactamente un bolígrafo a clase.

Tendría mucho sentido práctico añadir una columna con los porcentajes.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje
0	8	0,16	16 %
1	27	0,54	54 %
2	10	0,2	20 %
3	5	0,1	10 %

Frecuencia relativa acumulada

Dada una colección de datos numéricos, se llama frecuencia relativa acumulada de un valor a la suma de las frecuencias relativas de todos los datos que son menores o iguales que ese valor.

Cálculo de todas las frecuencias relativas acumuladas

Hay dos métodos para calcular las frecuencias relativas acumuladas de todos los valores de una colección de datos numéricos:

- Partir de la tabla de frecuencias relativas con los valores en orden creciente e ir sumando a cada frecuencia relativa la frecuencia relativa acumulada del valor anterior. Este método no es conveniente porque se pueden ir acumulando muchos errores.
- Partir de la tabla de frecuencias absolutas con los valores en orden creciente e ir dividiendo cada frecuencia absoluta entre el número total de datos de la colección. Este es el método aconsejado.

Ejemplo

Enunciado

En una urbanización hay cincuenta casas. Hacemos una encuesta casa por casa preguntando cuántos dormitorios tiene. Anotamos los datos obtenidos y construimos la tabla de las frecuencias absolutas:

Valor	Frecuencia absoluta
2	6
3	9
4	13
5	16
6	6

Añade a la tabla una columna más por la derecha y calcula en ella las frecuencias relativas acumuladas de todos los valores. Puedes añadir columnas auxiliares.

Resolución

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa acumulada
0	6	6	0,12
1	9	15	0,3
2	13	28	0,56
3	16	44	0,88
4	6	50	1

Propiedad

La frecuencia relativa acumulada del valor mayor es igual a 1.

Enunciados

En cada ejercicio, prepara y rellena una tabla con las frecuencias absolutas, las frecuencias absolutas acumuladas, las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas de todos los valores. Añade la columna auxiliar que necesites.

① Lanzamos tres monedas a la vez y contamos cuántas caras han salido. Realizamos varios lanzamientos como el expuesto y obtenemos este resultado:

2	2	2	0	1	2	3	1	1	2	0	3	0	1	2	1	1	2	2	2	2	0	2	2	1

② En un pueblo hacemos un recorrido calle a calle contando cuántos bares hay en cada calle. Al terminar, preparamos una tabla con las frecuencias absolutas obtenidas, que son estas:

Valor	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	13	8	3	17	7	2

Resoluciones

① El enunciado no dice cuántas veces se han realizado los lanzamientos, pero lo calcularemos de dos maneras, que deben coincidir: contando cuántos datos hay en la tabla y sumando todas las frecuencias absolutas. Obtenemos 25.

Valor	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
0	||||	4	4	0,16	0,16
1	~~||||~~ ||	7	11	0,28	0,44
2	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12	23	0,48	0,92
3	||	2	25	0,08	1

② El enunciado no dice cuál es el total de bares encontrados, así que lo calculamos sumando todas las frecuencias absolutas: 13+8+3+17+7+2 = 50.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
0	13	13	0,26	0,26
1	8	21	0,16	0,42
2	3	24	0,06	0,48
3	17	41	0,34	0,82
4	7	48	0,14	0,96
5	2	50	0,04	1

Enunciados

En cada ejercicio, prepara y rellena una tabla con las frecuencias absolutas, las frecuencias absolutas acumuladas, las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas de todos los valores. Añade la columna auxiliar que necesites.

① Lanzamos cuatro monedas a la vez y contamos cuántas caras han salido. Realizamos varios lanzamientos como el expuesto y obtenemos este resultado:

3	3	2	0	2	2	1	3	2	2	1	2	2	3	2	4	2	3	2	2	2	2	0	2	1
3	4	0	3	2	1	0	2	2	2	1	0	2	2	0	2	1	2	1	2	4	1	1	1	3

② En una clase de un colegio preguntamos cuántos hermanos tiene cada asistente. Al terminar, preparamos una tabla con las frecuencias absolutas obtenidas, que son estas:

Valor	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	7	8	3	2	4	1

③ En una clase de un colegio preguntamos cuántas veces a la semana come un plato de carne cada asistente. Al terminar, preparamos una tabla con las frecuencias absolutas obtenidas, que son estas:

Valor	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	2	3	5	6	2	7

④ En una clase de una universidad preguntamos cuántas mascotas tiene cada asistente. Al terminar, preparamos una tabla con las frecuencias absolutas obtenidas, que son estas:

Valor	0	1	2	3	4
Frecuencia absoluta	4	26	9	8	3

Enunciados

En cada ejercicio, prepara y rellena una tabla con las frecuencias absolutas, las frecuencias absolutas acumuladas, las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas de todos los valores. Añade la columna auxiliar que necesites.

① Lanzamos cuatro monedas a la vez y contamos cuántas caras han salido. Realizamos varios lanzamientos como el expuesto y obtenemos este resultado:

2	0	4	1	1	3	2	2	2	3	2	0	1	3	1	3	1	2	1	2	2	1	3	1	1
0	2	1	2	1	3	2	1	3	2	1	2	1	2	2	1	1	1	3	3	3	3	1	3	2

② En una clase de un colegio preguntamos cuántos hermanos tiene cada asistente. Al terminar, preparamos una tabla con las frecuencias absolutas obtenidas, que son estas:

Valor	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	5	9	4	3	2	2

③ En una clase de un colegio preguntamos cuántas veces a la semana come un plato de carne cada asistente. Al terminar, preparamos una tabla con las frecuencias absolutas obtenidas, que son estas:

Valor	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	1	2	4	7	3	8

④ En una clase de una universidad preguntamos cuántas mascotas tiene cada asistente. Al terminar, preparamos una tabla con las frecuencias absolutas obtenidas, que son estas:

Valor	0	1	2	3	4
Frecuencia absoluta	32	41	20	2	5

Enunciados

Rellena las siguientes tablas.

①

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
0		2		
1		7		
2		15		
3		22		
4		25		

②

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
0			0,14	
1			0,24	
2			0,28	
3			0,22	
4		50	0,12	

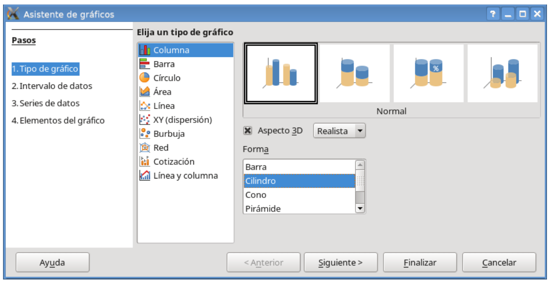
③

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
0				0,21
1				0,39
2				0,63
3				0,81
4		200		1

Interpretación gráfica de una colección de datos

Los humanos no somos capaces de hacernos una idea clara de lo que representa en realidad una colección de datos en cuanto su tamaño es un poco mayor que trivial. Para tener una visión global de la colección de datos preferimos una gráfica realizada a partir de ella; con la gráfica, efectivamente, nos resulta mucho más sencillo interpretar la colección.

La tarea de generar una gráfica a partir de una tabla de frecuencias de la colección de datos se encarga desde hace muchos años a programas de ordenador específicos diseñados para ello. Con estos programas, las posibilidades de representación son tantas que hay personas especializadas en elegir y preparar la más adecuada para cada caso (infografistas).



Como estudiante de secundaria, debes aprender cuál es el fundamento de la creación de las gráficas, incluso aunque luego uses los programas de ordenador para generarlas. Por ello, deberías hacer algunos ejercicios de creación de tus propias gráficas, que en la mayoría de los casos no quedarán tan elegantes ni espectaculares como las creadas con el ordenador; no te preocupes, los principios son los mismos haciendolo a mano o con un programa.

Idea básica de las gráficas

Las ideas más importantes para realizar una gráfica de una colección de datos son:

- ✱ Partir de una tabla con los valores y sus frecuencias; la frecuencia puede ser absoluta, absoluta acumulada, relativa o relativa acumulada, según interese.
- ✱ Elegir algún tipo de gráfico como una barra, una línea o un sector circular y dibujar un elemento por cada valor de la colección, con algún parámetro **directamente proporcional** a la frecuencia.

Gráficas más importantes

Los tres tipos de gráficas que estudiaremos en este nivel son:

- ✱ Diagrama de barras. En el nivel 3 veremos una gráfica muy similar llamada histograma.
- ✱ Polígono de frecuencias.
- ✱ Diagrama de sectores.

Ejemplo

Partiendo de la tabla de frecuencias absolutas de la izquierda podemos generar las tres gráficas que hay a continuación.

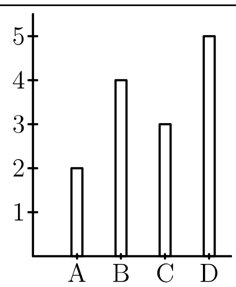
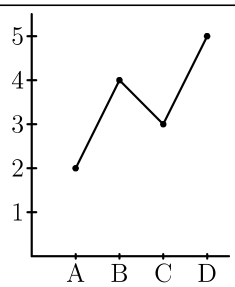
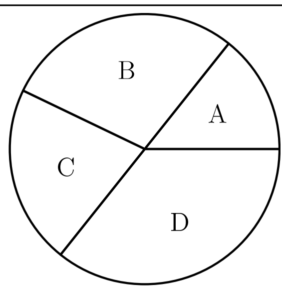
<table>
<tr><th>Tabla de frecuencias</th><th>Diagrama de barras</th><th>Polígono de frecuencias</th><th>Diagrama de sectores</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Valor</th><th>Frecuencia</th></tr>
<tr><td>A</td><td>2</td></tr>
<tr><td>B</td><td>4</td></tr>
<tr><td>C</td><td>3</td></tr>
<tr><td>D</td><td>5</td></tr>
</table>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Diagrama de barras

En un diagrama de barras se dibuja una barra para cada valor. La altura de la barra es directamente proporcional a la frecuencia del valor. Las barras pueden ser de cualquier anchura, pero nunca se pueden tocar, debe estar clara la separación entre ellas.

Adaptación al espacio

Cuando preparamos un diagrama de barras nos adaptamos al espacio que se nos asigne; el diagrama será igualmente útil con casi cualquier tamaño. Aprendiendo a hacer el ajuste a mano se comprende cómo lo hacen los programas de ordenador; los programadores deben saber cómo funciona el método para poder programarlo.

Pasos de la creación del diagrama de barras

Paso 1. Dibujamos dos segmentos perpendiculares: uno horizontal por la parte de abajo del espacio asignado y otro vertical por la parte izquierda.

Paso 2. Si los valores son numéricos, los representamos de menor a mayor; si no son numéricos, los podemos representar en cualquier orden. En el eje horizontal hacemos una pequeña señal (un segmento minúsculo, por ejemplo) para cada valor, de modo que queden a la misma distancia una de otra y la última quede muy cerca del extremo derecho. Escribimos los valores.

Paso 3. Hacemos una pequeña señal en el eje vertical muy cerca del extremo superior y le asignamos el valor de la mayor frecuencia que aparezca en la tabla o un poco más si nos viene bien porque los valores de las frecuencias tienen muchos dígitos. Esa marca nos dirige para dividir el eje vertical en una escala en la que podremos marcar y escribir todas las frecuencias o bien solo unas cuantas (dependiendo de sus valores).

Paso 4. Para cada valor, dibujamos una barra que se apoye en el eje horizontal y que tenga como altura la que corresponda a su frecuencia, tomada en el eje vertical. El grosor de la barra se elige de modo que quede estéticamente bien respecto al dibujo. Las barras no pueden estar unidas.

Ejemplo

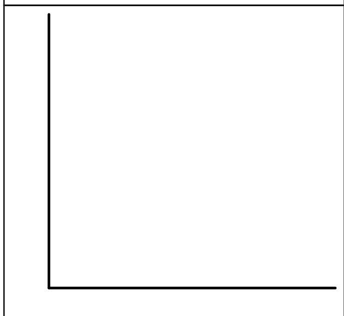
Enunciado

Representa con un diagrama de barras la siguiente tabla de frecuencias absolutas.

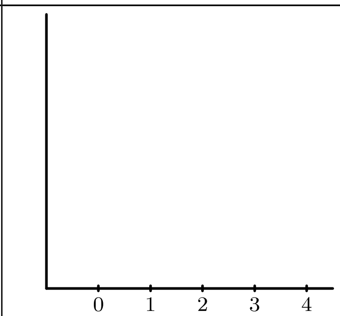
Valor	0	1	2	3	4
Frecuencia	4	10	7	5	2

Resolución

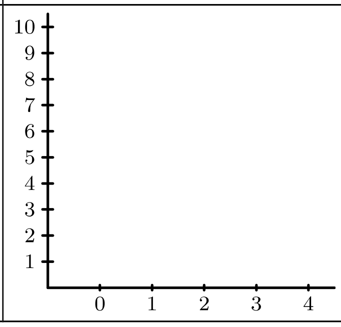
Paso 1



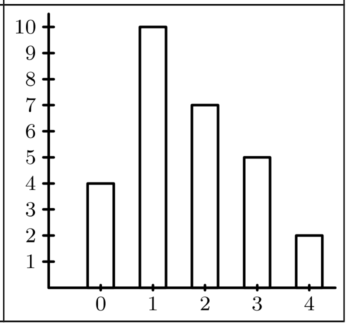
Paso 2



Paso 3



Paso 4



Enunciados

Representa con un diagrama de barras las siguientes tablas de frecuencias absolutas. Ajusta cada diagrama al espacio asignado.

①

Valor	0	1	2	3	4
Frecuencia	2	6	1	5	3

②

Valor	0	1	2	3	4
Frecuencia	10	3	7	10	2

③

Valor	0	1	2	3	4
Frecuencia	5	8	2	1	6

④

Valor	0	1	2	3	4
Frecuencia	9	5	11	12	10

Respuestas

①

②

③

④

Variantes del diagrama de barras

La característica más importante de cualquier gráfica realizada a partir de una colección de datos es que sea clara; adicionalmente, si es estéticamente agradable también será mejor. Para conseguir claridad y belleza se pueden añadir o modificar algunos elementos a la gráfica.

Ejemplos

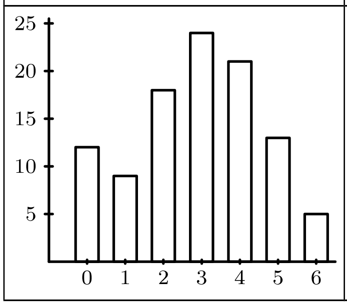
Enunciado. Representa con un diagrama de barras las siguientes tablas de frecuencias absolutas.

①	Valor	0	1	2	3	4	5	6
	Frecuencia	12	9	18	24	21	13	5

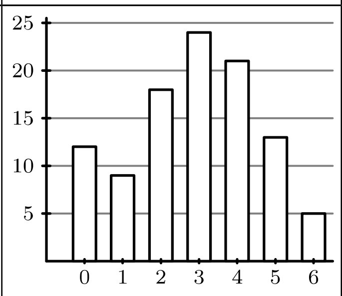
②	Valor	Blanco	Negro	Azul	Rojo	Amarillo	Verde	Marrón
	Frecuencia	28	21	35	32	15	38	9

Resoluciones

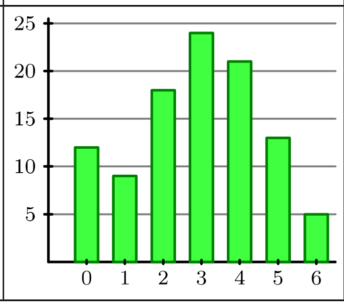
Ejemplo 1



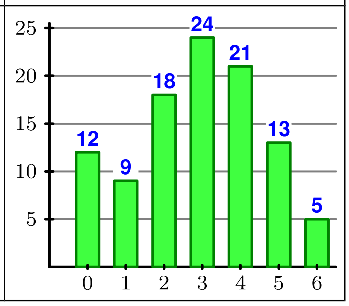
Ejemplo 2



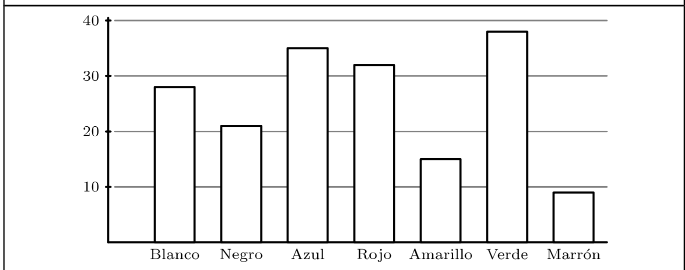
Ejemplo 3



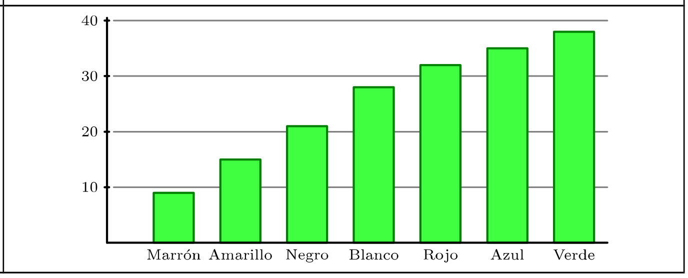
Ejemplo 4



Ejemplo 5



Ejemplo 6



Comentarios

- ✱ En el ejemplo (1) no se han marcado todos los valores de las frecuencias, ya que son muchos. Se ha optado por marcar solamente algunos múltiplos de 5. Para una mayor claridad, se ha marcado el número 25, aunque es mayor que cualquier frecuencia.
- ✱ En el ejemplo (2) se han añadido unas líneas horizontales de un color más tenue para que se aprecie mejor la relación entre las alturas de las barras.
- ✱ En el ejemplo (3) se han coloreado las barras para que destaquen sobre las líneas horizontales.
- ✱ En el ejemplo (4) se han añadido los valores exactos de las frecuencias.
- ✱ En el ejemplo (6) se han reordenado los valores por frecuencias crecientes; es correcto hacerlo porque no son numéricos.

Polígono de frecuencias

En un polígono de frecuencias se dibuja una línea que une todos los puntos definidos con el valor y su frecuencia. La altura de cada punto es directamente proporcional a la frecuencia del valor. Los puntos pueden ser visibles o no.

Adaptación al espacio

Cuando preparamos un polígono de frecuencias nos adaptamos al espacio que se nos asigne; será igualmente útil con casi cualquier tamaño. Aprendiendo a hacer el ajuste a mano se comprende cómo lo hacen los programas de ordenador; los programadores deben saber cómo funciona el método para poder programarlo.

Pasos de la creación del polígono de frecuencias

Paso 1. Dibujamos dos segmentos perpendiculares: uno horizontal por la parte de abajo del espacio asignado y otro vertical por la parte izquierda.

Paso 2. Si los valores son numéricos, los representamos de menor a mayor; si no son numéricos, los podemos representar en cualquier orden. En el eje horizontal hacemos una pequeña señal (un segmento minúsculo, por ejemplo) para cada valor, de modo que queden a la misma distancia una de otra y la última quede muy cerca del extremo derecho. Escribimos los valores.

Paso 3. Hacemos una pequeña señal en el eje vertical muy cerca del extremo superior y le asignamos el valor de la mayor frecuencia que aparezca en la tabla o un poco más si nos viene bien porque los valores de las frecuencias tienen muchos dígitos. Esa marca nos dirige para dividir el eje vertical en una escala en la que podremos marcar y escribir todas las frecuencias o bien solo unas cuantas (dependiendo de sus valores).

Paso 4. Para cada valor, dibujamos un punto que tenga como abscisa el valor y como ordenada la frecuencia.

Paso 5. Unimos los puntos respetando el orden, formando una línea poligonal.

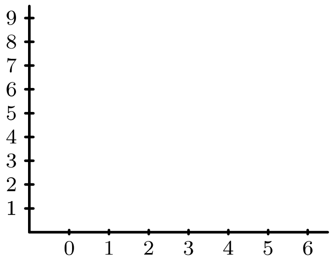
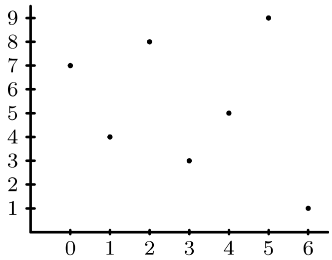
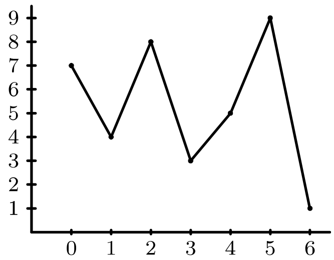
Ejemplo

Enunciado

Representa con un polígono de frecuencias la siguiente tabla de frecuencias absolutas.

Valor	0	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	7	4	8	3	5	9	1

Resolución

Paso 1	Pasos 2 y 3	Paso 4	Paso 5
			

Enunciados

Representa con un polígono de frecuencias las siguientes tablas de frecuencias absolutas. Ajusta cada gráfica al espacio asignado.

①

Valor	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	4	2	7	3	9	5	6	1

②

Valor	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	9	1	5	7	7	2	8	3

③

Valor	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	12	7	15	8	3	10	4	11

④

Valor	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	8	7	12	9	5	14	10	15

Respuestas

①

②

③

④

Relación entre el diagrama de barras y el polígono de frecuencias

El diagrama de barras y el polígono de frecuencias se dibujan siguiendo unos principios tan similares que resultan muy parecidos; tanto, que se pueden dibujar fácilmente juntos. En un caso concreto, habrá que elegir lo más conveniente para expresar los datos disponibles.

Concretamente, la relación entre las dos gráficas es que los puntos que definen por dónde pasa la línea poligonal del polígono de frecuencias son los puntos medios de los lados superiores de las barras.

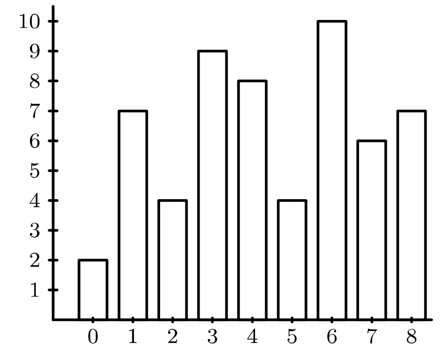
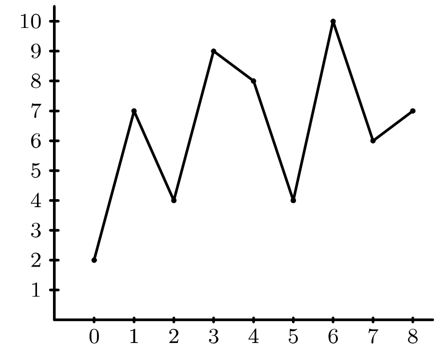
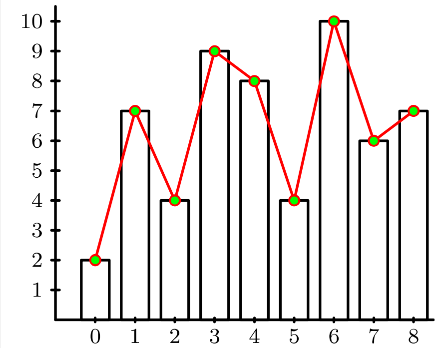
Ejemplo 1

Enunciado

Representa, juntos y por separado, el diagrama de barras y el polígono de frecuencias correspondientes a la siguiente tabla de frecuencias absolutas.

Valor	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia	2	7	4	9	8	4	10	6	7

Resolución

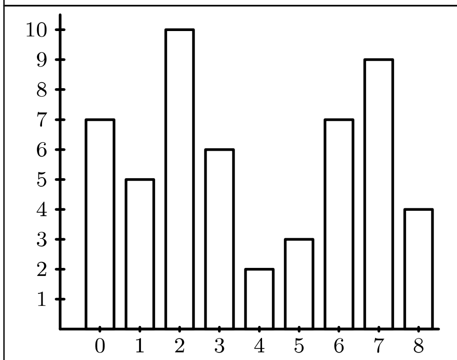
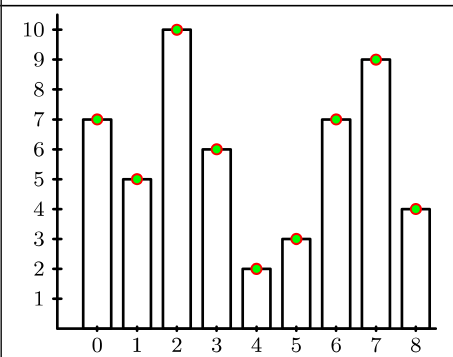
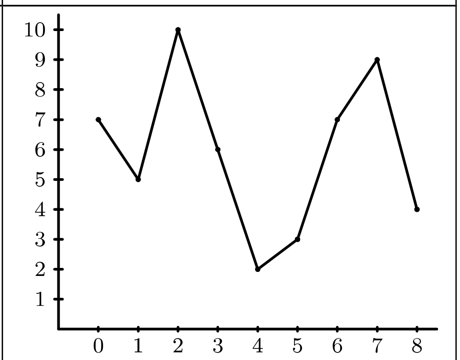
Diagrama de barras	Polígono de frecuencias	Las dos gráficas juntas
		

Comentario

En la gráfica conjunta hemos marcado especialmente los puntos que relacionan las dos gráficas.

Ejemplo 2

A partir del diagrama de barras de la izquierda, obtenemos el polígono de frecuencias de la derecha.

Diagrama de barras	Marcamos los puntos	Polígono de frecuencias
		

Polígono de frecuencias relativas acumuladas

Sabemos que las frecuencias usadas para generar una gráfica pueden ser cualquiera de las cuatro frecuencias existentes: frecuencias absolutas, frecuencias absolutas acumuladas, frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas. Además, las frecuencias relativas se pueden interpretar como porcentajes.

De todas las posibilidades, una de las que tiene aplicaciones interesantes que estudiaremos en el nivel 3 es el polígono de frecuencias relativas acumuladas expresadas como porcentaje.

Ejemplo 1

Enunciado

Representa el polígono de frecuencias relativas acumuladas expresadas como porcentaje a partir de la siguiente tabla de frecuencias absolutas.

Valor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia absoluta	3	6	5	8	2	3	7	4	9	3

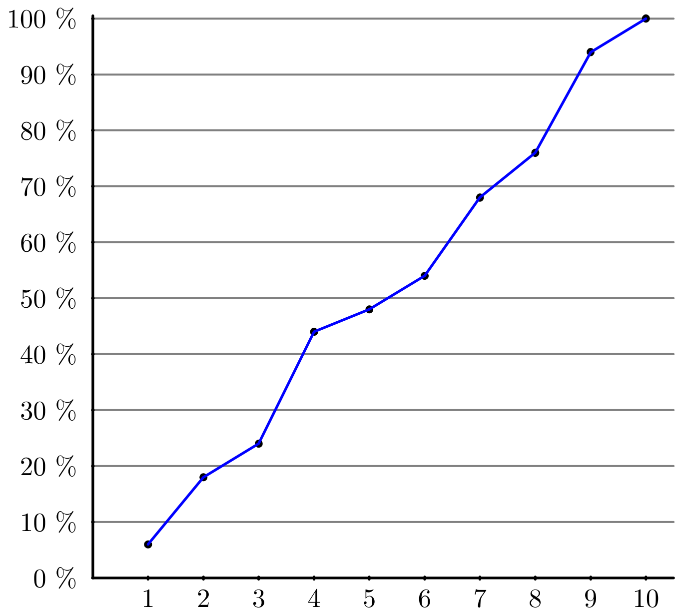
Resolución

La suma de todas las frecuencias absolutas nos da el número de datos:

$3+6+5+8+2+3+7+4+9+3 = 50$

Rellenamos una tabla con las columnas necesarias hasta obtener las frecuencias relativas acumuladas expresadas como porcentaje (abajo a la izquierda):

Valor	Frec. abs.	Frec. abs. acum.	Frec. rel. acum.	Porcentaje
1	3	3	0,06	6 %
2	6	9	0,18	18 %
3	5	14	0,24	24 %
4	8	22	0,44	44 %
5	2	24	0,48	48 %
6	3	27	0,54	54 %
7	7	34	0,68	68 %
8	4	38	0,76	76 %
9	9	47	0,94	94 %
10	3	50	1	100 %



Arriba a la derecha vemos el polígono de frecuencias pedido.

Comentario

En la gráfica hemos añadido unas líneas horizontales de referencia cada 10 %. Serán importantes en el nivel 3.

Enunciados

Representa con un polígono de frecuencias relativas acumuladas expresadas como porcentaje las siguientes tablas de frecuencias absolutas. Utiliza las columnas auxiliares que necesites. Aprovecha como referencia las líneas ya dibujadas.

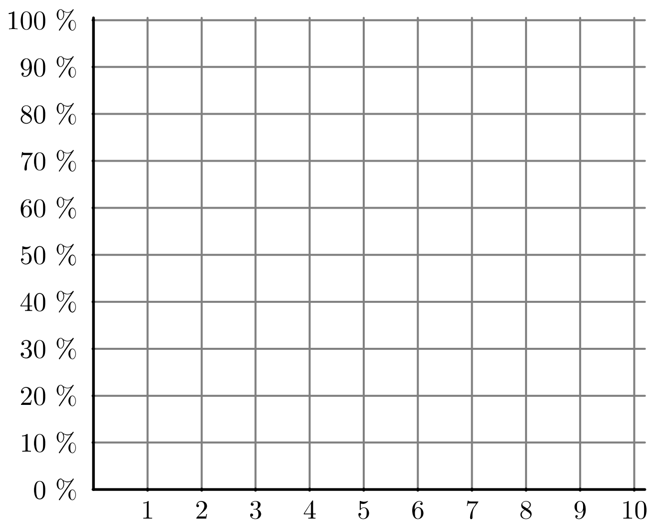
①	Valor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Frec. absoluta	1	1	7	5	8	11	9	3	3	2

②	Valor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Frec. absoluta	4	10	20	34	36	38	26	18	8	6

Respuestas

①

Valor				Porcentaje	Gráfica
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					



②

Valor				Porcentaje	Gráfica
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

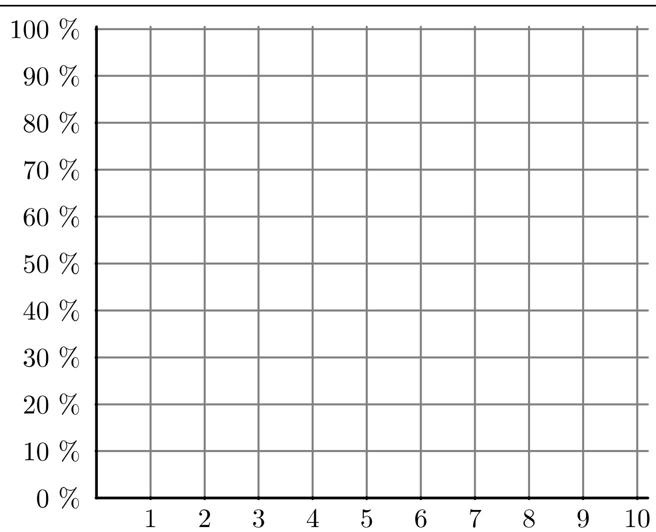


Diagrama de sectores

En un diagrama de sectores se divide un círculo en sectores circulares, uno por cada valor. La amplitud de cada sector es directamente proporcional a la frecuencia del valor. Este tipo de gráfica se utiliza especialmente cuando los valores no son numéricos y hay pocos.

Pasos de la creación del diagrama de sectores

Paso 1. Calculamos la amplitud de cada sector circular usando dos condiciones:

- Debe ser directamente proporcional a la frecuencia.
- El número total de datos debe corresponder con 360°, la amplitud del círculo completo.

Paso 2. Dibujamos un círculo.

Paso 3. Dibujamos los sectores, uno a continuación del otro.

Ejemplo

Enunciado

En una clase se presentan cinco candidatos y candidatas a delegada o delegado, obteniendo el número de votos que se lee en esta tabla:

Candidato/a	Ágata	Bruno	Celia	Diego	Elsa
Número de votos	45	20	30	15	10

Representa el resultado de la votación con un diagrama de sectores.

Resolución

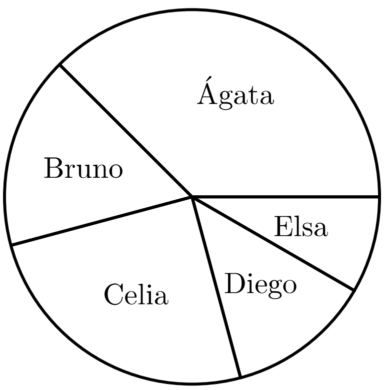
La suma de los números de votos obtenido por cada candidato o candidata nos da el número total de valores de la colección de datos: $45 + 20 + 30 + 15 + 10 = 120$.

Para averiguar la amplitud de cada intervalo utilizamos una tabla de valores basada en que las magnitudes «número de votos obtenidos» y «amplitud del sector circular» son directamente proporcionales, como aprendimos en este nivel:

Candidato/a	Ágata	Bruno	Celia	Diego	Elsa	*Total*
Núm. de votos	45	20	30	15	10	120
Amplitud	135°	60°	90°	45°	30°	360°

La tabla se rellena bien con el método de reducción a la unidad: $360° : 120 = 3°$, luego: Amplitud $= 3 \cdot$ (Número de votos).

La gráfica queda así:



Variantes del diagrama de sectores

Uno de los lugares en los que es más común utilizar un diagrama de sectores es la representación de cuántas personas han sido elegidas de cada partido político en unas elecciones parlamentarias. Y como los parlamentos suelen tener forma de trapecio circular, es común que el diagrama de sectores no ocupe un círculo completo, sino un semicírculo o incluso un trapecio circular también.

Ejemplo 1

Enunciado: utiliza un semicírculo para realizar un diagrama de sectores a partir de esta tabla de frecuencias absolutas:

Valor	A	B	C	D	E
Frecuencia	140	152	116	168	144

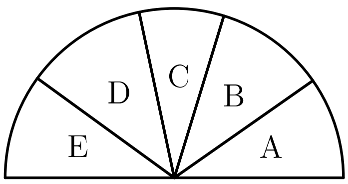
Resolución

El total de datos es $140 + 152 + 116 + 168 + 144 = 720$.

A cada unidad de frecuencia le corresponde $180° : 720 = 0{,}25°$, ya que un semicírculo tiene una amplitud de 180°. Por tanto, las amplitudes de los sectores son:

Valor	A	B	C	D	E
Frecuencia	140	152	116	168	144
Amplitud	35°	38°	31°	42°	36°

Y el resultado es:

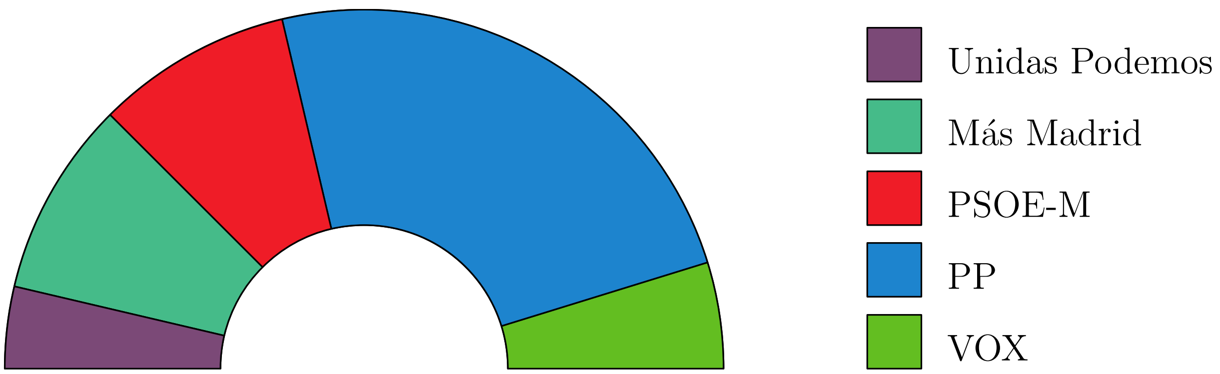


Ejemplo 2

En las elecciones a la Asamblea de Madrid (España) celebradas en 2021 se obtuvieron estos resultados:

Partido	PP	Más Madrid	PSOE-M	VOX	Unidas Podemos
Representantes	65	24	24	13	10

Es costumbre utilizar en las gráficas los colores representativos de cada partido y colocar los sectores de acuerdo a la ideología política (derechas o izquierdas).



Enunciados

Representa de manera aproximada con un diagrama de sectores las siguientes tablas de frecuencias absolutas. Ajusta cada diagrama al espacio asignado.

①					
Valor	A	B	C	D	E
Frecuencia	44	20	36	28	52

②					
Valor	A	B	C	D	E
Frecuencia	18	36	10	20	6

Enunciados

Representa de manera aproximada con un diagrama de sectores usando un semicírculo las siguientes tablas de frecuencias absolutas. Ajusta cada diagrama al espacio asignado.

③					
Valor	A	B	C	D	E
Frecuencia	9	10	4	16	6

④					
Valor	A	B	C	D	E
Frecuencia	44	82	70	60	104

Respuestas

①

②

③

④

Enunciados

① De una colección de datos se conoce el diagrama de barras de la izquierda, que refleja las frecuencias absolutas. Con esa información, dibuja de manera aproximada un diagrama de sectores ajustándote al espacio asignado.

Diagrama de barras

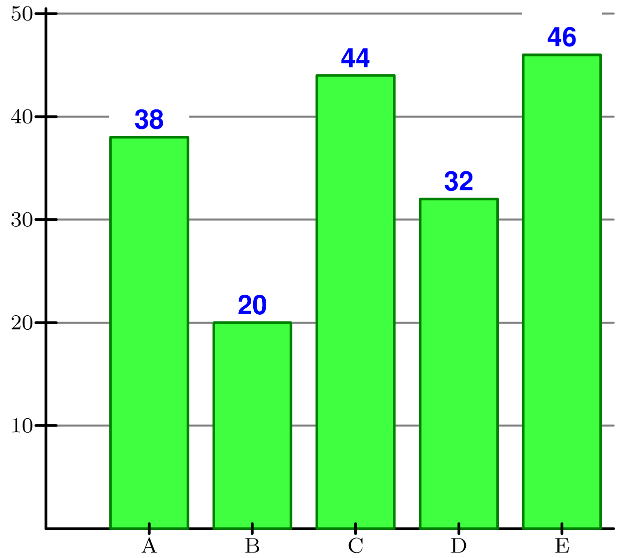
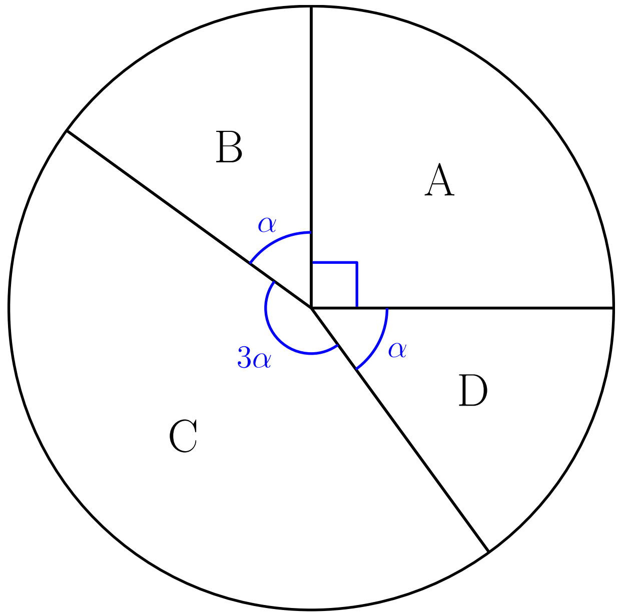


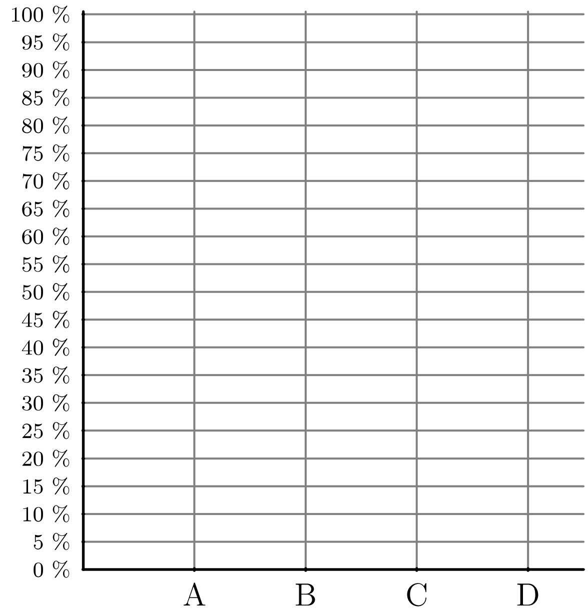
Diagrama de sectores

② A partir de una colección de datos se realiza el diagrama de sectores de la izquierda, en el que se han añadido algunos detalles auxiliares. Con esa información, dibuja el polígono de frecuencias relativas acumuladas expresadas como porcentaje, ajustándote al espacio y el orden asignado.

Diagrama de sectores



Polígono de frecuencias



Precisión en una medida

Cuando realizamos una medida de una magnitud física, no podemos realizarla con una precisión absoluta; ni los instrumentos de medida ni la naturaleza de la realidad nos lo permiten. Damos las medidas con la precisión que nos parezca adecuada para el propósito en que se aplica.

Ejemplos

① Decimos que una persona mide 1,83 m, pero no decimos que mide 1,83167 m.

② Decimos que una carrera de 100 m se ha realizado en 9,93 s, pero no decimos que el tiempo realizado es 9,928935 s.

③ Decimos que un coche de fórmula 1 ha tardado en dar una vuelta a un circuito 1 min 32,127 s, pero no decimos que ha tardado 1 min 32,1271097 s.

④ Decimos que un país tiene 34 millones de habitantes, pero no decimos que tiene 34 045 127 habitantes.

Precisión en una respuesta

No tiene sentido dar en la respuesta a un ejercicio o a un problema una precisión mayor que la que tenían los datos iniciales, puesto que en la vida real no la vamos a utilizar. Sin embargo, sabemos que hay operaciones matemáticas que nos pueden dar muchas cifras o incluso infinitas.

Ejemplos

⑤ Si una persona tarda 40 segundos en correr 300 metros queremos saber cuánto tiempo tarda, de media, en recorrer un metro, la operación es

$\frac{40}{300} = 0{,}1\overline{3}$. Pero no tiene sentido decir que tarda 0,133 333 333 s.

⑥ Si la longitud del lado de una mesa cuadrada es 1 m, podemos calcular la longitud de su diagonal usando el teorema de Pitágoras:

$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562...$ pero no tiene sentido decir que mide 1,414 213 562 m.

⑦ Si una bolsa de caramelos tiene 512 caramelos y todos juntos tienen una masa de 35 g, podemos calcular la media de la masa de los caramelos:

$\frac{35}{512} = 0{,}068359375$. Pero no tiene sentido decir que es 0,068 359 375 g.

Precisión en los cálculos intermedios

Aunque ni las medidas iniciales ni las respuestas finales pueden tener más de una determinada precisión, los cálculos intermedios que hagamos deben tener la máxima precisión que nos permitan nuestros instrumentos de cálculo, para evitar en lo posible la propagación de errores.

A partir de este nivel ya utilizaremos la calculadora científica, así que hay que aprender a usarla correctamente; como dice un conocido superhéroe,

$\boxed{\text{un gran poder conlleva una gran responsabilidad}}$

Ejemplos de número de cifras significativas

El concepto de cifras significativas resulta un poco áspero de comprender, así que mejor comenzaremos con unos ejemplos:

① Si digo que mido **1,62** metros, estoy dando la medida con **tres** cifras significativas.

② Si digo que un avión ha recorrido cierta distancia en **0,083** segundos, estoy dando la medida con **dos** cifras significativas.

③ Si digo que un coche me ha costado **24 152** euros, estoy dando la medida con **cinco** cifras significativas.

④ Si digo que a una fiesta han asistido **2300** personas, lo más probable es que esté dando la medida con una precisión de **dos** cifras significativas, pero podrían ser tres o cuatro, habría que ver el contexto para saberlo.

Cifras significativas y unidad de medida

El número de cifras significativas de una medida no depende de en qué unidad se exprese esa medida.

Ejemplo

Podemos decir que una persona mide 1,82 m o bien que mide 182 cm. En cualquier caso estamos dando la medida con tres cifras significativas (el «1», el «8» y el «2»). Es una precisión muy adecuada, porque más no tiene sentido (se mide un poco más por la mañana al levantarse que por la noche al acostarse porque al dormir se relajan los discos intervertebrales) y tampoco menos tiene sentido (no resultaría útil).

El metro y el centímetro son las unidades más usadas en el Sistema Internacional para expresar la altura de una persona; pero podríamos usar el decímetro:

$$1{,}82 \text{ m} = 18{,}2 \text{ dm} = 182 \text{ cm}$$

Hasta aquí, todo es bastante natural. Pero debemos examinar qué aspecto tendría la medida si nos obligaran a usar unidades mayores o menores.

✱ Con unidades mayores: 1,82 m = 0,182 dam = 0,0182 hm = 0,00182 km. Vemos que hay que añadir ceros por la izquierda, pero no son cifras significativas ya que no aportan más información sobre cuánto mide la persona.

✱ Con unidades menores: 1,82 m = 1820 mm. Nos vemos obligados a añadir un cero para poder expresar la medida en milímetros, pero porque no conocemos cuántos milímetros tiene la altura; ese cero que añadimos no es una cifra significativa.

Concepto de cifras significativas

Las cifras significativas de una medida son aquellas que realmente conocemos, de las que estamos seguros.

✱ Las cifras significativas son las que aportan la información de la precisión con la que se da la medida.

✱ Como hemos visto en los ejemplos, el concepto «cifras significativas» no tiene nada que ver con el concepto «cifras decimales».

✱ Cuando se cambia de unidad de medida, no cambia el número de cifras significativas.

Enunciados

Di cuántas cifras significativas tienen las medidas que aparecen en letra **negrita** en los siguientes enunciados. En los casos dudosos, contesta cuántas cifras significativas te parece lo más razonable, aunque haya otras posibilidades.

① Una persona mide **2,14** metros.

② Usaín Bolt (Jamaica) corrió una vez los 200 metros en **19,19** segundos.

③ Una persona me ha a hacer una reforma en casa y me pasado un presupuesto de **1430,12** euros.

④ Una amiga se va a comprar un coche nuevo y me dice que le va a costar unos **27 000** euros.

⑤ He medido con cuidado la longitud de la mesa en la que trabajo y me ha salido **1,03** metros.

⑥ Una persona recién nacida ha medido **0,53** metros.

⑦ La población de un país es **23 500 000** habitantes.

⑧ En 2020 un coche de producción (es decir, que te lo podrías comprar) alcanzó una velocidad en uno de los recorridos de **532,93** km/h.

⑨ En una reparación de mi coche tuve que pagar **3120** euros.

⑩ La masa de una hormiga es aproximadamente **0,002** gramos.

⑪ Para poder asistir a un concierto los organizadores deciden establecer un estricto control de entrada que obliga a todos los asistentes a pasar por unos torniquetes. Además, la preocupación de los organizadores llega al punto de obligar también a todos los invitados a pasar por los torniquetes. Al final del concierto se anuncia en una nota de prensa que han asistido **12 400** personas.

⑫ Un amigo mío fue el otro día a una manifestación y me dijo que fue un éxito porque había unas **2000** personas.

⑬ Me di paseo el otro día y el podómetro digital que uso habitualmente me dio un resultado de **3474** pasos.

⑭ En un laboratorio de investigación biológica miden la masa de una muestra de un tumor de un animal y obtienen un resultado de **0,0304** gramos.

⑮ Para calcular cuántos neutrinos atraviesan la Tierra existe una instalación cerca del Polo Sur llamada IceCube que está compuesta por **5160** sensores.

⑯ En el último viaje que hice me gasté unos **2300** euros.

⑰ En algunas especies de pulpo cada hembra llega a poner **200 000** huevos.

⑱ La célula más grande de los seres humanos es el óvulo (presente solo en la mujeres), que mide una media de **0,0015** metros.

Cifras más y menos significativas

En una medida, la cifra más significativa es la de la izquierda y la menos significativa es la de la derecha. Esto se debe a que en el sistema decimal escribimos las cifras de orden superior hacia la izquierda y las de orden inferior hacia la derecha.

Ejemplo 1

Sabemos que Mauricio mide un metro y casi otro y Roberto mide un poquito más de dos metros; es decir:

Altura de Mauricio: 1,?? metros; altura de Roberto: 2,?? metros.

Por tanto, ya sabemos que Roberto es más alto que Mauricio; si medimos las dos alturas con la misma unidad, nos basta para decidir quién es más alto con saber cuál es la cifra más significativa de la altura de cada uno, no necesitamos las demás cifras significativas.

Redondeo

Cuando redondeamos un número, perdemos precisión para ganar en simplicidad. Lo podemos hacer por dos motivos:

* Las operaciones matemáticas nos han dado más cifras de las que realmente son fiables; por ejemplo, al dividir, calcular una raíz cuadrada o usar π.
* No necesitamos tantas cifras en el resultado final porque en la realidad no las podemos usar.

Reglas para redondear

Para redondear un número a una cantidad de cifras significativas determinada:

1. Se mantienen las cifras significativas de mayor orden en el número y se suprimen todas las demás.
2. Si la cifra eliminada más significativa es 5 o más, se suma 1 a la última cifra significativa que se ha mantenido.
3. Si al sumar 1 se llega a 10, hay que seguir sumando 1 hacia la izquierda (se llama **el acarreo**).
4. Si al final quedan ceros en la parte derecha del número, se mantienen, puesto que son cifras significativas.

Como ves, lo más importante del método ya lo aprendiste y practicaste en el nivel 1 del curso. Simplemente, hemos adaptado las ideas a un nuevo vocabulario.

Ejemplos

	Número original	Redondeo a 5 c. s.	Redondeo a 4 c. s.	Redondeo a 3 c. s.
②	25,7293	25,7293	25,7293	25,7293
③	127,9195	127,92	127,9	128
④	1,003728	1,0037	1,004	1,00
⑤	0,0129992	0,012999	0,01300	0,0130
⑥	8095,02	8095,0	8095	8100
⑦	38,0095	38,010	38,01	38,0

Instrucciones

Escribe la respuesta en el cuadro en blanco que hay bajo cada número.

Enunciados

Redondea los siguientes números a **tres** cifras significativas.

1	2,347	
2	4,129	
3	5,335	
4	12,02	
5	0,1295	
6	125,5	
7	204,9	
8	0,2081	
9	0,012 37	
10	102,4	
11	12,37	
12	11,49	
13	0,9961	
14	0,9992	
15	0,9996	
16	78,95	
17	158,15	
18	172,55	
19	0,9088	
20	15,55	

Enunciados

Redondea los siguientes números a **cuatro** cifras significativas.

21	12,763	
22	21,089	
23	33,005	
24	0,126 728	
25	1,0782	
26	3,9098	
27	0,919 235	
28	127,83	
29	51,347	
30	3,0015	
31	1294,7	
32	31,3131	
33	4,0013	
34	30,128	
35	210,45	
36	67,8893	
37	0,018 450	
38	200,02	
39	309,97	
40	0,235 55	

Enunciados

Redondea los siguientes números a **cinco** cifras significativas.

41	12 834,9	
42	342,255	
43	38,9191	
44	5,12138	
45	$120,\overline{6}$	
46	$23,\overline{27}$	
47	$3,01\overline{2}$	
48	$0,\overline{61}$	

Dificultades en la ciencia

Cuando hay que escribir ciertos números en la ciencia se pueden presentar algunas dificultades que no aparecen en la vida no científica.

* Un número entero puede tener tantas cifras que sea incómodo de leer, escribir y manejar.
* Un número decimal puede ser tan próximo a cero que sea incómodo de leer, escribir y manejar.
* Un número entero puede acabar en varios ceros y no se puede saber fácilmente cuántos de ellos son cifras significaticas y cuántos no lo son.

Ejemplos

① Queremos expresar en metros (la unidad de longitud del Sistema Internacional) la distancia que recorre la luz en el vacío en un año; es decir, ¿cuántos metros mide un año-luz?

La velocidad de la luz en el vacío es muy cercana a 300 000 km/s.

Un año tiene $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,536\,000$ segundos.

Por tanto la luz recorre en un año $300\,000 \cdot 1000 \cdot 31\,536\,000$ metros.

Esta última operación nos da la solución: **9 460 800 000 000 000** metros.

② El experimento IceCube, situado en la Antártida, intenta identificar neutrinos, que atraviesan la Tierra a la velocidad de la luz, usando detectores esféricos que miden 1,26 metros de diámetro. (Vemos uno a la derecha.) Queremos calcular en segundos (la unidad de tiempo del Sistema Internacional) cuánto tiempo tarda, como máximo, un neutrino en atravesar un detector.

Los neutrinos viajan a 300 000 km/s. En atravesar una esfera de 1,26 metros de diámetro tardará

$$\text{tiempo} = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \frac{1{,}26\,\text{m}}{300000 \cdot 1000\,\text{m/s}} = \frac{42\,\text{s}}{10000000000} = \mathbf{0{,}000\,000\,42} \text{ segundos}$$

③ Nos dicen que un país tiene **12 000 000** de habitantes. Si solo tenemos la información del número, no estamos seguros de cuántos de los ceros son cifras significativas.

④ Si obtenemos como resultado de una operación el número 499,958 y lo damos redondeado a tres cifras significativas tendremos que escribir **500**. Pero ese resultado podría tener una, dos o tres cifras significativas; si no se dice explicitamente, no se puede saber.

Tipos de números que son incómodos de manejar

* Positivos con valor absoluto grande; ejemplo: 345 000 000 000 000 000.
* Negativos con valor absoluto grande; ejemplo: –345 000 000 000 000 000.
* Próximos a cero positivos; ejemplo: 0,000 000 000 000 000 178.
* Próximos a cero negativos; ejemplo: –0,000 000 000 000 000 178.

Notación científica

La notación científica es una manera de escribir números; se puede usar con cualquier número, pero lo más habitual es hacerlo con números con valor absoluto muy grande y con números muy próximos a cero.

Ejemplos

Antes de explicar en qué consiste la notación científica, presentamos unos ejemplos para que veas el aspecto que tiene. Compara el mismo número escrito en la notación usual (es decir, la que ya conoces) y en la notación científica.

	Notación usual	Notación científica
①	1 245 000 000 000 000 000	$1{,}245 \cdot 10^{18}$
②	–67 891 000 000 000 000 000 000 000	$-6{,}7891 \cdot 10^{25}$
③	0,000 000 000 000 000 048 2	$4{,}82 \cdot 10^{-17}$
④	–0,000 000 000 000 000 000 000 030 7	$-3{,}07 \cdot 10^{-23}$

Formato de la notación científica

La notación científica consiste en el producto indicado de un número, que puede ser entero o decimal, por una potencia de 10 con exponente entero. Con las siguientes condiciones adicionales:

- El número debe tener como parte entera una sola cifra distinta de cero.
- Todas las cifras del número deben ser cifras significativas.

El número se llama **mantisa** y el exponente de 10 se llama **orden de magnitud**.

La notación científica no es una operación: ni la potencia ni el producto se calculan, ambos quedan indicados.

Ejemplos

	Notación científica	Mantisa	Orden de magnitud
⑤	$1{,}245 \cdot 10^{18}$	1,245	18
⑥	$-6{,}7891 \cdot 10^{25}$	–6,7891	25
⑦	$4{,}82 \cdot 10^{-17}$	4,82	–17
⑧	$-3{,}07 \cdot 10^{-23}$	–3,07	–23

Errores comunes

Las siguientes expresiones no están en notación científica, por el motivo indicado.

	Expresion	Motivo
⑨	$0{,}245 \cdot 10^{18}$	La mantisa no puede tener parte entera cero.
⑩	$22{,}7 \cdot 10^{3}$	La mantisa solo puede tener una cifra en la parte entera.
⑪	$1{,}25 \cdot 10^{2{,}6}$	El exponente de 10 no puede ser decimal.

Enunciados

① Escribe el número −742 800 000 000 000 000 000 000 en notación científica con tres cifras significativas.

② Escribe el número 742 800 000 000 000 000 000 000 en notación científica con cinco cifras significativas.

③ Escribe el número 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 781 350 en notación científica con cuatro cifras significativas.

Resoluciones explicadas

① El número dado tiene al menos cuatro cifras significativas; como nos piden que haya tres en la solución final, habrá que redondear; por tanto, comenzamos escribiendo las tres cifras más significativas, redondeando: −743; de ahí obtendremos la mantisa.

Como en notación científica la mantisa solo puede tener una cifra, escribimos la coma decimal entre el «7» y el «4»: −7,43.

Para convertir el número −7,43 en el número dado hay que multiplicarlo por la unidad seguida de 23 ceros (lo averiguamos contando), luego el exponente debe ser 23.

Solución: $-7{,}43 \cdot 10^{23}$

② El número dado tiene al menos cuatro cifras significativas; como nos piden que haya cinco en la solución final, hay que utilizar el cero más significativo: 74280; de ahí obtendremos la mantisa.

Como en notación científica la mantisa solo puede tener una cifra, escribimos la coma decimal entre el «7» y el «4»: 7,4280.

Para convertir el número 7,4280 en el número dado hay que multiplicarlo por la unidad seguida de 23 ceros (lo averiguamos contando), luego el exponente debe ser 23.

Solución: $7{,}4280 \cdot 10^{23}$

③ El número dado tiene seis cifras significativas; como nos piden que haya cuatro en la solución final, habrá que redondear; por tanto, comenzamos escribiendo las cuatro cifras más significativas, redondeando: 7814; de ahí obtendremos la mantisa.

Como en notación científica la mantisa solo puede tener una cifra, escribimos la coma decimal entre el «7» y el «8»: 7,814.

Para convertir el número 7,814 en el número dado hay que dividirlo entre la unidad seguida de 28 ceros (lo averiguamos contando), luego el exponente debe ser −28. Recuerda que $\frac{1}{10^{28}}=10^{-28}$, como viste en el nivel 2.

Solución: $7{,}814 \cdot 10^{-28}$

Enunciados

Escribe los siguientes números en notación científica con el número de cifras significativas especificado en la columna «c. s.».

	Número	c. s.	Notación científica
①	19 837 000 000 000 000 000 000 000 000	4	
②	–2 932 000 000 000 000 000 000 000 000 000	3	
③	0,000 000 000 000 000 000 000 000 018 882	3	
④	–0,000 000 000 000 000 000 000 016 298	4	
⑤	25 800 000 000 000 000 000 000 000 000 000	5	
⑥	–195 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000	2	
⑦	29 945 000 000 000 000 000 000 000 000	4	
⑧	–10 980 000 000 000 000 000 000 000 000 000	3	
⑨	0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 003 372	3	
⑩	–0,000 000 000 000 000 000 000 000 278 88	4	
⑪	182 700 000 000 000 000 000 000 000 000	5	
⑫	–108 200 000 000 000 000 000 000 000 000 000	3	
⑬	0,000 000 000 000 000 000 000 001 289 23	4	
⑭	2 811 600 000 000 000 000 000 000 000 000 000	4	
⑮	–7 002 800 000 000 000 000 000 000 000 000	4	
⑯	0,000 000 000 000 000 125 6	2	
⑰	–0,000 000 000 000 000 000 000 030 76	3	
⑱	0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 082 75	3	
⑲	28 940 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000	3	
⑳	–118 950 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000	4	
㉑	–0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 011 246	3	
㉒	18 200 000 000 000 000 000 002 800 000 000 000	3	
㉓	–2 754 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000	4	
㉔	0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 192	2	

Notación científica con números sencillos

Aunque la notación científica está especialmente indicada para los números con valor absoluto muy grande y números muy próximos a ceros, hay ocasiones en que nos la podemos encontrar aplicada a números más sencillos, con los que no pensaríamos utilizarla. Por ejemplo:

- Tenemos la calculadora científica o el programa de ordenador configurado para mostrar todos los números en notación científica.
- Queremos expresar con toda claridad cuántas cifras significativas tiene un número que acaba en algún cero.
- Queremos utilizar un prefijo del Sistema Internacional para decir una medida.

Por ese motivo, conviene pararse un momento a ver qué aspecto tienen algunos números sencillos expresados en notación científica.

Ejemplos

① $278 = 2{,}78 \cdot 10^2$

② $-1300 = -1{,}3 \cdot 10^3$; o bien $-1300 = -1{,}30 \cdot 10^3$; o bien $-1300 = -1{,}300 \cdot 10^3$

③ $0{,}39 = 3{,}9 \cdot 10^{-1}$

④ $-0{,}0278 = -2{,}78 \cdot 10^{-2}$

⑤ $3\,500\,000 = 3{,}50 \cdot 10^6$

⑥ $0{,}002 = 2 \cdot 10^{-3}$. Observa que la mantisa no tiene parte decimal.

Paso de notación científica a notación usual

Especialmente en estos casos de números sencillos, puede tener sentido convertir el número de notación científica a notación usual. Para ello, basta hacer las dos operaciones (la potencia y la multiplicación).

La regla práctica que se obtiene de hacer las dos multiplicaciones es que hay que mover la coma en la mantisa tantas cifras como indique el valor absoluto del orden de magnitud, hacia la derecha si el orden de magnitud es positivo y hacia la izquierda si el orden de magnitud es negativo.

Ejemplos

⑦ $4{,}56 \cdot 10^4 = 45600$. Hemos movido la coma cuatro posiciones a la derecha.

⑧ $-1{,}278 \cdot 10^2 = -127{,}8$. Hemos movido la coma dos posiciones a la derecha.

⑨ $5{,}73 \cdot 10^{-2} = 0{,}0573$. Hemos movido la coma dos posiciones a la izquierda.

⑩ $-1{,}2 \cdot 10^{-3} = -0{,}0012$. Hemos movido la coma tres posiciones a la izquierda.

⑪ $7{,}89 \cdot 10 = 78{,}9$. Hemos movido la coma una posición a la derecha.

Observa que el orden de magnitud en este caso es 1.

⑫ $8{,}91 \cdot 10^{-1} = 0{,}891$. Hemos movido la coma una posición a la izquierda.

Comparación de números positivos en notación científica

Para comparar dos números positivos escritos en notación científica hay que atender primero al orden de magnitud y luego, solo si es necesario, a la mantisa.

* Si dos números positivos escritos en notación científica tienen distinto orden de magnitud, es mayor el que tenga mayor orden de magnitud.
* Si dos números positivos escritos en notación científica tienen el mismo orden de magnitud, es mayor el que tenga mayor mantisa.

Ejemplos

① $3{,}56 \cdot 10^{31} > 8{,}2 \cdot 10^{29}$ porque $31 > 29$.

② $2{,}31 \cdot 10^{53} > 1{,}92 \cdot 10^{53}$ porque $53 = 53$ y $2{,}31 > 1{,}92$.

③ $1{,}04 \cdot 10^{12} > 9{,}32 \cdot 10^{-2}$ porque $12 > -2$.

④ $7{,}2 \cdot 10^{-45} > 9{,}31 \cdot 10^{-67}$ porque $-45 > -67$

⑤ $3{,}52 \cdot 10^{-42} > 3{,}49 \cdot 10^{-42}$ porque $-42 = -42$ y $3{,}52 > 3{,}49$.

Comparación de números negativos en notación científica

Para comparar dos números negativos escritos en notación científica hay que atender primero al orden de magnitud y luego, solo si es necesario, a la mantisa.

* Si dos números negativos escritos en notación científica tienen distinto orden de magnitud, es mayor el que tenga **menor** orden de magnitud.
* Si dos números negativos escritos en notación científica tienen el mismo orden de magnitud, es mayor el que tenga mayor mantisa.

Ejemplos

⑥ $-3{,}56 \cdot 10^{14} > -8{,}2 \cdot 10^{29}$ porque $14 < 29$.

⑦ $-1{,}38 \cdot 10^{53} > -1{,}92 \cdot 10^{53}$ porque $53 = 53$ y $-1{,}38 > -1{,}92$.

⑧ $-1{,}04 \cdot 10^{-4} > -9{,}32 \cdot 10^{-2}$ porque $-4 < -2$.

⑨ $-7{,}2 \cdot 10^{-74} > -9{,}31 \cdot 10^{-67}$ porque $-74 < -67$

⑩ $-3{,}21 \cdot 10^{-42} > -3{,}28 \cdot 10^{-42}$ porque $-42 = -42$ y $-3{,}21 > -3{,}28$.

Comparación de números de distinto signo en notación científica

Si dos números son de distinto signo, siempre es mayor el positivo, con independencia de los valores de las mantisas y de los órdenes de magnitud.

Ejemplos

⑪ $2{,}81 \cdot 10^{4} > -6{,}78 \cdot 10^{-7}$

⑫ $2{,}81 \cdot 10^{-4} > -6{,}78 \cdot 10^{7}$

⑬ $2{,}81 \cdot 10^{4} > -6{,}78 \cdot 10^{7}$

⑭ $2{,}81 \cdot 10^{-4} > -6{,}78 \cdot 10^{-7}$

Múltiplos y submúltiplos de las unidades del Sistema Internacional

Desde el nivel 1 hemos venido trabajando con los tres múltiplos y tres submúltiplos más sencillos del Sistema Internacional. Ahora que conoces la notación científica podemos ver la tabla completa de múltiplos y submúltiplos:

Múltiplo	Símbolo	Valor
deca	da	$10 = 10^1$
hecto	h	$100 = 10^2$
kilo	k	$1000 = 10^3$
mega	M	10^6
giga	G	10^9
tera	T	10^{12}
peta	P	10^{15}
exa	E	10^{18}
zetta	Z	10^{21}
yotta	Y	10^{24}
ronna	R	10^{27}
quetta	Q	10^{30}

Submúltiplo	Símbolo	Valor
deci	d	$0{,}1 = 10^{-1}$
centi	c	$0{,}01 = 10^{-2}$
mili	m	$0{,}001 = 10^{-3}$
micro	µ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
yocto	y	10^{-24}
ronto	r	10^{-27}
quecto	q	10^{-30}

Observa que la propia unidad también se puede escribir utilizando una potencia de 10, puesto que $10^0 = 1$.

El carácter para el prefijo «micro» (µ) es casi idéntico en aspecto a la letra griega mi minúscula, en algunas tipografías es indistinguible; sin embargo, según el estándar internacional Unicode, son símbolos distintos.

Las últimas incorporaciones a esta tabla son de 2022.

Ejemplos

① Existen discos duros para ordenador con una capacidad de 24 terabytes; el símbolo del byte es B, así que la capacidad se escribe **24 TB**.

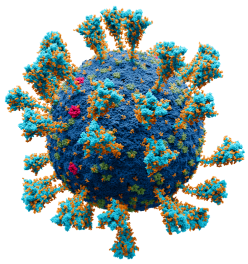
② Los condensadores eléctricos son dispositivos usados en aparatos eléctricos y electrónicos para almacenar energía. Se diferencian en una magnitud llamada capacidad, cuya unidad es el faradio, de símbolo «F». El de la fotografía de la derecha es de **4700 µF**.

③ Se ha calculado que el diámetro de un átomo de hidrógeno, el elemento químico más sencillo que existe, mide aproximadamente **53 pm**.

④ La masa de la Tierra es aproximadamente **5,97 Rg**.

⑤ Se estima que las reacciones químicas pueden durar entre **15 fs** y **200 fs**.

⑥ Se ha calculado que el diámetro del virus SARS-CoV-2 (representado a la derecha) mide entre **50 nm** y **140 nm**.



Órdenes de magnitud de los prefijos del Sistema Internacional

Ya que en todos los prefijos del Sistema Internacional, salvo los cuatro más sencillos, el exponente de 10 es un múltiplo de 3, tiene perfecto sentido escribir algunos números que es necesario escribir en notación científica con una ligera modificación de modo que el exponente de 10 sea múltiplo de 3 y así aplicar el prefijo correspondiente.

Ejemplo 1

Medimos una distancia y la escribimos en notación científica: $3{,}268 \cdot 10^{17}$ metros. Como el orden de magnitud 17 no tiene asociado ningún prefijo en particular, no podríamos escribirlo como 3,268 «**algo**m», sin usar la potencia de 10. Pero 10^{15} sí tiene prefijo, peta. Para convertir 10^{17} en 10^{15} hay que dividir entre 100; si multiplicamos la mantisa 3,268 por 100, el resultado será el mismo. Así pues,

$3{,}268 \cdot 10^{17}$ m = $326{,}8 \cdot 10^{15}$ m = 326,8 Pm

Notación técnica

La notación técnica, también llamada **notación de ingeniería**, es una manera de escribir números de modo que aparezca una potencia de 10 con exponente múltiplo de 3.

Formato de la notación técnica

La notación técnica consiste en el producto indicado de un número, que puede ser entero o decimal, por una potencia de 10 con exponente entero. Con las siguientes condiciones adicionales:

- El valor absoluto del número debe ser mayor o igual que 1 y menor que 1000.
- Todas las cifras del número deben ser cifras significativas.
- El exponente de 10 debe ser múltiplo de 3.

Ejemplos

Escribe las siguientes expresiones como números en notación técnica.

	Expresión	Notación técnica	Explicación
②	$2{,}458 \cdot 10^{13}$	$24{,}58 \cdot 10^{12}$	Multiplicar y dividir con el 10
③	$-1{,}82 \cdot 10^{23}$	$-182 \cdot 10^{21}$	Multiplicar y dividir con el 100
④	0,000 000 000 048 2	$48{,}2 \cdot 10^{-12}$	Movemos la coma 12 posiciones
⑤	$0{,}0127 \cdot 10^{11}$	$12{,}7 \cdot 10^{9}$	Multiplicar y dividir con el 100

Errores comunes

Las siguientes expresiones no están en notación técnica, por el motivo indicado.

	Expresion	Motivo
⑥	$-1457{,}1 \cdot 10^{18}$	El valor absoluto del número es mayor que 1000.
⑦	$22{,}7 \cdot 10^{32}$	El exponente de 10 no es múltiplo de 3.
⑧	$1{,}25 \cdot 8^{15}$	La base de la potencia no es 10.

Enunciados

En esta tabla, el mismo número debe estar escrito en notación científica y en notación técnica con la misma cantidad de cifras significativas. Rellena los huecos.

	Número en notación científica	Número en notación técnica
①	$4{,}45 \cdot 10^{16}$	
②	$3{,}012 \cdot 10^{23}$	
③	$1{,}328 \cdot 10^{-32}$	
④	$5{,}6768 \cdot 10^{-16}$	
⑤		$912{,}3 \cdot 10^{33}$
⑥		$15{,}82 \cdot 10^{12}$
⑦		$517 \cdot 10^{-21}$
⑧		$31{,}0 \cdot 10^{-18}$
⑨	$-7{,}81 \cdot 10^{31}$	
⑩	$-9{,}12 \cdot 10^{14}$	
⑪	$-8{,}231 \cdot 10^{-26}$	
⑫	$-5{,}23 \cdot 10^{-19}$	
⑬		$-40{,}32 \cdot 10^{15}$
⑭		$-31{,}116 \cdot 10^{60}$
⑮		$-129{,}2 \cdot 10^{-51}$
⑯		$-77{,}12 \cdot 10^{-42}$
⑰	$8{,}234 \cdot 10^{61}$	
⑱	$-3{,}45 \cdot 10^{-52}$	
⑲	$-2{,}378 \cdot 10^{65}$	
⑳	$1{,}892 \cdot 10^{-38}$	
㉑		$23{,}04 \cdot 10^{12}$
㉒		$-156{,}2 \cdot 10^{-24}$
㉓		$-82{,}12 \cdot 10^{30}$
㉔		$278{,}1 \cdot 10^{-27}$

Operaciones en notación científica

Aunque estas operaciones se suelen hacer con calculadora científica, es conveniente conocer cuáles son las técnicas para hacerlas a mano. Estas técnicas sirven para entender mejor el funcionamiento de los programas de ordenador y para hacer algunas operaciones cuando los operandos exceden la capacidad de la calculadora.

Suma en notación científica

Para sumar números escritos en notación científica se siguen estos pasos:

Paso 1: si no todos los números tienen el mismo orden de magnitud, se convierten todos al orden de magnitud del número que tenga mayor orden de magnitud.

Paso 2: se suman las mantisas de todos los números y se mantiene la misma potencia de 10.

Paso 3: si es necesario, se ajusta la expresión del resultado para que esté en notación científica.

Ejemplos

Realiza las siguientes operaciones:

① $9{,}81 \cdot 10^{13} + 5{,}3 \cdot 10^{12}$ ② $3{,}1 \cdot 10^{-35} + 5{,}2 \cdot 10^{-35}$

Resolución 1

Paso 1. Hay que convertir $5{,}3 \cdot 10^{12}$ en una expresión en la que el exponente de 10 sea 13, que es el orden de magnitud del otro sumando. Si multiplicamos 10^{12} por 10, obtendremos 10^{13} y para que el número tenga el mismo valor hay que dividir la mantisa 5,3 entre 10. Por tanto: $5{,}3 \cdot 10^{12} = 0{,}53 \cdot 10^{13}$.

Paso 2. Para sumar $9{,}81 \cdot 10^{13}$ y $0{,}53 \cdot 10^{13}$ podemos extraer factor común la potencia de 10 y sumar los números decimales:

$$9{,}81 \cdot 10^{13} + 0{,}53 \cdot 10^{13} = (9{,}81+0{,}53) \cdot 10^{13} = 10{,}34 \cdot 10^{13}$$

Paso 3. Como el número obtenido, $10{,}34 \cdot 10^{13}$, no está en notación científica, hay que dividir entre 10 la parte 10,34 y para compensalo hay que multiplicar por 10 la potencia de 10: $10{,}34 \cdot 10^{13} = 1{,}034 \cdot 10^{14}$.

El proceso completo:

$$9{,}81 \cdot 10^{13} + 5{,}3 \cdot 10^{12} = 9{,}81 \cdot 10^{13} + 0{,}53 \cdot 10^{13} = 10{,}34 \cdot 10^{13} = 1{,}034 \cdot 10^{14}$$

Resolución 2

En este ejercicio solo es necesario el segundo paso:

$$3{,}1 \cdot 10^{-35} + 7{,}2 \cdot 10^{-35} = 9{,}3 \cdot 10^{-35}$$

Suma de números con órdenes de magnitud muy diferentes

Aunque la suma siempre se puede realizar, si los órdenes de magnitud de los números son muy diferentes, el resultado no tiene sentido en la práctica.

Ejemplo 3

La suma $10^{12} + 10^{-2}$ es un billón más una centésima. Si tuvieras un billón de euros y se te perdiera una moneda de un céntimo de euro, ¿te preocuparías mucho?

La suma es $10^{12} + 10^{-2} = 1\,000\,000\,000\,000 + 0{,}01 = 1\,000\,000\,000\,000{,}01$; este número tiene 15 cifras significativas, cuando es dudoso que en alguna circunstancia 10^{12} tenga 13 cifras significativas.

A efectos prácticos, está claro que $10^{12} + 10^{-2} = 10^{12}$.

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica.

① $7{,}89 \cdot 10^{32} + 4{,}6 \cdot 10^{31}$

② $9{,}92 \cdot 10^{56} + 8{,}2 \cdot 10^{55}$

③ $7{,}2 \cdot 10^{11} - 8{,}71 \cdot 10^{11}$

④ $3{,}459 \cdot 10^{45} - 3{,}417 \cdot 10^{45}$

⑤ $8{,}92 \cdot 10^{-92} + 4{,}3 \cdot 10^{-93}$

⑥ $9{,}972 \cdot 10^{37} + 8{,}1 \cdot 10^{35}$

⑦ $9{,}934 \cdot 10^{-14} - 7{,}12 \cdot 10^{-14}$

⑧ $10^{31} - 3{,}4 \cdot 10^{30}$

⑨ $8{,}128 \cdot 10^{-39} - 8{,}1356 \cdot 10^{-39}$

⑩ $7{,}6 \cdot 10^{23} + 8{,}73 \cdot 10^{23}$

⑪ $9{,}34 \cdot 10^{-13} + 4{,}19 \cdot 10^{-13}$

⑫ $-8{,}12 \cdot 10^{23} + 1{,}034 \cdot 10^{24}$

⑬ $9{,}927 \cdot 10^{32} + 8{,}17 \cdot 10^{30}$

⑭ $5{,}0478 \cdot 10^{83} - 5{,}0864 \cdot 10^{83}$

⑮ $8{,}93 \cdot 10^{-25} + 1{,}4 \cdot 10^{-26}$

⑯ $3{,}4 \cdot 10^{13} + 9{,}2 \cdot 10^{12}$

⑰ $-1{,}89 \cdot 10^{-51} - 9{,}03 \cdot 10^{-51}$

⑱ $3{,}91 \cdot 10^{42} + 7{,}8 \cdot 10^{41}$

⑲ $-9{,}18 \cdot 10^{37} + 9{,}31 \cdot 10^{37}$

⑳ $1{,}00834 \cdot 10^{52} - 1{,}009 \cdot 10^{52}$

㉑ $4{,}14 \cdot 10^{-31} - 8{,}2 \cdot 10^{-32}$

㉒ $-8{,}9 \cdot 10^{33} + 9{,}6 \cdot 10^{32}$

㉓ $1{,}0305 \cdot 10^{104} + 8{,}01 \cdot 10^{103}$

㉔ $8{,}23 \cdot 10^{-15} + 9{,}18 \cdot 10^{-15}$

㉕ $9{,}81 \cdot 10^{39} + 4{,}5 \cdot 10^{38}$

㉖ $-3{,}0046 \cdot 10^{47} + 3{,}0073 \cdot 10^{47}$

Producto en notación científica

Para multiplicar números escritos en notación científica se multiplican las mantisas y se suman los órdenes de magnitud. Si es necesario, se ajusta el resultado obtenido para que siga estando en notación científica.

Ejemplos

Realiza las siguientes operaciones:

① $(2{,}3 \cdot 10^{17}) \cdot (5{,}4 \cdot 10^{32})$

② $(1{,}2 \cdot 10^{45}) \cdot (1{,}3 \cdot 10^{-25})$

③ $(8{,}21 \cdot 10^{-16}) \cdot (5{,}7 \cdot 10^{-78})$

④ $(4{,}43 \cdot 10^{-23}) \cdot (5{,}7 \cdot 10^{24})$

⑤ $123{,}78 \cdot (7{,}2 \cdot 10^{41})$

⑥ $0{,}097 \cdot (5{,}9 \cdot 10^{-57})$

Resoluciones

Los paréntesis alrededor de cada número tienen la función de que veas claramente cuáles son los factores de cada operación y que queda claro que son números escritos en notación científica; realmente, no son necesarios.

① $(2{,}3 \cdot 10^{17}) \cdot (5{,}4 \cdot 10^{32}) = 2{,}3 \cdot 10^{17} \cdot 5{,}4 \cdot 10^{32} = (2{,}3 \cdot 5{,}4) \cdot (10^{17} \cdot 10^{32}) =$
$= 12{,}42 \cdot 10^{49} = 1{,}242 \cdot 10^{50}$

② $(1{,}2 \cdot 10^{45}) \cdot (1{,}3 \cdot 10^{-25}) = 1{,}56 \cdot 10^{20}$

③ $(8{,}21 \cdot 10^{-16}) \cdot (5{,}7 \cdot 10^{-78}) = 46{,}797 \cdot 10^{-94} = 4{,}6797 \cdot 10^{-93}$

④ $(4{,}43 \cdot 10^{-23}) \cdot (5{,}7 \cdot 10^{24}) = 25{,}251 \cdot 10^{1} = 252{,}51$

⑤ $123{,}78 \cdot (7{,}2 \cdot 10^{41}) = (123{,}78 \cdot 7{,}2) \cdot 10^{41} = 891{,}216 \cdot 10^{41} = 8{,}91216 \cdot 10^{43}$

⑥ $0{,}097 \cdot (5{,}9 \cdot 10^{-57}) = (0{,}097 \cdot 5{,}9) \cdot 10^{-57} = 0{,}5723 \cdot 10^{-57} = 5{,}723 \cdot 10^{-58}$

Observaciones

- ✱ En el ejemplo (1) hemos dado todos los pasos que muestran el motivo de que la operación se haga de esta manera: las mantisas son números «normales» y las potencias de 10 las multiplicamos con su propiedad, sumando los exponentes.
- ✱ En los ejemplos (1) y (3) ha sido necesario reescribir el resultado de la operación porque la expresión no estaba en notación científica.
- ✱ En el ejemplo (4) no es necesario seguir usando la notación científica, porque el resultado queda más claro usando la notación usual.
- ✱ En los ejemplos (5) y (6) vemos cómo multiplicar un número que está en notación usual por otro que está en notación científica.

Cifras significativas del producto

Cuando calculamos uno de estos productos, obtenemos en el resultado más cifras significativas que las que tenían los factores, así que será normal que redondeemos para eliminar alguna.

Ejemplo 7

$(4{,}157 \cdot 10^{94}) \cdot (8{,}893 \cdot 10^{87}) = 36{,}968201 \cdot 10^{181} = 3{,}697 \cdot 10^{181}$

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica.

① $(5{,}2 \cdot 10^{41}) \cdot (4{,}7 \cdot 10^{82})$

② $(-1{,}3 \cdot 10^{15}) \cdot (3{,}3 \cdot 10^{29})$

③ $(2 \cdot 10^{-11}) \cdot (7{,}3 \cdot 10^{-35})$

④ $(4{,}7 \cdot 10^{46}) \cdot (4 \cdot 10^{-19})$

⑤ $(6{,}9 \cdot 10^{16}) \cdot (5 \cdot 10^{-63})$

⑥ $(-2{,}5 \cdot 10^{53}) \cdot (-5 \cdot 10^{42})$

⑦ $(4{,}4 \cdot 10^{24}) \cdot (2{,}2 \cdot 10^{13})$

⑧ $(8 \cdot 10^{-98}) \cdot (4{,}2 \cdot 10^{-73})$

⑨ $(1{,}01 \cdot 10^{-39}) \cdot (4 \cdot 10^{11})$

⑩ $(-8{,}1 \cdot 10^{-13}) \cdot (2 \cdot 10^{72})$

⑪ $(7 \cdot 10^{-41}) \cdot (4{,}1 \cdot 10^{82})$

⑫ $(-10^{38}) \cdot (6{,}02 \cdot 10^{-12})$

⑬ $(1{,}92 \cdot 10^{14}) \cdot (8 \cdot 10^{44})$

⑭ $(-1{,}5 \cdot 10^{-19}) \cdot (3 \cdot 10^{-8})$

⑮ $(4{,}1 \cdot 10^{11}) \cdot (4 \cdot 10^{35})$

⑯ $6 \cdot (3{,}4 \cdot 10^{18})$

⑰ $3 \cdot (-8{,}2 \cdot 10^{-85})$

⑱ $-2 \cdot (-9{,}3 \cdot 10^{36})$

⑲ $7{,}4 \cdot (2 \cdot 10^{-28})$

⑳ $-8{,}1 \cdot (-5 \cdot 10^{72})$

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación usual.

㉑ $(3 \cdot 10^{84}) \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-83})$

㉒ $(8{,}9 \cdot 10^{-17}) \cdot (4 \cdot 10^{16})$

㉓ $(1{,}03 \cdot 10^{-29}) \cdot (-7 \cdot 10^{29})$

㉔ $(-9 \cdot 10^{31}) \cdot (8{,}8 \cdot 10^{-29})$

㉕ $(9 \cdot 10^{27}) \cdot (-9{,}4 \cdot 10^{-29})$

Potencia en notación científica

Para elevar a una potencia un número escrito en notación científica se eleva la mantisa al exponente y se multiplica el orden de magnitud por el exponente. Si es necesario, se ajusta el resultado obtenido para que esté en notación científica.

Ejemplos

Realiza las siguientes operaciones

① $(7{,}2 \cdot 10^{17})^3$ ② $(2{,}5 \cdot 10^{-72})^2$ ③ $(3{,}2 \cdot 10^{46})^4$

④ $(2 \cdot 10^{7})^{-3}$ ⑤ $(5 \cdot 10^{-9})^{-2}$ ⑥ $(4 \cdot 10^{17})^{-3}$

Resoluciones

① $(7{,}2 \cdot 10^{17})^3 = 7{,}2^3 \cdot (10^{17})^3 = 373{,}248 \cdot 10^{51} = 3{,}73248 \cdot 10^{53}$

② $(2{,}5 \cdot 10^{-72})^2 = 2{,}5^2 \cdot 10^{-72 \cdot 2} = 6{,}25 \cdot 10^{-144}$

③ $(3{,}2 \cdot 10^{46})^4 = 3{,}2^4 \cdot 10^{46 \cdot 4} = 104{,}8576 \cdot 10^{184} = 1{,}048576 \cdot 10^{186}$

④ $(2 \cdot 10^{7})^{-3} = 2^{-3} \cdot 10^{7 \cdot (-3)} = 0{,}125 \cdot 10^{-21} = 1{,}25 \cdot 10^{-22}$

⑤ $(5 \cdot 10^{-9})^{-2} = 5^{-2} \cdot 10^{-9 \cdot (-2)} = 0{,}04 \cdot 10^{18} = 4 \cdot 10^{16}$

⑥ $(4 \cdot 10^{17})^{-3} = 4^{-3} \cdot 10^{17 \cdot (-3)} = 0{,}015625 \cdot 10^{-51} = 1{,}5625 \cdot 10^{-53}$

Observaciones

✱ En el ejemplo (1) hemos dado todos los pasos que muestran el motivo de que la operación se haga de esta manera:
- La potencia de un producto es el producto de las potencias.
- Las mantisas son números «normales» y por tanto se elevan a una potencia con el método habitual.
- Las potencias de 10 las elevamos a otra potencia con la propiedad de potencia de una potencia, multiplicando los exponentes.

✱ En todos los ejemplos, salvo el (2), ha sido necesario reescribir el resultado de la operación porque la expresión no estaba en notación científica.

✱ Recuerda que $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$ y así sucesivamente.

Cifras significativas del resultado

Cuando calculamos una de estas potencias, obtenemos en el resultado más cifras significativas que las que tenía la base, así que será normal que redondeemos para eliminar alguna.

Ejemplo 7

$(7{,}2 \cdot 10^{7})^4 = 7{,}2^4 \cdot 10^{7 \cdot 4} = 2687{,}3856 \cdot 10^{28} = 2{,}69 \cdot 10^{31}$

Ejemplo 8

Calcula $(1{,}9 \cdot 10^{-37})^5$ y da el resultado con tres cifras significativas.

$(1{,}9 \cdot 10^{-37})^5 = 1{,}9^5 \cdot 10^{-37 \cdot 5} = 24{,}76099 \cdot 10^{-185} = 2{,}48 \cdot 10^{-184}$

Cociente en notación científica

Para dividir números escritos en notación científica se dividen las mantisas y se restan los órdenes de magnitud. Si es necesario, se ajusta el resultado obtenido para que siga estando en notación científica.

Ejemplos

Realiza las siguientes operaciones:

① $\dfrac{4{,}08\cdot 10^{41}}{3{,}4\cdot 10^{18}}$ ② $\dfrac{2\cdot 10^{29}}{5\cdot 10^{48}}$ ③ $\dfrac{3\cdot 10^{41}}{8\cdot 10^{18}}$ ④ $\dfrac{7{,}5\cdot 10^{-25}}{3\cdot 10^{-16}}$ ⑤ $\dfrac{5\cdot 10^{76}}{16\cdot 10^{74}}$

Resoluciones

① $\dfrac{4{,}08\cdot 10^{41}}{3{,}4\cdot 10^{18}} = \dfrac{4{,}08}{3{,}4}\cdot\dfrac{10^{41}}{10^{18}} = 1{,}2\cdot 10^{41-18} = 1{,}2\cdot 10^{23}$

② $\dfrac{2\cdot 10^{29}}{5\cdot 10^{48}} = \dfrac{2}{5}\cdot 10^{29-48} = 0{,}4\cdot 10^{-19} = 4\cdot 10^{-20}$

③ $\dfrac{3\cdot 10^{41}}{8\cdot 10^{18}} = \dfrac{3}{8}\cdot 10^{41-18} = 0{,}375\cdot 10^{23} = 3{,}75\cdot 10^{22}$

④ $\dfrac{7{,}5\cdot 10^{-25}}{3\cdot 10^{-16}} = \dfrac{7{,}5}{3}\cdot 10^{-41-(-18)} = 2{,}5\cdot 10^{-23}$

⑤ $\dfrac{5\cdot 10^{76}}{16\cdot 10^{74}} = \dfrac{5}{16}\cdot 10^{76-74} = 0{,}3125\cdot 10^{2} = 31{,}25$

Observaciones

- ✱ En el ejemplo (1) hemos dado todos los pasos que muestran el motivo de que la operación se haga de esta manera: las mantisas son números «normales» y las potencias de 10 las dividimos con su propiedad, restando los exponentes.
- ✱ En los ejemplos (2) y (3) ha sido necesario reescribir el resultado de la operación porque la expresión no estaba en notación científica.
- ✱ En el ejemplo (5) no es necesario seguir usando la notación científica, porque el resultado queda más claro usando la notación usual.

Cifras significativas del cociente

Cuando calculamos muchos de estos cocientes, es posible que obtengamos en el resultado más cifras significativas que las que tenían los números originales, así que será normal que redondeemos para eliminar alguna.

Ejemplos

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado con tres cifras significativas:

⑥ $\dfrac{7\cdot 10^{22}}{11\cdot 10^{13}} = \dfrac{7}{11}\cdot 10^{22-13} = 0{,}\overline{63}\cdot 10^{9} = 6{,}36\cdot 10^{8}$

⑦ $\dfrac{4\cdot 10^{-15}}{11\cdot 10^{57}} = \dfrac{4}{11}\cdot 10^{-15-57} = 0{,}\overline{36}\cdot 10^{-72} = 3{,}64\cdot 10^{-73}$

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica.

① $\dfrac{7\cdot 10^{71}}{4\cdot 10^{-8}}$

② $\dfrac{3\cdot 10^{-92}}{8\cdot 10^{33}}$

③ $\dfrac{10^{-31}}{2\cdot 10^{-75}}$

④ $\dfrac{1{,}1\cdot 10^{83}}{-4\cdot 10^{10}}$

⑤ $\dfrac{8{,}1\cdot 10^{-37}}{9\cdot 10^{16}}$

⑥ $\dfrac{-3\cdot 10^{72}}{4\cdot 10^{-9}}$

⑦ $\dfrac{10^{93}}{4\cdot 10^{-33}}$

⑧ $\dfrac{3\cdot 10^{-82}}{1{,}6\cdot 10^{66}}$

⑨ $\dfrac{-6\cdot 10^{19}}{3{,}2\cdot 10^{-51}}$

⑩ $\dfrac{5\cdot 10^{102}}{1{,}6\cdot 10^{-44}}$

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación usual.

⑪ $\dfrac{2{,}2\cdot 10^{93}}{5\cdot 10^{92}}$

⑫ $\dfrac{6{,}4\cdot 10^{37}}{5\cdot 10^{38}}$

⑬ $\dfrac{-1{,}44\cdot 10^{167}}{1{,}2\cdot 10^{167}}$

⑭ $\dfrac{-9{,}6\cdot 10^{51}}{-3\cdot 10^{49}}$

⑮ $\dfrac{10^{-89}}{2\cdot 10^{-88}}$

⑯ $\dfrac{8\cdot 10^{-15}}{3{,}2\cdot 10^{-13}}$

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica.

① $7{,}89 \cdot 10^{57} + 9{,}2 \cdot 10^{56}$

② $(2{,}1 \cdot 10^{-33}) \cdot (5 \cdot 10^{-12})$

③ $(8{,}2 \cdot 10^{125})^2$

④ $\dfrac{4{,}1 \cdot 10^{23}}{5 \cdot 10^{-22}}$

⑤ $2{,}012 \cdot 10^{73} - 2{,}056 \cdot 10^{73}$

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación usual.

⑥ $(7{,}2 \cdot 10^{-89}) \cdot (7 \cdot 10^{90})$

⑦ $\dfrac{7 \cdot 10^{21}}{4 \cdot 10^{20}}$

⑧ $(8{,}5 \cdot 10^{-1})^2$

⑨ $8{,}7 \cdot 10^{-1} + 9{,}2 \cdot 10^{-1}$

⑩ $1{,}724 \cdot 10^{2} - 1{,}713 \cdot 10^{2}$

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica con **tres** cifras significativas.

⑪ $8{,}6792 \cdot 10^{14} + 5{,}78 \cdot 10^{13}$

⑫ $\dfrac{2 \cdot 10^{-25}}{3 \cdot 10^{52}}$

⑬ $2{,}00 \cdot 10^{43} + 3{,}00 \cdot 10^{-4}$

⑭ $(5{,}06 \cdot 10^{92}) \cdot (1{,}09 \cdot 10^{89})$

⑮ $(1{,}01 \cdot 10^{7})^2$

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica con **dos** cifras significativas.

⑯ $(5{,}8 \cdot 10^{-62})^2$

⑰ $(2{,}3 \cdot 10^{31}) \cdot (6{,}4 \cdot 10^{-17})$

⑱ 13^2

⑲ $0{,}5^3$

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica.

① $4{,}93 \cdot 10^{59} + 8{,}3 \cdot 10^{58}$

② $(4{,}6 \cdot 10^{-21}) \cdot (5{,}3 \cdot 10^{-36})$

③ $(4{,}3 \cdot 10^{202})^2$

④ $\dfrac{3{,}2 \cdot 10^{35}}{5 \cdot 10^{-41}}$

⑤ $8{,}802 \cdot 10^{79} - 8{,}817 \cdot 10^{79}$

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación usual.

⑥ $(-8{,}7 \cdot 10^{-73}) \cdot (6 \cdot 10^{74})$

⑦ $\dfrac{9 \cdot 10^{-16}}{4 \cdot 10^{-17}}$

⑧ $(3{,}4 \cdot 10^{-1})^2$

⑨ $7{,}9 \cdot 10^{-1} + 6{,}8 \cdot 10^{-1}$

⑩ $3{,}394 \cdot 10^{2} - 3{,}403 \cdot 10^{2}$

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica con **tres** cifras significativas.

⑪ $2{,}7712 \cdot 10^{24} + 4{,}86 \cdot 10^{23}$

⑫ $\dfrac{5 \cdot 10^{-57}}{6 \cdot 10^{41}}$

⑬ $8{,}10 \cdot 10^{94} + 1{,}01 \cdot 10^{-7}$

⑭ $(3{,}07 \cdot 10^{99}) \cdot (1{,}08 \cdot 10^{73})$

⑮ $(1{,}03 \cdot 10^{8})^2$

Enunciados

Realiza las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica con **dos** cifras significativas.

⑯ $(3{,}7 \cdot 10^{47})^2$

⑰ $(5{,}1 \cdot 10^{22}) \cdot (3{,}9 \cdot 10^{-73})$

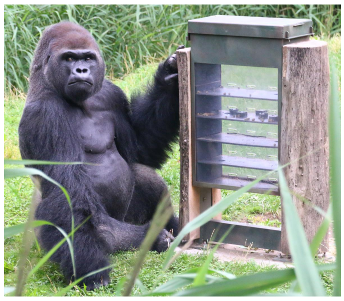
⑱ 34^2

⑲ $0{,}6^3$

Uso de herramientas en los animales no humanos

Observamos en muchos animales comportamientos muy complejos que requieren una manipulación de su entorno, como la creación de nidos por parte de muchas aves o zonas de emparejamiento por algunos peces. Se explica que estos comportamientos son innatos; es decir, corresponden a un conocimiento que reside en el ADN del animal como producto de la evolución natural de las especies.

Pero, además, está perfectamente documentado que algunos animales no humanos crean sus propias herramientas para obtener comida. Y lo hacen en entornos naturales, sin ser impulsados por investigaciones de humanos. Diferentes poblaciones de la misma especie utilizan diferentes herramientas, luego no es un conocimiento innato, sino aprendido, es decir: cultural.

		
Un macaco rompiendo la cáscara de un fruto con una piedra. Hay más animales que usan piedras de esta manera.	Un chimpancé atrapando insectos con un palo previamente preparado. Algunos córvidos también lo hacen.	En muchos zoológicos preparan juegos de ingenio para que los grandes simios se aburran menos.

Uso de herramientas en los animales humanos

El género de animales *Homo* incluye, entre otros, el *Homo erectus*, el *Homo habilis*, el *Homo neanderthalensis* y el *Homo sapiens*, al que pertenecemos tú y yo.

La invención y el uso de herramientas por parte del género *Homo* han constituido aspectos cruciales en su evolución. La investigación neurocientífica ha llegado a la conclusión de que el uso de herramientas modifica al propio cerebro. A la derecha ves un **bifaz**, una importante y versátil herramienta usada durante milenios.

La calculadora científica

Decía el empresario estadounidense Steve Jobs (1955-2011) que el ordenador es **una bicicleta para el cerebro**. (Fue el cofundador de la empresa Apple y el principal impulsor del teléfono inteligente. En la fotografía de la derecha lo ves presentando su primer modelo.)

Para ti, la calculadora científica debería ser así: una herramienta que te ayude a ir más deprisa en tu razonamiento, que te ayude a atacar problemas más difíciles. Como todas las herramientas, se puede usar bien o mal. No utilices la calculadora científica como una excusa para no practicar el cálculo mental o para olvidar cómo hacer operaciones a mano.

Las calculadoras tienen también sus limitaciones; pero, si usas **a la vez** tu cerebro y la calculadora, podrás hacer cálculos que sobrepasan a su capacidad teórica, igual que un escultor va más allá de lo que le ofrecen el mármol y el cincel.

Tipos de calculadoras

Atendiendo a su capacidad hay varios tipos de calculadoras:

* **Calculadora básica**: tiene las cuatro operaciones y quizá la raíz cuadrada y alguna memoria, pero no tiene funciones matemáticas ni notación científica.
* **Calculadora científica**: dispone de funciones matemáticas, notación científica y al menos una memoria.

  Dentro de las calculadoras científicas, las hay con propiedades adicionales:

  - **Calculadora programable**: permite añadir funciones personalizadas introduciendo programas, que son secuencias de órdenes que se ejecutan con rapidez.
  - **Calculadora gráfica**: dispone de una pantalla mayor de lo habitual en la que se pueden ver distintos tipos de gráficos.

Atendiendo a su soporte, podemos distinguir:

* **Calculadora de bolsillo**: son calculadoras construidas especialmente con ese propósito y un tamaño y masa adecuados para trasportarlas fácilmente.
* **Calculadora de teléfono móvil**: son programas que se instalan en un teléfono móvil, como cualquier otra aplicación.
* **Calculadora de ordenador**: son programas de ordenador con aspecto y modo de uso como los de una calculadora de bolsillo.

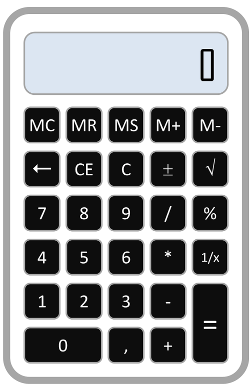
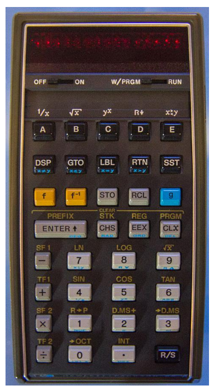
Calculadora científica escolar

Para tu etapa de educación secundaria puedes ir probando tantos tipos de calculadoras como tu curiosidad te dicte. Si dispones de teléfono móvil u ordenador, puedes probar con las calculadoras ya instaladas de serie con el sistema operativo o añadir alguna más. Siempre es útil probar distintos tipos de calculadora.

Pero para hacer exámenes de educación secundaria normalmente no se admite ni el uso de teléfono móvil ni de ordenador; y la calculadora no puede ser ni programable ni gráfica. Estas limitaciones nos llevan a recomendar que tengas como calculadora principal una calculadora científica adecuada para la etapa escolar.

En el mercado hay multitud de modelos de calculadora científica escolar, muchas de ellas con precios asequibles. Para decidirte por un modelo en concreto te vendrá bien consultar con alguien cercano a ti que conozca este tema o bien en un vendedor fiable.

Ejemplos

				
Básica	Primer modelo	De ordenador	Programable	Escolar

Tu calculadora científica escolar

Una vez decidido y comprado el modelo que vas a usar, es muy importante que dediques un tiempo a **leer el manual** (aunque no entiendas todo su contenido) y a hacer pruebas («jugar») con la calculadora. Como hay muchísimos modelos, ninguna guía podrá explicarlos todos; por eso debes familiarizarte con el tuyo.

La pantalla

Recomendamos algún modelo en que la pantalla tenga **dos líneas**. En la de arriba irás viendo (y modificando) la operación que quieres hacer y en la de abajo verás el resultado. Este método de trabajo es más cómodo y avanzado que los que se usaban anteriormente con calculadoras de pantalla con una sola línea.

Teclas de funciones científicas

Una manera muy fácil de saber si una calculadora es realmente científica es comprobar si dispone de estas teclas (todas ellas se explican en el nivel 4):

* Funciones trigonométricas: `sin`, `cos`, `tan`.
* Funciones logarítmicas y exponenciales: `log`, `ln`, `10^x`, `e^x`.

Teclas de prefijo

Verás que en tu calculadora hay muchas teclas con varias funciones: la primera función es la que obtienes simplemente pulsando la tecla, pero hay otras posibilidades escritas, quizá en distintos colores. Para acceder a las funciones secundarias de las teclas hay que pulsar antes otra tecla, llamada tecla de prefijo, que probablemente esté señalada con el mismo color que la función secundaria. Son habituales las teclas de prefijo `SHIFT` (en inglés significa «desplazamiento») y `ALPHA` (de «alfanumérico»), pero puede haber más, como `2ndF`, `2nd` o solo el color.

Teclas de edición

Una calculadora moderna con pantalla de dos líneas tiene una pequeña memoria en la que se almacenan algunas operaciones que ya has hecho. Puedes moverte por el historial de operaciones con las teclas `▲` y `▼`.

Las teclas `◀` y `▶` te permiten moverte por la operación que estás escribiendo, la tecla `DEL` (del inglés *delete*) sirve para borrar el carácter que esté a la izquierda del cursor y la tecla `INS` para cambiar entre los modos de escritura «sustitución» e «inserción».

Memorias

Las calculadoras científicas tienen varios tipos de memorias:

* **Memorias manuales**: en ellas los usuarios vamos introduciendo y recuperando los valores que nos parezca oportuno. Puede haber entre una y veinte memorias. La tecla para guardar un número suele ser `STO` (del inglés *store*) y la tecla para recuperarlo suele ser `RCL` (del inglés *recall*).
* **Memorias automáticas**: es la propia calculadora la que introduce automáticamente algunos valores. Una de las más usadas es la memoria de último resultado: la calculadora almacena en ella el resultado de la última operación y los usuarios lo podemos recuperar con la tecla `Ans` (del inglés *answer*).

Configuración de la calculadora

La tecla `MODE` permite pasar por unos pocos menús en los que se pueden configurar algunas características de presentación de números y modos de cálculo.

Redondeos en la calculadora

Las calculadoras científicas se pueden configurar para dar los resultados redondeando y para que muestren obligatoriamente los resultados en notación científica o incluso en notación técnica.

Sin embargo, configurar la calculadora de esa manera te puede resultar confuso en muchas situaciones. Por ese motivo, vamos a usar la configuración «normal», que se especifica en muchas calculadoras con `MODE` `NORM` `1`. Cuando veamos el resultado en la pantalla, nosotros mismos haremos el redondeo.

Consejos iniciales

Reproduce los siguientes ejemplos en tu calculadora y adáptalos a ella. Normalmente las calculadoras disponen de espacio para diez dígitos en la parte del resultado, pero la tuya podría tener otra capacidad. Ten en cuenta que las últimas cifras de cada resultado pueden cambiar de una calculadora a otra.

Ejemplos

Enunciado: realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con cuatro cifras significativas:

	Operación	Teclas	Pantalla	Solución
①	$1{,}42 \cdot 5{,}89$	`1` `.` `4` `2` `×` `5` `.` `8` `9` `=`	8.3638	8,364
②	$0{,}14 \cdot 789$	`.` `1` `4` `×` `7` `8` `9` `=`	110.46	110,5
③	$\pi : 7$	`π` `÷` `7` `=`	0.44879895	0,4488
④	$5 : (-13)$	`5` `÷` `(-)` `1` `3` `=`	-0.384615384	–0,3846
⑤	$49 \cdot 375$	`4` `9` `×` `3` `7` `5` `=`	18375	$1{,}838 \cdot 10^4$

Comentarios

- La tecla para escribir el separador decimal siempre es el punto (`.`). Pero las calculadoras suelen permitir configurar qué separador decimal usar en pantalla; en nuestros ejemplos estamos usando también el punto. En la solución final volvemos a usar la coma, como estamos haciendo en el resto del curso.
- Vemos en el ejemplo (2) que para escribir un número decimal que tenga parte entera cero no es necesario teclear el `0`.
- En el ejemplo (3) se ha usado la tecla que inserta el número π, que la calculadora usará con la máxima precisión que pueda.
- En el ejemplo (4) se ha usado la tecla de «número opuesto» `(-)`, que según la calculadora podría ser `+/−` o `CHS`.
- En el ejemplo (4) advertimos que el paréntesis que es obligatorio escribir en la expresión matemática no es necesario en la calculadora, porque es estético.
- En el ejemplo (5) debes prestar mucha atención a qué añade tu calculadora entre el 8 y el 3: probablemente añada una coma, que es el separador de miles en inglés (recuerda que en español no es así).
- En el ejemplo (5) hemos dado la solución en notación científica porque el enunciado pide dar cuatro cifras significativas, no las cinco que se obtienen.

Instrucciones

Escribe la respuesta en el cuadro en blanco que hay bajo cada operación.

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **cuatro** cifras significativas:

① $2{,}36 \cdot 1{,}68$	② $0{,}279 \cdot 1{,}64$	③ $\pi : 5$	④ $3 : (-7)$
⑤ $389 \cdot 412$	⑥ $15 : 17$	⑦ $13 \cdot 0{,}2786$	⑧ $\pi - 4$
⑨ $7 \cdot \pi : 3$	⑩ $41 : 43$	⑪ $43 : 41$	⑫ $8419 \cdot 128$
⑬ $\pi + 0{,}16$	⑭ $4 \cdot \pi$	⑮ $159 \cdot 357$	⑯ $5 : 101$
⑰ $101 : 37$	⑱ $4 : (-\pi)$	⑲ $1{,}78 \cdot 0{,}141$	⑳ $2 : (-17)$
㉑ $5 : (-19)$	㉒ $103 : 17$	㉓ $4589 \cdot 77$	㉔ $0{,}31 \cdot 1257$
㉕ $9 \cdot (-\pi) : (-5)$	㉖ $37 : \pi$	㉗ $8835 \cdot 3907$	㉘ $1500 : 103$

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **tres** cifras significativas:

㉙ $3 \cdot \pi$	㉚ $5572 \cdot 1478$	㉛ $41 : 57$	㉜ $1331 : 13$
㉝ $8 : (-7)$	㉞ $37 : 39$	㉟ $\pi : (-4)$	㊱ $17 \cdot \pi$

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **cinco** cifras significativas:

㊲ $17 : 69$	㊳ $15 \cdot \pi$	㊴ $1 : 17$	㊵ $0{,}3 \cdot \pi$
㊶ $9028 \cdot 3302$	㊷ $1037 : 37$	㊸ $4000 : (-41)$	㊹ $99 \cdot (-\pi) : 7$

Prioridad de operaciones en la calculadora

Algunos de los primeros modelos de calculadora, hace ya muchos años, no tenían programada la prioridad de operaciones, lo que obligaba a pensar cómo plantear algunas operaciones bastante básicas. Eso ya no es problema.

Ejemplo 1. Para calcular «2+3·8» basta teclear 2 + 3 × 8 = y obtendremos el resultado correcto, 26. En modelos antiquísimos se podría haber obtenido 40.

Paréntesis en la calculadora

Las calculadoras incluyen teclas de apertura y cierre de paréntesis para poder modificar el orden de cálculo establecido por la prioridad de operaciones. Los signos de las teclas suelen ser (y), pero en algunas calculadoras pueden ser [(--- y ---)].

Ejemplo 2. Para calcular «2·(8–3)» escribimos 2 × (8 – 3) = y nos dará 10. Nota: en algunas calculadoras no hace falta el signo de multiplicar en este caso.

Paréntesis implícitos

Ya sabes que en matemáticas usamos en varias expresiones lo que llamamos paréntesis implícitos: hay que tenerlos en cuenta para los cálculos, pero no se escriben. Los has visto y trabajado en las fracciones y en las raíces cuadradas. Pues bien, estos paréntesis sí hay que teclearlos en la calculadora; si no los añadimos, haremos mal el cálculo porque la calculadora interpretará que queremos calcular otra cosa distinta.

Ejemplos

Enunciado: realiza con la calculadora las siguientes operaciones:

	Oper.	Tecleo **correcto** y resultado	Tecleo **incorrecto** e interpretación	
③	$\frac{12}{2+3}$	1 2 ÷ (2 + 3) = ⇨ 2,4	1 2 ÷ 2 + 3 = ⇨ 9	$\frac{12}{2}+3$
④	$\frac{9-1}{4}$	(9 – 1) ÷ 4 = ⇨ 2	9 – 1 ÷ 4 = ⇨ 8,75	$9-\frac{1}{4}$
⑤	$\frac{3-6}{2+1}$	(3 – 6) ÷ (2 + 1) = ⇨ -1	3 – 6 ÷ 2 + 1 = ⇨ 1	$3-\frac{6}{2}+1$

Ejemplos

Enunciado: realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con cuatro cifras significativas:

	Operación	Teclas	Pantalla	Solución
⑥	$\frac{1+\pi}{\pi+2}$	(1 + π) ÷ (π + 2) =	0,805507735	0,8055
⑦	$1-\left(\frac{3}{7}+\frac{5}{2}\right)$	1 – (3 ÷ 7 + 5 ÷ 2) =	-1,928571429	–1,929
⑧	$2\pi+\frac{1}{\pi-3{,}1}$	2 × π + 1 ÷ (π – 3 . 1) =	30,3258927	30,33

Instrucciones

Escribe la respuesta en el cuadro en blanco que hay bajo cada operación.

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **cuatro** cifras significativas:

①	$16-\frac{5}{\pi+2}$	②	$3-\left(\frac{17}{7}+\frac{11}{3}\right)$	③	$\frac{2}{\pi+1}+\frac{1}{\pi-3{,}1}$
④	$3\left(\frac{5}{17}+\frac{3}{25}\right)$	⑤	$\frac{3\pi+2}{3\pi-2}$	⑥	$\frac{2}{\pi-3{,}1415}$
⑦	$5-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}$	⑧	$5-\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)$	⑨	$2\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)$
⑩	$5\cdot\left(\frac{23}{21}-\frac{15}{14}\right)$	⑪	$\frac{5}{\pi-\frac{22}{7}}$	⑫	$3\left(2-\left(\frac{17}{11}+\frac{15}{7}\right)\right)$

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **tres** cifras significativas:

⑬	$\left(1-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(1-\frac{33}{19}\right)$	⑭	$\frac{2-3\pi}{4}$	⑮	$(5+3\pi)\cdot\left(1+\frac{4}{3}\right)$
⑯	$3-(2\cdot(\pi+3)+5)$	⑰	$(2\pi+1)(3\pi-4)$	⑱	$(0{,}24-\pi)\cdot(10\pi+1)$

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **cinco** cifras significativas:

⑲	$-3\left(\frac{5}{7}-\frac{7}{5}\right)$	⑳	$\frac{151}{7}\cdot\frac{199}{5}\cdot\frac{103}{2}$	㉑	$2381\left(\frac{13}{11}-\frac{45}{17}\right)$
㉒	$\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{4}}{\frac{21}{5}-\frac{64}{17}}$	㉓	$\frac{2\pi+5}{2\pi-6{,}2}+\frac{13}{17}$	㉔	$\frac{1+\frac{\pi+2}{\pi-2}}{1-\frac{4}{\pi-3}}$

La tecla de número inverso

Recuerda que el número inverso del número a se define como el número que multiplicado por a da como resultado 1, se calcula como $1{:}a$ y se puede escribir a^{-1}.

Algunas calculadoras disponen de una tecla para calcular el número inverso sin necesidad de hacer la división. Ahorra tiempo en algunas operaciones, aunque no es una tecla imprescindible.

La tecla puede estar escrita como [x^{-1}] o bien como [$1/x$].

Ejemplos

Enunciado: realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con cuatro cifras significativas:

	Oper.	Teclas	Pantalla	Solución
①	$\frac{1}{19}+\frac{1}{11}$	[1] [9] [x^{-1}] [+] [1] [1] [x^{-1}] [=]	0.143540669	0,1435
②	$\frac{1}{3\pi}-\frac{1}{2\pi}$	[(] [3] [×] [π] [)] [x^{-1}] [−] [(] [2] [×] [π] [)] [x^{-1}] [=]	-0.0530551647	–0,05306

La tecla de raíz cuadrada

En los niveles anteriores has visto la importancia que tiene esta operación. Por ese motivo, incluso muchas calculadoras básicas incorporan esta tecla. Puede estar escrita como [√‾], pero también como [$\sqrt{x}$], [√■] o [√□].

Recuerda que las raíces cuadradas tienen un paréntesis implícito, es decir: $\sqrt{z}$ significa $\sqrt{(z)}$. Si no escribimos el paréntesis en los casos en que hace falta, haremos mal el cálculo porque la calculadora interpretará que queremos calcular otra cosa distinta.

Ejemplos

Enunciado: realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con cuatro cifras significativas:

	Operación	Teclas	Pantalla	Solución
③	$\sqrt{8}+\sqrt{12}$	[√‾] [8] [+] [√‾] [1] [2] [=]	6.29252874	6,293
④	$\sqrt{9+11}$	[√‾] [(] [9] [+] [1] [1] [)] [=]	4.472135955	4,472

Errores matemáticos en la calculadora

De niveles anteriores sabes que en matemáticas no se puede dividir entre 0, que el número 0 no tiene inverso y que no existe ningún número racional que sea la raíz cuadrada de un número negativo. Pero nada nos impide intentar hacer estas operaciones en nuestra calculadora; si está bien programada, nos deberá devolver algún tipo de error, escrito como Error o algo similar.

Ejemplos

⑤ $3:0 \rightarrow$ [3] [÷] [0] [=] ⤇ Error ⑥ $\sqrt{-1} \rightarrow$ [√‾] [(-)] [1] [=] ⤇ Error

En algunas calculadoras el ejemplo (6) podría dar un resultado diferente, como veremos en el nivel 5.

Instrucciones

Escribe la respuesta en el cuadro en blanco que hay bajo cada operación.

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **cuatro** cifras significativas:

①	$\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}$	
②	$\frac{1}{\pi-1}+\frac{1}{\pi-2}+\frac{1}{\pi-3}$	
③	$\frac{1}{1{,}4}-\frac{1}{1{,}3}$	
④	$\frac{1}{0{,}1}+\frac{1}{0{,}02}+\frac{1}{0{,}003}$	
⑤	$\frac{1}{3+2\pi}-\frac{1}{6-2\pi}$	
⑥	$\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)$	
⑦	$\sqrt{2}-\sqrt{5}$	
⑧	$\sqrt{\pi-3}$	
⑨	$\sqrt{\pi}-3$	
⑩	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	
⑪	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	
⑫	$\frac{5}{\sqrt{3}}$	

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **tres** cifras significativas:

⑬	$\frac{1}{4}-\frac{1}{7}$	
⑭	$\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$	
⑮	$\frac{1}{3-\frac{1}{11}}$	
⑯	$\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{7}{12}}$	
⑰	$\sqrt{\frac{5}{7}}+\frac{3}{4}$	
⑱	$\sqrt{\frac{37}{7}-5}$	

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **cinco** cifras significativas:

⑲	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	
⑳	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
㉑	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
㉒	$\sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{3}}$	
㉓	$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}}$	
㉔	$\sqrt{\pi+\frac{1}{\sqrt{0.2}}}$	

Aparición en la pantalla de la notación científica

Las calculadoras científicas están programadas para escribir los números en pantalla en notación científica cuando, por las limitaciones de su *hardware* (la parte física) y de su *software* (su programación), no pueden mostrar el número en la notación usual.

En esos casos, verás en la pantalla dos números: la mantisa, que ocupa el lugar habitual de los números en notación usual, y el orden de magnitud, que suele estar a la derecha de la mantisa, quizá con números más pequeños o con una indicación «× 10» en algún sitio; depende mucho del modelo. En este curso usaremos números más pequeños colocados a la derecha de la mantisa.

Ejemplos

Mostramos cómo escribiremos en este curso la aparición en pantalla de algunos números en notación científica.

	Número en notación científica	Aparición en pantalla
①	$2{,}78 \cdot 10^{56}$	2.78 ^{56}
②	$3{,}029 \cdot 10^{-42}$	3.029 $^{-42}$
③	$-5{,}32 \cdot 10^{74}$	-5.32 ^{74}
④	$-7{,}89 \cdot 10^{-31}$	-7.89 $^{-31}$

Es importante que distingas perfectamente los dos signos menos que pueden aparecer en el número: el de la mantisa y el del orden de magnitud.

Ejemplos

Y ahora vemos algunos ejemplos en que la calculadora escribe el resultado de alguna operación en notación científica. Es importante que tú escribas correctamente el resultado, usando la notación que hemos explicado; aunque el 10 no aparezca en tu pantalla, debes escribirlo en la solución.

Enunciado: realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con cuatro cifras significativas:

	Operación	Resultado en pantalla	Solución
⑤	$1234567 \cdot 8901234$	1.098916976 ^{13}	$1{,}099 \cdot 10^{13}$
⑥	$0{,}00123 : 456789$	2.692709325 $^{-09}$	$2{,}693 \cdot 10^{-9}$
⑦	$-0{,}00012345 \cdot 0{,}000789$	-9.740205 $^{-08}$	$-9{,}740 \cdot 10^{-8}$

Capacidad de la calculadora

La inmensa mayoría de las calculadoras científicas de bolsillo admiten como orden de magnitud desde –99 hasta 99, por lo que dedican solo dos lugares para escribir el orden de magnitud.

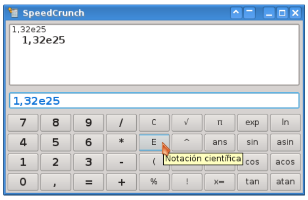
Este rango de valores es más que suficiente para casi todos los cálculos científicos, incluso a nivel profesional; sin embargo, con intervención manual del usuario se pueden alcanzar valores más allá del rango establecido.

Introducción de números en notación científica

Para escribir un número en notación científica en una calculadora científica se escribe primero la mantisa, luego se pulsa la tecla de «introducción del exponente de 10» y luego el orden de magnitud.

La tecla de «introducción del exponente de 10» puede estar rotulada de muchas maneras distintas, según el modelo de calculadora. En este curso usaremos la escritura **EXP** (de «exponente»), que es muy común, pero en tu calculadora podría ser **×10ˣ** o **EEX** (del inglés *enter exponent*).

En una calculadora con dos líneas, cuando pulses esta tecla verás en la línea superior o bien una «E», una «e» o bien la indicación «×10». Las indicaciones con la «E» o la «e» son muy importantes, porque también se suelen usar en programas de ordenador.



Ejemplos

Vemos cómo escribir algunos números; fíjate bien en los signos.

	Número en notación científica	Teclas que hay que pulsar
①	$1{,}23 \cdot 10^{45}$	1 . 2 3 EXP 4 5
②	$6{,}38 \cdot 10^{-32}$	6 . 3 8 EXP (-) 3 2
③	$-9{,}85 \cdot 10^{27}$	(-) 9 . 8 5 EXP 2 7
④	$-3{,}41 \cdot 10^{-56}$	(-) 3 . 4 1 EXP (-) 5 6

Observación

Es importante que te des cuenta de que cuando escribes en la calculadora un número en notación científica, la calculadora lo trata como cualquier otro número en notación usual, por lo que nunca necesitas rodearlo de paréntesis.

Un número en notación científica no es una operación

Ejemplos

Enunciado: realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con tres cifras significativas:

	Operación	Teclas	Pantalla	Solución
⑤	$\sqrt{7{,}8 \cdot 10^{41}}$	√ 7 . 8 EXP 4 1 =	8.831760866 20	$8{,}83 \cdot 10^{20}$
⑥	$\dfrac{3{,}2 \cdot 10^{75}}{1{,}7 \cdot 10^{32}}$	3 . 2 EXP 7 5 ÷ 1 . 7 EXP 3 2 =	1.882352941 43	$1{,}88 \cdot 10^{43}$
⑦	$\dfrac{1}{5{,}3 \cdot 10^{-19}}$	5 . 3 EXP (-) 1 9 x^{-1} =	1.886792453 18	$1{,}89 \cdot 10^{18}$
⑧	$\sqrt{3{,}2 \cdot 10^{-3}}$	√ 3 . 2 EXP (-) 3 =	0.056568542	0,0566

Observa que en el número (8) el resultado no aparece en notación científica.

Instrucciones

Escribe la respuesta en el cuadro en blanco que hay bajo cada operación.

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **cuatro** cifras significativas:

①	$\dfrac{7{,}2\cdot 10^{15}}{4{,}3\cdot 10^{62}}$	②	$\sqrt{5{,}62\cdot 10^{93}}$	③	$\dfrac{8{,}71\cdot 10^{-19}}{1{,}33\cdot 10^{-7}}$
④	$\sqrt{7{,}93\cdot 10^{-15}}$	⑤	$\dfrac{1}{3{,}32\cdot 10^{29}}$	⑥	$39\cdot(8{,}82\cdot 10^{31})$
⑦	$\dfrac{7{,}91\cdot 10^{41}}{383}$	⑧	$\dfrac{\sqrt{9{,}33\cdot 10^{22}}}{3{,}16\cdot 10^{37}}$	⑨	$\dfrac{8{,}1\cdot 10^{28}}{\sqrt{1{,}32\cdot 10^{-15}}}$
⑩	$\sqrt{\dfrac{1{,}2\cdot 10^{45}}{8{,}17\cdot 10^{94}}}$	⑪	$\sqrt{1{,}57\cdot 10^{3}}$	⑫	$\sqrt{8{,}92\cdot 10^{-3}}$

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **tres** cifras significativas:

⑬	$29\cdot(2{,}32\cdot 10^{76})$	⑭	$\dfrac{4{,}09\cdot 10^{-34}}{98{,}3}$	⑮	$\sqrt{5{,}62\cdot 10^{33}}$
⑯	$\dfrac{1}{7{,}31\cdot 10^{-17}}$	⑰	$\dfrac{2{,}1\cdot(8{,}31\cdot 10^{28})}{7{,}83\cdot(9{,}73\cdot 10^{-13})}$	⑱	$\sqrt{\dfrac{8{,}11\cdot 10^{-17}}{3{,}62\cdot 10^{32}}}$

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **cinco** cifras significativas:

⑲	$\dfrac{5}{7}\cdot(7{,}12\cdot 10^{82})$	⑳	$\dfrac{1}{2{,}57\cdot 10^{-2}}$	㉑	$\dfrac{1}{\sqrt{7{,}72\cdot 10^{43}}}$
㉒	$\sqrt{\dfrac{9{,}7\cdot 10^{5}}{3{,}58\cdot 10^{-19}}}$	㉓	$\sqrt{\dfrac{2{,}3\cdot(5{,}1\cdot 10^{31})}{4{,}41\cdot 10^{13}}}$	㉔	$\sqrt{\dfrac{1}{2{,}33\cdot 10^{-2}}}$

El sistema sexagesimal en la calculadora científica

Ya sabes que los cálculos con el sistema sexagesimal son sencillos pero necesitan dedicarle tiempo. Por ese motivo, las calculadoras científicas han incorporado casi desde los primeros modelos algún método para facilitar estos cálculos. Veremos aquí el más popular, pero cada modelo puede hacerlo de modo diferente.

La tecla de introducción de unidades sexagesimales

La tecla `°’”` es la que se usa para introducir en la calculadora valores escritos en el sistema sexagesimal. La primera pulsación siempre significa horas o grados sexagesimales, la segunda pulsación significa minutos o minutos sexagesimales y la tercera pulsación significa segundos o segundos sexagesimales.

Un valor escrito de esta manera es un único número, de modo que no es necesario rodearlo de paréntesis.

Ejemplos

Vemos cómo escribir algunos valores sexagesimales.

	Valor en expresión sexagesimal	Teclas que hay que pulsar
①	3° 12′ 52″	`3` `°’”` `1` `2` `°’”` `5` `2` `°’”`
②	17 h 49 min 38 s	`1` `7` `°’”` `4` `9` `°’”` `3` `8` `°’”`
③	142° 7′	`1` `4` `2` `°’”` `7` `°’”`
④	2 h 17 s	`2` `°’”` `0` `°’”` `1` `7` `°’”`

Presentación en pantalla de las unidades sexagesimales

Dependiendo de lo sofisticada que sea la pantalla de la calculadora, las unidades sexagesimales aparecerán con signos mejor o peor diseñados. En este curso vamos a presentarlos como lo hacen los modelos más sencillos, con el signo «º» para representar tanto las horas como los minutos y los grados y minutos sexagesimales.

Ejemplos

Enunciado: realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados en forma sexagesimal compleja redondeando al segundo.

⑤ 7 · (2° 45′ 56″) ⑥ (15 h 4 min 8 s) : 3

Resoluciones

⑤ `7` `×` `2` `°’”` `4` `5` `°’”` `5` `6` `°’”` `=` ⤇ 9º21º32. Solución: 9° 21′ 32″

⑥ `1` `5` `°’”` `4` `°’”` `8` `°’”` `÷` `3` `=` ⤇ 5º1º22.67. Solución: 5 h 1 min 23 s

Conversión entre las formas compleja e incompleja

Dependiendo del modelo de calculadora, se hará de una manera u otra. En calculadoras que incorporan la tecla `°’”`, el paso se puede realizar pulsándola repetidamente cuando ya aparece un número en pantalla.

Ejemplo 7: convierte 5,238° en grados, minutos y segundos sexagesimales redondeando al segundo.

Resolución: `5` `.` `2` `3` `8` `=` `°’”` ⤇ 5º14º16.8. Solución: 5° 14′ 17″

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados en forma sexagesimal compleja redondeando al segundo:

① $5 \cdot (13° \ 52' \ 19'')$

② $(13\,\text{h}\ 24\,\text{min}\ 37\,\text{s}) : 7$

③ $(238° \ 49' \ 23'') : 11$

④ $13 \cdot (2\,\text{h}\ 56\,\text{s})$

⑤ $19 \cdot 17{,}211°$

⑥ $7\,\text{h} : 13$

⑦ $2{,}23° + 6{,}3°$

⑧ $\dfrac{196°\,35'}{17}$

⑨ $2 \cdot (3\,\text{h}\ 21\,\text{min}\ 56\,\text{s}) + 3 \cdot (4\,\text{h}\ 18\,\text{min}\ 32\,\text{s})$

⑩ $\dfrac{5}{7} \cdot (203°\,19')$

⑪ $3\,\text{h} : 42{,}195$

⑫ $42{,}195 \cdot (4\ \text{min})$

⑬ $\dfrac{4}{9} \cdot (137°\,20'\,51'')$

⑭ $3 \cdot (34° \ 15' \ 37'') + 4 \cdot (15° \ 38' \ 22'')$

⑮ $360° : 7$

⑯ $90° - 48° \ 23' \ 51''$

⑰ $\dfrac{250°\,19'}{23}$

⑱ $20 \cdot (4{,}5\ \text{min})$

⑲ $48\ \text{h} : 11$

⑳ $137 \cdot (3\ \text{min}\ 41{,}27\ \text{s})$

㉑ $\dfrac{74°\,18'\,23'' + 189°\,22'\,48''}{19}$

㉒ $180° - (113° \ 29' + 15° \ 43'')$

㉓ $42{,}195 \cdot (3\ \text{min}\ 40\ \text{s})$

㉔ $2{,}5\ \text{h} : 42{,}195$

Fracciones en la calculadora científica

La mayor parte de las calculadoras científicas escolares de dos líneas incorporan la posibilidad de realizar cálculos con fracciones sin convertirlas en números decimales. Esto incluye también el manejo de números mixtos.

La tecla de introducción de fracciones

La tecla que se usa para separar en la calculadora el numerador del denominador suele ser `a b/c`, pero podría ser `■/□` u otra similar. Usando esta tecla también se pueden introducir números mixtos.

Un valor escrito de esta manera es un único número, de modo que no es necesario rodearlo de paréntesis.

Ejemplos

Vemos cómo escribir algunas expresiones con fracciones.

	Expresión con fracciones	Teclas que hay que pulsar
①	$\frac{2}{3}$	`2` `a b/c` `3`
②	$8\frac{7}{9}$ (recuerda que significa $8+\frac{7}{9}$)	`8` `a b/c` `7` `a b/c` `9`

Presentación en pantalla de las fracciones

- ✱ La calculadora siempre devuelve los valores fraccionarios usando fracciones irreducibles.
- ✱ Dependiendo de cómo sea la pantalla de la calculadora, las fracciones aparecerán de modo natural o con un símbolo como separador, el símbolo «⌟».
- ✱ Es posible configurar la calculadora para que, por defecto, dé los resultados en los que el numerador sea mayor que el denominador como fracción impropia o como número mixto.
- ✱ Usando la tecla `d/c` podemos alternar entre número mixto o fracción impropia en los casos en que sea posible.

Ejemplos

	Expresión	Teclas	Pantalla	Significado
③	$\frac{442}{1105}$	`4` `4` `2` `a b/c` `1` `1` `0` `5` `=`	2⌟5	$\frac{2}{5}$
④	$1\frac{8}{6}$	`1` `a b/c` `8` `a b/c` `6` `=`	2⌟1⌟3	$2\frac{1}{3}$

Conversión entre fracción y número decimal

Pulsando repetidamente la tecla `a b/c` va cambiando alternativamente la representación del número en pantalla como fracción o como número decimal.

Ejemplo 5. Calcula $\frac{1}{28}+\frac{4}{35}$ como fracción irreducible y como número decimal.

`1` `a b/c` `2` `8` `+` `4` `a b/c` `3` `5` `=` ⇨ 3⌟20 ▩ `a b/c` ⇨ 0.15. Solución: $\frac{3}{20}=0{,}15$.

Realización práctica de los cálculos matemáticos

Cuando las teorías matemáticas sobre cómo realizar cálculos numéricos se llevan a la práctica y de diseñan calculadoras y programas de ordenador para llevarlos a cabo, a veces surgen problemas inesperados. Métodos que parecen buenos en teoría no lo son en la práctica, por **lentos** o por **imprecisos**. Pero existen ramas de la matemática que estudian la viabilidad práctica de los métodos de cálculo.

Resultados con valor absoluto muy grande

Casi todas las calculadoras de bolsillo pueden manejar órdenes de magnitud positivos hasta 99, muy pocas llegan a más. Si el resultado de una operación es mayor (en valor absoluto) que eso, la calculadora dará un mensaje de error.

Ejemplos

	Operación	Teclas	Pantalla
①	$(1{,}56 \cdot 10^{58}) \cdot (4{,}23 \cdot 10^{75})$	1 . 5 6 EXP 5 8 × 4 . 2 3 EXP 7 5 =	Error
②	$(-1{,}2 \cdot 10^{9}) \cdot (9{,}74 \cdot 10^{98})$	– 1 . 2 EXP 9 × 9 . 7 4 EXP 9 8 =	Error

Resultados con valor absoluto muy próximo a cero

Casi todas las calculadoras de bolsillo pueden manejar órdenes de magnitud negativos hasta –99, muy pocas llegan a menos. Si el resultado de una operación es menor (en valor absoluto) que eso, la calculadora dará como resultado 0.

Ejemplos

	Operación	Teclas	Pantalla
③	$(4{,}2 \cdot 10^{-31}) \cdot (1{,}3 \cdot 10^{-82})$	4 . 2 EXP – 3 1 × 1 . 3 EXP – 8 2 =	0
④	$(-2{,}4 \cdot 10^{-8}) \cdot (3{,}7 \cdot 10^{-97})$	– 2 . 4 EXP – 8 × 3 . 7 EXP – 9 7 =	0

Intervención manual del usuario

Puedes calcular los cuatro ejemplos que hemos visto ayudándote de la calculadora, pero recolocando los cálculos y haciendo tú mismo una parte:

① $(1{,}56 \cdot 10^{58}) \cdot (4{,}23 \cdot 10^{75}) = (1{,}56 \cdot 4{,}23) \cdot (10^{75} \cdot 10^{58}) = 6{,}5988 \cdot 10^{133}$

④ $(-2{,}4 \cdot 10^{-8}) \cdot (3{,}7 \cdot 10^{-97}) = (-2{,}4 \cdot 3{,}7) \cdot (10^{-97} \cdot 10^{-8}) = -8{,}88 \cdot 10^{-105}$

Reordenación de los cálculos

Escribir los cálculos de una manera diferente, pero equivalente, de la que se presentan es una técnica muy frecuente. Por ejemplo, los microprocesadores de los ordenadores actuales la utilizan constantemente (en inglés, *out-of-order execution*).

Ejemplo 5. Calcula $\dfrac{(1{,}3 \cdot 10^{33}) \cdot (7{,}2 \cdot 10^{82})}{2{,}5 \cdot 10^{43}}$

Si lo intentamos calcular tal como aparece, el numerador excederá la capacidad de la calculadora y esta ya no podrá continuar con la operación. Podemos hacer primero una división y multiplicar el resultado:

1 . 3 EXP 3 3 ÷ 2 . 5 EXP 4 3 = ▩ Ans × 7 . 2 EXP 8 2 = ⇨ 3.744 ^{72}

Enunciados

① El 1 de enero de 2002 entró en efecto en doce países europeos el uso de una moneda común, el euro, que sustituyó tras un breve periodo a las antiguas monedas nacionales de esos doce países. Hubo que resolver la cuestión de las equivalencias entre un euro y las antiguas monedas; se usaron estas:

País	Moneda	1 euro =
Alemania	Marco alemán	1,95583
Austria	Chelín austriaco	13,7603
Bélgica	Franco belga	40,3399
España	Peseta española	166,386
Finlandia	Marco finlandés	5,94573
Francia	Franco francés	6,55957

País	Moneda	1 euro =
Grecia	Dracma griega	340,750
Irlanda	Libra irlandesa	0,787564
Italia	Lira italiana	1936,27
Luxemburgo	Franco luxemburgués	40,3399
Países Bajos	Florín neerlandés	2,20371
Portugal	Escudo portugués	200,482

¿Qué tienen en común todas las equivalencias?

② En la siguiente tabla aparecen las masas en kilogramos de los planetas del Sistema Solar y de sus respectivos mayores satélites naturales (Mercurio y Venus no tienen satélites naturales conocidos):

Planeta		Mayor satélite	
Nombre	Masa	Nombre	Masa
Tierra	$5{,}9736 \cdot 10^{24}$	Luna	$7{,}349 \cdot 10^{22}$
Marte	$6{,}4185 \cdot 10^{23}$	Fobos	$1{,}072 \cdot 10^{16}$
Júpiter	$1{,}899 \cdot 10^{27}$	Ganímedes	$1{,}482 \cdot 10^{23}$
Saturno	$5{,}688 \cdot 10^{26}$	Titán	$1{,}345 \cdot 10^{23}$
Urano	$8{,}686 \cdot 10^{25}$	Titania	$3{,}527 \cdot 10^{21}$
Neptuno	$1{,}024 \cdot 10^{26}$	Tritón	$2{,}14 \cdot 10^{22}$

a) Averigua cuál es el mayor satélite en proporción a su planeta.

b) Averigua cuál es el menor satélite en proporción a su planeta.

③ En 2019 el atleta keniata Eliud Kipchoge corrió la distancia del maratón (42,195 km) en 1 h 59 min 40 s, más rápido que su propio récord del mundo oficial, en una prueba especialmente diseñada para él. Calcula cuánto tiempo tardó, de media, en recorrer cada tramo de cien metros; da el resultado en segundos redondeando a la centésima.

Enunciados

Con la ayuda de tu calculadora, averigua el resultado de las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica con cuatro cifras significativas.

④ $(7{,}24 \cdot 10^{79})^2$

⑤ $$\frac{(2{,}79 \cdot 10^{251})(3{,}14 \cdot 10^{375})}{(8{,}27 \cdot 10^{108})(9{,}73 \cdot 10^{112})}$$

Teoría y práctica de las potencias

Hay dos maneras complementarias de trabajar con potencias:

* Desde el punto de vista **teórico**. Hay que definir qué se entiende por potencia, estudiar y demostrar sus propiedades a partir de la definición. Esta manera de estudiar las potencias tiene la dificultad de que las definiciones van cambiando según el tipo de número que sean la base y el exponente.
* Desde el punto de vista **práctico**. Hay que ser capaces de calcular el valor numérico de una potencia.

Teoría de las potencias

* En el nivel 1 viste la definición de potencia cuando la base es un número entero y el exponente es un número natural.
* En el nivel 2 viste la definición de potencia cuando la base es un número racional y el exponente es un número entero.
* En el nivel 4 verás la definición de potencia cuando la base es un número racional y el exponente es un número racional.
* Hay más definiciones de potencia, pero no se explican en la enseñanza secundaria.
* Con todas las definiciones se pueden demostrar las mismas propiedades de las potencias, que ya conoces y has practicado.

Ejemplos

El tipo de problemas que se resuelven en la teoría de potencias es de este estilo:

① Escribe la expresión $\dfrac{(a^3)^9\cdot(a^4)^{-3}}{(a^{-5})^2}$ como una potencia de «a».

② Escribe la expresión $16\cdot 2^7$ como una potencia de 2.

Práctica de las potencias

Salvo en los casos más simples, que ya has estudiado, usamos una calculadora o un programa de ordenador para calcular las potencias. En este nivel 3 practicaremos cómo hacerlo.

Ejemplos

El tipo de problemas que se resuelven en la práctica de potencias es de este estilo:

③ Calcula con cuatro cifras significativas el valor de $7{,}23^5$.

④ Calcula con cuatro cifras significativas el valor de $0{,}26^4$.

Complemento de teoría y práctica de las potencias

En matemáticas se van entremezclando los desarrollos teóricos y las aplicaciones prácticas. Cuanto más avances en el estudio de las matemáticas, más lo irás comprobando tú mismo.

Ejemplos

El tipo de problemas que se pueden resolver aunando la teoría y la práctica de potencias es de este estilo:

⑤ Calcula con seis cifras significativas el valor de 133^{81}. Este ejercicio lo resolveremos en el nivel 4.

Propiedades de las potencias

Te recordamos las propiedades las potencias para poder aplicarlas a continuación. Si «a» y «b» son dos números racionales y «m» y «n» son dos números enteros:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$	$a^n \cdot b^n=(ab)^n$	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$	$(a^n)^m = a^{nm}$

Enunciados

① Escribe la expresión $\frac{(a^3)^9 \cdot (a^4)^{-3}}{(a^{-5})^2}$ como una potencia de «a».

② Escribe la expresión $16 \cdot 2^7$ como una potencia de 2.

③ Escribe la expresión $\frac{(a^4 \cdot b^3)^4 \cdot a}{(a^{10} \cdot b^6)^2}$ como una potencia de «a».

④ Escribe la expresión $\frac{2^3 \cdot 3^7}{6^3}$ como una potencia de 9.

Resoluciones

① Basta ir aplicando las propiedades; se puede hacer en diferentes órdenes y siempre te saldrá bien, elegir un camino u otro es cuestión de gustos. No es necesario que indiques qué propiedades vas aplicando. Te puedes saltar algún paso, pero procura que tu razonamiento lo puedan seguir quienes lo lean.

Lo resolvemos paso a paso:

$$\frac{(a^3)^9 \cdot (a^4)^{-3}}{(a^{-5})^2} = \frac{a^{27} \cdot a^{-12}}{a^{-10}} = \frac{a^{15}}{a^{-10}} = a^{25}$$

② Para resolver este ejercicio hay que saber que $16=2^4$. Si no lo sabes, se te tiene que ocurrir que hay que poner 16 como una potencia de 2, y eso sí lo puedes averiguar haciendo la descomposición en factores primos de 2.

$$16 \cdot 2^7 = 2^4 \cdot 2^7 = 2^{11}$$

③ A primera vista, no está claro que se pueda hacer lo que pide el enunciado, puesto que vemos una «b». Pero hay que ir aplicando propiedades con la esperanza de que se puedan simplificar las apariciones de «b».

$$\frac{(a^4 \cdot b^3)^4 \cdot a}{(a^{10} \cdot b^6)^2} = \frac{a^{16} \cdot b^{12} \cdot a}{a^{20} \cdot b^{12}} = \frac{a^{17}}{a^{20}} = a^{-3}$$

④ Para resolver este tipo de ejercicios es necesario aplicar las propiedades de las potencias, suele ser necesario utilizar la descomposición en factores primos y también te hará falta algo de ingenio. En este ejercicio vendrá bien recordar que $9=3^2$ para conectar el «3» del ejercicio con el «9» que se pide.

$$\frac{2^3 \cdot 3^7}{6^3} = \frac{2^3 \cdot 3^7}{(2 \cdot 3)^3} = \frac{2^3 \cdot 3^7}{2^3 \cdot 3^3} = 3^4 = (3^2)^2 = 9^2$$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones como una potencia de «a»:

① $\dfrac{(a^4)^3\cdot(a^7)^2}{a^{-3}\cdot a}$

② $\dfrac{(a^8\cdot a^{-2})^2}{a^{-3}\cdot a^{10}}$

③ $a\cdot\dfrac{(a^4)^3\cdot(a^{-4})^5}{a^2\cdot(a^{-6})^2}\cdot a^{-5}$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones como una potencia de 2:

④ $\dfrac{4^5\cdot 27}{18\cdot 6}$

⑤ $\dfrac{8^{-3}}{4}$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones como una potencia de 25:

⑥ $\dfrac{5^9\cdot 50}{10}$

⑦ $125^{-5}\cdot 5$

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones como una potencia que tenga como base el número natural menor que sea posible:

⑧ $2^4\cdot 4^9\cdot 8^3$

⑨ $\dfrac{60^3}{10^3}\cdot(2^8\cdot 3^8)$

⑩ $(10^7)^4\cdot 2^6\cdot 5^6$

⑪ $\left(\dfrac{7}{4}\right)^8\cdot\left(\dfrac{2}{7}\right)^8$

⑫ $\dfrac{3^5\cdot 6^4\cdot 9^3}{2^4\cdot 27}$

⑬ $\dfrac{1}{2^{-4}\cdot 4^{-2}\cdot 8}$

⑭ $\dfrac{10^4}{2^7\cdot 5^7}$

⑮ $\left(\dfrac{9}{8}\right)^{-7}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{14}$

Teclas para calcular potencias en la calculadora

Vemos cuatro teclas que permiten calcular potencias:

- ✱ Para calcular potencias de exponente 2 usamos la tecla x^2.
- ✱ Para calcular potencias de exponente 3 usamos la tecla x^3. Algunas calculadoras no disponen de esta tecla.
- ✱ Para calcular potencias de exponente −1 usamos la tecla x^{-1}, que podría aparecer como $1/x$.
- ✱ Para calcular cualquier potencia en general se dispone de una tecla que puede aparecer rotulada de varias maneras: y^x, x^y, $\wedge$,... El símbolo «∧» es importante porque se usa mucho en programas de ordenador para escribir potencias.

Verás en la calculadora teclas que tienen el aspecto de potencias, pero que tienen la «x» en el exponente. Las explicaremos y usaremos en el nivel 4.

Ejemplos

Enunciado: realiza con la calculadora las siguientes operaciones:

	Operación	Teclas	Pantalla	Solución
①	$83^2 + 57^2$	8 3 x^2 + 5 7 x^2 =	10 138	10 138
②	4^{-1}	4 x^{-1} =	0,25	0,25
③	47^3	4 7 x^3 =	103823	103 823
④	47^3	4 7 y^x 3 =	103823	103 823
⑤	23^4	2 3 y^x 4 =	279841	279 841

Redondeos y notación científica

Es muy común calculando potencias que el resultado tenga muchas cifras significativas y haya que redondearlo para dar la solución; también ocurre con frecuencia que la calculadora necesite escribir el resultado en notación científica.

Ejemplos

Enunciado: realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con cuatro cifras significativas:

	Operación	Teclas	Pantalla	Solución
⑥	$17{,}54^2$	1 7 . 5 4 x^2 =	307,6516	307,7
⑦	7^{-1}	7 x^{-1} =	0,142857142	0,1429
⑧	871^3	8 7 1 x^3 =	660776311	$6{,}608 \cdot 10^8$
⑨	59^{14}	5 9 y^x 1 4 =	6,19338621 3 ^{24}	$6{,}193 \cdot 10^{24}$
⑩	7^{-2}	7 y^x (-) 2 =	0,020408163	0,02041
⑪	$(2{,}4 \cdot 10^7)^{-3}$	2 . 4 EXP 7 y^x (-) 3 =	7,233796296 ^{23}	$7{,}234 \cdot 10^{23}$

Instrucciones

Escribe la respuesta en el cuadro en blanco que hay bajo cada operación.

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **cuatro** cifras significativas:

① $7{,}269^2$	② $19{,}31^2$	③ $96{,}3^2$	④ $(-1{,}742)^2$
⑤ $18^{-1} + 13^{-1}$	⑥ $13^2 + 3^{-1}$	⑦ $0{,}82^2 + 6^{-1}$	⑧ $(1+7^{-1})^2$
⑨ $11{,}83^3$	⑩ $3{,}92^3$	⑪ $(-1{,}823)^3$	⑫ 823^3
⑬ $11{,}2^3 + 19^2$	⑭ $(1-1{,}32^2)^3$	⑮ $(1+3{,}2^3)^2$	⑯ $(3{,}67 \cdot 10^9)^3$
⑰ $5{,}16^4$	⑱ $3{,}23^5$	⑲ $62{,}3^{-7}$	⑳ $0{,}26^{18}$
㉑ 36^{41}	㉒ 19^{-73}	㉓ $(-1{,}8 \cdot 10^6)^5$	㉔ $(-19{,}5)^4$

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **tres** cifras significativas:

㉕ $0{,}978^2$	㉖ $1{,}073^3$	㉗ $(-2{,}23)^4$	㉘ $(5{,}7 \cdot 10^{17})^5$
㉙ $1{,}5^2 - 3{,}2^{-1}$	㉚ $1{,}4^2 + 3{,}2^2$	㉛ $1{,}3^5 - 1{,}4^4$	㉜ $(-6{,}2 \cdot 10^{-4})^{-3}$

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **cinco** cifras significativas:

㉝ $\dfrac{3{,}7^2+1{,}9^2}{2{,}3^2-3{,}1^2}$	㉞ $\dfrac{(7{,}42\cdot 10^{11})^3}{(5{,}1\cdot 10^8)^4}$	㉟ $\dfrac{2{,}8^{32}}{1-\sqrt{2}}$	㊱ $\sqrt{\dfrac{17^2+9^3}{13^2}}$
㊲ $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^3$	㊳ $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$	㊴ $(1-13^4)^3$	㊵ $(13-\sqrt{7})^4$

Definición de raíz

- Si a es un número racional y n es un número natural, se define la «raíz de orden n» de a como un número que elevado a n da como resultado a.
- Si hay varios números que cumplen la condición, la raíz es el número positivo.
- El número a se llama **radicando**.
- El número n se llama **índice** u **orden**.
- Además de «raíz de orden n» también se puede decir «raíz enésima».
- La raíz de orden 2 se llama raíz cuadrada, y ya la conoces desde el nivel 1.
- La raíz de orden 3 se llama raíz cúbica.
- La raíz de orden 4 se llama raíz cuarta, la de orden 5 se llama raíz quinta, y así sucesivamente.

Ejemplos

① La raíz cuadrada de 9 es 3 porque $3^2 = 9$ y 3 es positivo.

② La raíz cúbica de 8 es 2 porque $2^3 = 8$.

③ La raíz cúbica de –1 es –1 porque $(-1)^3 = -1$

④ La raíz cuarta de 625 es 5 porque $5^4 = 625$ y 5 es positivo.

⑤ La raíz quinta de 1 es 1 porque $1^5 = 1$

Notación de las raíces

- La raíz de orden n de a se escribe $\sqrt[n]{a}$.
- La raíz cuadrada se puede escribir sin el índice, como llevas haciendo desde el nivel 2; es decir: $\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$.

Ejemplos

⑥ La raíz cuadrada de 9 se escribe $\sqrt[2]{9}$ o bien $\sqrt{9}$.

⑦ La raíz cúbica de 8 se escribe $\sqrt[3]{8}$.

⑧ La raíz cúbica de –1 se escribe $\sqrt[3]{-1}$.

⑨ La raíz cuarta de 625 se escribe $\sqrt[4]{625}$.

⑩ La raíz quinta de 1 se escribe $\sqrt[5]{1}$.

Definición de raíz usando símbolos

Si unimos todo lo que llevamos hasta el momento, podemos expresar la definición de raíz usando símbolos, lo que ayuda a entender la definición:

$$\boxed{\sqrt[n]{a}=b \iff b^n=a}$$

La definición de raíz se basa en la definición de potencia.

Ejemplos

⑪ $\sqrt{9}=3$ porque $3^2 = 9$ y 3 es positivo.

⑫ $\sqrt[3]{8}=2$ porque $2^3 = 8$.

Propiedades numéricas de las raíces

Cuando se calcula el valor de una raíz hay que tener en cuenta ciertas propiedades, que serán importantes tanto en los desarrollos teóricos como en las operaciones numéricas.

Raíz de cero

Si n es un número natural, la raíz de índice n de 0 es 0: $\sqrt[n]{0}=0$.

Motivo: $0^n = 0$.

Ejemplo 1: $\sqrt[7]{0}=0$

Raíz de índice par de un número positivo

Si n es un número natural par y a es un número racional positivo, hay dos números que elevados a n dan como resultado a: uno es positivo, el otro es negativo y son opuestos. La raíz de índice n de a es el número positivo.

Ejemplo 2: hay dos números que elevados a 4 dan como resultado 16, el 2 y el –2: $2^4=16$ y $(-2)^4=16$; por tanto, $\sqrt[4]{16}=2$.

Raíz de índice par de un número negativo

Si n es un número natural par y a es un número racional negativo, no hay ningún número que elevado a n dé como resultado a. Por eso decimos que la raíz de índice n de a no existe.

Ejemplo 3: no hay ningún número que elevado a 6 nos dé como resultado –1, así que decimos que $\sqrt[6]{-1}$ no existe. Recuerda que $(-1)^6 = 1$.

Raíz de índice impar de un número positivo

Si n es un número natural impar y a es un número racional positivo, la raíz de índice n de a es un número positivo.

Ejemplo 4: $\sqrt[5]{243}=3$

Raíz de índice impar de un número negativo

Si n es un número natural impar y a es un número racional negativo, la raíz de índice n de a es un número negativo.

Ejemplo 5: $\sqrt[5]{-243}=-3$

Tipo de número del resultado de la raíz

El cálculo de raíces nos lleva a un problema que resultó inesperado cuando se descubrió, hace varios miles de años. Por un lado, en algunas ocasiones el resultado de la raíz de un número racional es otro número racional, como aquí:

Ejemplo 6: $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ **Ejemplo 7**: $\sqrt{0{,}25}=0{,}5$

Pero por otro lado, en la mayor parte de las ocasiones el resultado no es un número racional, como estudiaremos en el nivel 4.

Nota

Modificaremos todas estas propiedades en el nivel 5, en el que introduciremos un nuevo tipo de números con los que la definición y los cálculos de raíces cambian fundamentalmente. Un avance: definiremos los **números complejos** y veremos que cualquier número complejo tiene exactamente n raíces enésimas.

Enunciados

Averigua el resultado de las siguientes raíces sabiendo que, si existe, es un número entero. En el caso de que la raíz no exista, dilo.

① $\sqrt[8]{0}$

② $\sqrt[4]{1}$

③ $\sqrt[4]{-1}$

④ $\sqrt[3]{27}$

⑤ $\sqrt[3]{-27}$

⑥ $\sqrt[7]{-1}$

⑦ $\sqrt[4]{81}$

⑧ $\sqrt[4]{-81}$

⑨ $\sqrt[9]{0}$

⑩ $\sqrt[14]{-1}$

⑪ $\sqrt[5]{-32}$

⑫ $\sqrt[6]{64}$

⑬ $\sqrt[11]{0}$

⑭ $\sqrt[2]{100}$

⑮ $\sqrt[2]{-16}$

Enunciados

Averigua el resultado de las siguientes raíces sabiendo que, si existe, es un número racional. Expresa el resultado como fracción irreducible. En el caso de que la raíz no exista, dilo.

⑯ $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

⑰ $\sqrt[2]{\frac{9}{25}}$

⑱ $\sqrt[4]{-\frac{1}{4}}$

Enunciados

Averigua el resultado de las siguientes raíces sabiendo que, si existe, es un número racional. Expresa el resultado como número decimal.

⑲ $\sqrt[3]{0{,}001}$

⑳ $\sqrt[3]{-0{,}125}$

Teoría y práctica de las raíces

Hay dos maneras complementarias de trabajar con raíces:

* Desde el punto de vista **teórico**. Hay que definir qué se entiende por raíz, estudiar y demostrar sus propiedades a partir de la definición.
* Desde el punto de vista **práctico**. Hay que ser capaces de calcular el valor numérico de una raíz.

Teoría de las raíces

* En el nivel 1 viste la definición de raíz cuadrada cuando el radicando es un número decimal.
* En el nivel 3 acabas de ver la definición de raíz cuando la base es un número racional y el índice es un número natural.
* En el nivel 4 verás la definición de raíz cuando la base es un número racional o irracional y el índice es un número natural.
* Con todas las definiciones se pueden demostrar las mismas propiedades de las raíces.
* Cuando manejamos expresiones con raíces, pero las dejamos indicadas (es decir, sin calcular el resultado numérico), decimos que estamos trabajando con **radicales**. Lo haremos en el nivel 4.

Ejemplos

El tipo de problemas que se resuelven en la teoría de raíces es de este estilo:

① Escribe la expresión $\sqrt[6]{a^8}:\sqrt[3]{a^2}$ como un único radical.

② Escribe la expresión $\dfrac{3}{1-\sqrt{2}}$ de modo que no haya radicales en el denominador.

Práctica de las raíces

Salvo en los casos más simples, que ya has estudiado, usamos una calculadora o un programa de ordenador para calcular las raíces. En este nivel 3 practicaremos cómo hacerlo.

Ejemplos

El tipo de problemas que se resuelven en la práctica de raíces es de este estilo:

③ Calcula con cuatro cifras significativas el valor de $\sqrt[6]{2}$.

④ Calcula con cuatro cifras significativas el valor de $\sqrt[5]{-2}$.

Complemento de teoría y práctica de las raíces

En matemáticas se van entremezclando los desarrollos teóricos y las aplicaciones prácticas. Cuanto más avances en el estudio de las matemáticas, más lo irás comprobando tú mismo.

Ejemplos

El tipo de problemas que se pueden resolver aunando la teoría y la práctica de raíces es de este estilo:

⑤ Calcula con seis cifras significativas el valor de $\sqrt[3]{2{,}34\cdot 10^{433}}$.

⑥ Demuestra que $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ sin calcular nada.

En el nivel 4 resolveremos algunos de estos ejercicios.

Teclas para calcular raíces en la calculadora

Vemos tres teclas que permiten calcular raíces:

- Para calcular raíces cuadradas usamos la tecla √, que puede aparecer en algunos modelos como √x o √■.
- Para calcular raíces cúbicas usamos la tecla ∛, que puede aparecer en algunos modelos como ∛x, ∛■ o incluso no aparecer.
- Para calcular cualquier raíz en general se dispone la tecla ˣ√, que puede aparecer como ˣ√■ o □√■.

Ejemplos

Enunciado: realiza con la calculadora las siguientes operaciones:

	Operación	Teclas	Pantalla	Solución
①	$\sqrt{8381025}$	√ 8 3 8 1 0 2 5 =	2895	2895
②	$\sqrt[3]{912673}$	∛ 9 1 2 6 7 3 =	98	97
③	$\sqrt[4]{456976}$	4 ˣ√ 4 5 6 9 7 6 =	26	26

Consejos

- Comprueba con tu calculadora que obtienes estos mismos resultados.
- En las calculadoras con una sola línea de pantalla el orden de las teclas de raíz cuadrada y de raíz cúbica es al revés que cuando la calculadora tiene dos líneas en la pantalla.
- El orden en que se escriben el índice y el radicando cuando se calcula una raíz general podría ser al revés que el indicado en estos ejemplos.
- Si tienes una calculadora nueva en tus manos, comprueba el orden correcto haciendo pruebas en las que sepas de antemano cuál ha de ser el resultado.
- Recuerda el paréntesis implícito que tienen todas las raíces.

Redondeos

Lo más común calculando raíces es que el resultado tenga infinitas cifras y por tanto haya que redondearlo para dar la solución.

Ejemplos

Enunciado: realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con cuatro cifras significativas:

	Operación	Teclas	Pantalla	Solución
④	$\sqrt{607}$	√ 6 0 7 =	24.63736999	24,64
⑤	$\sqrt[3]{7{,}1\cdot10^{38}}$	∛ 7 . 1 EXP 3 8 =	8.921121404 12	$8{,}921\cdot10^{12}$
⑥	$\sqrt[5]{2}$	5 ˣ√ 2 =	1.148698355	1,149
⑦	$\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$	∛ (√ 5 + √ 7) =	1.696395974	1,696
⑧	$\sqrt[5]{\dfrac{7}{11}}$	5 ˣ√ (7 ÷ 1 1) =	0.913568404	0,9136

Instrucciones

Escribe la respuesta en el cuadro en blanco que hay bajo cada operación.

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **cuatro** cifras significativas:

1	$\sqrt[3]{1+\pi}$	2	$\sqrt[4]{3}+\sqrt[5]{4}$	3	$\sqrt[5]{1-\sqrt{2}}$	4	$\sqrt[3]{7{,}2\cdot 10^{34}}$
5	$\sqrt[4]{3{,}7\cdot 10^{-2}}$	6	$\sqrt[3]{3\sqrt{7}}$	7	$\sqrt[4]{\pi-2}$	8	$\sqrt[3]{5}-\sqrt[5]{3}$
9	$\sqrt[8]{1{,}5\cdot 10^{9}}$	10	$\sqrt[3]{12^4}$	11	$(\sqrt[3]{12})^4$	12	$\sqrt[5]{7{,}9\cdot 10^{49}}$
13	$\dfrac{\sqrt[5]{17}}{\sqrt[5]{7}}$	14	$\sqrt[5]{\dfrac{17}{7}}$	15	$\sqrt[3]{\dfrac{3+\sqrt{2}}{5}}$	16	$\sqrt{\dfrac{3+\sqrt[3]{2}}{5}}$
17	$\sqrt[7]{\dfrac{5{,}78\cdot 10^{45}}{3{,}91\cdot 10^{38}}}$	18	$\sqrt[9]{\dfrac{2}{3}+\dfrac{7}{11}}$	19	$\sqrt[5]{1+\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{2}}}$	20	$\sqrt[5]{3+\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{2}}}$

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **tres** cifras significativas:

21	$\sqrt[6]{4{,}1\cdot 10^{33}}$	22	$\sqrt[5]{-1{,}9\cdot 10^{57}}$	23	$\sqrt[3]{5^3+7^3}$	24	$\sqrt[5]{2^4-9^4}$
25	$\sqrt[4]{\dfrac{1}{1+\pi}}$	26	$\sqrt[3]{\dfrac{3+\sqrt{7}}{5-\sqrt{24}}}$	27	$\sqrt[3]{\dfrac{999}{\sqrt[7]{99}-\sqrt[8]{99}}}$	28	$\dfrac{\sqrt[4]{4-\sqrt[4]{4}}}{4-\sqrt[4]{4}}$

Enunciados

Realiza con la calculadora las siguientes operaciones y da los resultados con **cinco** cifras significativas:

29	$\sqrt[3]{12+13}$	30	$\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{13}$	31	$\sqrt[5]{33-41}$	32	$\sqrt[5]{33}-\sqrt[5]{41}$
33	$\sqrt[3]{16}$	34	$\sqrt[6]{256}$	35	$\sqrt[5]{33\cdot 41}$	36	$\sqrt[5]{33}\cdot\sqrt[5]{41}$

Manejo de resultados intermedios

Es fundamental manejar perfectamente los resultados intermedios que se van necesitando en la resolución de un problema.

Enunciado

El volumen de un hexaedro es 10 m^3. Se pide:

a) Calcular la longitud de su arista dando el resultado en metros con tres cifras significativas.

b) Calcular su área dando el resultado en metros cuadrados con cuatro cifras significativas.

Resolución

Sabemos que si d es la longitud del lado y V es el volumen, $V=d^3$.

Resolveremos el problema usando metros, metros cuadrados y metros cúbicos, no será necesario ningún cambio de unidad.

El dato que nos da el enunciado es $V=10$, por tanto $d^3=10 \Rightarrow d=\sqrt[3]{10}$

Usamos la calculadora: $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ ⤇ 2.15443469

Como el enunciado pide tres cifras significativas, podremos contestar $d=2{,}15$, pero para calcular el área del hexaedro debemos usar toda la precisión que nos ofrezca la calculadora.

Sabemos que si llamamos A al área del hexaedro, $A=6d^2$.

Usamos la calculadora: $\boxed{6}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ ⤇ 27.849533

Recuerda que la tecla $\boxed{\text{Ans}}$ representa el valor obtenido en la última operación.

Solución: (a) 2,15 m; (b) 27,85 m^2

Comentarios

✱ Si en vez de usar la tecla $\boxed{\text{Ans}}$ hubieramos utilizado el valor 2,15, habríamos obtenido un resultado erróneo para el área, ya que $6 \cdot 2{,}15^2 = 27{,}735 \simeq 27{,}74$. Tendríamos un error de 0,11, que es inaceptable si estamos usando calculadora. Con el símbolo «$\simeq$» estamos indicando que hemos redondeado.

✱ A veces resulta difícil escribir correctamente el desarrollo de un problema cuando estamos escribiendo un resultado pero realmente estamos usando otro en la calculadora:

- ■ Queda raro escribir $d^3=10 \Rightarrow d=\sqrt[3]{10}=2{,}15 \Rightarrow A = 6 \cdot 2{,}15^2 = 27{,}85$.

  El motivo es que si alguien hace exactamente esas operaciones, no obtendrá el resultado que le estamos indicando.

- ■ Podríamos escribir $d^3=10 \Rightarrow d=\sqrt[3]{10} \Rightarrow A = 6 \cdot \left(\sqrt[3]{10}\right)^2 = 27{,}85$.

  Este modo de escribir el problema es más exacto que el anterior, pero no vemos el valor concreto que tiene d. Además, muchas veces los resultados intermedios no son tan sencillos.

✱ Podrías pensar en volver a escribir el resultado de d completo en la segunda operación, pero no es una buena idea:

- ■ Las calculadoras utilizan internamente más precisión que la que te muestran en pantalla. No está bien desperdiciar esa precisión.
- ■ Es fácil cometer errores al teclear números con muchas cifras.

La ruleta

Para poner algunos ejemplos de problemas con potencias y raíces vamos a usar las apuestas en la ruleta. Hay varios modelos, pero describimos solo algunas características generales. Hay 37 números, del 0 al 36; el 0 es especial, está dedicado a la banca. Los apostantes pueden realizar varios tipos de apuesta, que reciben distintas recompensas en caso de acertar:

0		
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36

- ✱ Rojo, negro, par, impar, pasa (1-18) y falta (19-36): se devuelve la cantidad apostada multiplicada por 2.
- ✱ Columna (izquierda, central o derecha) y docena (1-12, 13-24 o 25-36): se devuelve la cantidad apostada multiplicada por 3.
- ✱ Esquina (cuatro números que formen un cuadrado): se devuelve la cantidad apostada multiplicada por 9.
- ✱ Doble calle (seis números en dos filas seguidas): se devuelve la cantidad apostada multiplicada por 6.
- ✱ Calle (tres números en la misma fila): se devuelve la cantidad apostada multiplicada por 12.
- ✱ Caballo (dos números adyacentes, juntos): se devuelve la cantidad apostada multiplicada por 18.
- ✱ Pleno (un solo número): se devuelve la cantidad apostada multiplicada por 36.

Enunciados

① Una persona apuesta tres euros a esquina, acierta seis veces seguidas en las que va apostando todo lo que gana. ¿Cuánto gana al final?

② Una persona apuesta dos euros a una determinada apuesta, gana cinco veces seguidas en las que va apostando todo lo que gana y se lleva al final 497 664 euros. ¿Por cuánto ha multiplicado su apuesta cada vez?

Resoluciones

① Cada vez que acierta hay que multiplicar su dinero por 9; como gana seis veces, hay que multiplicar por 9 seis veces, lo que se expresa con una potencia.

Cantidad final $= 3 \cdot 9^6 = 1\,594\,323$. Calculadora: $\boxed{3}\,\boxed{\times}\,\boxed{9}\,\boxed{y^x}\,\boxed{6}\,\boxed{=}$

Solución: 1 594 323 euros

② Como pasa de 2 euros a 248 832, ha multiplicado su dinero por

$497\,664 : 2 = 248\,832$. Calculadora: $\boxed{4}\,\boxed{9}\,\boxed{7}\,\boxed{6}\,\boxed{6}\,\boxed{4}\,\boxed{\div}\,\boxed{2}\,\boxed{=}$

Cada vez que acierta hay que multiplicar su dinero por cierto número; como gana cinco veces, hay que multiplicar por ese número cinco veces; hay que averiguar qué número elevado a 5 da como resultado 248 832, lo que se expresa con una raíz.

Número $= \sqrt[5]{248832} = 12$. Calculadora: $\boxed{5}\,\boxed{\sqrt[x]{\ }}\,\boxed{\text{Ans}}\,\boxed{=}$

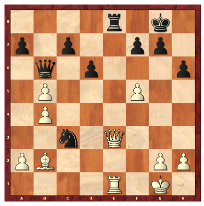
Solución: ha multiplicado por 12 su apuesta cada vez.

Enunciados

① Calcula el perímetro de un cuadrado sabiendo que su área es 352 metros cuadrados. Da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

② Con la ayuda de tu calculadora, averigua el valor exacto de 2^{34} sabiendo que tiene once cifras significativas.

③ El ajedrez es un juego en el que utiliza un tablero con 64 escaques (el nombre correcto de las casillas). La leyenda más conocida acerca del ajedrez cuenta que un rey decidió regalar al inventor del juego lo que este deseara y el inventor pidió un grano de trigo en el primer escaque e ir doblando la cantidad escaque a escaque. Calcula:



a) Cuántos granos de trigo tendría que haber en el último escaque. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

b) Si un kilogramo de trigo tiene unos 20 000 granos, ¿cuántas toneladas de trigo habría que poner en el último escaque? Da el resultado con dos cifras significativas.

④ En física nuclear se define el **período de semidesintegración** como el tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los núcleos de una muestra inicial de un radioisótopo. Si tuviéramos 16 millones de átomos de un radioisótopo con un período de semidesintegración de un año, ¿cuántos átomos quedarían cuando pasasen seis años?

⑤ Sabemos que las bacterias se reproducen por bipartición: cada cierto tiempo, una bacteria se divide en dos bacterias. Si un determinado tipo de bacteria se reproduce cada media hora y comenzamos con un cultivo de 1000 bacterias que acaban de «nacer», ¿cuántas bacterias habrá al cabo de exactamente un día, justo después de la última bipartición? Da el resultado con tres cifras significativas.

⑥ Una persona apuesta a un determinado juego de azar en el que, caso de ganar, recibe la cantidad apostada multiplicada por un número. Comienza apostando cinco euros, gana siete veces seguidas volviendo a apostar todo lo que va ganando y acaba con 1 399 680 euros. Calcula por cuánto estaban multiplicando la cantidad apostada.

⑦ Este problema pretende que reflexiones sobre la definición de raíz.

a) Usando la calculadora, averigua el valor exacto de $\left(\sqrt{5}\right)^2$

b) Usando la calculadora, averigua el valor exacto de $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3$

c) Usando la calculadora, averigua el valor exacto de $\left(\sqrt[4]{11}\right)^4$

d) Pensando, calcula el valor exacto de $\left(\sqrt[7]{3{,}67\cdot 10^{451}}\right)^7$

Problemas aritméticos

Desde tu etapa de educación primaria y los dos primeros niveles de este curso has estado resolviendo muchos problemas usando operaciones básicas con números. Pero hay que reconocer que muchos de esos problemas están preparados para que sus resultados sean fáciles de calcular y exactos; es decir, son poco naturales. Afortunadamente, a partir de este nivel 3 ya puedes ayudarte de la calculadora y redonderar resultados inexactos; así, tu campo de resolución de problemas aumenta espectacularmente.

Para resolver problemas con técnicas aritméticas puedes usar:

- ✱ Tu conocimiento de las operaciones aritméticas para plantear la resolución.
- ✱ La notación científica, si es necesaria para manejar algunos números.
- ✱ La calculadora científica escolar para ayudarte en las operaciones.
- ✱ El redondeo o la aproximación para dar las soluciones de modo apropiado.

Enunciados

① Con siete jarras de 2,75 litros, ¿cuántas tazas de 45 centilitros se pueden llenar?

② La masa de la Tierra es $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg y la de la Luna $7{,}349 \cdot 10^{22}$ kg. ¿Cuántas lunas equivalen a una tierra? Da el resultado redondeando a la unidad.

③ Si corres a un ritmo de 3 min 50 s cada kilómetro, ¿cuánto tiempo tardarías en correr medio maratón? La distancia del maratón es 42,195 kilómetros.

Resoluciones

① Hacemos la operación en litros: $7 \cdot 2{,}75 : 0{,}45 = 42{,}77777778$

Calculadora: `7` `×` `2` `.` `7` `5` `÷` `.` `4` `5` `=`

Observamos que en este caso el redondeo del resultado obtenido nos daría 43, pero es imposible llenar 43 tazas, porque falta líquido. En este problema hay que usar la aproximación por defecto, 42.

Solución: 42

② Hay que dividir la masa de la Tierra entre la de la Luna:

$5{,}9736 \cdot 10^{24} : (7{,}349 \cdot 10^{22}) = 81{,}28452851$

Calculadora: `5` `.` `9` `7` `3` `6` `EXP` `2` `4` `÷` `7` `.` `3` `4` `9` `EXP` `2` `2` `=`

En este problema nos piden explícitamente que redondemos.

Solución: 81

③ Escribimos la operación en forma compleja:

$(3\,\text{min}\ 50\,\text{s}) \cdot 42{,}195 : 2 = 1\,\text{h}\ 20\,\text{min}\ 52{,}42\,\text{s}$

Calculadora: `0` `°’”` `3` `°’”` `5` `0` `°’”` `×` `4` `2` `.` `1` `9` `5` `÷` `2` `=`

Sabemos que el modo tradicional de dar los tiempos en las carreras de medio maratón es redondeando al segundo; lo hacemos así porque el enunciado no pide explícitamente ningún formato

Solución: 1 h 20 min 52 s

Enunciados

① Quieres hacer un recorrido de 415 kilómetros andando 18,5 kilómetros al día. ¿Cuántos días tendrás de dedicar?

② La masa del Sol es $1{,}98847 \cdot 10^{30}$ kg y la masa de Júpiter es $1{,}89813 \cdot 10^{27}$ kg. Calcula cuántos jupíteres equivalen a un sol. Da el resultado redondeando a la unidad.

③ Si terminas un maratón en 3 h 25 min, ¿cuánto tiempo, de media, has tardado en correr cada kilómetro? La distancia del maratón es 42,195 kilómetros.

④ La distancia media de la Tierra a la Luna es 384 400 kilómetros y la velocidad de la luz en el vacío es 300 000 km/s. Calcula cuánto tiempo tarda la luz en llegar de la Luna a la Tierra. Da el resultado en segundos con cuatro cifras significativas.

⑤ La bacteria *Escherichia Coli* mide unos 3000 nm de longitud y el virus bacteriófagoMS2 tiene un diámetro de unos 24 nm. ¿Cuántos viriones hay que poner en fila para cubrir la longitud de una bacteria? Un virión es cada individuo de un virus.

⑥ En un bar tienen una oferta en la que venden cubos con cinco botellas de una bebida que compran en cajas de 36 unidades. Si compran ocho cajas, ¿cuántos cubos podrán servir?

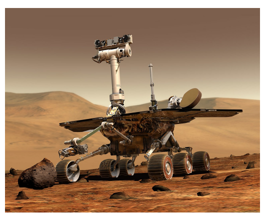
⑦ La Estación Espacial Internacional tarda 92,68 minutos en completar una órbita alrededor de la Tierra. Calcula cuántas órbitas completas realiza en un día.

⑧ El depósito de un coche tiene una capacidad de 52 litros. Cuando el depósito está a un cuarto de su capacidad, la persona que lo conduce decide llenarlo. El precio del combustible en ese momento es 2,033 euros cada litro. ¿Cuánto tendrá que pagar?

⑨ Para almacenar archivos en un disco duro de ordenador, un sistema operativo distribuye cada archivo en bloques de 4096 octetos (unidades de información), sin importar si algún bloque no queda completo. Calcula cuántos bloques se utilizarán para almacenar 347 archivos de 85 000 octetos cada uno.

⑩ Para conseguir un título tienes que acreditar 100 horas de prácticas. Durante siete días acreditas, de media, 5 h 35 min 45 s al día. Para terminar las prácticas en ocho días más, ¿cuánto tiempo deberías acreditar, de media, cada día? Da el resultado en horas, minutos y segundos redondeando al segundo.

⑪ Para medir el tiempo que pasan las expediciones a Marte se empezó a usar en 1976 la medida de tiempo llamada *sol* (es una palabra en inglés, no en español), que se define igual que nuestro día en la Tierra, pero en Marte. Un *sol* dura 24 h 39 min 35 s. Calcula cuántos *sols* pasan cuando en la Tierra pasan 30 días. Da el resultado con cuatro cifras significativas. Curiosidad: el *rover* Opportunity estuvo activo 5110 *sols*.



Problemas con fracciones

En los niveles 1 y 2 ya has resuelto problemas en los que aparecen fracciones usando varias técnicas diferentes. En el nivel 3 veremos una técnica nueva y actualizaremos las técnicas conocidas.

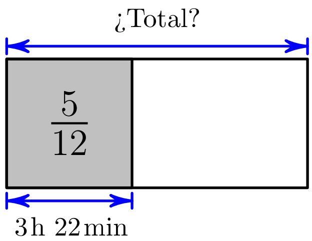
Enunciados

① Si tardo 3 h 22 min en hacer los $5/12$ de un trabajo, ¿cuánto tardaré en hacerlo todo?

② Si tengo que pelar un saco de patatas yo solo, sé que voy a tardar cuarenta minutos. Si lo haces tú, que eres más hábil, tardarías veinticuatro minutos. ¿Cuánto tiempo tardaríamos en hacerlo los dos juntos?

Resoluciones

① Este problema encaja en el esquema que ya conocemos «averiguar el total conocidas una parte y su fracción». Sabemos que «Total = Parte : Fracción». Por tanto:



$$\text{Total} = 3\,\text{h}\ 22\,\text{min} : \frac{5}{12} = 8\,\text{h}\ 4\,\text{min}\ 48\,\text{s}$$

Calculadora: `3` `°’”` `2` `2` `°’”` `÷` `(` `5` `÷` `1` `2` `)` `=`

Solución: 8 h 5 min

Comentario: el enunciado no especifica qué precisión usar para dar la solución, así que hemos usado la misma que el dato, horas y minutos. Hemos redondeado eliminando los 48 segundos; como son más de 30 (0,5 min), hemos añadido un minuto a los minutos.

② Resolvemos este problema usando una técnica nueva: el trabajo total que hay que realizar es la unidad (1) y vemos qué fracción de ese trabajo total realiza cada persona en cada unidad de tiempo, que en este problema es el minuto.

Yo tardo 40 min en terminar el trabajo, luego en 1 min hago $\frac{1}{40}$ del total.

Tú tardas 24 min en terminar el trabajo, luego en 1 min haces $\frac{1}{24}$ del total.

Si trabajamos juntos, en 1 min haremos $\frac{1}{40}+\frac{1}{24}=\frac{1}{15}$ del total.

Calculadora con fracciones: `1` `a b/c` `4` `0` `+` `1` `a b/c` `2` `4` `=`

Como el trabajo total tiene 15 quinceavos y tardamos un minuto en hacer cada quinceavo, tardaremos 15 min en hacer el trabajo total.

Solución: 15 min

Comentario: la fracción resultante de la suma tiene numerador «1», lo que facilita mucho decir la solución final. Si no fuera «1», aplicaríamos la técnica del problema (1) para calcular el tiempo total.

Comentario: este problema no es realista, porque hay que preparar los datos para que el resultado sea así de sencillo.

Distintas resoluciones

Sabemos que un mismo problema puede ser resuelto de varias formas, algunas muy distintas entre sí. Vamos a resolver, usando la técnica de resolución de problemas con fracciones que hemos visto en el nivel 3, un problema que habitualmente se afronta de otras formas.

Enunciado

Un coche tarda 7 h 31 min 22 s en cubrir cierto recorrido, mientras que una moto tarda 6 h 45 min 51 s en cubrirlo. Los dos vehículos salen a la vez, cada uno desde un extremo del recorrido. Calcula cuánto tiempo transcurre hasta que se encuentran. Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

Comentario

Si nos dijeran que el coche tarda 7 h en hacer el recorrido, estaría muy claro que en 1 h hace $1/7$ del recorrido. Por el mismo razonamiento, si tarda 7 h 31 min 22 s, en 1 h hace 1/(7 h 31 min 22 s) del recorrido. Al fin y al cabo, 7 h 31 min 22 s está escrito en forma compleja, pero en incompleja vemos que es 7,52... y 1/7,52... es un número decimal escrito en forma de fracción.

Resolución

El coche tarda 7 h 31 min 22 s en completar el recorrido, luego

el coche recorre en 1 h $\dfrac{1}{7\,\text{h}\,31\,\text{min}\,22\,\text{s}}$ del recorrido.

La moto tarda 6 h 45 min 51 s en completar el recorrido, luego

la moto recorre en 1 h $\dfrac{1}{6\,\text{h}\,45\,\text{min}\,51\,\text{s}}$ del recorrido.

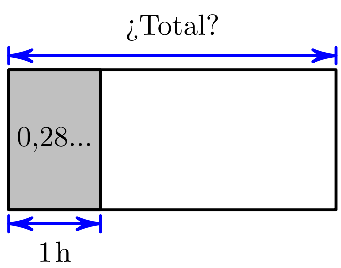
El coche y la moto, conjuntamente, recorren en 1 h $\dfrac{1}{7\,\text{h}\,31\,\text{min}\,22\,\text{s}} + \dfrac{1}{6\,\text{h}\,45\,\text{min}\,51\,\text{s}}$ del recorrido.

Con la ayuda de la calculadora, expresamos esa fracción como un número decimal:

$$\frac{1}{7\,\text{h}\,31\,\text{min}\,22\,\text{s}} + \frac{1}{6\,\text{h}\,45\,\text{min}\,51\,\text{s}} = 0{,}280767492$$

Calculadora: `7` `°'"` `3` `1` `°'"` `2` `2` `°'"` `x⁻¹` `+` `6` `°'"` `4` `5` `°'"` `5` `1` `°'"` `x⁻¹` `=`

Ya sabemos qué fracción del recorrido cubren conjuntamente el coche y la moto cada hora que pasa. En el momento del encuentro, entre los dos habrán cubierto el recorrido completo, y queremos saber cuánto tiempo han tardado en hacerlo. Este problema encaja en el esquema «averiguar el total conocidas una parte y su fracción», cuya solución es «Total = Parte : Fracción»; la única diferencia es que estamos expresando la fracción como un número decimal. Por tanto:



Total = 1 h : 0,280767492 = 3 h 33 min 42 s

Calculadora: `Ans` `x⁻¹` `=` `°'"`

Solución: 3 h 33 min 42 s

Enunciados

① A una de las personas que participan en una carrera de 5000 metros le toman un tiempo intermedio al paso de los 3000 metros de 10 min 31 s. Si siguiera corriendo al mismo ritmo, ¿cuál sería su marca final? Da el resultado en minutos y segundos redondeando al segundo.

② Comienzo a hacer una tarea y quiero saber cuánto tiempo voy a tardar en completarla. Se me olvida poner el cronómetro, pero cuando llevo $3/11$ de la tarea lo pongo en marcha. Al completar los $5/11$ lo compruebo y veo que ha pasado 1 h 22 min 30 s. Calcula cuánto tiempo tardaré en hacer la tarea completa. Da el resultado en horas y minutos redondeando al minuto.

③ Cuando un astronauta lleva 4 h 57 min 42 s de actividad extravehicular, su traje le indica que ya ha consumido $13/20$ del oxígeno disponible. Calcula el tiempo que le puede durar el oxígeno si lo sigue consumiendo al mismo ritmo. Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

④ Yo tardo tres horas en descargar un camión y tú tardarías seis horas. Si lo descargáramos juntos, ¿cuánto tiempo tardaríamos?

⑤ Hay dos barcos que unen dos puertos muy distantes. Uno tarda 36 días en hacer el trayecto y el otro tarda 12 días. Si dos dos salen a la vez de puertos distintos, ¿cuánto tiempo pasa hasta que se encuentran en su camino?

⑥ Si tengo que pelar un saco de patatas yo solo, sé que voy a tardar una hora. Si lo haces tú, que eres más hábil, tardarías doce minutos. ¿Cuánto tiempo tardaríamos en hacerlo los dos juntos?

⑦ Un grifo tarda tres minutos en llenar un barril y por un agujero se puede vaciar el barril en doce minutos. Si están abiertos a la vez el grifo y el agujero, ¿cuánto tiempo hace falta para llenar un barril vacío?

⑧ Una bañera tiene dos grifos. Uno de ellos llena la bañera en 35 minutos y el otro tarda 14 minutos. Si se abren los dos grifos a la vez, ¿cuánto tarda en llenarse la bañera?

⑨ Un grifo tarda dos horas en llenar una piscina y por el desagüe se puede vaciar la piscina en cinco horas. Si están abiertos a la vez el grifo y el desagüe, ¿cuánto tiempo hace falta para llenar la piscina vacía? Da el resultado en horas y minutos.

⑩ Una persona que está aprendiendo un oficio tarda diez horas en completar una tarea; si esa misma tarea la hacen juntos el aprendiz y la persona maestra, tardan dos horas. Calcula cuánto tiempo tarda en hacer la persona maestra la tarea completa. Da el resultado en horas y minutos.

Enunciados

① Un depósito de agua tiene cuatro vías de entrada y dos vías de salida. Con el depósito vacío, cada vía de entrada tardaría tres, cinco, seis o diez horas respectivamente en llenar el depósito. Con el depósito lleno, cada vía de salida tardaría cuatro o veinte horas respectivamente en vaciar el depósito. Si el depósito estuviera vacío y abriéramos las seis vías, ¿cuánto tiempo se tardaría en llenar el depósito?

② Un grifo puede llenar un depósito de agua en un día, otro en dos días, un tercero en tres días y un cuarto en cuatro días. ¿Cuánto tiempo tardarían en llenar el depósito los cuatro grifos a la vez? Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

③ Tres personas son capaces de realizar el mismo trabajo, pero una tarda 5 h 12 min, otra tarda 4 h 49 min y la tercera tarda 4 h 17 min. Calcula cuánto tiempo tardarían en hacer el trabajo si lo hicieran las tres juntas. Da el resultado en horas y minutos, redondeando al minuto.

④ Me gustan mucho las patatas fritas y normalmente me como una ración extragrande en 6 min 40 s, pero tú debes ser aún más rápido, porque cuando comimos juntos una ración extragrande solo tardamos 2 min 55 s. Calcula cuánto tiempo tardarías en comértela tú solo. Da el resultado en minutos y segundos, redondeando al segundo.

⑤ Una flota de camiones se encarga de llevar el mineral que se extrae de una explotación minera hasta la planta de tratamiento. Un camión que ya ha descargado se dirige de vuelta a la extracción; cuando lleva 2 h 15 min de viaje ha recorrido $5/9$ de la distancia total y se encuentra en sentido contrario con un camión lleno de mineral que ha salido de la explotación al mismo tiempo que él comenzaba el retorno. Calcula cuánto tiempo tarda en hacer el viaje completo el camión lleno. Da el resultado en horas y minutos, redondeando al minuto.

⑥ Yo tardo 4 h 42 min en descargar un camión y tú tardas 5 h 13 min. Empiezo yo solo a descargar y cuando llevo $2/5$ del camión descargado te pones a ayudarme. A partir de ese momento, ¿cuánto tiempo vamos a tardar en terminar? Da el resultado en horas y minutos, redondeando al minuto.

⑦ En 1998 el atleta marroquí هشام الكروج (Hicham El Guerrouj) batió el record del mundo de 1500 metros con un tiempo de 3 min 26,00 s. La última vuelta a la pista, de 400 metros, la completó en 53,27 s. Si hubiera corrido toda la prueba a la misma velocidad que la última vuelta, ¿qué tiempo hubiera conseguido?

⑧ Queremos saber cuánto tiempo tardarían los dos grifos de una piscina en llenarla; pero, con la piscina vacía, ya hemos abierto solo uno de los grifos, a las 11:22:40 de hoy. Cuando son las 13:18:30, la piscina está exactamente por la mitad y cerramos el grifo que estaba abierto. Abrimos el segundo grifo a las 14:12:50 y a las 16:04:15 la piscina está llena. Calcula cuánto tiempo hubieran tardado los dos grifos juntos en llenar la piscina. Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

Proporcionalidad directa, inversa y compuesta

En el nivel 2 ya viste cómo se pueden resolver algunos problemas en los que intervienen magnitudes directa o inversamente proporcionales. Ahora trabajaremos con problemas en los que, además, hay que interpretar el resultado obtenido al hacer las operaciones, porque, según el enunciado, podrán ocurrir tres posibilidades:

- La solución consiste en una aproximación por exceso del resultado.
- La solución consiste en una aproximación por defecto del resultado.
- La solución consiste en redondear el resultado obtenido con la precisión que sea necesaria.

Una parte importante de la resolución del problema será que tú decidas cuál es la opción adecuada.

Enunciados

① Hemos tardado 17 días en preparar una parcela de 4825 metros cuadrados para su nuevo uso. ¿Cuántos días esperamos tardar en preparar una parcela de 6952 metros cuadrados?

② En la cocina de un restaurante disponen de una cantidad limitada cada día de un condimento. Si usan 35 gramos en cada plato, pueden preparar 45 platos. Si usaran 31 gramos en cada plato, ¿cuántos podrían preparar?

Resoluciones

① El tiempo que se tarda en preparar una parcela y el área de la parcela son magnitudes directamente proporcionales. Por tanto, si llamamos «x» al tiempo pedido:

$$\frac{4825}{17}=\frac{6952}{x} \Rightarrow x=\frac{17\cdot 6952}{4825}=24{,}49409326$$

Calculadora: 1 7 × 6 9 5 2 ÷ 4 8 2 5 =

La solución es la aproximación por exceso a las unidades, puesto que consideramos que los días hay dedicarlos completos aunque el último no se trabaje hasta el final (hay que desplazarse de todas formas).

Solución: 25 días

② La cantidad de condimento que se usa en cada plato y el número de platos que se pueden preparar son magnitudes inversamente proporcionales. Por tanto, si llamamos «x» al número pedido:

$$35\cdot 45 = 31\cdot x \Rightarrow x=\frac{35\cdot 45}{31}=50{,}80645161$$

Calculadora: 3 5 × 4 5 ÷ 3 1 =

La solución es la aproximación por defecto a las unidades, puesto que no podemos preparar un plato con menos de 31 gramos (al menos, no debemos).

Solución: 50 platos.

Enunciados

① Para alimentar 45 cerdos durante 37 días nos hemos gastado 6720 euros. ¿Cuánto nos va a costar alimentar a 52 cerdos durante 31 días?

② Una lavadora industrial lava 845 kilogramos de ropa trabajando cinco días durante 7 h 35 min al día. ¿Cuánto tiempo diario debería trabajar para poder lavar 2480 kilogramos de ropa en trece días?

Resoluciones

① Preparamos la tabla con las magnitudes, unidades, valores y relaciones:

Magnitud	Unidad	Valores	Valores	Relación con la incógnita
Núm. de cerdos	sin unidad	45	52	Directamente proporcional
Tiempo	día	37	31	Directamente proporcional
Dinero	euro	6720	x	

$$x = 6720 \cdot \frac{52}{45} \cdot \frac{31}{37} = 6506{,}09009$$

Calculadora: 6 7 2 0 × 5 2 × 3 1 ÷ 4 5 ÷ 3 7 =

La solución es el redondeo a dos decimales, puesto que las cantidades de dinero en euros se manejan así.

Solución: 6506,09 euros

② Preparamos la tabla con las magnitudes, unidades, valores y relaciones:

Magnitud	Unidad	Valores	Valores	Relación con la incógnita
Masa	kilogramo	845	2480	Directamente proporcional
Tiempo (jornadas)	día	5	13	Inversamente proporcional
Tiempo (diario)	h min	7 35	x	

$$x = 7\,\text{h}\,35\,\text{min} \cdot \frac{2480}{845} \cdot \frac{5}{13} = 8\text{ h }33\text{ min }36{,}57\text{ s}$$

Calculadora: 7 °’” 3 5 °’” × 2 4 8 0 × 5 ÷ 8 4 5 ÷ 1 3 =

La solución es la aproximación a horas y minutos, redondeando al minuto, porque los datos iniciales tienen esa precisión

Solución: 8 h 34 min

Enunciados

① He pagado 2507,23 euros por 178,23 kilogramos de material. ¿Cuánto deberé pagar por 233,15 kilogramos?

② Para salvar un desnivel de 132,5 metros ha sido necesario construir una escalera con 6310 peldaños. ¿Cuántos peldaños debería tener una escalera que salve un desnivel de 89,3 metros? Da el resultado redondeando a la decena.

③ Si distribuimos un barril de bebida en vasos de 250 centímetros cúbicos podemos ofrecer 150 vasos. ¿Si los vasos fueran de 333 centímetros cúbicos, cuántos podríamos ofrecer?

④ Si consigo deplazarme a una media de 23,3 km/h con mi bicicleta, hago el recorrido de mi casa al trabajo en 37 min 40 s. ¿Cuánto tiempo tardaría si consiguiera una media de 25,8 km/h? Da el resultado en minutos y segundos, redondeando al segundo.

⑤ Una cuadrilla de 27 personas ha tardado 12 días y 6 horas en terminar un trabajo. Si lo hubieran hecho 31 personas, ¿cuánto tiempo hubieran tardado? Da el resultado en días y horas, redondeando a la hora.

⑥ Un vehículo gasta 44,52 litros de combustible en hacer un recorrido de 758 kilómetros. Con 32 litros de combustible, ¿qué distancia podría recorrer?

⑦ Con las reservas de comida de que disponemos podríamos aguantar 52 personas durante 41 días. Si hubiera 15 personas menos, ¿cuánto tiempo más podríamos aguantar?

⑧ Si una persona en bicicleta tarda 1 h 23 min 52 s en dar cuatro vueltas a un recorrido, ¿cuánto tiempo tardaría en dar siete vueltas? Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

⑨ Una atracción de feria dura 22 min 30 s y da quince vueltas. Cuando faltan 8 min 35 s para acabar, ¿cuántas vueltas completas ha realizado?

⑩ Si cortamos un tubo largo en trozos de 22 centímetros obtenemos exactamente 55. Si necesitáramos cortar el tubo en trozos de 27 centímetros, ¿cuántos obtendríamos?

⑪ Para trasladar los residuos de una central nuclear se han utilizado 34 camiones que admiten 1230 kilogramos de carga cada uno. Si hubiéramos utilizado camiones que admiten 1780 kilogramos, ¿cuántos hubiéramos necesitado?

⑫ Un vehículo ha tardado 3 h 18 min 29 s en hacer un recorrido con una velocidad media de 112,78 km/h. Otro vehículo ha tardado 3 h 7 min 41 s en el mismo recorrido; ¿cuál ha sido su velocidad media?

⑬ De un saco de comida hemos obtenido 1325 raciones de 145 gramos. Si las raciones fueran de 210 gramos, ¿cuántas raciones hubiéramos obtenido?

⑭ Si por 13,5 kg de carne pago 41,55 euros, ¿cuánto pagaré por 24,2 kg?

Enunciados

① Para alimentar a 1768 gallinas durante 38 días necesitamos 24 900 kilogramos de pienso. ¿Cuántas gallinas se podrían alimentar durante 79 días con 38 700 kilogramos de pienso?

② Para alimentar a 457 cerdos durante 41 días necesitamos 22 500 kilogramos de pienso. ¿Cuánto pienso será necesario para alimentar 1200 cerdos durante 88 días?

③ Para cercar una finca de 780 m de perímetro con una cerca de 2,4 metros de altura nos hemos gastado 15 575 euros. Si disponemos de 23 000 euros para cercar una finca de 978 metros de perímetro, ¿de qué altura podremos poner la cerca?

④ Para trasladar 567 toneladas de material hemos usado 18 camiones durante 7 horas. ¿Cuántos camiones necesitaremos para trasladar 1358 toneladas de material en 10 horas?

⑤ Para trasladar 567 toneladas de material hemos usado 18 camiones durante 7 horas. ¿Cuánto tiempo necesitaremos para trasladar 1358 toneladas de material si disponemos de 13 camiones? Da el resultado en horas.

⑥ Si trabajan 47 personas durante 21 días, consiguen arar un campo de 128 metros cuadrados. ¿Qué superficie podrán arar 102 personas en 32 días?

⑦ Si trabajan 47 personas durante 21 días, consiguen arar un campo de 128 metros cuadrados. ¿Cuántos días tendrán que ir a trabajar 33 personas para arar un campo de 96 metros cuadrados?

⑧ Para pintar una casa que tiene 3680 metros cuadrados de superficies necesito trabajar 58 días durante 8 horas diarias. ¿Podría pintar una casa de 8230 metros cuadrados en 41 días? Justifica tu respuesta.

⑨ En una excavación arqueológica de 7340 metros cuadrados trabajan 38 personas que tardan 20 días en estudiarlo todo trabajando 7 horas diarias. ¿Cuántos días harían falta para que 45 personas estudiaran una excavación de 9807 metros cuadrados si trabajaran 6 horas cada día?

⑩ Un equipo de 33 personas haciendo un trabajo aburridísimo durante 31 días a razón de 4 horas diarias consigue ganar 30 690 euros. Con el mismo tipo de trabajo, ¿cuántos días necesitarían trabajar 42 personas para ganar 88 500 euros si están dispuestas a trabajar 7 horas diarias?

⑪ Para corregir la trayectoria de una sonda espacial con destino a Júpiter el equipo de ingeniería encargado decide que durante trece días seguidos habrá que aplicar quince impulsos cada día durante 4 min 16,8 s. Durante el viaje surge un problema que obliga a que los impulsos sean ocho diarios durante 23 días seguidos. Calcula el tiempo que deben durar los impulsos.

Enunciados

① El método de **captura y recaptura** es un método utilizado en biología para averiguar cuántos individuos hay en una determinada área. Para que el método sea realmente efectivo deben cumplirse una serie de requisitos, en los que no vamos a entrar aquí, ya que nos interesa la parte matemática del método.

Queremos averiguar, de modo aproximado, cuántos peces de una determinada especie viven en un determinado lago. Para ello, realizamos una primera captura de esos animales, les hacemos algún tipo de señal que sea inocua para ellos, los soltamos al lago y esperamos el tiempo que nos digan los especialistas. Realizamos una segunda captura y nos encontramos con que algunos de los peces tienen la señal de haber sido capturados en la primera ocasión y otros no la tienen.

Hemos tomado estos datos:

Número de peces capturados en la primera ocasión: 3875.

Número de peces capturados en la segunda ocasión: 3598.

Número de peces capturados en la segunda ocasión que tienen la señal de haber sido capturados también en la primera: 253.

Calcula cuántos peces de esa especie puede haber en el lago. Da el resultado redondeando a la unidad de millar.

② El *rover* Perseverance de la NASA alcanzó la superficie de Marte en 2021 para realizar una serie de experimentos. En uno de esos experimentos debía averiguar la composición química de la piedra que se ve aquí:

Usando un rayo láser, hizo ocho pequeños agujeros en la roca (búscalos, están en fila). Queremos averiguar la distancia entre los dos agujeros más separados. Sabemos que la roca mide aproximadamente 15 cm, en la fotografía su longitud es de unos 1040 píxeles y la distancia pedida es, en la fotografía, de unos 125 píxeles. Da el resultado en milímetros, redondeando a la unidad.

Repartos proporcionales

Lo más habitual cuando se hacen repartos proporcionales es que los resultados no sean exactos, por lo que hay que redondearlos.

Enunciado

Tres personas que han participado en un negocio deben repartir un beneficio de 236 892 euros. La persona que más invirtió puso 27 000 euros; la que menos, puso 23 500 euros; y la tercera puso 24 800. Calcula la manera más justa de repartir el beneficio.

Resolución

Lo más justo es repartir 236 892 en partes directamente proporcionales a 27 000, 24 800 y 23 500, redondeando con dos decimales porque la moneda es el euro.

Las tres cantidades son múltiplo de 100, así que podemos simplificarlas. Este paso no es tan importante cuando vamos a hacer las operaciones con calculadora, pero aún así ahorra algo de tiempo.

Por tanto, convertimos el problema en repartir 236 892 en partes directamente proporcionales a 270, 248 y 235, redondeando con dos decimales.

Sumamos los números para obtener el total:

$270 + 248 + 235 = 753$

Calculadora: `2` `7` `0` `+` `2` `4` `8` `+` `2` `3` `5` `=`

Dividimos la cantidad que hay que repartir entre el total:

$236\,892 : 753 = 314{,}5976096$

Como es importante usar toda la precisión de la calculadora en este resultado obtenido de la división, guardamos el resultado en una memoria de la calculadora. Este procedimiento puede variar según la calculadora. Como las más modernas tienen varias memorias, vamos a usar una de ellas llamada «M»:

Calculadora: `2` `3` `6` `8` `9` `2` `÷` `Ans` `STO` `M`

Multiplicamos cada número por el cociente obtenido:

$270 \cdot 314{,}5976096 = 84941{,}35458$

$248 \cdot 314{,}5976096 = 78020{,}20717$

$235 \cdot 314{,}5976096 = 73930{,}43825$

Calculadora: `2` `7` `0` `×` `RCL` `M` `=`
`2` `4` `8` `×` `RCL` `M` `=`
`2` `3` `5` `×` `RCL` `M` `=`

Observa que para hacer con la calculadora estas tres operaciones tan parecidas nos viene muy bien la posibilidad de reutilizar y editar las operaciones anteriores usando las teclas `◀` y `▶`.

Redondeamos los resultados obtenidos y nos quedamos con 84941,35, 78020,21 y 73930,44. Observa que efectivamente 84941,35+78020,21+73930,44 = 236 892.

Solución: la persona que más puso se lleva 84941,35 euros, la que menos puso se lleva 78020,21euros y la tercera se lleva 73930,44.

Cuadrar los resultados de un reparto proporcional

Cuando se redondean los resultados de un reparto proporcional puede ocurrir en alguna ocasión que la suma de los resultados no dé exactamente la cantidad que hay que repartir (se suele decir que no «cuadran»).

Hay varias opciones para resolver esta dificultad:

- ✱ Calcular las cantidades con más precisión de la deseada y cambiar algún redondeo por una aproximación. Esta es la solución más justa.
- ✱ Dar por bueno el resultado, aunque no cuadre. Es la solución más rápida y en alguna ocasión de la vida real puede ser aceptable.
- ✱ Calcular la última cantidad como la diferencia entre la cantidad que hay que repartir y la suma de las cantidades ya calculadas. Esta solución realmente consiste en hacer caso omiso de la dificultad.

Enunciado

Reparte 1475 en partes directamente proporcionales a 51, 33, 26 y 19. Da los resultados redondeados a la centésima.

Resolución

Sumamos los números para obtener el total:

51 + 33 + 26 + 19 = 129

Calculadora: 5 1 + 3 3 + 2 6 + 1 9 =

Dividimos la cantidad que hay que repartir entre el total:

1475 : 129 = 11,43410853

Como es importante usar toda la precisión de la calculadora en este resultado obtenido de la división, guardamos el resultado en una memoria de la calculadora. Este procedimiento puede variar según la calculadora. Como las más modernas tienen varias memorias, vamos a usar una de ellas llamada «M»:

Calculadora: 1 4 7 5 ÷ Ans STO M

Multiplicamos cada número por el cociente obtenido:

51 · 11,43410853 = 583,1395349

33 · 11,43410853 = 377,3255814

26 · 11,43410853 = 297,2868217

19 · 11,43410853 = 217,248062

Calculadora: 5 1 × RCL M = ▩ 3 3 × RCL M = ▩ 2 6 × RCL M = ▩ ...

(Con el signo «▩» indicamos una pausa para ver el resultado.)

Si redondeáramos los resultados, obtendríamos las cantidades 583,14; 377,33; 297,29 y 217,25, que suman 1475,01 (observa que los cuatro redondeos han sido aproximaciones por exceso).

Como sobra 0,01, cambiamos el redondeo 377,3255814 a 377,33 por la aproximación por defecto 377,32, ya que es el número que tiene menor la cifra de las milésimas y por tanto es con el que menos error se comete.

Solución: 583,14; 377,32; 297,29 y 217,25.

Enunciados

① Reparte 187 en partes directamente proporcionales a 9 y 7. Da los resultados redondeados a la centésima.

② Reparte 4581 en partes directamente proporcionales a 41, 33 y 19. Da los resultados redondeados a la centésima.

③ Reparte 2379 en partes directamente proporcionales a 23, 17 y 13. Da los resultados redondeados a la centésima.

④ Reparte 1270 en partes directamente proporcionales a 2, 5 y 10. Da los resultados redondeados a la centésima.

⑤ Reparte 3339 en partes directamente proporcionales a 7, 3 y 1. Da los resultados redondeados a la centésima.

⑥ Reparte 1201 en partes directamente proporcionales a 11, 10, 7 y 5. Da los resultados redondeados a la centésima.

⑦ Reparte 7932 en partes directamente proporcionales a 4, 7, 12 y 18. Da los resultados redondeados a la centésima.

⑧ Reparte 8033 en partes directamente proporcionales a 67, 43, 37 y 23. Da los resultados redondeados a la centésima.

⑨ Reparte 892 en partes directamente proporcionales a 2, 2, 3 y 4. Da los resultados redondeados a la centésima.

⑩ Reparte 1500 en partes directamente proporcionales a 8, 8, 7 y 5. Da los resultados redondeados a la centésima.

⑪ Reparte 400 en partes inversamente proporcionales a 3 y 8. Da los resultados redondeados a la centésima.

⑫ Reparte 350 en partes inversamente proporcionales a 7, 3 y 1. Da los resultados redondeados a la centésima.

⑬ Reparte 7820 en partes inversamente proporcionales a 4, 6 y 9. Da los resultados redondeados a la centésima.

⑭ Reparte 1000 en partes inversamente proporcionales a 5, 8, 15 y 20. Da los resultados redondeados a la centésima.

⑮ Reparte 3410 en partes inversamente proporcionales a 15, 5, 3 y 1. Da los resultados redondeados a la centésima.

Problemas de móviles

Un móvil es un objeto que se mueve, como un coche, una estrella o un tren. Hay dos problemas con móviles que se resuelven con una técnica sencilla que es aplicable a otras situaciones:

- **Problemas de encuentro**. Dos móviles parten de puntos distintos, se acercan entre sí y hay que calcular el tiempo que tardan en encontrarse.
- **Problemas de alcance**. Dos móviles parten de puntos distintos, uno en persecución de otro y hay que calcular el tiempo que tarda en procucirse el alcance.

Enunciados

① Dos coches están separados 352 kilómetros en una carretera. Salen a la vez, al encuentro uno del otro. La velocidad media de un coche es 92 km/h y la del otro es 87 km/h. Calcula cuánto tiempo tardan en encontrarse. Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

② Un coche se encuentra a 54 kilómetros de una ciudad y circula por una carretera a una velocidad media de 68 km/h. Sale en su búsqueda una moto que circula a 97 km/h. Calcula cuánto tiempo tarda la moto en alcanzar al coche. Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

Resoluciones

① Cada hora que pasa los dos coches se acercan una distancia que es la suma de sus velocidades, 92+87. Por lo tanto, el tiempo en horas que tardan en encontrarse es el cociente entre la distancia que los separa (352 km) y cuánto se acercan cada hora. Con la calculadora pasamos el resultado a horas, minutos y segundos:

$$\text{Tiempo} = \frac{352}{92+87} = 1\text{ h } 57\text{ min } 59\text{ s}$$

Calculadora: 3 5 2 ÷ (9 2 + 8 7) = °’”

Solución: 1 h 57 min 59 s

② Cada hora que pasa los dos coches se acercan una distancia que es la diferencia de sus velocidades, 97−68. Por lo tanto, el tiempo en horas que tardan en encontrarse es el cociente entre la distancia que los separa (54 km) y cuánto se acercan cada hora. Con la calculadora pasamos el resultado a horas, minutos y segundos:

$$\text{Tiempo} = \frac{54}{97-68} = 1\text{ h } 51\text{ min } 44\text{ s}$$

Calculadora: 5 4 ÷ (9 7 – 6 8) = °’”

Solución: 1 h 51 min 44 s

Problemas similares

La técnica usada en la resolución de estos problemas es aplicable a más situaciones, por lo que podrás resolver problemas similares. Intenta comprender la esencia del problema para poder aplicar el método, aunque el enunciado no sea del todo igual. Es parte de la esencia de la matemática y de la resolución de problemas.

Enunciados

① Dos coches están separados 193 kilómetros en una carretera. Salen a la vez, al encuentro uno del otro. La velocidad media de un coche es 77 km/h y la del otro es 71 km/h. Calcula cuánto tiempo tardan en encontrarse. Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

② Un coche se encuentra a 60 kilómetros de una ciudad y circula por una carretera a una velocidad media de 72 km/h. Sale en su búsqueda una moto que circula a 104 km/h. Calcula cuánto tiempo tarda la moto en alcanzar al coche. Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

③ Dos trenes están separados 697 kilómetros en una vía. Salen a la vez, al encuentro uno del otro. La velocidad media de un tren es 152 km/h y la del otro es 203 km/h. Calcula cuánto tiempo tardan en encontrarse. Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

④ Un tren se encuentra a 570 kilómetros de una estación y circula por su vía a una velocidad media de 140 km/h. Sale en su búsqueda otro tren que circula a 298 km/h. Calcula cuánto tiempo tarda el segundo tren en alcanzar al primero. Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

⑤ Dos aviones circulan por la misma ruta, uniendo dos ciudades que están a 3782 kilómetros una de otra. Salen a la vez, cada uno de una ciudad distinta. La velocidad media de un avión es 980 km/h y la del otro es 875 km/h. Calcula cuánto tiempo tardan en pasar uno al lado del otro. Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

⑥ Un avión de pasajeros se encuentra a 1245 kilómetros de un aeropuerto y vuela a una velocidad media de 875 km/h. Sale en su búsqueda un avión caza a una velocidad de 1782 km/h. Calcula cuánto tiempo tarda el caza en alcanzar al avión de pasajeros. Da el resultado en horas, minutos y segundos, redondeando al segundo.

⑦ Dos coches están separados 215 kilómetros en una carretera. Salen a la vez, al encuentro uno del otro. La velocidad media de un coche es 102 km/h y la del otro es 115 km/h. Calcula cuánto tiempo tardan en encontrarse. Da el resultado en minutos y segundos, redondeando al segundo.

⑧ Un ciclista se encuentra a 8,5 kilómetros de una ciudad y circula por una carretera a una velocidad media de 27 km/h. Sale en su búsqueda otra bicicleta que circula a 38 km/h. Calcula cuánto tiempo tarda la segunda bicicleta en alcanzar a la primera. Da el resultado en minutos y segundos, redondeando al segundo.

Enunciados

① Un depósito tiene 3540 litros de capacidad y dispone de dos grifos con caudales de 125 l/h y 155 l/h. ¿Cuánto tiempo tardan los dos grifos en llenar el depósito cuando está vacío? Da el resultado en horas, minutos y segundos redondeando al segundo.

② Un depósito de 887 litros está completamente lleno. Se abre un desagüe con un caudal de 2,3 l/s mientras cae una ligera lluvia de 0,6 l/s. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el depósito? Da el resultado en minutos y segundos, redondeando al segundo.

③ Un depósito de 1580 litros dispone de un grifo con un caudal de 3,2 litros cada minuto, un grifo con un caudal de 2,9 litros cada minuto y un desagüe que elimina 1,2 litros cada minuto. Si el depósito está vacío y se abren a la vez los dos grifos y el desagüe, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse? Da el resultado en horas y minutos, redondeando al minuto.

④ Un automóvil parte de la población A hacia la población B con una velocidad de 92 km/h. En el mismo momento un camión parte de la población B hacia la población A con una velocidad de 81 km/h. Sabiendo que la distancia entre A y B es de 612 km, calcula a qué distancia se encuentran el automóvil y el camión cuando ha pasado 1 h 22 min desde que salieron. Da el resultado en kilómetros redondeando a la unidad.

⑤ Queremos llenar un depósito de agua que tiene una capacidad de 1200 litros. Con el depósito vacío, abrimos un grifo que tiene un caudal de 17 l/min; cuando el depósito está por la mitad, abrimos un segundo grifo que tiene un caudal de 9 l/min. Calcula cuánto tiempo tardamos en llenar el depósito. Da el resultado en minutos y segundos redondeando al segundo.

⑥ Una persona roba el banco de un pequeño pueblo y sale huyendo con su moto a una velocidad de 97 km/h. Cuando lleva 15 min 45 s huyendo, sale en su búsqueda un coche de policía a una velocidad de 116 km/h. Calcula cuánto tiempo tardará el policía en atrapar a la persona delincuente. Da el resultado en horas, minutos y segundos redondeando al segundo.

⑦ El deporte del ciclismo en pista se disputa en pistas de 250 metros. En la modalidad de **persecución individual** los dos ciclistas que compiten en cada enfrentamiento se colocan en meta y contrameta. La distancia de la carrera es 4000 metros, pero en las rondas de medallas si un ciclista alcanza al otro antes de completar los 4000 metros, gana automáticamente la carrera.

En una final un ciclista termina con una velocidad media de 58,165 km/h y el otro de 56,316 km/h. Se pide:

a) ¿Cúanto tiempo tardaría el ciclista más rápido en alcanzar al más lento. Da el resultado en minutos y segundos, redondeando al segundo.

b) Calcular a qué distancia antes o después de completar los 4000 metros el ciclista más rápido se produciría el alcance. Da el resultado en metros redondeando a la unidad.

c) Decidir si el ciclista más rápido ganó la competición por alcanzar al ciclista más lento o por tardar menos tiempo en completar la distancia.

Operaciones con porcentajes

En el nivel 2 aprendiste los cálculos básicos con porcentajes. En este nivel 3 los vamos a utilizar también en casos en los que los resultados no son exactos y deben ser redondeados. Cuando se utiliza calculadora, la opción más cómoda para operar con porcentajes suele ser el tanto por uno.

Enunciados

Da los resultados redondeando a la centésima.

① Calcula el 17 % de 3792,33.

② ¿De qué cantidad es 87,3 el 74 %?

③ Aumenta 7623,53 un 31 %.

④ Disminuye 3809,7 un 19 %.

⑤ ¿Qué número aumentado un 29 % se convierte en 894?

⑥ ¿Qué número disminuido un 6 % se convierte en 337?

Da los resultados con dos cifras significativas.

⑦ ¿Qué porcentaje representa 573 respecto a 881?

⑧ ¿Qué porcentaje hay que aumentar 1765 para convertirlo en 2043?

⑨ ¿Qué porcentaje hay que disminuir 8607 para convertirlo en 7732?

Resoluciones

① Resultado = 17 % · 3792,33 = 0,17 · 3792,33 = 644,6961

Calculadora: 0 . 1 7 × 3 7 9 2 . 3 3 =. Solución: 644,70

② Resultado = 87,3 : 74 % = 87,3 : 0,74 = 117,972973

Calculadora: 8 7 . 3 ÷ 0 . 7 4 =. Solución: 117,97

③ Resultado = 7623,53 · 1,31 = 9986,8243. Solución: 9986,82

④ Resultado = 3809,7 · 0,81 = 3085,857. Solución: 3085,86

⑤ Resultado = 894 : 1,29 = 693,0232558. Solución: 693,02.

⑥ Resultado = 337 : 0,94 = 358,5106383. Solución: 358,51

⑦ Resultado = 573 : 881 = 0,6503397275 = 65,03397275 %. Solución: 65 %

⑧ Índice de variación = 2043 : 1765 = 1,157507082

1,157507082 – 1= 0,157507082 = 15,7507082 %. Solución: 16 %

⑨ Índice de variación = 7732 : 8607 = 0,898338561

1 – 0,898338561= 0,101661438 = 10,1661438 %. Solución: 10 %

Calculadora: 7 7 3 2 ÷ 8 6 0 7 = ▩ 1 – Ans =

Enunciados

Da los resultados redondeando a la centésima.

① Calcula el 32 % de 4983,37.

② Calcula el 8,3 % de 8312,91.

③ ¿De qué cantidad es 854 el 93 %?

④ ¿De qué cantidad es 129 el 9,2 %?

⑤ Aumenta 4598,19 un 29 %.

⑥ Aumenta 1873,12 un 4,9 %.

⑦ Disminuye 3873,5 un 21 %.

⑧ Disminuye 1928 un 3,2 %.

⑨ ¿Qué número aumentado un 17 % se convierte en 915?

⑩ ¿Qué número aumentado un 4 % se convierte en 1386,6?

⑪ ¿Qué número disminuido un 13 % se convierte en 892?

⑫ ¿Qué número disminuido un 8 % se convierte en 1015?

⑬ Di cuál es el resultado final de aumentar 2876 un 17 % y luego aumentar el resultado intermedio un 9 %.

⑭ Di cuál es el resultado final de disminuir 8902 un 3 % y luego disminuir el resultado intermedio un 11 %.

Enunciados

Da los resultados con dos cifras significativas.

⑮ ¿Qué porcentaje representa 679 respecto a 917?

⑯ ¿Qué porcentaje representa 809 respecto a 1015?

⑰ ¿Qué porcentaje representa 35 respecto a 287?

⑱ ¿Qué porcentaje representa 432 respecto a 5912?

⑲ ¿Qué porcentaje hay que aumentar 4579 para convertirlo en 5789?

⑳ ¿Qué porcentaje hay que aumentar 3798 para convertirlo en 4019?

㉑ ¿Qué porcentaje hay que aumentar 1289 para convertirlo en 1306?

㉒ ¿Qué porcentaje hay que disminuir 3349 para convertirlo en 2756?

㉓ ¿Qué porcentaje hay que disminuir 1273 para convertirlo en 890?

㉔ ¿Qué porcentaje hay que disminuir 3675 para convertirlo en 3482?

Enunciados

Una cantidad inicial se somete a un aumento porcentual (indicado con el signo «+») o una disminución porcentual (indicado con el signo «–») y se convierte en una cantidad final. Usando la calculadora, rellena los huecos de la siguiente tabla. Las cantidades inicial y final debes darlas redondeando a la centésima y las variaciones porcentuales con tres cifras significativas.

	Cantidad inicial	Variación porcentual	Cantidad final		Cantidad inicial	Variación porcentual	Cantidad final
①	8945,73	+ 17 %		②	7327,19	– 29 %	
③	3876,12	+ 7,3 %		④	2893,07	– 8,1 %	
⑤	2286,37	+ 0,97 %		⑥	7372,14	– 0,88 %	
⑦		+ 21 %	2894,13	⑧		– 33 %	9827,84
⑨		+ 8,2 %	3892,15	⑩		– 5,4 %	7532,19
⑪		+ 0,75 %	9973,12	⑫		– 0,91 %	8890,52
⑬	2983,15		3219,22	⑭	8932,81		7322,31
⑮	5679,29		8505,07	⑯	5672,99		5409,72
⑰	8891,67		9004,04	⑱	2364,81		2248,17
⑲	1289,13	+ 21 %		⑳	9979,16	– 72 %	
㉑	8726,92	+ 2,8 %		㉒	7703,37	– 3,9 %	
㉓	7821,55	+ 0,73 %		㉔	1893,17	– 0,45 %	
㉕		+ 17 %	4406,71	㉖		– 19 %	7650,07
㉗		+ 3,9 %	9723,16	㉘		– 9,1 %	8085,08
㉙		+ 0,39 %	5582,72	㉚		– 0,82 %	2976,17
㉛	4429,16		7318,15	㉜	4876,16		3592,15
㉝	1289,67		1892,13	㉞	8739,27		7983,21
㉟	2287,17		2389,32	㊱	4321,16		198,21
㊲	349,58	+ 119 %		㊳	8456,91	– 99,2 %	
㊴	289,52		521,19	㊵	892,19		8,18
㊶		+ 135 %	8723,32	㊷		– 87 %	2109,21
㊸	1513	+ 12 %		㊹	1513	– 12 %	

Enunciados

① En cierto país europeo, las personas que ganan entre 75 000 y 100 000 euros al año deben pagar impuestos según esta regla: se paga el 23 % de los primeros 75 000 euros y el 57 % de la cantidad que exceda de 75 000 euros. Calcula cuánto debe pagar un individuo que ha ganado 87 589,75 euros este año. Da el resultado redondeando a las centésimas.

② En las carreras profesionales por etapas de ciclismo existe un tiempo máximo admitido para llegar a meta; si se tarda más, la persona participante queda eliminada de la prueba. El tiempo máximo admitido se suele definir como el tiempo que tarda el ganador de la etapa más un determinado porcentaje.

Si el ganador de una etapa tarda 4 h 22 min 37 s y el porcentaje es del 7 %, ¿cuál es el tiempo máximo admitido antes de ser eliminado? Da el resultado en horas, minutos y segundos redondeando al segundo.

③ En los Juegos Olímpicos de Tokio 2020, la nadadora brasileña Ana Marcela Cunha ganó la medalla de oro en la prueba de 10 kilómetros de natación en aguas abiertas con un tiempo de 1 h 59 min 30,8 s. Si su velocidad media hubiera sido un 2 % mayor, ¿cuánto tiempo habría mejorado su marca? Da el resultado en minutos y segundos redondeando a la décima de segundo.

④ Una urna con 460 bolas solo tiene bolas blancas y negras. Las blancas son el 85 % del total. Extraemos algunas bolas blancas y ahora las bolas blancas son el 77 % del total. ¿Cuántas bolas hemos extraído?

⑤ Una persona corre el maratón (42,195 km) en 2 h 48 min 32 s. Tras dos años de entrenamiento, lo vuelve a correr y tarda 2 h 35 min 49 s. Calcula cuál ha sido el aumento porcentual de su velocidad media. Da el resultado con tres cifras significativas.

⑥ La persona responsable de ventas de una planta de un gran almacén decide aplicar una rebaja del 20% en un artículo. Pero la persona que dirije el gran almacén no está de acuerdo con la medida y aplica a ese artículo un aumento porcentual que contrarresta exactamente el anterior descuento (deja el precio final como estaba antes). Calcula cuál ha sido el aumento porcentual aplicado.

⑦ Una sandía tiene una masa de 10 kilogramos, de los cuales el 99 % es agua. Después de cierto tiempo al sol, se evaporó parte del agua, siendo ahora el porcentaje de agua del 98 %. ¿Cuál es la masa de la sandía ahora?

⑧ Un albañil necesita 10 000 ladrillos para cierto trabajo. Por su larga experiencia sabe que no más del 7 % de los que le traigan se le van a romper. Si los ladrillos vienen en cajas de 100, ¿cuál es el mínimo número de cajas que debe pedir para estar seguro de acabar el trabajo?

⑨ En un rectángulo aumentamos una dimensión y disminuimos la otra de forma que el área no varía. Sabiendo que una dimensión se aumentó un 25%, calcula el porcentaje de disminución de la otra dimensión.

El interés

En el nivel 2 viste en qué consiste el interés en una transacción comercial y calculaste cómo se calcula en el caso del interés simple. En este nivel 3 vemos en qué consiste el interés compuesto y cómo se calcula.

Interés compuesto

Comenzamos con el ejemplo de la **imposición a plazo fijo** para entender la idea:

Dejas en el banco 8000 euros para que el banco use ese dinero como le convenga a él; acuerdas que dentro de 5 años lo vas a retirar; a cambio de dejar el dinero allí, el banco se compromete a aumentar cada año un 4 % el dinero que has puesto. Los 8000 euros se llaman **capital inicial**, el 4 % se llama **rédito**, los 5 años se llaman **tiempo**, la cantidad en que se incrementa el capital se llama el **interés**. Queremos calcular cuánto dinero tendrás cuando acaben los 5 años; esa cantidad se llama **capital final**.

La diferencia entre el interés simple y el compuesto es que en el interés com-simple el interés se retira del banco cada año y en el interés compuesto se añade al capital, con lo que cada año se genera un interés mayor.

Al final del primer año el banco incrementa tu dinero un 4 %, con lo que se convierte en $8000 \cdot (1 + 4\,\%) = 8000 \cdot 1{,}04$.

Durante todo el segundo año el banco usa la cantidad $8000 \cdot 1{,}04$. Al final la vuelve a incrementar un 4 % y se convierte en: $(8000 \cdot 1{,}04) \cdot 1{,}04 = 8000 \cdot 1{,}04^2$.

Vemos que cada año que pasa el dinero se multiplica por 1,04; como vas a tener el dinero 5 años, hay que multiplicar 5 veces, con lo que el capital final es:

$8000 \cdot 1{,}04^5 = 10210{,}25$ (hemos redondeando a las centésimas).

Calculadora: 8 0 0 0 × 1 . 0 4 y^x 5 = ⇨ 10210.2525

Es decir, que al final de los 5 años habrás recibido 10210,25 euros, de los que 8000 son el capital inicial, el que pusiste al principio, y los 2210,25 euros restantes son el interés.

Fórmula del interés compuesto

Llamamos «C» al capital inicial, «C_f» al capital final, «r» al rédito y «t» al tiempo.

$$\boxed{C_f = C \cdot (1+r)^t}$$

Enunciados

① Calcula en cuánto dinero se convierten 5000 euros depositados a interés compuesto del 2 % de rédito anual en 3 años.

② Calcula en cuánto dinero se convierten 3000 euros depositados a interés compuesto del 8 % de rédito anual en 4 años.

Resoluciones

① $C_f = C \cdot (1+r)^t = 5000 \cdot (1+2\,\%)^3 = 5000 \cdot 1{,}02^3 = 5306{,}04$.

Solución: 5306,04 euros

② $C_f = C \cdot (1+r)^t = 3000 \cdot (1+8\,\%)^4 = 3000 \cdot 1{,}08^4 = 4081{,}46688$.

Solución: 4081,47 euros

Enunciados

Da los resultados redondeando a la centésima.

① Calcula en cuánto dinero se convierten 4000 euros depositados a interés compuesto del 3 % de rédito anual en 4 años.

② Calcula en cuánto dinero se convierten 6500 euros depositados a interés compuesto del 5 % de rédito anual en 3 años.

③ Calcula en cuánto dinero se convierten 7000 euros depositados a interés compuesto del 6 % de rédito anual en 5 años.

④ Calcula en cuánto dinero se convierten 8300 euros depositados a interés compuesto del 2 % de rédito anual en 11 años.

⑤ Calcula en cuánto dinero se convierten 3250 euros depositados a interés compuesto del 9 % de rédito anual en 3 años.

⑥ Calcula en cuánto dinero se convierten 1500 euros depositados a interés compuesto del 2,5 % de rédito anual en 8 años.

⑦ Calcula en cuánto dinero se convierten 9200 euros depositados a interés compuesto del 7,5 % de rédito anual en 7 años.

⑧ Calcula en cuánto dinero se convierten 8800 euros depositados a interés compuesto del 8,8 % de rédito anual en 8 años.

⑨ Calcula en cuánto dinero se convierten 3500 euros depositados a interés compuesto del 0,5 % de rédito anual en 15 años.

⑩ Calcula en cuánto dinero se convierten 6800 euros depositados a interés compuesto del 1,6 % de rédito anual en 13 años.

⑪ Una persona coloca 7500 euros en un depósito de inversión que ofrece un rédito de 1,6 % de rédito anual durante 10 años. Cuando terminan los 10 años, recoge su capital inicial, incrementado con el interés obtenido. Calcula a cuánto dinero asciende el interés.

Enunciados

⑫ Vlad Dracula *El Empalador* nació en 1428 en Sighișoara, Transilvania. Si al nacer él sus padres hubieran ingresado en un banco 1 leu al 2,5 % de interés compuesto anual, ¿cuánto dinero tendría en el banco al final de 2023? Da el resultado en leus sin decimales.

⑬ En la serie de televisión *Futurama*, de Matt Groening, el personaje principal, Fry, tiene en un banco de Estados Unidos 0,93 dólares depositados en una cuenta que le ofrece un 2,25 % de rédito anual a interés compuesto. Por un estúpido accidente, Fry cae en una cápsula criogénica el 31 de diciembre de 1999 y se despierta el 1 de enero de 3000. Calcula cuánto dinero tenía en la cuenta del banco tras pasar esos 1000 años en la cuenta. Da el resultado en dólares con dos cifras significativas.

Mezclas

Un problema que aparece bastante a menudo es mezclar varios productos que tienen alguna característica con distinto valor y es necesario calcular el valor que tiene esa característica en la mezcla. Por ejemplo, mezclar aceites de distinto precio, aleaciones con distinta composición y materiales con distinta densidad.

Enunciados

① Mezclamos 415 litros de un vino que cuesta 2,05 euros cada litro con 375 litros de otro vino que cuesta 2,95 euros cada litro. Calcula cuál es el precio de un litro de mezcla.

② Fundimos juntos un lingote de metal que tiene una pureza del 92,1 % y una masa de 2,29 kilogramos con otro lingote del mismo metal que tiene una pureza del 97,6 % y una masa de 5,03 kilogramos. Calcula la pureza del lingote resultante.

Clave de la resolución

La idea fundamental, que hace que pensar estos problemas sea muy sencillo, es que casi siempre hay que dividir las sumas de los valores de dos magnitudes, precisamente las dos magnitudes que suele pedir el enunciado.

Resoluciones

① Precio $= \dfrac{415 \cdot 2{,}05 + 375 \cdot 2{,}95}{415+375} = 2{,}47721519$

Calculadora:

(4 1 5 × 2 . 0 5 + 3 7 5 × 2 . 9 5) ÷ (4 1 5 + 3 7 5) =

Solución: 2,48 euros cada litro.

② La pureza dada en porcentaje nos indica cuánto metal puro hay en relación al total. Por tanto, para calcularla también hay que calcular cuánto material puro hay respecto a la masa total del lingote.

Pureza $= \dfrac{0{,}921 \cdot 2{,}29 + 0{,}976 \cdot 5{,}03}{2{,}29+5{,}03} = 0{,}958793715$

Solución: 95,9 %

Observaciones

- ✱ En el problema (1) hemos dividido el total de dinero entre el total de masa.
- ✱ En el problema (2) hemos dividido el total de masa pura del metal entre el total de masa conjunta de metal e impurezas.
- ✱ Observa que hacen falta dos parejas de paréntesis en la calculadora.
- ✱ El valor que de la solución necesariamente debe estar entre los valores de los componentes de la mezcla. Por ejemplo, en el problema (1) la solución no podía ser menor que 2,05 ni mayor que 2,95. Comprobar que se cumple esta condición es muy sencillo y deberíamos hacerlo siempre.
- ✱ Los enunciados no pedían una precisión concreta, así que hemos dado en cada solución la precisión más lógica.

Enunciados

① Si mezclamos 253 litros de aceite que tiene un precio de 2,58 euros cada litro con 327 litros de aceite que tiene un precio de 1,82 euros cada litro, ¿qué precio tiene cada litro de mezcla? Da el resultado en euros con dos decimales.

② Si mezclamos 450 litros de vino que cuesta 1,92 euros cada litro con 230 litros de vino que cuesta 3,53 euros cada litro, ¿qué precio tiene cada litro de mezcla? Da el resultado en euros con dos decimales.

③ Si mezclamos 35 toneladas de mineral con un 32 % de pureza con 47 toneladas de mineral con un 29 % de pureza, ¿qué pureza tiene la mezcla?

④ Si mezclamos 235 litros de aceite que tiene un precio de 2,56 euros cada litro con 377 litros de aceite que tiene un precio de 1,98 euros cada litro, ¿qué precio tiene cada litro de mezcla? Da el resultado en euros con dos decimales.

⑤ Una persona que hace negocios poco éticos mezcla 1200 litros de leche que cuesta 0,79 euros cada litro con 1500 litros de leche de superior calidad que cuesta 0,92 euros cada litro.

a) Calcula cuál es el precio que paga por un litro de mezcla.

Realmente, para ganar más dinero, añade a la mezcla 350 litros de agua, que le sale prácticamente gratis; pero vende la mezcla al precio de 1,05 euros cada litro.

b) Calcula cuánto dinero gana cuando vende toda la mercancía.

⑥ En un país de 26 millones de habitantes, el 12 % de la población es atea; en un país vecino de 15 millones de habitantes, el 16 % de la población es atea. Si los dos países se unieran, ¿cuál sería el porcentaje de población que se declara atea? Da el resultado con tres cifras significativas.

⑦ En los procesos tradicionales de elaboración de bebidas fuertemente alcohólicas mediante el uso de alambiques se puede llegar a productos de alta graduación, como la absenta, que puede llegar a los 72°; es decir, el 72 % del volumen de la bebida es alcohol puro (etanol). Por este motivo, muchas de estas bebidas se suelen tomar rebajadas con agua. Si añadimos 0,15 litros de agua a 0,25 litros de absenta de 72°, ¿cuál es la graduación de la mezcla? Da el resultado redondeado a la unidad.

⑧ Mezclamos 25 metros cúbicos de un tipo de cemento que tiene una densidad de 3052 kg/m³ con 42 metros cúbicos de otro tipo de cemento que tiene una densidad de 2935 kg/m³. Calcula la densidad del cemento resultante.

⑨ Una cooperativa de venta de aceite de oliva vende garrafas de cinco litros que obtiene mezclando aceite de tres productores distintos: por cada ocho litros de aceite del primer productor se añaden cinco litros del segundo y tres del tercero. El primer aceite del primer productor cuesta 2,52 €/l, el del segundo cuesta 3,17 €/l y el del tercero cuesta 3,52 €/l. Calcula cuánto dinero le cuesta a la cooperativa preparar cada garrafa. Da el resultado en euros redondeando a la centésima.

Idea de sucesión

* Una **sucesión** de objetos es un conjunto de objetos que están ordenados: hay un primer objeto, un segundo objeto, un tercer, etc.
* Una sucesión puede ser de cualquier tipo de objetos; lo más normal es que sean números, pero también pueden ser figuras geométricas, personas, etc.
* Los objetos que forman una sucesión se llaman **términos** de la sucesión: primer término, segundo término, tercer término, etcétera.

Ejemplos de sucesiones

* La sucesión de los números naturales pares: 2, 4, 6, 8, 10,...
* La sucesión de polígonos regulares: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular,...
* La sucesión de vencedoras olímpicas de atletismo de 100 metros: Elizabeth Robinson, Stanisława Walasiewicz, Helen Stephens,...
* La sucesión de personas que han ido batiendo el record del mundo oficial de maratón en categoría masculina: Johnny Hayes, Robert Fowler, James Clark, Albert Raines, etc.

Sucesiones infinitas y finitas

Las sucesiones que vamos a tratar tienen infinitos elementos, como los dos primeros ejemplos; algunas sucesiones tienen un número finito de elementos, como los dos últimos ejemplos, pero en educación secundaria su estudio no es tan útil.

Nomenclatura

* Es costumbre designar cada sucesión con un nombre, casi siempre una letra latina minúscula: podemos referirnos a las sucesiones «a», «b», etcétera.
* Cuando una sucesión tiene nombre, se puede nombrar cualquiera de sus términos usando la letra de la sucesión con un número escrito como subíndice que indique el número de orden del término en la sucesión.

Ejemplos de nomenclatura

Ejemplo 1

Llamamos «a» a la sucesión de números primos: a → 2, 3, 5, 7, 11, 13,...

Entonces se puede escribir: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$, etcétera.

Ejemplo 2

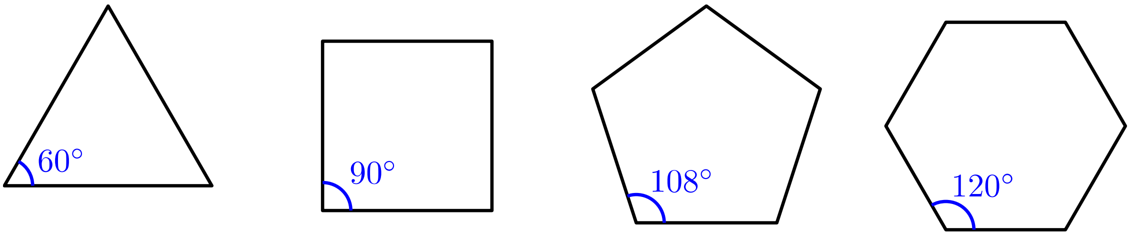
Llamamos «b» a la sucesión del múltiplos positivos de 7: b → 7, 14, 21, 28,...

Entonces se puede escribir: $b_1 = 7$, $b_2 = 14$, $b_3 = 21$, $b_4 = 28$, etcétera.

Ejemplo 3

Llamamos «c» a la sucesión de los valores en grados sexagesimales de los ángulos de los polígonos regulares: c → 60, 90, 108, 120,...

Entonces se puede escribir: $c_1 = 60$, $c_2 = 90$, $c_3 = 108$, $c_4 = 120$, etcétera.



Instrucciones

Averigua qué número debe aparecer en el lugar del signo del cuadrado («□»). Escribe el número pedido en la zona en blanco que hay bajo cada igualdad.

Enunciados

Sucesión de los números impares: a → 1, 3, 5, 7, 9, 11,...

① $a_2 = \square$	② $a_3 = \square$	③ $a_4 = \square$	④ $a_6 = \square$	⑤ $a_7 = \square$
⑥ $a_\square = 1$	⑦ $a_\square = 5$	⑧ $a_\square = 11$	⑨ $a_\square = 15$	⑩ $a_\square = 17$

Sucesión de los múltiplos positivos de 5: b → 5, 10, 15, 20,...

⑪ $b_1 = \square$	⑫ $b_2 = \square$	⑬ $b_3 = \square$	⑭ $b_5 = \square$	⑮ $b_8 = \square$
⑯ $b_\square = 10$	⑰ $b_\square = 15$	⑱ $b_\square = 30$	⑲ $b_\square = 35$	⑳ $b_\square = 45$

Sucesión de los múltiplos negativos de 6: c → –6, –12, –18, –24,...

㉑ $c_1 = \square$	㉒ $c_3 = \square$	㉓ $c_5 = \square$	㉔ $c_6 = \square$	㉕ $c_8 = \square$
㉖ $c_\square = -6$	㉗ $c_\square = -18$	㉘ $c_\square = -30$	㉙ $c_\square = -42$	㉚ $c_\square = -54$

Sucesión de las potencias de 2 con exponente natural: d → 2, 4, 8, 16,...

㉛ $d_1 = \square$	㉜ $d_3 = \square$	㉝ $d_4 = \square$	㉞ $d_5 = \square$	㉟ $d_6 = \square$
㊱ $d_\square = 16$	㊲ $d_\square = 32$	㊳ $d_\square = 64$	㊴ $d_\square = 128$	㊵ $d_\square = 256$

Sucesión de las potencias de –1 con exponente natural: e → –1, 1, –1, 1,...

㊶ $e_1 = \square$	㊷ $e_2 = \square$	㊸ $e_3 = \square$	㊹ $e_7 = \square$	㊺ $e_{20} = \square$
㊻ $e_1 + e_2 = \square$	㊼ $e_2 + e_3 = \square$	㊽ $e_1 + e_3 = \square$	㊾ $e_2 + e_4 = \square$	㊿ $e_9 - e_6 = \square$

Enunciados

51 $a_1 + b_1 = \square$	52 $c_2 + d_3 = \square$	53 $a_3 + e_4 = \square$	54 $b_5 + e_7 = \square$	55 $c_4 - e_9 = \square$

Término general de una sucesión

- ✱ El término general de una sucesión es una manera de referirnos de manera general a uno cualquiera de los términos de la sucesión.
- ✱ Como los términos de la sucesión se distinguen especialmente por el número de orden en la serie, que es el subíndice, cuando escribimos el término general usamos como subíndice una letra.
- ✱ Por ejemplo, si una sucesión tiene por nombre «a», escribiremos su término general como «a_n», indicando que la «n» puede ser cualquier número natural.

Expresión algebraica del término general

En la mayor parte de las ocasiones es posible escribir el término general de una sucesión como una expresión algebraica en la que aparece el subíndice como parte de las operaciones.

Ejemplo 1

La sucesión a → 3, 5, 7, 9,... tiene por término general $a_n = 2n+1$

Podemos comprobar que la expresión se cumple con los cuatro términos conocidos:

$a_1 = 2·1+1 = 3$ ✓; $a_2 = 2·2+1 = 5$ ✓; $a_3 = 2·3+1 = 7$ ✓; $a_4 = 2·4+1 = 9$ ✓.

Pero, además, el término general permite calcular un término cualquiera:

Por ejemplo, $a_{34} = 2·34+1 = 69$; $a_{107} = 2·107+1 = 215$

Manera común de referirnos a una sucesión

El término general es tan útil e importante que muchas veces se usa directamente en vez del nombre de la sucesión.

Ejemplo 2

En vez de decir «la sucesión “b” tiene por término general “$b_n = 3n–4$”», se suele decir sencillamente «la sucesión $b_n = 3n–4$».

Ejemplo 3

En vez de decir «la sucesión $c_n = –n+7$» su puede decir «la sucesión “$–n+7$”»

Enunciados

Escribe el comienzo de cada una de las siguientes sucesiones calculando sus cuatro primeros términos.

④ $d_n = n^2–7$ ⑤ $e_n = n^2+2n$ ⑥ $f_n = n^3–3n$ ⑦ $g_n = n+(–1)^n$

Resoluciones

④ $d_1 = 1^2–7 = –6$; $d_2 = 2^2–7 = –3$; $d_3 = 3^2–7 = 2$; $d_4 = 4^2–7 = 9$

Solución: d → –6, –3, 2, 9,...

⑤ $e_1 = 1^2+2·1 = 3$; $e_2 = 2^2+2·2 = 8$; $e_3 = 3^2+2·3 = 15$; $e_4 = 4^2+2·4 = 24$

Solución: e → 3, 8, 15, 24,...

⑥ $f_1 = 1^3–3·1 = –2$; $f_2 = 2^3–3·2 = 2$; $f_3 = 3^3–3·3 = 18$; $f_4 = 4^3–3·4 = 64–12 = 52$

Solución: f → –2, 2, 18, 52,...

⑦ $g_1 = 1+(–1)^1 = 0$; $g_2 = 2+(–1)^2 = 3$; $g_3 = 3+(–1)^3 = 2$; $g_4 = 4+(–1)^4 = 5$

Solución: g → 0, 3, 2, 5,...

Enunciados

Escribe el comienzo de cada una de las siguientes sucesiones calculando sus cuatro primeros términos.

① $a_n = 4n+3$

② $b_n = 3^n-50$

③ $c_n = -5n+8$

④ $d_n = (-1)^n \cdot n^3$

⑤ $e_n = (-1)^{n+1} \cdot (7n+1)$

⑥ $f_n = 2^n \cdot (n+1)$

⑦ $g_n = -3n+n^2$

⑧ $h_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$

⑨ $i_n = 2^{n-1}$

⑩ $j_n = n \cdot (n-3)$

⑪ $k_n = (n-2) \cdot (n-3)$

⑫ $m_n = 4n-5$

⑬ $p_n = n^n$

⑭ $q_n = (-1)^{n+1} \cdot (-2)^n$

⑮ $r_n = 2 \cdot 4^{n-1}$

⑯ $s_n = -7n+21$

⑰ $t_n = 100n^2-n$

⑱ $u_n = (n-3)^3$

⑲ $v_n = (-1)^n \cdot (n-1)^{n+1}$

⑳ $w_n = 10-(n^2-n)^2$

㉑ $x_n = n^3-2n-3$

㉒ $y_n = \dfrac{n^3+n^2}{n^2+n}$

㉓ $z_n = \sqrt{(n+1)(n-1)+1}$

㉔ $\alpha_n = 12:n$

㉕ $\beta_n = n^{(n-1)^2}$

Cálculo de cualquier término usando el término general

El término general es especialmente útil cuando consiste en una expresión algebraica que permite calcular en valor de cualquier término conociendo exclusivamente el lugar que ocupa. Como veremos más adelante, hay otras posibilidades para la expresión del término general.

Enunciados

① Calcula con cuatro cifras significativas el término que ocupa el lugar 19 en la sucesión «a» de término general $a_n=\dfrac{n^2-5n+7}{n^2+4}$

② Calcula con seis cifras significativas b_{37} sabiendo que $b_n=\sqrt{n^4-n}$

③ Escribe el comienzo de la sucesión $c_n=\sqrt{n^2-n+17}$ calculando con cinco cifras significativas sus cuatro primeros términos.

Resoluciones

① $a_{19}=\dfrac{19^2-5\cdot 19+7}{19^2+4}=0{,}747945205$

Calculadora: (1 9 x² − 5 · 1 9 + 7) ÷ (1 9 x² + 4) =

Solución: 0,7479

② $b_{37}=\sqrt{37^4-37}=1368{,}986486$

Calculadora: √‾ (3 7 yˣ 4 − 3 7) =

Solución: 1368,99

③ $c_1=\sqrt{1^2-1+17}=4{,}123105626$; $c_2=\sqrt{2^2-2+17}=4{,}358898944$

$c_3=\sqrt{3^2-3+17}=4{,}795831523$; $c_4=\sqrt{4^2-4+17}=5{,}385164807$

Solución: c → 4,1231; 4,3589; 4,7958; 5,3852;...

Observación: para separar los términos de la sucesión usamos el signo «;» en vez de «,» porque ya estamos usando «,» como separador de la parte decimal en los términos de la sucesión.

Calculadora: tienes varias opciones para realizar los cálculos con calculadora:

- ✱ Hacer mentalmente la operación del radicando (en este caso es fácil) y usar la calculadora solo para calcular la raíz. Es un método rápido, ejercitas el cerebro y no tecleas mucho:

  √‾ 1 7 = ▩ √‾ 1 9 = ▩ √‾ 2 3 = ▩ √‾ 2 9 =

- ✱ Usar una memoria de la calculadora para almacenar el valor del subíndice, escribir una sola vez las operaciones del término general y luego ir usando la memoria de operaciones de la calculadora:

  1 STO M ▩ √‾ (RCL M x² − RCL M + 1 7) =

  ▲ ▶ 2 = ▩ ▲ = ▩ ▲ ▶ 3 = ▩ ▲ = ▩ ▲ ▶ 4 = ▩ ▲ =

  Recuerda probar con tu propia calculadora, quizá sea diferente.

Enunciados

① Calcula con seis cifras significativas el término que ocupa el lugar 24 en la sucesión «a» de término general $a_n=\dfrac{3n^2-8n+1}{n^2+7}$

② Calcula con cinco cifras significativas b_{51} sabiendo que $b_n=\sqrt{2n^5-17n}$

③ Calcula con cuatro cifras significativas el término que ocupa el lugar 33 en la sucesión $c_n=\sqrt[3]{n^2+3n}$

④ Calcula con tres cifras significativas d_{22} sabiendo que $d_n=\sqrt[4]{n^2-3n}$

⑤ Calcula con seis cifras significativas el término que ocupa el lugar 21 en la sucesión $e_n=\dfrac{\sqrt[5]{n+23}}{n+15}$

⑥ Calcula con seis cifras significativas f_{21} sabiendo que $f_n=\sqrt[5]{\dfrac{n+23}{n+15}}$

⑦ Calcula con tres cifras significativas el término que ocupa el lugar 7 en la sucesión $g_n=\dfrac{n^4}{n^3+2n^2}$

⑧ Calcula con seis cifras significativas h_{11} sabiendo que $h_n=\sqrt[3]{n^2+\sqrt{n+1}}$

⑨ Calcula con seis cifras significativas k_{55} sabiendo que $k_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^7+n^4}}$

⑩ Si $m_n=n^2-3n+10$, calcula m_5-m_3

⑪ Escribe el comienzo de la sucesión $q_n=\dfrac{1331}{n^2+3n}$ calculando con cuatro cifras significativas sus cuatro primeros términos.

⑫ Escribe el comienzo de la sucesión $r_n=\sqrt{n^2+3n+37}$ calculando con cinco cifras significativas sus cuatro primeros términos.

⑬ Escribe el comienzo de la sucesión $s_n=\left(\dfrac{n^2+13n}{2n^2+7n}\right)^3$ calculando con cuatro cifras significativas sus cuatro primeros términos.

⑭ Escribe el comienzo de la sucesión $t_n=\sqrt[3]{2n^3+3n^2+7n}$ calculando con cinco cifras significativas sus cuatro primeros términos.

⑮ Escribe el comienzo de la sucesión $u_n=\dfrac{n+\sqrt{n}}{n+\sqrt{2n}}$ calculando con cinco cifras significativas sus cinco primeros términos.

Una sucesión no depende de su nombre

Una sucesión no cambia si le cambiamos el nombre. Lo que define a una sucesión es el valor de sus términos, no el nombre que le pongamos.

Ejemplo 1

Las siguientes sucesiones son realmente la misma sucesión:

a → 5, 10, 15, 20, 25, 30,....

b → 5, 10, 15, 20, 25, 30,....

Es la sucesión de los múltiplos positivos de 5, pero la primera vez ha recibido el nombre «a» y la segunda vez el nombre «b».

Ejemplo 2

Las siguientes sucesiones, dadas por su término general, son realmente la misma sucesión: $c_n = -3n$; $d_n = -3n$

Es la sucesión de los múltiplos negativos de 3, pero la primera vez ha recibido el nombre «c» y la segunda vez el nombre «d».

El término general de una sucesión no depende de la letra del subíndice

Para escribir la expresión algebraica de una sucesión podemos utilizar la letra que deseemos para señalar el índice que indica el lugar que ocupa el término en la sucesión. Es lo que se llama en matemáticas una «variable muda».

Ejemplo 3

El término general de la sucesión «e» cuyos términos son

e → 7, 14, 21, 28, 35,...

se puede escribir como «$e_n = 7n$», como «$e_m = 7m$» y como «$e_k = 7k$», entre otras muchas posibilidades; en el primer caso la letra que indica el orden es «n», en el segundo caso es «m» y en el tercer caso es «k».

Ejemplo 4

Las siguientes sucesiones, dadas por su término general, son realmente la misma sucesión: $f_n = 6n$; $g_k = 6k$

La primera se ha llamado «f» y se ha usado la letra «n» para indicar el orden y la segunda se ha llamado «g» y se ha usado la letra «k» para indicar el orden, pero en cualquier caso es la sucesión de los múltiplos positivos de 6 (6, 12, 18, 24,...).

Enunciados

⑤ Escribe el comienzo de la sucesión $n_a = a^2-3a$ calculando sus cuatro primeros términos.

⑥ Dadas las sucesiones $p_m = 5m+3$ y $q_t = 2t-6$, calcula p_2+q_4.

Resoluciones

⑤ $n_1 = 1^2-3\cdot1 = -2$; $n_2 = 2^2-3\cdot2 = -2$; $n_3 = 3^2-3\cdot3 = 0$; $n_4 = 4^2-3\cdot4 = 4$

Solución: n → –2, –2, 0, 4,...

⑥ $p_2+q_4 = (5\cdot2+3) + (2\cdot4-6) = 13 + 2 = 15$

Solución: 15

Enunciados

En la siguiente tabla, usando la expresión del término general, escribe cuál es el nombre de cada sucesión, cuál es la letra usada para indicar la posición de cada término y calcula el término pedido escribiendo el resultado con el número de cifras significativas indicado.

	Término general	Nombre de la sucesión	Letra de la posición	Número de término	Cifras significativas	Resultado
①	$a_n=\sqrt{2+\frac{5}{n}}$			7	5	
②	$b_q=\frac{q^2+7}{q}$			17	6	
③	$n_k=\sqrt[3]{5k^2-2k}$			6	4	
④	$k_n=\frac{\sqrt{n}}{n^4+3}$			107	5	
⑤	$n_m=\frac{\sqrt[7]{m-17}}{\sqrt[5]{m+21}}$			23	6	
⑥	$c_a=\frac{a^3+5a^2+3}{\sqrt{a}}$			19	4	
⑦	$d_t=\frac{t+1}{\sqrt[3]{3t-1}}$			8	5	
⑧	$t_d=\frac{(d-1)^4}{\sqrt{d}-\sqrt{2}}$			17	5	
⑨	$m_c=1-(c+4)^3$			3809	4	
⑩	$q_p=3p^2-\sqrt{p}$			5	8	
⑪	$p_q=\sqrt{\frac{q+3}{q^2+1}}$			8	4	
⑫	$a_b=\frac{\sqrt{b}+7}{\sqrt{b+7}}$			5	6	
⑬	$r_z=z^2-157\sqrt[5]{z}$			10	4	
⑭	$z_r=r^2-157\sqrt[5]{r}$			10	6	
⑮	$w_s=\sqrt[7]{s^3+5s^2+9s+3}$			5	4	
⑯	$z_w=\frac{2}{\sqrt[5]{w^3+17}}$			8	5	
⑰	$z_x=\frac{1-\sqrt{x}}{x+1}$			30	4	

Definición por recurrencia de una sucesión

Consiste en definir el valor del término general de la sucesión basándose en los valores de uno o más de sus términos anteriores.

Ejemplo 1

Consideramos la sucesión a → 7, 10, 13, 16,....

Se ve que cada término se puede obtener sumando 3 al término anterior; por tanto, podemos escribir «$a_n = a_{n-1} + 3$» como expresión del término general. Pero esta expresión no tiene sentido para «$n = 1$», ya que diría «$a_1 = a_0 + 3$»; pero a_0 no existe, no hay ningún término anterior al primero.

Por tanto la expresión del término general habría que escribirla así:

$$a_n=\begin{cases} a_{n-1}+3 & \text{si } n>1 \\ 7 & \text{si } n=1 \end{cases}$$

Resulta más habitual escribirla de un modo más sencillo, porque todo el mundo va a entender que a_{n-1} no existe para «$n = 1$»:

$a_1 = 7$; $a_n = a_{n-1} + 3$

Ejemplo 2

Consideramos la sucesión b → 3, 6, 12, 24,....

Cada término se puede obtener multiplicando por 2 el término anterior, salvo el primero, que vale 3. Escribimos el término general del modo más sencillo:

$b_1 = 3$; $b_n = 2 \cdot b_{n-1}$

Ejemplo 3

La conocida sucesión de Fibonacci se define como aquella que tiene los dos primeros términos «1» y a partir de ahí cada término es la suma de los dos anteriores. Si llamamos f a la sucesión, su término general es:

$f_1 = f_2 = 1$; $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Aplicando la definición, se obtiene: f → 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...

Esta sucesión es un clásico de la matemática. Expresa la cantidad de parejas de conejos que se van obteniendo con ciertas condiciones en su reproducción.

Forma explícita del término general

Una definición recursiva de una sucesión plantea un problema práctico importante: para calcular un término hace falta conocer todos los anteriores, lo que requiere un gran esfuerzo de cálculo. Por eso, existen técnicas para obtener versiones no recursivas (es decir, explícitas) a partir de definiciones recursivas.

Es fácil ver que en el ejemplo 1 se verifica «$a_n = 3n + 4$» y en el ejemplo 2 la expresión es «$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$»; con los conocimientos que adquiriremos en este nivel tú podrás averiguar estas expresiones. Pero la que es más difícil de obtener es la del ejemplo 3, que es:

$$f_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Se conoce como fórmula de Binet, en honor al matemático francés Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856), aunque ya era conocida anteriormente.

Enunciados

① Dada la sucesión a → 2, 8, 14, 20, 26, 32,..., averigua su definición recursiva.

② Dada la sucesión b → 1, 3, 9, 27, 81, 243,..., averigua su definición recursiva.

③ Dada la sucesión c → 1, –1, 1, –1, 1, –1,..., averigua su definición recursiva.

④ Dada la sucesión d → 0, 1, 3, 7, 15, 31, 63..., averigua su definición recursiva.

⑤ Escribe el comienzo de cada una de las siguientes sucesiones, dadas por sus definiciones recursivas, calculando sus ocho primeros términos.

$e_1 = 3,\ e_n = 2e_{n-1} + 1$

$f_1 = -2,\ f_n = -3f_{n-1} + 2$

$g_1 = 1,\ g_2 = 3,\ g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$

$h_1 = 2,\ h_2 = 1,\ h_n = 2h_{n-2} - h_{n-1}$

$k_1 = k_2 = k_3 = 1;\ k_n = k_{n-3} + k_{n-2} + k_{n-1}$

$m_1 = 1;\ m_n = m_{n-1} + n$

$n_1 = 1024;\ n_a = n_{a-1} : 2$

$p_1 = 1;\ p_b = b^2 - p_{b-1}$

⑥ Definición recursiva de la sucesión de Fibonacci: $q_1 = q_2 = 1;\ q_n = q_{n-1} + q_{n-2}$

También se puede expresar su término general explícitamente con la fórmula de Binet: $q_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

Calcula q_{14} de dos maneras diferentes:

✱ Usando la definición recursiva.
✱ Usando la fórmula de Binet y la calculadora.

⑦ Se define recursivamente la sucesión «r» de esta manera:

$r_1 = 3,\ r_2 = 0;\ r_n = r_{n-1} + 2r_{n-2}$

Se puede calcular el término general con esta expresión explícita:

$r_n = 2\cdot(-1)^{n-1} + 2^{n-1}$

Calcula r_8 de dos maneras diferentes: usando la definición recursiva y usando la expresión explícita del término general.

⑧ Se define recursivamente la sucesión «s» de esta manera:

$s_1 = 5,\ s_2 = 13;\ s_n = 5s_{n-1} - 6s_{n-2}$

Se puede calcular el término general con esta expresión explícita: $s_n = 2^n + 3^n$

Calcula s_7 de las dos maneras diferentes: usando la definición recursiva y usando la expresión explícita del término general.

Progresión aritmética

- ✱ Una progresión aritmética es una sucesión de números en la que cada término se obtiene sumando una cantidad fija al término anterior.
- ✱ La cantidad fija se llama diferencia de la progresión aritmética.
- ✱ Para conocer completamente una progresión aritmética solo hacen falta dos datos: el primer término y la diferencia.

Ejemplos

① La progresión aritmética «a» tiene como primer término $a_1 = 5$ y diferencia $d = 2$. Escribe los ocho primeros términos de la progresión aritmética.

Solución: a → 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19,...

② La progresión aritmética «b» tiene como primer término $b_1 = -13$ y diferencia $d = 8$. Escribe los ocho primeros términos de la progresión aritmética.

Solución: b → –13, –5, 3, 11, 19, 27, 35, 43,...

③ La progresión aritmética «c» tiene como primer término $c_1 = 11$ y diferencia $d = -3$. Escribe los ocho primeros términos de la progresión aritmética.

Solución: c → 11, 8, 5, 2, –1, –4, –7, –10,...

Propiedad

En toda progresión aritmética se verifica que la diferencia entre cualquier término y su anterior es siempre la misma. Esta propiedad es la que se utiliza para dar el nombre de «diferencia» a la cantidad que se suma en cada progresión aritmética.

Ejemplos

④ Estudia si la sucesión e → 17, 40, 63, 86,... es una progresión aritmética y, caso de que lo sea, calcula su diferencia.

Resolución

$e_2 - e_1 = 40 - 17 = 23$; $e_3 - e_2 = 63 - 40 = 23$; $e_4 - e_3 = 86 - 63 = 23$.

Solución: sí es una progresión aritmética y su diferencia es 23.

⑤ Estudia si la sucesión f → 14, 10, 5, 1,... es una progresión aritmética y, caso de que lo sea, calcula su diferencia.

Resolución

$f_2 - f_1 = 10 - 14 = -4$; $f_3 - f_2 = 5 - 10 = -5$

Solución: no es una progresión aritmética.

Comentario: como $f_2 - f_1 \neq f_3 - f_2$, no es necesario hacer más operaciones.

Obtención de términos con la calculadora

Es fácil ir viendo los términos de una progresión aritmética usando una calculadora. Como ejemplo, explicamos cómo hacerlo con la progresión aritmética «g» de primer término $g_1 = -34$ y diferencia $d = 13$:

`(-)` `3` `4` `=` ▩ `Ans` `+` `1` `3` `=` ▩ `=` ▩ `=` ▩ `=` ▩ `=` ▩ `=` ▩ `=` ▩ `=` ▩ `=` ▩ …

Solución: g → –34, –21, –8, 5, 18, 31,...

Enunciados

① Escribe los ocho primeros términos de la progresión aritmética «a», que tiene como primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 7$.

② Escribe los ocho primeros términos de la progresión aritmética «b», que tiene como primer término $b_1 = -10$ y diferencia $d = 3$.

③ Escribe los ocho primeros términos de la progresión aritmética «c», que tiene como primer término $c_1 = 25$ y diferencia $d = -8$.

④ Estudia si la sucesión e → 13, 20, 27, 34,... es una progresión aritmética y, caso de que lo sea, calcula su diferencia.

⑤ Estudia si la sucesión f → –4, –10, –16, –22,... es una progresión aritmética y, caso de que lo sea, calcula su diferencia.

⑥ Estudia si la sucesión g → 31, 33, 35, 38,... es una progresión aritmética y, caso de que lo sea, calcula su diferencia.

⑦ Estudia si la sucesión h → 31, 31, 31, 31,... es una progresión aritmética y, caso de que lo sea, calcula su diferencia.

⑧ El teorema de Dirichlet afirma que si en una progresión aritmética el primer término y la razón son números primos entre sí, entonces hay infinitos números primos en la progresión aritmética.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) fue un matemático alemán.

En las siguientes sucesiones, averigua cuál es el valor del menor término que es un número primo.

Recuerda los primeros números primos:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181

La sucesión k tiene como primer elemento $k_1 = 4$ y como diferencia $d = 5$.

La sucesión m tiene como primer elemento $m_1 = 2$ y como diferencia $d = 7$.

La sucesión n tiene como primer elemento $n_1 = 7$ y como diferencia $d = 9$.

La sucesión p tiene como primer elemento $p_1 = 8$ y como diferencia $d = 27$.

La sucesión q tiene como primer elemento $q_1 = 13$ y como diferencia $d = 7$.

La sucesión r tiene como primer elemento $r_1 = 6$ y como diferencia $d = 19$.

La sucesión s tiene como primer elemento $s_1 = 23$ y como diferencia $d = 29$.

La sucesión t tiene como primer elemento $t_1 = 29$ y como diferencia $d = 23$.

La sucesión u tiene como primer elemento $u_1 = 31$ y como diferencia $d = 41$.

Término general de una progresión aritmética

La definición de progresión aritmética permite inmediatamente una definición recursiva del término general: si la progresión aritmética «a» tiene diferencia «d», está claro que «$a_n = a_{n-1} + d$».

Pero hemos visto que las definiciones recursivas son menos útiles para hacer cálculos que las definiciones explícitas, así que buscamos una expresión que permita calcular a_n conocidos n, a_1 y la diferencia, que llamaremos «d».

Sabemos que «$a_2 = a_1 + d$», luego podemos calcular a_3 así:

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$.

Esto nos permite calcular a_4 a partir de a_1 y d:

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$.

Observamos que para «avanzar» un término en la progresión a partir del primero hay que ir sumando una vez la diferencia. Por tanto:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Enunciados

① Calcula el término que ocupa el lugar 53 en la progresión aritmética «a» sabiendo que $a_1 = 17$ y la diferencia es $d = 11$.

② Calcula el término que ocupa el lugar 297 en la progresión aritmética «b» sabiendo que $b_1 = -419$ y la diferencia es $d = 19$.

③ Calcula el término que ocupa el lugar 315 en la progresión aritmética «c» sabiendo que $c_1 = 2274$ y la diferencia es $d = -22$.

④ Calcula el término que ocupa el lugar 2344 en la progresión aritmética «e» en la que $e_1 = 4{,}189$ y $e_2 = 4{,}243$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

Resoluciones

① $a_{53} = a_1 + (53-1)\cdot d = 17 + 52\cdot 11 = 589$. Solución: $a_{53} = 589$

Calculadora: 1 7 + 5 2 × 1 1 =

② $b_{297} = b_1 + (297-1)\cdot d = -419 + 296\cdot 19 = 5205$. Solución: $b_{297} = 5205$

Calculadora: (-) 4 1 9 + 2 9 6 × 1 9 =

③ $c_{315} = c_1 + (315-1)\cdot d = 2274 + 314\cdot(-22) = -4634$. Solución: $c_{315} = -4634$

Calculadora: 2 2 7 4 + 3 1 4 × (-) 2 2 =

④ Comenzamos por calcular la diferencia, que llamamos «d»:

$d = e_2 - e_1 = 4{,}243 - 4{,}189 = 0{,}054$

Calculadora: 4 . 2 4 7 − 4 . 1 8 9 =

$e_{2344} = e_1 + (2344-1)\cdot d = 4{,}189 + 2343\cdot 0{,}054 = 130{,}711$

Calculadora: 4 . 1 8 9 + 2 3 4 3 × Ans =

Solución: $e_{2344} = 130{,}7$

Enunciados

① Calcula el término que ocupa el lugar 24 en la progresión aritmética «a» sabiendo que $a_1 = 4$ y la diferencia es $d = 13$.

② Calcula el término que ocupa el lugar 105 en la progresión aritmética «b» sabiendo que $b_1 = -52$ y la diferencia es $d = 3$.

③ Calcula el término que ocupa el lugar 299 en la progresión aritmética «c» sabiendo que $c_1 = -2288$ y la diferencia es $d = 9$.

④ Calcula el término que ocupa el lugar 402 en la progresión aritmética «e» sabiendo que $e_1 = 3329$ y la diferencia es $d = -16$.

⑤ Calcula el término que ocupa el lugar 552 en la progresión aritmética «f» sabiendo que $f_1 = -219$ y la diferencia es $d = -8$.

⑥ Calcula el término que ocupa el lugar 137 en la progresión aritmética «g» sabiendo que $g_1 = 4018$ y la diferencia es $d = -7$.

⑦ Calcula el término que ocupa el lugar 99 en la progresión aritmética «h» sabiendo que $h_1 = 4{,}28$ y la diferencia es $d = 0{,}39$.

⑧ Calcula el término que ocupa el lugar 208 en la progresión aritmética «k» sabiendo que $k_1 = 28$ y la diferencia es $d = -0{,}73$.

⑨ Calcula el término que ocupa el lugar 211 en la progresión aritmética «m» sabiendo que $m_1 = 343{,}2$ y la diferencia es $d = -1{,}04$.

⑩ Calcula el término que ocupa el lugar 76 en la progresión aritmética «p» sabiendo que $p_1 = -103{,}2$ y la diferencia es $d = 0{,}72$.

⑪ Calcula el término que ocupa el lugar 863 en la progresión aritmética «q» en la que $q_1 = 8{,}21$ y $q_2 = 9{,}33$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑫ Calcula el término que ocupa el lugar 912 en la progresión aritmética «r» en la que $r_1 = 5{,}42$ y $r_2 = 5{,}25$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑬ Calcula el término que ocupa el lugar 489 en la progresión aritmética «s» en la que $s_1 = 2{,}35$ y $s_2 = 3{,}49$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑭ Calcula el término que ocupa el lugar 573 en la progresión aritmética «t» en la que $t_1 = 3{,}52$ y $t_2 = 1{,}35$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑮ Calcula el término que ocupa el lugar 1022 en la progresión aritmética «u» en la que $u_1 = 0{,}321$ y $u_2 = 0{,}402$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑯ Calcula el término que ocupa el lugar 72 en la progresión aritmética «v» en la que $v_2 = 44$ y $v_3 = 51$.

⑰ Calcula el término que ocupa el lugar 93 en la progresión aritmética «w» en la que $w_2 = 92$ y $w_3 = 76$.

Aplicaciones de la expresión del término general

Si la progresión aritmética «a» tiene diferencia «d», sabemos que

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Esta expresión relaciona cuatro cantidades:

- a_1: el primer término de la progresión aritmética.
- d: la diferencia de la progresión aritmética.
- n: el número del lugar de un término.
- a_n: el valor del término de lugar n.

Por tanto, conocidas tres de las cantidades podremos calcular la que falte. Salvo en el caso directo, en los demás casos hay que resolver una sencilla ecuación de primer grado.

Enunciados

① De la progresión aritmética «a» se sabe que la diferencia es $d = 23$ y $a_{18} = 559$. Calcula a_1.

② De la progresión aritmética «b» se sabe que $b_1 = 33$ y $b_{44} = 850$. Calcula la diferencia.

③ Averigua qué término de la progresión aritmética «c» tiene un valor de 9639 sabiendo que $c_1 = 91$ y la diferencia es 124.

Resoluciones

① Escribimos la expresión del término de lugar 18 y resolvemos una ecuación en la que la incógnita es a_1.

$a_{18} = a_1 + (18-1)\cdot d \Rightarrow 559 = a_1 + 17\cdot 23 \Rightarrow a_1 = 559 - 17\cdot 23 = 168$

Calculadora: 5 5 9 – 1 7 × 2 3 =

Solución: $a_1 = 168$

② Escribimos la expresión del término de lugar 44 y resolvemos una ecuación en la que la incógnita es la diferencia, que llamamos «d».

$b_{44} = b_1 + (44-1)\cdot d \Rightarrow 850 = 33 + 43\cdot d \Rightarrow d = \dfrac{850-33}{43} = 19$

Calculadora: (8 5 0 – 3 3) ÷ 4 3 =

Solución: 19

③ Escribimos la expresión del término de lugar «n» y resolvemos una ecuación en la que la incógnita es «n».

$c_n = c_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow 9639 = 91 + (n-1)\cdot 124 \Rightarrow n = \dfrac{9639-91}{124}+1 = 78$

Calculadora: (9 6 3 9 – 9 1) ÷ 1 2 4 + 1 =

Solución: 78

Enunciados

① De la progresión aritmética «a» se sabe que la diferencia es 27 y $a_{33} = 1032$. Calcula a_1.

② De la progresión aritmética «b» se sabe que $b_1 = 91$ y $b_{112} = 4864$. Calcula la diferencia.

③ Averigua qué término de la progresión aritmética «c» tiene un valor de 6427 sabiendo que $c_1 = 331$ y la diferencia es 43.

④ De la progresión aritmética «e» se sabe que la diferencia es –7 y $a_{402} = –2919$. Calcula e_1.

⑤ De la progresión aritmética «f» se sabe que $f_1 = –291$ y $b_{552} = –4627$. Calcula la diferencia.

⑥ Averigua qué término de la progresión aritmética «g» tiene un valor de –5190 sabiendo que $g_1 = –702$ y la diferencia es –33.

⑦ De la progresión aritmética «h» se sabe que la diferencia es 1,17 y $h_{224} = 269{,}15$. Calcula h_1.

⑧ De la progresión aritmética «k» se sabe que $k_1 = 2{,}13$ y $k_{187} = 389{,}01$. Calcula la diferencia.

⑨ Averigua qué término de la progresión aritmética «m» tiene un valor de 537,76 sabiendo que $m_1 = 5{,}32$ y la diferencia es 1,74.

⑩ De la progresión aritmética «p» se sabe que la diferencia es –3,82 y que $p_{198} = –450{,}54$. Calcula p_1.

⑪ De la progresión aritmética «q» se sabe que $q_1 = 502$ y $q_{173} = –739{,}84$. Calcula la diferencia.

⑫ Averigua qué término de la progresión aritmética «r» tiene un valor de –338,69 sabiendo que $r_1 = 472$ y la diferencia es –1,83.

⑬ De la progresión aritmética «s» se sabe que la diferencia es 1,8 y $s_{276} = 439$. Calcula s_1.

⑭ De la progresión aritmética «t» se sabe que $t_1 = –25$ y $t_{321} = 743$. Calcula la diferencia.

⑮ Averigua qué término de la progresión aritmética «u» tiene un valor de 663 sabiendo que $u_1 = –72$ y la diferencia es 4,2.

⑯ De la progresión aritmética «v» se sabe que $v_{168} = 44$ y $v_{371} = 44$. Calcula v_{231}.

⑰ Averigua qué término de la progresión aritmética «w» tiene un valor de 2564 sabiendo que $w_1 = 29$ y la diferencia es 78.

Suma de los primeros términos de una progresión aritmética

Se desea calcular la suma de los primeros términos de una progresión aritmética del modo más sencillo posible. Para obtener esa expresión sencilla de la suma, antes es necesario observar y utilizar una propiedad de las progresiones aritméticas.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula la suma de los seis primeros términos de la progresión aritmética a → 7, 10, 13, 16, 19, 22,....

Resolución: como solo hay seis sumandos, podemos hacer directamente la suma sin dificultad: 7+10+13+16+19+22 = 87. Solución: 87.

También podemos darnos cuenta de que $7+22=29$, $10+19=29$ y $13+16=29$, con lo que la operación de suma se podría hacer así: $29 \cdot 3 = 87$, ya que hay tres sumas.

Ejemplo 2

Enunciado: calcula la suma de los 18 primeros términos de la progresión aritmética b → 11, 28, 45, 62, 79, 96, 113, 130, 147, 164, 181, 198, 215, 232, 249,...

Resolución: ahora hay más sumandos que antes, la suma empieza a ser más difícil de realizar en la práctica, por lo que es más necesario encontrar un método alternativo. Nos damos cuenta de que $11+249=260$, $28+232=260$, $45+215=260$, etc.

Por tanto, la operación de la suma se puede hacer así: $260 \cdot 9 = 2340$, ya que hay nueve sumas que dan el resultado 260. Solución: 2340.

Ejemplo 3

Enunciado: calcula la suma de los 246 primeros términos de la progresión aritmética c → 8, 19, 30, 41,...

Resolución: cuando el número de sumandos es realmente alto, hay que encontrar métodos más eficientes. Esto es una parte importante de la matemática.

Comenzamos por calcular la diferencia: $d = c_2 - c_1 = 19 - 8 = 11$

Calculamos el último término que hay que sumar:

$c_{246} = c_1 + (246-1)d = 8 + 245 \cdot 11 = 21\,560$.

Y ahora el punto clave de todo el método: el primer término y el último suman lo mismo que el segundo y el penúltimo: $c_1 + c_{246} = c_2 + c_{245} = 21\,568$. Observa cómo lo podemos saber incluso sin hacer operaciones con números:

$c_2 + c_{245} = (c_1+d) + (c_{246}-d) = c_1 + d + c_{246} - d = c_1 + c_{246}$

Como hay que sumar 246 términos, los podemos emparejar formando $246 : 2 = 123$ parejas. Y como cada pareja suma 21 568, el total es $21\,568 \cdot 123 = 2\,652\,864$.

Solución: 2 652 864.

Ejemplo 4

Enunciado: calcula la suma de los siete primeros términos de la progresión aritmética e → 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25,...

Resolución: en los tres ejemplos anteriores el número de términos que había que sumar era par y los podíamos emparejar perfectamente. Ahora el número de términos es impar, pero podemos aplicar el mismo procedimiento que antes porque la suma del primero y el último es el doble que el término central: $1 + 25 = 2 \cdot 13$ y por tanto podemos considerar que el número de parejas es $7/2$.

Suma = $(1+25) \cdot \dfrac{7}{2} = 26 \cdot \dfrac{7}{2} = 13 \cdot 7 = 91$. Solución: 91.

Propiedad de las progresiones aritméticas

Si «a» es una progresión aritmética y «n» es un número natural mayor o igual a 3, se verifica

$$\boxed{a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}}$$

Ejemplo 1

Consideramos la progresión aritmética b → 15, 21, 27, 33, 39,... y el número $n = 5$.

La propiedad afirma que $b_1 + b_5 = b_2 + b_4$, cosa que es cierta porque

$b_1 + b_5 = 15 + 39 = 54$ y $b_2 + b_4 = 21 + 33 = 54$.

Demostración

Llamamos «d» a la diferencia de la progresión aritmética «a».

Sabemos que $a_2 = a_1 + d$ y que $a_{n-1} = a_n - d$. Por tanto:

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$

Consecuencia de la propiedad

Una vez demostrada la propiedad, sería fácil demostrar que hay muchas otras sumas que dan el mismo resultado:

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = a_5 + a_{n-4} = \dots$

Ejemplo 2

Consideramos la progresión aritmética c → 3, 16, 29, 42, 55, 68, 81... y $n = 7$.

$c_1 + c_7 = 3 + 81 = 84$; $c_2 + c_6 = 16 + 68 = 84$; $c_3 + c_5 = 29 + 55 = 84$; $c_4 + c_4 = 2 \cdot 42 = 84$

Enunciados

③ En la progresión aritmética «e» se sabe que $e_1 = -31$ y $e_{53} = 77$. Calcula e_{27}.

④ En la progresión aritmética «f» se sabe que $f_1 = 71$ y la diferencia es –7. Calcula el valor de «$f_2 + f_{74}$».

⑤ Calcula la suma de los tres primeros términos de la progresión aritmética «g» sabiendo que $g_2 = 79$.

Resoluciones

③ El término 27 de la sucesión es el término que queda en el centro entre el 1 y el 53, ya que $\frac{1+53}{2} = 27$.

Aplicando la propiedad sabemos que $e_1 + e_{53} = e_{27} + e_{27} = 2 \cdot e_{27}$, por tanto:

$e_{27} = \frac{e_1+e_{53}}{2} = \frac{-31+77}{2} = 23$. Solución: 23.

④ $f_{75} = f_1 + (75-1)d = 71 + 74\cdot(-7) = -447$.

$f_2 + f_{74} = f_1 + f_{75} = 71 + (-447) = -376$. Solución: –376.

⑤ Las demostraciones en matemáticas muchas veces son importantes porque nos muestran técnicas que se pueden adaptar a otros problemas. En este caso podemos usar una técnica similar a la demostración de la propiedad:

$g_1 + g_2 + g_3 = (g_2-d) + g_2 + (g_2+d) = 3 \cdot g_2 = 3 \cdot 79 = 237$. Solución: 237.

Expresión de la suma de los primeros términos de una progresión aritmética

Si «a» es una progresión aritmética y «n» es un número natural, llamamos S_n a la suma de los «n» primeros términos; es decir: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Se verifica:

$$\boxed{S_n = (a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2}}$$

Demostración

Sumamos los términos por parejas: «$a_1 + a_n$», «$a_2 + a_{n-1}$», etcétera; si el número de elementos es impar, sumamos el elemento central consigo mismo. Como todas las sumas son iguales, por ser una propiedad de las progresiones aritméticas, y hay $\frac{n}{2}$ parejas, la suma se calcula haciendo el producto de una de las parejas (elegimos la primera) por el número de parejas.

Enunciados

① Calcula la suma de los primeros 25 términos de la progresión aritmética de primer término $b_1 = 82$ y diferencia 17.

② Calcula la suma de los primeros 34 términos de la progresión aritmética de primer término $c_1 = 173$ y diferencia –9.

③ Calcula la suma de los primeros 73 términos de la progresión aritmética «e» sabiendo que $e_1 = 1{,}74$ y $e_2 = 2{,}03$.

Resoluciones

① Calculamos el término 25: $b_{25} = b_1 + (25-1)\cdot d = 82 + 24\cdot 17 = 490$.

Calculadora: 8 2 + 2 4 × 1 7 =

Calculamos la suma: $S_{25} = (b_1+b_{25})\cdot\frac{25}{2} = (82+490)\cdot\frac{25}{2} = 7150$.

Calculadora: (8 2 + Ans) × 2 5 ÷ 2 =

Solución: 7150.

② Calculamos el término 34: $c_{34} = c_1 + (34-1)\cdot d = 173 + 33\cdot(-9) = -124$.

Calculamos la suma: $S_{34} = (c_1+c_{34})\cdot\frac{34}{2} = (173-124)\cdot 17 = 833$.

Solución: 833.

③ Calculamos la diferencia: $d = c_2 - c_1 = 2{,}03 - 1{,}74 = 0{,}29$

Calculamos el término 73: $c_{73} = c_1 + (73-1)\cdot d = 1{,}74 + 72\cdot 0{,}29 = 22{,}62$.

Calculamos la suma: $S_{73} = (c_1+c_{73})\cdot\frac{73}{2} = (1{,}74+22{,}62)\cdot\frac{73}{2} = 889{,}14$.

Solución: 889,14.

Enunciados

① Calcula la suma de los primeros 37 términos de la progresión aritmética de primer término $a_1 = 45$ y diferencia 12.

② Calcula la suma de los primeros 93 términos de la progresión aritmética de primer término $b_1 = 255$ y diferencia –8.

③ Calcula la suma de los primeros 58 términos de la progresión aritmética «c» sabiendo que $c_1 = 8{,}31$ y $c_2 = 9{,}15$.

④ Calcula la suma de los primeros 52 términos de la progresión aritmética de primer término $e_1 = 1{,}67$ y diferencia 0,17.

⑤ Calcula la suma de los primeros 108 términos de la progresión aritmética de primer término $f_1 = 17{,}89$ y diferencia –0,11.

⑥ Calcula la suma de los primeros 33 términos de la progresión aritmética «g» sabiendo que $g_1 = 5{,}22$ y $g_2 = 3{,}83$.

⑦ Calcula la suma de los primeros 71 términos de la progresión aritmética de primer término $h_1 = -832$ y diferencia 14.

⑧ Calcula la suma de los primeros 93 términos de la progresión aritmética de primer término $k_1 = 156{,}89$ y diferencia –2,84.

⑨ Calcula la suma de los primeros 332 términos de la progresión aritmética «m» sabiendo que $m_1 = 0{,}331$ y $m_2 = 0{,}387$.

⑩ Calcula la suma de los primeros 99 términos de la progresión aritmética de primer término $p_1 = -189{,}9$ y diferencia 7,8.

⑪ Calcula la suma de los primeros 1045 términos de la progresión aritmética de primer término $q_1 = -377$ y diferencia 0,73.

⑫ Calcula la suma de los primeros 105 términos de la progresión aritmética «r» sabiendo que $r_1 = 22{,}12$ y $r_2 = 20{,}38$.

⑬ Calcula la suma de los primeros 897 términos de la progresión aritmética de primer término $s_1 = 589$ y diferencia –3.

⑭ Calcula la suma de los primeros 762 términos de la progresión aritmética de primer término $t_1 = 0{,}034$ y diferencia 0,003.

⑮ Calcula la suma de los primeros 44 términos de la progresión aritmética «u» sabiendo que $u_1 = 5$ y $u_2 = 5$.

⑯ Calcula la suma de los primeros 93 términos de la progresión aritmética «v» sabiendo que $v_2 = 16$ y $v_3 = 33$.

⑰ Calcula la suma de los primeros 113 términos de la progresión aritmética «w» sabiendo que $v_2 = 426$ y $v_3 = 419$.

Problemas sobre progresiones aritméticas

Las progresiones aritméticas son unas de las sucesiones más sencillas. Aún así, existen multitud de problemas relacionados con su uso, incluso antes de su aplicación a enunciados tomados de la vida real. Este tipo de problemas que parecen muy teóricos te ayudarán a afinar tu conocimiento y sobre todo tu ingenio para aplicar principios simples a enunciados más complejos.

Enunciados

① Dada la progresión aritmética $a \to 11, 14, 17, \ldots$, averigua la expresión más sencilla de a_n.

② Dada la progresión aritmética $b \to -24, -17, -10, \ldots$, calcula la suma de los primeros 23 términos que tienen subíndice par.

③ De la progresión aritmética «c» se sabe que $c_5 = 79$ y $c_{12} = 170$. Calcula la diferencia de la progresión.

Resoluciones

① Calculamos a_1 y la diferencia, que llamamos «d»:

$a_1 = 11$; $d = a_2 - a_1 = 14 - 11 = 3$.

La expresión del término general es $a_n = a_1 + (n-1)d = 11 + (n-1)\cdot 3$.

Simplificamos al máximo la expresión: $a_n = 11 + (n-1)\cdot 3 = 11 + 3n - 3 = 3n + 8$

Solución: $a_n = 3n + 8$

② Calculamos la diferencia, que llamamos «d»: $d = b_2 - b_1 = -17 - (-24) = 7$.

Los términos de la progresión aritmética «b» que tienen índice par forman otra progresión aritmética que llamamos «p», de la que sabemos:

$p_1 = b_2 = -17$; si llamamos «e» a la diferencia de «p»: $e = 2d = 2\cdot 7 = 14$.

Calculamos el término 23 de «p»: $p_{23} = p_1 + (23-1)e = -17 + 22\cdot 14 = 291$.

Calculamos la suma de los primeros 23 términos de «p»:

$$S_{23} = (p_1 + p_{23})\cdot\frac{23}{2} = (-17+291)\cdot\frac{23}{2} = 3151.$$

Solución: 3151

③ Llamamos «d» a la diferencia de la progresión aritmética «c».

Conocemos las expresiones de c_{12} y c_5:

$c_{12} = c_1 + (12-1)d = c_1 + 11d$

$c_5 = c_1 + (5-1)d = c_1 + 4d$

Si restamos las dos igualdades, obtenemos:

$c_{12} - c_5 = (c_1 + 11d) - (c_1 + 4d) = c_1 + 11d - c_1 + 4d = 7d$.

Por tanto, $7d = c_{12} - c_5 = 170 - 79 = 91 \Rightarrow d = 91 : 7 = 13$.

Solución: 13

Enunciados

① De la progresión aritmética «a» se sabe que $a_5 = 57$ y $a_{20} = 762$. Calcula a_1.

② Calcula la diferencia de la progresión aritmética «a» sabiendo que $a_1 = -191$ y $a_7 + a_{18} = 9$.

③ De la progresión aritmética «a» se sabe que $a_4 = 83$. Calcula la suma de los siete primeros términos.

④ Averigua cuatro números que, intercalados entre el -15 y el 40, hagan que entre los seis números formen el comienzo de una progresión aritmética.

⑤ De la progresión aritmética «a» se sabe que $a_1 + a_{21} = 108$. Calcula la siguiente suma: $a_{10} + a_{11} + a_{12}$.

⑥ Calcula la suma de los primeros 75 términos de la progresión aritmética «a» de la que se sabe que el término general es $a_n = 7n - 265$.

⑦ Una progresión aritmética tiene primer término $-16{,}34$ y diferencia 0,21. Calcula la suma de todos los teŕminos que ocupan un lugar que se escribe con exactamente dos cifras.

⑧ Una progresión aritmética tiene primer término -723 y diferencia 17. Calcula qué lugar ocupa el primer término que es positivo.

⑨ Una progresión aritmética tiene primer término -51 y diferencia 9. Calcula la suma de todos los términos con un valor menor que 100.

⑩ Calcula el primer término de una progresión aritmética sabiendo que su diferencia es 19 y que la suma de sus primeros 46 términos es 19 665.

⑪ Una progresión aritmética tiene primer término 846 y diferencia -31. Calcula la suma de todos los términos positivos.

⑫ La progresión aritmética «a» tiene primer término 9 y diferencia 5; la progresión aritmética «b» tiene primer término 1701 y diferencia -7. Averigua para qué valor de «k» se encuentran más cercanos a_k y b_k.

⑬ Consideramos la progresión aritmética «a» de primer término $a_1 = 13$ y diferencia 7. A partir de ella, formamos la sucesión «b» eliminando de la progresión «a» todos los términos que ocupan un lugar que es múltiplo de 3. Calcula la suma de los cien primeros términos de la sucesión «b».

⑭ Consideramos dos progresiones aritméticas: $a \to 1, 5, 9, \ldots$ y $b \to 1, 7, 13, \ldots$ Calcula la suma de todos los números de tres cifras que pertenecen a las dos progresiones.

⑮ Escribimos los números naturales formando grupos cada vez más largos:

$\boxed{1}, \boxed{2, 3,} \boxed{4, 5, 6,} \boxed{7, 8, 9, 10,} \boxed{11, 12, 13, 14, 15,} \boxed{16, 17, 18, 19, 20, 21,} \ldots$

Calcula la suma de todos los números del quincuagésimo grupo.

Progresión geométrica

- ✱ Una progresión geométrica es una sucesión de números en la que cada término se obtiene multiplicando por una cantidad fija el término anterior.
- ✱ La cantidad fija se llama razón de la progresión geométrica.
- ✱ Para conocer completamente una progresión geométrica solo hacen falta dos datos: el primer término y la razón.

Ejemplos

① La progresión geométrica «a» tiene primer término $a_1 = 3$ y razón $R = 2$. Escribe los ocho primeros términos de la progresión geométrica.

Solución: a → 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384,...

② La progresión geométrica «b» tiene primer término $b_1 = -2$ y razón $R = 3$. Escribe los ocho primeros términos de la progresión geométrica.

Solución: b → –2, –6, –18, –54, –162, –486, –1458, –4374,...

③ La progresión geométrica «c» tiene primer término $c_1 = 1$ y razón $R = -2$. Escribe los ocho primeros términos de la progresión geométrica.

Solución: c → 1, –2, 4, –8, 16, –32, 64, –128,...

Propiedad

En toda progresión geométrica se verifica que el cociente entre cualquier término y su anterior es siempre el mismo. Esta propiedad es la que se utiliza para dar el nombre de «razón» a la cantidad por la que se multiplica en cada progresión geométrica (recuerda que razón, en matemáticas, significa cociente).

Ejemplos

④ Estudia si la sucesión d → 3, 15, 75, 375,... es una progresión geométrica y, caso de que lo sea, calcula su razón.

Resolución

$d_2 : d_1 = 15 : 3 = 5$; $d_3 - d_2 = 75 : 15 = 5$; $d_4 : d_3 = 375 : 75 = 5$.

Solución: sí es una progresión geométrica y su razón es 5.

⑤ Estudia si la sucesión e → 3, 12, 36, 144,... es una progresión geométrica y, caso de que lo sea, calcula su razón.

Resolución

$e_2 : e_1 = 12 : 3 = 4$; $e_3 : e_2 = 36 : 12 = 3$.

Solución: no es una progresión geométrica.

Comentario: como $e_2 : e_1 \neq e_3 : e_2$, no es necesario hacer más operaciones.

Obtención de términos con la calculadora

Es fácil ir viendo los términos de una progresión geométrica usando una calculadora. Como ejemplo, explicamos cómo hacerlo con la progresión geométrica «f» de primer término $f_1 = 9$ y razón $R = 7$: `9` `=` ▩ `Ans` `×` `7` `=` ▩ `=` ▩ `=` ▩ `=` ▩ `=` ...

Solución: f → 9, 63, 441, 3087, 21 609, 151 263,...

Enunciados

① Escribe los seis primeros términos de la progresión geométrica «a», que tiene como primer término $a_1 = 1$ y razón $R = 2$.

② Escribe los seis primeros términos de la progresión geométrica «b», que tiene como primer término $b_1 = -3$ y razón $R = 4$.

③ Escribe los seis primeros términos de la progresión geométrica «c», que tiene como primer término $c_1 = 7$ y razón $R = -1$.

④ Escribe los seis primeros términos de la progresión geométrica «d», que tiene como primer término $d_1 = 5$ y razón $R = -2$.

⑤ Estudia si la sucesión $e \rightarrow 7, 14, 28, 56,\ldots$ es una progresión geométrica y, caso de que lo sea, calcula su razón.

⑥ Estudia si la sucesión $f \rightarrow -7, 21, -63, 189,\ldots$ es una progresión geométrica y, caso de que lo sea, calcula su razón.

⑦ Estudia si la sucesión $g \rightarrow 2, 4, 8, 32,\ldots$ es una progresión geométrica y, caso de que lo sea, calcula su razón.

⑧ Estudia si la sucesión $h \rightarrow 31, 31, 31, 31,\ldots$ es una progresión geométrica y, caso de que lo sea, calcula su razón.

⑨ Estudia si la sucesión $k \rightarrow 5, -5, 5, -5,\ldots$ es una progresión geométrica y, caso de que lo sea, calcula su razón.

⑩ Estudia si la sucesión $m \rightarrow 4, 4, -4, -4,\ldots$ es una progresión geométrica y, caso de que lo sea, calcula su razón.

⑪ Con la ayuda de la calculadora, averigua el valor del término décimo de la progresión geométrica «p» de primer término $p_1 = 7$ y razón $R = 9$.

⑫ Con la ayuda de la calculadora, averigua el valor del término undécimo de la progresión geométrica «q» de primer término $q_1 = 2$ y razón $R = 1{,}3$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑬ Con la ayuda de la calculadora, averigua el valor del término undécimo de la progresión geométrica «r» de primer término $r_1 = 2$ y razón $R = 0{,}7$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑭ Con la ayuda de la calculadora, averigua el valor del término duodécimo de la progresión geométrica «s» de primer término $s_1 = 2$ y razón $R = 9{,}3$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑮ Con la ayuda de la calculadora, averigua el valor del término duodécimo de la progresión geométrica «t» de primer término $t_1 = 2$ y razón $R = 0{,}013$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

Término general de una progresión geométrica

La definición de progresión geométrica permite inmediatamente una definición recursiva del término general: si la progresión geométrica «a» tiene razón «R», está claro que «$a_n = a_{n-1} \cdot R$».

Pero hemos visto que las definiciones recursivas son menos útiles para hacer cálculos que las definiciones explícitas, así que buscamos una expresión que permita calcular a_n conocidos n, a_1 y la diferencia, que llamaremos «R».

Sabemos que «$a_2 = a_1 \cdot R$», luego podemos calcular a_3 así:

$a_3 = a_2 \cdot R = (a_1 \cdot R) \cdot R = a_1 \cdot R^2$.

Esto nos permite calcular a_4 a partir de a_1 y R:

$a_4 = a_3 \cdot R = (a_1 \cdot R^2) \cdot R = a_1 \cdot R^3$.

Observamos que para «avanzar» un término en la progresión a partir del primero hay que ir multiplicando una vez por la razón. Por tanto:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot R^{n-1}}$$

Enunciados

① Calcula el término que ocupa el décimo lugar en la progresión geométrica «a» sabiendo que $a_1 = 7$ y la razón es $R = 2$.

② Calcula el término que ocupa el undécimo lugar en la progresión geométrica «b» sabiendo que $b_1 = 6$ y la razón es -2.

③ Calcula el término que ocupa el lugar 23 en la progresión geométrica «c» sabiendo que $c_1 = 1{,}4$ y la razón es 1,13. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

④ Calcula el término que ocupa el lugar 32 en la progresión geométrica «d» sabiendo que $d_1 = 3{,}5$ y la razón es $-0{,}47$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

Resoluciones

① $a_{10} = a_1 \cdot R^{10-1} = 7 \cdot 2^9 = 3584$. Solución: $a_{10} = 3584$

Calculadora: 7 × 2 y^x 9 =

② $b_{11} = b_1 \cdot R^{11-1} = 6 \cdot (-2)^{10} = 6144$. Solución: $b_{11} = 6144$

Calculadora: 6 × ((-) 2) y^x 1 0 =

③ $c_{23} = c_1 \cdot R^{23-1} = 1{,}4 \cdot 1{,}13^{22} = 20{,}59936307$

Calculadora: 1 . 4 × 1 . 1 3 y^x 2 2 =

Solución: $c_{23} = 20{,}60$

④ $d_{32} = d_1 \cdot R^{32-1} = 3{,}5 \cdot (-0{,}47)^{31} = -2{,}393875943 \cdot 10^{10}$

Calculadora: 3 . 5 × ((-) 0 . 4 7) y^x 3 1 =

Solución: $d_{32} = -2{,}394 \cdot 10^{10}$

Enunciados

① Calcula el término que ocupa el sexto lugar en la progresión geométrica «a» sabiendo que $a_1 = 4$ y la razón es 7.

② Calcula el término que ocupa el octavo lugar en la progresión geométrica «b» sabiendo que $b_1 = 5$ y la razón es -3.

③ Calcula el término que ocupa el séptimo lugar en la progresión geométrica «c» sabiendo que $c_1 = -2$ y la razón es 5.

④ Calcula el término que ocupa el sexto lugar en la progresión geométrica «d» sabiendo que $d_1 = -6$ y la razón es -5.

⑤ Calcula el término que ocupa el décimo lugar en la progresión geométrica «e» sabiendo que $e_1 = 0{,}23$ y la razón es 1,2. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑥ Calcula el término que ocupa el sexto lugar en la progresión geométrica «f» sabiendo que $f_1 = 0{,}68$ y la razón es $-1{,}5$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑦ Calcula el término que ocupa el undécimo lugar en la progresión geométrica «g» sabiendo que $g_1 = -0{,}23$ y la razón es 1,17. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑧ Calcula el término que ocupa el duodécimo lugar en la progresión geométrica «h» sabiendo que $h_1 = -2{,}15$ y la razón es $-0{,}93$. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑨ Calcula el término que ocupa el lugar 42 en la progresión geométrica «k» sabiendo que $k_1 = 0{,}88$ y la razón es 2,3. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑩ Calcula el término que ocupa el lugar 57 en la progresión geométrica «m» sabiendo que $m_1 = 4{,}53$ y la razón es 0,113. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑪ Calcula el término que ocupa el lugar 203 en la progresión geométrica «p» sabiendo que $p_1 = 17{,}93$ y la razón es 0,991. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑫ Calcula el término que ocupa el lugar 203 en la progresión geométrica «q» sabiendo que $q_1 = 17{,}93$ y la razón es 1,009. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑬ Calcula el término que ocupa el lugar 2782 en la progresión geométrica «s» sabiendo que $s_1 = 1$ y la razón es 0,927. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑭ Calcula el término que ocupa el lugar 2782 en la progresión geométrica «t» sabiendo que $t_1 = 1$ y la razón es 1,073. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

Aplicaciones de la expresión del término general

Si la progresión geométrica «a» tiene razón «R», sabemos que

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot R^{n-1}}$$

Esta expresión relaciona cuatro cantidades:

- a_1: el primer término de la progresión geométrica.
- R: la razón de la progresión geométrica.
- n: el número del lugar de un término.
- a_n: el valor del término de lugar n.

Por tanto, conocidas tres de las cantidades podremos calcular la que falte. Algunos casos los podemos resolver ya, pero para uno de ellos hay que esperar al nivel 4.

Enunciados

① De la progresión geométrica «a» se sabe que la razón es $R = 2$ y $a_{10} = 3584$. Calcula a_1.

② De la progresión geométrica «b» se sabe que $b_1 = 3$ y $b_4 = -192$. Calcula la razón.

③ De la progresión geométrica «c» se sabe que $c_1 = 5$ y $c_7 = 320$. Calcula la razón.

Resoluciones

① Escribimos la expresión del término de lugar 10 y resolvemos una ecuación en la que la incógnita es a_1.

$a_{10} = a_1 \cdot R^{10-1} \Rightarrow 3584 = a_1 \cdot 2^9 \Rightarrow a_1 = 3584 : 2^9 = 7$

Calculadora: 3 5 8 8 ÷ 2 y^x 9 =

Solución: $a_1 = 7$

② Escribimos la expresión del término de lugar 4 y resolvemos una ecuación en la que la incógnita es la razón, que llamamos «R».

$$b_4 = b_1 \cdot R^{4-1} \Rightarrow -192 = 3 \cdot R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{-192}{3}} = -4$$

Calculadora: $\sqrt[3]{\ }$ ((-) 1 9 2 ÷ 3) =

Solución: –4

③ Escribimos la expresión del término de lugar 7 y resolvemos una ecuación en la que la incógnita es la razón, que llamamos «R».

$$c_7 = c_1 \cdot R^{7-1} \Rightarrow 320 = 5 \cdot R^6 \Rightarrow R = \pm\sqrt[6]{\frac{320}{5}} = \pm\sqrt[6]{64} = \pm 2$$

Sabemos que hay dos números que elevados a la sexta potencia nos dan resultado 64: uno positivo y otro negativo; lo indicamos escribiendo el signo «±» antes de la raíz. La calculadora nos da solo el número positivo.

Calculadora: 6 $\sqrt[x]{\ }$ (3 2 0 ÷ 5) =

Solución: el problema tiene dos soluciones, la razón puede ser 2 o bien –2.

Enunciados

① De la progresión geométrica «a» se sabe que la razón es 6 y $a_5 = 16\,848$. Calcula a_1.

② De la progresión geométrica «b» se sabe que $b_1 = 8$ y $b_8 = 17\,496$. Calcula la razón.

③ De la progresión geométrica «c» se sabe que $c_1 = 5$ y $c_7 = 3645$. Calcula la razón.

④ De la progresión geométrica «d» se sabe que la razón es –5 y $d_6 = 21\,875$. Calcula d_1.

⑤ De la progresión geométrica «e» se sabe que $e_1 = -2$ y $e_6 = -6250$. Calcula la razón.

⑥ De la progresión geométrica «f» se sabe que $f_1 = -2$ y $f_7 = -8192$. Calcula la razón.

⑦ De la progresión geométrica «g» se sabe que la razón es 3 y $g_7 = 15\,309$. Calcula g_1.

⑧ De la progresión geométrica «h» se sabe que $h_1 = 9$ y $h_6 = -2187$. Calcula la razón.

⑨ De la progresión geométrica «k» se sabe que $k_1 = 2$ y $k_7 = 235\,298$. Calcula la razón.

⑩ De la progresión geométrica «m» se sabe que la razón es –5 y $m_9 = 1\,171\,875$. Calcula m_1.

⑪ De la progresión geométrica «p» se sabe que $p_1 = 2$ y $p_6 = 322\,102$. Calcula la razón.

⑫ De la progresión geométrica «q» se sabe que $q_1 = 2$ y $q_9 = 18\,475\,776$. Calcula la razón.

⑬ De la progresión geométrica «s» se sabe que la razón es –2 y $m_{17} = -720\,896$. Calcula m_1.

⑭ De la progresión geométrica «t» se sabe que $t_1 = 2$ y $t_{10} = -3\,906\,250$. Calcula la razón.

⑮ De la progresión geométrica «u» se sabe que $u_1 = -3$ y $u_9 = -196\,608$. Calcula la razón.

⑯ De la progresión geométrica «v» se sabe que $v_2 = -105$ y $v_3 = 735$. Calcula v_1.

⑰ De la progresión geométrica «w» se sabe que $w_1 = 8$ y $w_3 = -32$. Calcula la razón.

Suma de los primeros términos de una progresión geométrica

Si «a» es una progresión geométrica y «n» es un número natural, llamamos S_n a la suma de los «n» primeros términos; es decir: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Ejemplo 1

Enunciado: dada la progresión geométrica «b» de primer término $b_1=7$ y razón 11, calcula la suma de los cinco primeros términos.

Resolución

Los primeros cinco términos son b → 7, 77, 847, 9317, 102 487.

La suma es S_5 = 7 + 77 + 847 + 9317 + 102 487 = 112 735. Solución: 112 735.

Expresión de la suma

Si la razón R es distinta de 1 (R≠1), se verifica:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1\cdot(R^n-1)}{R-1}}$$

Demostración

Por definición, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Multiplicamos la expresión por R: $S_n\cdot R = a_1\cdot R + a_2\cdot R + \ldots + a_n\cdot R = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1}$

Restamos la expresión que acabamos de obtener y la expresión de la suma:

$S_n\cdot R - S_n = (a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

En el primer miembro extraemos factor común y en el segundo simplificamos:

$S_n\cdot(R-1) = a_{n+1} - a_1$

Como R≠1, R–1≠0, R–1 tiene inverso, luego podemos despejar S_n: $S_n=\dfrac{a_{n+1}-a_1}{R-1}$

Usamos la expresión del término a_{n+1} para llegar al resultado final:

$$S_n = \frac{a_{n+1}-a_1}{R-1} = \frac{a_1\cdot R^{n+1-1}-a_1}{R-1} = \frac{a_1\cdot R^n-a_1}{R-1} = \frac{a_1\cdot(R^n-1)}{R-1}$$

Ejemplo 2

Enunciado: dada la progresión geométrica «b» de primer término $b_1=7$ y razón 11, calcula la suma de los cinco primeros términos.

Resolución

$S_5 = \dfrac{b_1\cdot(R^5-1)}{R-1} = \dfrac{7\cdot(11^5-1)}{11-1}$ = 112 735. Solución: 112 735

Calculadora: 7 × (1 1 y^x 5 – 1) ÷ (1 1 – 1) =

Ejemplo 3

Enunciado: dada la progresión geométrica «c» de primer término c_1=4,23 y razón 0,93, calcula la suma de los primeros 47 términos. Da el resultado con seis cifras significativas.

Resolución

$S_{47} = \dfrac{c_1\cdot(R^{47}-1)}{R-1} = \dfrac{4{,}23\cdot(0{,}93^{47}-1)}{0{,}93-1}$ = 58,43358057. Solución: 58,4336

Calculadora: 4 . 2 3 × (0 . 9 3 y^x 4 7 – 1) ÷ (0 . 9 3 – 1) =

Enunciados

① Calcula la suma de los nueve primeros términos de la progresión geométrica de primer término $a_1 = 2$ y razón 3.

② Calcula la suma de los ocho primeros términos de la progresión geométrica de primer término $b_1 = 3$ y razón 2.

③ Calcula la suma de los trece primeros términos de la progresión geométrica de primer término $c_1 = 7$ y razón –2.

④ Calcula la suma de los once primeros términos de la progresión geométrica de primer término $d_1 = 4$ y razón –3.

⑤ Calcula la suma de los 25 primeros términos de la progresión geométrica de primer término $e_1 = 5$ y razón –1.

⑥ Calcula la suma de los 37 primeros términos de la progresión geométrica de primer término $e_1 = 5$ y razón –1.

⑦ Calcula la suma de los quince primeros términos de la progresión geométrica de primer término $f_1 = -1$ y razón 2.

⑧ Calcula la suma de los quince primeros términos de la progresión geométrica de primer término $g_1 = -1$ y razón –2.

⑨ Calcula la suma de los cinco primeros términos de la progresión geométrica de primer término $h_1 = 9$ y razón 1,2.

⑩ Calcula la suma de los cinco primeros términos de la progresión geométrica de primer término $k_1 = 9$ y razón 0,8.

Enunciados

Da el resultado de los siguientes ejercicios con seis cifras significativas.

⑪ Calcula la suma de los quince primeros términos de la progresión geométrica de primer término $m_1 = 8{,}15$ y razón 1,082.

⑫ Calcula la suma de los 21 primeros términos de la progresión geométrica de primer término $p_1 = 9{,}17$ y razón 0,912.

⑬ Calcula la suma de los 25 primeros términos de la progresión geométrica de primer término $q_1 = 7{,}38$ y razón –1,037.

⑭ Calcula la suma de los 47 primeros términos de la progresión geométrica de primer término $r_1 = -21{,}3$ y razón –0,921.

⑮ Calcula la suma de los 52 primeros términos de la progresión geométrica de primer término $s_1 = -25{,}87$ y razón –1,117.

⑯ Calcula la suma de los 53 primeros términos de la progresión geométrica de primer término $s_1 = -25{,}87$ y razón –1,117.

Tipos de progresiones geométricas

Según los valores que tomen el primer término y la razón de una progresión geométrica, pueden cambiar algunas de las características de la progresión. Vemos algunas de las posibilidades, que estudiaremos de modo más general en el nivel 5.

Progresiones geométricas acotadas y no acotadas

- ✱ Se dice que una progresión geométrica está acotada cuando se pueden encontrar dos números de modo que todos los términos de la progresión están entre los dos números.
- ✱ Se dice que una progresión geométrica no está acotada cuando no se pueden encontrar dos números de modo que todos los términos de la progresión estén entre los dos números.

Ejemplos

① La progresión geométrica «a» de primer término $a_1=2$ y razón 3 no está acotada: $a \to 2, 6, 18, 54,\ldots$

② La progresión geométrica «b» de primer término $b_1=3$ y razón -2 no está acotada: $b \to 3, -6, 12, -24,\ldots$

③ La progresión geométrica «c» de primer término $c_1=4$ y razón 0,5 está acotada: $c \to 4;\ 2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}25\ldots$

④ La progresión geométrica «d» de primer término $d_1=-1$ y razón $-0{,}2$ está acotada: $d \to -1;\ 0{,}2;\ -0{,}04;\ 0{,}008;\ -0{,}0016\ldots$

Progresiones geométricas oscilantes

Se dice que una progresión geométrica es oscilante cuando sus términos van cambiando de signo alternativamente.

Ejemplos

⑤ La progresión geométrica «b» del ejemplo (2) es oscilante.

⑥ La progresión geométrica «d» del ejemplo (4) es oscilante.

Propiedades

Llamamos R a la razón de la progresión geométrica. Se verifica:

- ✱ Si $|R| > 1$, la progresión geométrica no está acotada.
- ✱ Si $|R| < 1$, la progresión geométrica está acotada.
- ✱ Si $R < 0$, la progresión es oscilante.

Casos particulares

Llamamos R a la razón de la progresión geométrica y a_1 al primer elemento Hay cuatro casos, especialmente sencillos, que deberás examinar tú mismo:

- ✱ $a_1 = 0$
- ✱ $R = -1$
- ✱ $R = 0$
- ✱ $R = 1$

Te puedes poner algún ejemplo y enseguida verás qué les ocurre a cada una.

Propiedades de las progresiones geométricas no acotadas

- ✱ Si una progresión geométrica no está acotada, los valores absolutos de sus términos toman valores mayores que cualquier número que pensemos, da igual que los términos sean positivos, negativos o la progresión sea oscilante.
- ✱ Si una progresión geométrica no está acotada, los valores absolutos de la suma de sus primeros términos toman valores mayores que cualquier número que pensemos, da igual que los términos sean positivos, negativos o la progresión sea oscilante.
- ✱ Es seguro que a partir de algún momento, los valores de los términos de la sucesión y de la suma de los primeros términos serán de tal magnitud que no se podrán calcular con una calculadora científica escolar.

Propiedad de las progresiones geométricas acotadas

- ✱ Si una progresión geométrica está acotada, los valores absolutos de sus términos toman valores tan cercanos a cero como queramos, da igual que los términos sean positivos, negativos o la progresión sea oscilante.
- ✱ Es seguro que a partir de algún momento, los valores de los términos de la sucesión serán de tal magnitud que no se podrán calcular con una calculadora científica escolar.

Enunciados

① Calcula con cuatro cifras significativas el valor del término de lugar 42 de la progresión geométrica «a» de primer término a_1=2 y razón 3.

② Calcula con cuatro cifras significativas el valor del término de lugar 87 de la progresión geométrica «b» de primer término b_1=7 y razón 25.

③ Calcula con cuatro cifras significativas la suma de los primeros 51 términos de la progresión geométrica «c» de primer término c_1=3 y razón 2.

④ Calcula con cuatro cifras significativas la suma de los primeros 211 términos de la progresión geométrica «d» de primer término d_1=8 y razón –5.

⑤ Calcula con cuatro cifras significativas los valores de los términos de lugar 39 y 90 de la progresión geométrica «e» de primer término e_1=19 y razón 0,07.

Resoluciones

① $a_{42} = a_1 \cdot R^{42-1} = 2 \cdot 3^{41} = 7{,}294599275 \cdot 10^{19}$. Solución: $7{,}295 \cdot 10^{19}$

② $b_{87} = b_1 \cdot R^{87-1} = 7 \cdot 25^{86} =$ (excede de la capacidad de la calculadora)

③ $S_{51} = \dfrac{c_1 \cdot (R^{51}-1)}{R-1} = \dfrac{3 \cdot (2^{51}-1)}{2-1} = 6{,}755399441 \cdot 10^{15}$. Solución: $6{,}755 \cdot 10^{15}$

④ $S_{211} = \dfrac{d_1 \cdot (R^{211}-1)}{R-1} = \dfrac{8 \cdot ((-5)^{211}-1)}{-5-1} =$ (excede de la capacidad de la calculadora)

⑤ $e_{39} = e_1 \cdot R^{39-1} = 19 \cdot 0{,}27^{38} = 2{,}46871417 \cdot 10^{-43}$. Solución: $2{,}469 \cdot 10^{-43}$

$e_{90} = e1 \cdot R^{90-1} = 19 \cdot 0{,}07^{89} =$ (excede de la capacidad de la calculadora)

(Observa que en la calculadora se obtiene el valor 0).

Enunciados

Da el resultado de los siguientes ejercicios con cinco cifras significativas.

① Calcula el valor del término de lugar 23 de la progresión geométrica «a» de primer término $a_1=2$ y razón 4,3.

② Calcula la suma de los primeros 16 términos de la progresión geométrica «b» de primer término $b_1=1{,}19$ y razón 8,2.

③ Calcula el valor del término de lugar 38 de la progresión geométrica «c» de primer término $c_1=4{,}1$ y razón 0,12.

④ Calcula el valor del término de lugar 72 de la progresión geométrica «d» de primer término $d_1=3$ y razón –2,1.

⑤ Calcula la suma de los primeros 55 términos de la progresión geométrica «e» de primer término $e_1=2{,}6$ y razón –1,92.

⑥ Calcula el valor del término de lugar 98 de la progresión geométrica «f» de primer término $f_1=8{,}2$ y razón –0,71.

⑦ Calcula el valor del término de lugar 21 de la progresión geométrica «g» de primer término $g_1=1{,}8$ y razón 2,7.

⑧ Calcula la suma de los primeros 63 términos de la progresión geométrica «h» de primer término $h_1=3{,}1$ y razón 1,2.

⑨ Calcula el valor del sexto término de la progresión geométrica «k» de primer término $k_1=0{,}5$ y razón 0,045.

⑩ Calcula el valor del término de lugar 15 de la progresión geométrica «m» de primer término $m_1=-5{,}7$ y razón 4,2.

⑪ Calcula la suma de los primeros 61 términos de la progresión geométrica «p» de primer término $p_1=-2{,}3$ y razón 1,32.

⑫ Calcula el valor del término de lugar 63 de la progresión geométrica «q» de primer término $q_1=-1{,}8$ y razón 0,92.

⑬ Calcula el valor del término de lugar 142 de la progresión geométrica «s» de primer término $s_1=4$ y razón 5.

⑭ Calcula la suma de los primeros 89 términos de la progresión geométrica «t» de primer término $t_1=7$ y razón 13.

⑮ Calcula el valor del término de lugar 113 de la progresión geométrica «u» de primer término $u_1=5$ y razón 0,13.

⑯ Calcula la suma de los primeros 15 términos de la progresión geométrica «v» de primer término $v_1=1$ y razón 0,5.

⑰ Calcula la suma de los primeros 16 términos de la progresión geométrica «v» de primer término $v_1=1$ y razón 0,5.

¿Se pueden sumar todos los términos de una progresión geométrica?

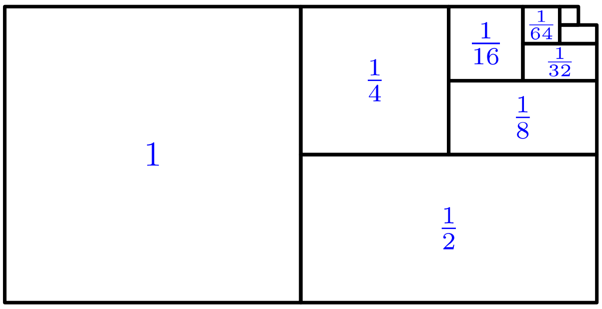
Quizá tu primera impresión ante esta pregunta sea contestar: «no se puede, porque son infinitos». Desde luego, no es lo mismo calcular la suma de los primeros términos de una progresión geométrica (para la que tenemos una expresión), aunque sean muchos, que calcular la suma de **todos** ellos. En la investigación matemática hay espacio para la experimentación, así que vamos a estudiar tres ejemplos para buscar inspiración. En todos ellos te sugerimos que primero los pienses tú mismo, nada más leer el enunciado.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «a» de primer término $a_1=1$ y razón ½.

Estudio. La progresión: a → 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,... La suma pedida: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$

Para ayudarte a investigar si tiene sentido esta suma, la visualizamos con rectángulos que tengan como superficie los términos de la sucesión, colocándolos con habilidad:



Solución: 2.

Ejemplo 2

Enunciado: calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «b» de primer término $a_1=1$ y razón 0,1.

Estudio. La progresión: b → 1; 0,1; 0,01;... La suma pedida: 1+0,1+0,01+0,001+...

Ya trabajamos en el nivel 2 con números parecidos a estos, los números decimales periódicos. **Solución**: $1,\overline{1}$.

Ejemplo 3

Enunciado: calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «c» de primer término $c_1=3$ y razón 10.

Estudio. La progresión: c → 3, 30, 300,... La suma pedida: 3+30+300+3000+...

Observa que en este caso no podemos considerar el número 333333... con infinitas cifras, porque aunque sí existen números con infinitas cifras en la parte decimal, no existen números con infinitas cifras en la parte entera.

Solución: la suma no tiene sentido.

Idea provisional

En algunos casos es posible averiguar la suma de todos los términos de una progresión geométrica; pero en otros casos la suma no tiene sentido, porque crece (en valor absoluto) por encima de cualquier número que imaginemos.

Ejemplo de suma de todos los términos de una progresión geométrica

Estudiamos el problema de calcular la suma de todos los términos de la progresión geométrica «a» de primer término $a_1 = 2$ y razón $R = -0{,}25$.

Para hacernos una idea de lo que ocurre, vamos a ir calculando distintos valores de los términos, de la razón elevada a una potencia y de la suma de los primeros términos.

Usaremos las fórmulas $a_n = a_1 \cdot R^{n-1}$ y $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (R^n - 1)}{R-1}$.

Para presentar los resultados de la manera más clara para la explicación, redondeamos casi todos. Observa con atención lo que va sucediendo:

n	a_n	R^n	S_n
1	2	–0,25	2
2	–0,5	0,0625	1,5
3	0,125	–0,015625	1,625
4	–0,03125	0,003906	1,59375
5	0,007813	–0,0009766	1,601563
6	–0,001953	0,000244	1,599609

n	a_n	R^n	S_n
7	0,000488	–0,000061	1,600098
8	–0,000122	0,000015	1,599976
16	$-1{,}9 \cdot 10^{-9}$	$2{,}3 \cdot 10^{-10}$	1,5999999996
17	$4{,}7 \cdot 10^{-10}$	$-5{,}8 \cdot 10^{-11}$	1,6000000001
164	$-1{,}4 \cdot 10^{-98}$	$1{,}8 \cdot 10^{-99}$	1,6 (¿seguro?)
165	$3{,}6 \cdot 10^{-99}$	0 (¿seguro?)	1,6 (¿seguro?)

Conforme la «n» va tomando valores cada vez mayores:

- Los valores de «a_n» van siendo más próximos a 0.
- Los valores de «R^n» van siendo más próximos a 0.
- Los valores de «S_n» van siendo más próximos a 1,6.

Para n=164 vemos que el resultado de S_n es tan cercano a 1,6 que una calculadora científica escolar no puede calcular la diferencia y ofrece como resultado «1,6».

Para n=165 vemos que el valor de «R^n» es tan próximo a 0 que su valor excede la capacidad de esa calculadora, que ofrece como resultado «0».

Está claro que para valores de «n» mayores de 165, el valor de «R^n» es tan sumamente próximo a 0 que para cualquier aplicación práctica se puede considerar que es 0.

Ahora viene el punto más importante de todo este desarrollo: si llamamos S a la suma de todos los términos de la progresión geométrica, podemos asegurar que su valor se obtiene haciendo «0» el valor de «R^n» en la fórmula de S_n:

$$S = \frac{a_1 \cdot (R^n - 1)}{R-1} = \frac{a_1 \cdot (0-1)}{R-1} = \frac{a_1 \cdot (-1)}{R-1} = \frac{-a_1}{R-1} = \frac{-2}{-0{,}25-1} = \frac{-2}{-1{,}25} = 1{,}6$$

Hemos obtenido como valor **exacto** de la suma de todos los términos de la progresión geométrica «a» el número 1,6.

Generalización

Hemos visto que lo más importante para poder calcular la suma de todos los términos de la progresión geométrica ha sido que R^n tome valores tan próximos a 0 como se desee. Se sabe que esto solo ocurre para valores de R que estén entre –1 y 1. Es decir, debe ocurrir que $-1 < R < 1$, condición que también se escribe así:

$$\boxed{|R| < 1}$$

Expresión de la suma de todos los términos de una progresión geométrica

Consideramos la progresión geométrica «a» de primer término a_1 y razón R. Si se verifica que $|R|<1$, se puede calcular la suma de todos los términos de la progresión; si la llamamos S, se puede calcular así:

$$\boxed{S=\frac{a_1}{1-R}}$$

Justificación

Cuando $|R|<1$, se verifica que el valor de R^n se puede aproximar a 0 tanto como se quiera, luego la suma de todos los términos de la progresión geométrica se puede obtener haciendo «0» el valor de «R^n» en la fórmula de S_n:

$$S = \frac{a_1\cdot(R^n-1)}{R-1} = \frac{a_1\cdot(0-1)}{R-1} = \frac{a_1\cdot(-1)}{R-1} = \frac{-a_1}{R-1} = \frac{a_1}{1-R}$$

En el último paso hemos cambiado el signo del numerador y del denominador.

Enunciados

① Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «b» sabiendo que $b_1 = 3$ y la razón es 2.

② Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «c» sabiendo que $c_1 = 4$ y la razón es –3.

③ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «d» sabiendo que $d_1 = 4{,}2$ y la razón es 0,3.

④ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «e» sabiendo que $e_1 = 9$ y la razón es –0,44.

⑤ Calcula con cinco cifras significativas la suma de todos los términos de la progresión geométrica «f» sabiendo que $f_1 = 5{,}2$ y la razón es 0,177.

⑥ Calcula como fracción irreducible la suma de todos los términos de la progresión geométrica «g» sabiendo que $g_1 = 1$ y la razón es 0,1.

Resoluciones

① La suma no tiene sentido porque la razón es mayor que 1.

② La suma no tiene sentido porque la razón es menor que –1.

③ $S = \frac{d_1}{1-R} = \frac{4{,}2}{1-0{,}3} = 6$. Solución: 6. Calculadora: 4 . 2 ÷ 0 . 7 =

④ $S = \frac{e_1}{1-R} = \frac{9}{1-(-0{,}44)} = 6{,}25$. Solución: 6,25. Calculadora: 9 ÷ 1 . 4 4 =

⑤ $S = \frac{f_1}{1-R} = \frac{5{,}2}{1-0{,}177} = 6{,}318347509$. Solución: 6,3183.

Calculadora: 5 . 2 ÷ (1 – 0 . 1 7 7) =

⑥ $S = \frac{g_1}{1-R} = \frac{1}{1-0{,}1} = \frac{1}{0{,}9} = \frac{10}{9}$. Solución: $\frac{10}{9}$

Enunciados

① Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «a» sabiendo que $a_1 = -4{,}5$ y la razón es $-1{,}8$.

② Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «b» sabiendo que $b_1 = 2{,}4$ y la razón es $0{,}4$.

③ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «c» sabiendo que $c_1 = 8$ y la razón es $1{,}09$.

④ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «d» sabiendo que $d_1 = 10$ y la razón es $-0{,}25$.

⑤ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «e» sabiendo que $e_1 = -3$ y la razón es $0{,}7$.

⑥ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «f» sabiendo que $f_1 = -7$ y la razón es $-0{,}4$.

Enunciados

Da el resultado de los siguientes ejercicios con cinco cifras significativas.

⑦ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «g» sabiendo que $g_1 = 13$ y la razón es $0{,}41$.

⑧ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «h» sabiendo que $h_1 = -17$ y la razón es $0{,}65$.

⑨ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «k» sabiendo que $k_1 = 5$ y la razón es $-0{,}337$.

⑩ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «m» sabiendo que $m_1 = -7$ y la razón es $-0{,}293$.

⑪ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «p» sabiendo que $p_1 = 408$ y la razón es $0{,}107$.

⑫ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «q» sabiendo que $q_1 = 511$ y la razón es $-0{,}23$.

Enunciados

Da el resultado de los siguientes ejercicios como fracción irreducible.

⑬ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «r» sabiendo que $r_1 = 3$ y la razón es $0{,}01$.

⑭ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «s» sabiendo que $s_1 = 7/11$ y la razón es $6/13$.

⑮ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «t» sabiendo que $t_1 = -\dfrac{11}{10}$ y la razón es $-\dfrac{7}{15}$.

Problemas sobre progresiones geométricas

Las progresiones geométricas son unas de las sucesiones más sencillas. Aún así, existen multitud de problemas relacionados con su uso, incluso antes de su aplicación a enunciados tomados de la vida real. Este tipo de problemas que parecen muy teóricos te ayudarán a afinar tu conocimiento y sobre todo tu ingenio para aplicar principios simples a enunciados más complejos.

Enunciados

① Dada la progresión geométrica a → 0,5; 1; 2,..., averigua la expresión más sencilla de a_n.

② Dada la progresión geométrica b → –5, 20, –80,..., calcula la suma de los primeros siete términos que tienen subíndice par.

③ De la progresión geométrica «c» se sabe que $c_4 = 3$ y $c_9 = 23\,328$. Calcula la razón de la progresión.

Resoluciones

① Calculamos a_1 y la razón, que llamamos «R»:

$a_1 = 0{,}5$; $R = a_2 : a_1 = 1 : 0{,}5 = 2$.

La expresión del término general es $a_n = a_1 \cdot R^{n-1} = 0{,}5 \cdot 2^{n-1}$.

Simplificamos al máximo la expresión: $a_n = 0{,}5 \cdot 2^{n-1} = 2^{-1} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$

Solución: $a_n = 2^{n-2}$

② Calculamos la razón, que llamamos «R»: $R = b_2 : b_1 = 20 : (-5) = -4$.

Los términos de la progresión geométrica «b» que tienen índice par forman otra progresión geométrica que llamamos «p», de la que sabemos:

$p_1 = b_2 = 20$; si llamamos «T» a la razón de «p»: $T = R^2 = (-4)^2 = 16$.

Calculamos la suma de los primeros siete términos de «p»:

$$S_7 = \frac{p_1 \cdot (T^7 - 1)}{T - 1} = \frac{20 \cdot (16^7 - 1)}{16 - 1} = 357\,913\,940.$$

Solución: $357\,913\,940$

③ Llamamos «R» a la razón de la progresión geométrica «c».

Conocemos las expresiones de c_9 y c_4:

$c_9 = c_1 \cdot R^{9-1} = c_1 \cdot R^8$

$c_4 = c_1 \cdot R^{4-1} = c_1 \cdot R^3$

Si dividimos las dos igualdades, obtenemos:

$c_9 : c_4 = (c_1 \cdot R^8) : (c_1 \cdot R^3) = R^5$.

Por tanto, $R^5 = c_9 : c_4 = 23\,328 : 3 = 7776 \Rightarrow R = \sqrt[5]{7776} = 6$.

Solución: 6

Enunciados

① De la progresión geométrica «a» se sabe que $a_2 = 0{,}2$ y $a_9 = 15\,625$. Calcula a_1.

② Calcula la razón de la progresión geométrica «a» sabiendo que $a_1 = 0{,}0625$ y $a_6 \cdot a_8 = 16$.

③ De la progresión geométrica «a» se sabe que $a_2 = 17$. Calcula el producto de los tres primeros términos.

④ Averigua el número positivo que hay que intercalar entre el 7 y el 1183, para que entre los tres números formen el comienzo de una progresión geométrica.

⑤ Calcula con seis cifras significativas la suma de los veinte primeros términos de la progresión geométrica «a» de la que se sabe que el término general es $a_n = 3 \cdot 2^{1-n}$.

⑥ Una progresión geométrica tiene primer término 4,33 y razón 0,993. Calcula la suma de todos los teŕminos que ocupan un lugar que se escribe con exactamente dos cifras. Da el resultado con siete cifras significativas.

⑦ La progresión geométrica «a» tiene razón 0.

a) Calcula el valor de a_2.

b) Calcula el valor de a_1.

⑧ Calcula el primer término de una progresión geométrica sabiendo que su razón es -3 y que la suma de sus primeros cuatro términos es -160.

⑨ Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica «a» sabiendo que $a_1 = 19$ y la razón es 0.

⑩ Una progresión geométrica tiene primer término $-1{,}57$ y razón $-0{,}9$. Calcula con cuatro cifras significativas la suma de todos los términos positivos.

⑪ Calcula la suma de los primeros 41 términos de la progresión geométrica «a» sabiendo que $a_1 = 17$ y la razón es 1.

⑫ Consideramos la progresión geométrica «a» de primer término $a_1 = 3{,}2$ y razón 0,7. A partir de ella, formamos la sucesión «b» elevando al cuadrado cada término de la progresión «a». Calcula la suma de todos los términos de la sucesión «b». Da el resultado con cuatro cifras significativas.

⑬ Calcula el valor del primer término de la progresión geométrica «a» sabiendo que su razón es 2,78 y la suma de sus primeros 998 términos es 0.

⑭ La suma de todos los términos de la progresión geométrica «a» es $5/3$ y la razón de la progresión es $3/5$. Expresa como fracción irreducible el valor de a_1.

⑮ Calcula la razón de la progresión geométrica «a» sabiendo que $a_1=7$ y la suma de todos sus términos es 28.

⑯ De la progresión geométrica «a» se sabe que $a_1=2$ y la razón es 131. Averigua cuál es el termino que vale 189 247 873.

Uso de progresiones para resolver problemas

Cuando en el enunciado de un problema se reconoce que aparece una progresión, el método de resolución se puede simplificar mucho si se aplica el conocimiento que tenemos de las progresiones. Algunos consejos:

* Estudia si en el enunciado aparecen cantidades que formen una progresión; incluso aunque no sean infinitas, se podrán aplicar muchas de las expresiones.
* Averigua si la progresión es aritmética o geométrica. Para ello, estudia si los números se obtienen sumando o multiplicando una cantidad fija; recuerda que las diferencias y los cocientes hay que expresarlos como sumas y productos, respectivamente.
* Expresa las cantidades que aparezcan en el enunciado como elementos de la progresión: nos pueden estar dando los valores de algún término, la diferencia, el número de términos, etc.
* Expresa la cantidad que te soliciten que calcules como algún elemento de la progresión: podrías necesitar calcular un término de la progresión, alguna suma de términos, etc.

Enunciado

Calcula la suma de todos los múltiplos positivos de 17 que tienen cuatro cifras.

Resolución

Los múltiplos de 17 forman una progresión aritmética de diferencia 17.

Llamamos «a» a la progresión aritmética formada por todos los múltiplos de 17, comenzando por el primero que tiene cuatro cifras.

En el enunciado se pide la suma de los primeros términos de la progresión; la expresión que vamos a aplicar es $S_n = (a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2}$. Por tanto, para poder aplicarla debemos averiguar a_1, a_n y n.

El primer número de cuatro cifras es el 1000, pero no es múltiplo de 17; con la ayuda de la calculadora, vamos avanzando de uno en uno hasta encontrar el primer número de cuatro cifras que es múltiplo de 17: es el 1003.

El último número de cuatro cifras es el 9999, pero no es múltiplo de 17; con la ayuda de la calculadora, vamos retrocediendo de uno en uno hasta encontrar el último número de cuatro cifras que es múltiplo de 17: es el 9996.

Ya sabemos que $a_1 = 1003$ y $a_n = 9996$; con esos datos, calculamos n:

$$a_n = a_1+(n-1)d \Rightarrow 9996 = 1003+(n-1)\cdot 17 \Rightarrow n = \frac{9996-1003}{17}+1 = 530.$$

Ya podemos aplicar la expresión de la suma:

$$S_n = (a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2} = (1003+9996)\cdot\frac{530}{2} = 2\,914\,735.$$

Solución: 2 914 735

Varios métodos para resolver problemas

Sabemos que en muchas ocasiones existe más de un método para resolver problemas. Estudiamos un ejemplo que ilustra este hecho con mucha claridad, aunque luego veremos que realmente hay una profunda relación entre los dos métodos.

Torneos deportivos

En muchos torneos deportivos se utiliza el método de eliminación directa: el equipo, jugador o jugadora que pierde el encuentro queda eliminado. Para poder aplicar el método es necesario que el número de participantes sea una potencia de dos. Por ejemplo, en los cuadros individuales sénior de los Grand Slam de tenis participan 128 personas ($128 = 2^7$).

Enunciado

Calcula cuántos partidos se celebran en un cuadro individual de un Grand Slam de tenis, sabiendo que participan 128 personas y se juega por eliminación directa.

Resolución usando progresiones

El número de partidos en cada ronda, contados desde la final hacia atrás, forman una progresión geométrica de razón 2 porque en cada ronda se juega el doble de partidos que en la siguiente.

El primer término de la progresión es el partido de la final: $1 = 2^0$.

El último término que hay que sumar es el número de partidos de la primera ronda, que es el número inicial de jugadores dividido entre dos: $128 : 2 = 64 = 2^6$.

Por tanto, el número total de partidos es $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$; es decir, la suma de los primeros siete términos de la progresión geométrica «a» de primer término $a_1 = 1$ y razón $R = 2$.

$$S_7 = \frac{a_1 \cdot (R^7 - 1)}{R - 1} = \frac{1 \cdot (2^7 - 1)}{2 - 1} = \frac{2^7 - 1}{1} = 2^7 - 1 = 127$$

Solución: 127

Resolución usando otro método

Podemos calcular el número de partidos disputados calculando el número de participantes que pierden un partido, porque en cada partido siempre hay exactamente un perdedor y ninguna persona pierde más de un partido, porque queda eliminada.

Participan 128 personas y solo gana el torneo una, luego pierden un partido todas las demás: $128 - 1 = 127$.

Solución: 127

Explicación teórica

Puede parecer sorprendente que dos métodos tan diferentes sean correctos, pero hay que fijarse en que el razonamiento del primer método nos ha demostrado que

$$\boxed{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 2^7 - 1}$$

Esta expresión, obtenida usando la suma de los primeros términos de una progresión geométrica, nos relaciona perfectamente los dos métodos de resolución.

Problema

Calcula cuántos partidos se celebran en una competición, sabiendo que participan 1024 equipos y se juega por eliminación directa. Solución: 1023.

Enunciados

① Calcula la suma de todos los múltiplos de 3 que hay entre 332 y 997.

② El ajedrez es un juego de mesa (incluso un deporte) que se juega en un tablero con 64 casillas llamadas escaques. Cuenta la leyenda de su creación que un rey quedó tan maravillado con él que ofreció a su inventor lo que este quisiera. El inventor del ajedrez solicitó que el rey pusiera un grano de trigo en el primer escaque, fuera doblando la cantidad escaque tras escaque y le entregara todo el trigo. Calcula las siguientes cantidades y da el resultado con siete cifras significativas:

a) ¿Cuántos granos tendría que poner el rey en el vigésimo cuarto escaque?

b) ¿Cuántos granos tendría que poner el rey en el último escaque?

c) ¿Cuántos granos tendría que entregar el rey en total?

③ Una persona decide comenzar a entrenar para participar en una carrera popular; su plan consiste en correr tres kilómetros el primer día, aumentar la distancia 500 metros diarios y entrenar dos semanas. Calcula en kilómetros:

a) La distancia que corre el undécimo día.

b) La distancia total que corre en las dos semanas.

④ Partimos de una hoja de papel tamaño A0 (tiene 1 m^2 de superficie) y la doblamos por la mitad ocho veces consecutivas. Calcula la superficie del resultado; da la solución en centímetros cuadrados con dos cifras significativas.

⑤ Un médico entrega 759 gramos de medicina a un paciente y le explica cómo debe tomarla: el primer día tomará 66 gramos y cada día tomará tres gramos menos que el anterior, hasta agotar toda medicina que ha recibido. Calcula:

a) ¿Cuántos gramos de medicina tomará el decimotercer día de tratamiento?

b) ¿Cuántos días durará el tratamiento?

⑥ Calcula la suma de todos los números pares positivos de cuatro cifras que no son múltiplos de 5.

⑦ Partimos de un cuadrado de un metro cuadrado de superficie; unimos los puntos medios de los lados para formar un segundo cuadrado y repetimos el proceso continua e indefinidamente. Calcula la suma de las superficies de todos los cuadrados; da el resultado en metros cuadrados.

⑧ Una persona debe regar una fila de 38 árboles separados seis metros entre sí. Tiene un cubo en un pozo que se encuentra a ocho metros del primer árbol. Debe regar cada árbol con un cubo lleno de agua. Responde en metros:

a) Si comienza y termina su trabajo con el cubo vacío sobre el pozo, calcula cuánta distancia recorre para regar todos los árboles.

b) Si usara dos cubos, ¿cuánta recorrería?

Enunciados

① ¿Has visto alguna vez *els castells* (los castillos), esas torres humanas de varios pisos que se suelen hacer en Cataluña y la Comunidad Valenciana? En el piso de arriba hay una sola persona, normalmente un niño. Imagínate que se montara un *castell* en el que cada piso debiera tener dos personas más que el piso de arriba. ¿Cuántas personas harían falta para montar un *castell* con diez pisos?

② Una persona cree que puede ganar en un casino. Para ello va a hacer una primera apuesta de dos euros y cada vez que pierda triplicará la apuesta. ¿Cuánto dinero debe preparar por si perdiera dieciocho veces seguidas?

③ Una persona devuelve una deuda del siguiente modo: el primer mes devuelve 125 € y cada mes devuelve 15 € más que el anterior. Sabiendo que necesita 48 meses para pagar la deuda, calcula a cuánto asciende el total de la deuda.

④ Un juguete mecánico es capaz de dar saltos hacia adelante, pero la longitud de cada paso es tres quintos del paso anterior. Si da un primer salto de cuarenta centímetros y salta seis veces, calcula a qué distancia del origen se queda al final. Da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

⑤ Una persona adolescente les pide a sus padres que le den una paga semanal durante el año de la siguiente forma: la primera semana recibirá trece euros y cada semana recibirá cuatro euros más que la semana anterior. Calcula cuánto dinero recibirá el adolescente al cabo de cincuenta semanas.

⑥ La sucesión «a» tiene como término general $a_n = 1{,}19 \cdot n + 1{,}19^n$. Calcula con seis cifras significativas la suma de los primeros veinte términos.

⑦ Una persona decide extender un rumor. Para ello envía a las 14:00 un mensaje a tres conocidos contando el rumor y pidiéndoles que cada uno reenvíe el mensaje, a los cinco minutos, a tres conocidos y les pidan que continúen así la cadena de mensajes. ¿Cuántos mensajes se habrán enviado hasta las 14:59 si todo el mundo acepta las condiciones?

⑧ Se deja caer una pelota de goma desde la azotea de un edificio que tiene una altura de 243 m. Cada vez que toca el suelo, rebota y recorre hacia arriba una distancia igual a las dos terceras partes de la altura desde la que ha caído la última vez.

a) ¿Desde qué altura ha caído la bola cuando ha tocado el suelo por sexta vez?

b) ¿Qué distancia ha recorrido la bola desde que se ha dejado caer hasta que ha tocado el suelo por sexta vez?

⑨ La progresión geométrica «a» tiene como segundo término $a_2 = 3$ y como razón 0,88; calcula con seis cifras significativas la suma de todos los términos desde el 21 (incluido) en adelante.

⑩ Un *rover* que explora la superficie de Marte avanzará 3,1 metros mañana, pero irá agotando su batería y cada día solo podrá recorrer $6/7$ de la distancia del día anterior. ¿Podrá alcanzar un objetivo que está a 22 metros? ¿Por qué?

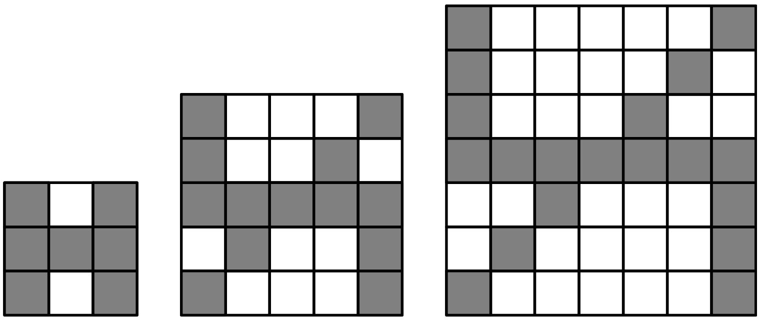
Enunciados

① Escribimos los números impares formando grupos cada vez más largos:

$\boxed{1}$, $\boxed{3, 5,}$ $\boxed{7, 9, 11,}$ $\boxed{13, 15, 17, 19,}$ $\boxed{21, 23, 25, 27, 29,}$ $\boxed{31, 33, 35, 37, 39, 41,}$...

Calcula la suma de todos los números del vigésimo grupo.

② Una persona diseña mosaicos usando baldosas blancas y grises. Se le ocurre una serie de diseños cada vez mayores:



Mosaico 1 Mosaico 2 Mosaico 3

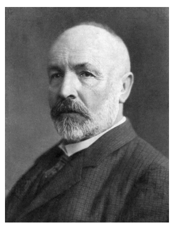
a) ¿Cuántas baldosas grises serían necesarias para construir el mosaico número veinte?

b) ¿Cuál sería el total de baldosas empleadas en el mosaico que tuviera exactamente 211 baldosas grises?

③ El problema número 40 del papiro de Ahmes (escrito a mediados del siglo XVI a. e. c.) pregunta: «Repártanse cien hogazas de pan entre cinco hombres de tal manera que las partes correspondientes estén en progresión aritmética y que además un séptimo de la suma de las tres partes más grandes se igual a la suma de las dos más pequeñas». Resuelve el problema y da el resultado usando números naturales o fracciones irreducibles, lo que sea más sencillo.

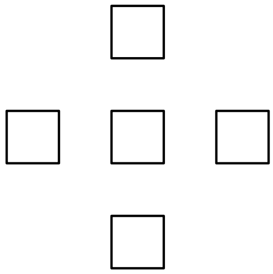
④ El matemático inglés Robert Recorde vivió en el siglo XVI. En uno de sus libros propone este problema: «Si te he vendido un caballo con sus cuatro herraduras y cada herradura con sus seis clavos, bajo la condición de que tú pagarás por el primer clavo una moneda, por el segundo dos monedas, por el tercer clavo cuatro monedas y así sucesivamente, doblando la cantidad cada vez hasta acabar con los clavos, ¿a cuánto asciende el precio del caballo?». Resuelve el problema.

⑤ El matemático Greg Cantor (1845-1918), alemán de origen ruso, hizo importantes investigaciones sobre conjuntos con infinitos elementos. El llamado conjunto de Cantor se comienza a definir de esta manera: «A un segmento de longitud 1 se le suprime el tercio central, a los dos segmentos obtenidos se les suprime los tercios centrales, y así sucesivamente». Calcula la suma de las longitudes de los segmentos que quedan tras realizar diez supresiones. Da el resultado con cinco cifras significativas.



Enunciados

① En un lejano planeta existe una raza inteligente que se caracteriza por construir sus ciudades de una manera especial. Comienzan levantando un edificio central y el resto los añaden por etapas; en la primera etapa construyen un edificio al norte del inicial, otro al sur, otro al este y otro al oeste, todos ellos a la misma distancia que el tamaño del edificio (ver figura). En cada etapa se procede de la misma manera con todos los edificios existentes: se construyen a su alrededor los cuatro edificios correspondientes, salvo aquellos que ya estén construidos de alguna etapa anterior.



a) ¿Cuántos edificios se construyen en la quincuagésima etapa?

b) ¿Cuántos edificios habría en total en la ciudad si se parara la construcción al terminar la trigésima etapa?

② Escribimos las potencias de 2 de exponente natural formando grupos cada vez más largos: $\boxed{2^1}$, $\boxed{2^2, 2^3, 2^4,}$ $\boxed{2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9,}$... Calcula la suma de todos los números del décimo grupo; da el resultado con cuatro cifras significativas.

③ El copo de nieve de Koch es una curva cerrada descrita en 1904 por el matemático sueco Helge von Koch (1870-1924). El método para crearla comienza así: «se parte de un triángulo equilátero; se construye sobre cada lado un triángulo equilátero de longitud un tercio del lado original orientado hacia fuera y se elimina el segmento común al triángulo original y el nuevo; a continuación, se repite el proceso en cada lado de la nueva figura, y así sucesivamente». Para entender el proceso, vemos las cuatro primeras figuras:

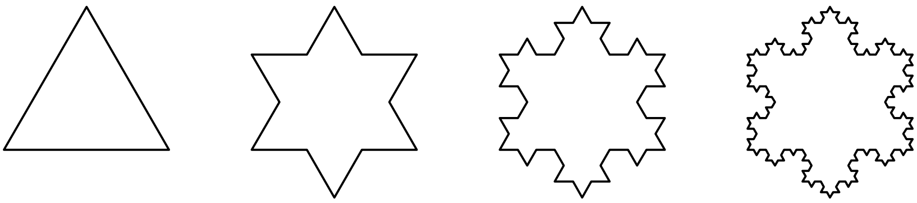


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Calcula cuántos lados tiene la duodécima figura.

b) Si cada lado del triángulo original mide 1 metro, calcula la longitud de cada lado de la novena figura; da el resultado en milímetros con cuatro cifras significativas.

c) Si cada lado del triángulo original mide 1 metro, calcula la longitud del perímetro de la figura 42; da el resultando en kilómetros redondeando a la unidad.

d) Si la superficie del triángulo original mide 1 metro cuadrado, calcula cuánto aumenta la superficie de la cuarta figura respecto a la tercera; da el resultado en metros cuadrados con cuatro cifras significativas.

e) Si la superficie del triángulo original mide 1 metro cuadrado, calcula la superficie de la figura obtenida continuando el proceso indefinidamente.

Fracción algebraica

- ✱ Una fracción algebraica es el cociente indicado de dos polinomios.
- ✱ Con la palabra «indicado» queremos decir que no se ha efectuado la división.
- ✱ En una fracción algebraica el dividendo no puede ser el polinomio «0».

Ejemplos

① En la fracción algebraica $\frac{3x^2+2x+7}{x-5}$ el numerador (o dividendo) es el polinomio «$3x^2+2x+7$» y el denominador (o divisor) es el polinomio «$x-5$».

② En la fracción algebraica $\frac{1}{x^2}$ el numerador (o dividendo) es el polinomio «1» y el denominador (o divisor) es el polinomio «x^2».

③ En la fracción algebraica $\frac{3x^3-6x+9}{-3}$ el numerador (o dividendo) es el polinomio «$3x^3-6x+9$» y el denominador (o divisor) es el polinomio «-3».

④ La expresión $\frac{x^4+11}{0}$ no tiene sentido, luego no es una fracción algebraica, ya que el denominador es «0» y en matemáticas esa división no tiene sentido.

Simplificación de fracciones algebraicas

- ✱ Algunas fracciones algebraicas se pueden simplificar y otras no, como ocurre con las fracciones ordinarias.
- ✱ En muchos casos es difícil saber si una fracción algebraica se puede simplificar, pero hay algunos casos muy fáciles.
- ✱ Algunas fracciones algebraicas se pueden simplificar hasta llegar a convertirlas en un polinomio.
- ✱ La simplificación de fracciones algebraicas se escribe con el signo «=».

Ejemplos

⑤ $$\frac{10x^5+6x^3-14}{22x-2} = \frac{5x^5+3x^3-7}{11x-1}$$

Hemos dividido entre 2 el numerador y el denominador.

⑥ $$\frac{21x^4+7x^2-14}{-7} = 3x^4-x^2+2$$

Hemos efectuado la división y el resultado es un polinomio.

⑦ $$\frac{5x^3+6x^2+9x}{7} = \frac{5}{7}x^3+\frac{6}{7}x^2+\frac{9}{7}$$

Hemos efectuado la división y el resultado es un polinomio. Si se hubiera podido, habríamos simplificado las fracciones que aparecen como coeficientes del polinomio resultado.

⑧ $$\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}$$

Hemos simplificado usando las propiedades de las potencias.

Cociente de monomios

- ✱ Para dividir dos monomios, se simplifican sus coeficientes y se simplifican todas las indeterminadas.
- ✱ Cuando se dividen dos monomios, el denominador no puede ser el monomio «0», ya que la división entre 0 no tiene sentido en matemáticas.

Ejemplos

① $\dfrac{15x^2y^7}{35x^5y^2} = \dfrac{3y^5}{7x^3}$. Explicación:

Simplificamos los coeficientes: $\dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7}$

Simplificamos la indeterminada «x»: $\dfrac{x^2}{x^5} = \dfrac{1}{x^3}$, porque 5–2=3.

Simplificamos la indeterminada «y»: $\dfrac{y^7}{y^2} = \dfrac{y^5}{1}$, porque 7–2=5

② $\dfrac{4x^9}{20x^{11}} = \dfrac{1}{5x^2}$. Explicación:

Simplificamos los coeficientes: $\dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$

Simplificamos la única indeterminada: $\dfrac{x^9}{x^{11}} = \dfrac{1}{x^2}$, porque 11–9=2.

③ $\dfrac{7x^{13}}{5x^9} = \dfrac{7}{5}x^4$. Explicación:

No es posible simplificar los coeficientes.

Simplificamos la única indeterminada: $\dfrac{x^{13}}{x^9} = x^4$, porque 13–9=4.

Resultado de la división

Cuando se dividen dos monomios que solo tienen una indeterminada y es la misma en los dos monomios, el resultado puede ser:

- ✱ Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, el resultado de la división es un monomio. Véase el ejemplo (3).
- ✱ Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el resultado de la división es una fracción algebraica. Véase el ejemplo (2).

Observación

Si el denominador de la división es un número, el resultado es directamente un monomio, que se puede escribir con coeficiente fraccionario, preferiblemente irreducible.

Ejemplo

④ $\dfrac{24x^5}{15} = \dfrac{24}{15}x^5 = \dfrac{8}{5}x^5$

Enunciados

Realiza los siguientes cocientes de monomios. Da el resultado del modo más sencillo posible. Di si el resultado es un monomio o una fracción algebraica.

① $\dfrac{21\,x^6}{3\,x^2}$

② $\dfrac{6\,x^4}{-2}$

③ $\dfrac{8\,x^9}{12\,x^6}$

④ $\dfrac{y^7}{4\,y^9}$

⑤ $\dfrac{17\,z^8}{z^{10}}$

⑥ $\dfrac{-9\,x^5}{3\,x}$

⑦ $\dfrac{6\,x}{2\,x^2}$

⑧ $\dfrac{33\,x^6}{11\,x^6}$

⑨ $\dfrac{-1}{-8\,m^2}$

⑩ $\dfrac{12\,n^3}{4\,n^2}$

⑪ $\dfrac{-11\,n^4}{-33\,n^5}$

⑫ $\dfrac{9\,x^5}{6\,x^2}$

⑬ $\dfrac{z^9}{13\,z^4}$

⑭ $\dfrac{6\,x^4 y^9}{2\,x^8}$

⑮ $\dfrac{-9\,n^3 x^6}{3\,xn}$

⑯ $\dfrac{16\,x^3 z^5}{8\,x^4 z^7}$

⑰ $\dfrac{-7\,xyz}{-14\,x^2 y^2 z^2}$

Cociente de polinomios

* En la división de polinomios no existe la división con decimales, solo existe el equivalente de la división entera.
* Consideramos el problema de dividir un polinomio, el dividendo, entre otro polinomio, el divisor. El objetivo es obtener dos polinomios: el cociente y el resto.

Método para dividir polinomios

* El método para la división de polinomios es muy similar al método para dividir números naturales y se basa en el mismo principio.
* Hay que ir repitiendo estos pasos hasta que ya no se pueda seguir:
  1. Se divide el monomio de mayor grado del dividendo entre el monomio de mayor grado del divisor y así se obtiene un monomio del cociente.
  2. Se resta al dividendo el producto del monomio obtenido en el paso anterior por el divisor y así se obtiene un nuevo dividendo.
  3. Se para el proceso cuando el grado del nuevo dividendo es menor que el grado del divisor.

Ejemplo

Enunciado: divide el polinomio $6x^4+x^3-6x^2+2x-2$ entre el polinomio $2x^2+x-3$.

Resolución

Las tres divisiones de monomios son → $6x^4 : 2x^2 = 3x^2$; $-2x^3 : 2x^2 = -x$; $4x^2 : 2x^2 = 2$

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
6x^4 & +x^3 & -6x^2 & +2x & -2 & 2x^2 & +x & -3 \\ \cline{6-8}
-6x^4 & -3x^3 & +9x^2 & & & 3x^2 & -x & +2 \\ \cline{1-3}
/ & -2x^3 & +3x^2 & +2x & & & & \\
 & 2x^3 & +x^2 & -3x & & & & \\ \cline{2-4}
 & / & 4x^2 & -x & -2 & & & \\
 & & -4x^2 & -2x & +6 & & & \\ \cline{3-5}
 & & / & -3x & +4 & & &
\end{array}
$$

Solución → Cociente: $3x^2-x+2$; resto: $-3x+4$

Propiedades de los grados en el cociente de polinomios

* El grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.
* El grado del resto es menor que el grado del cociente.

Expresión del resultado del cociente

Igual que ocurre con las fracciones ordinarias, realizar el cociente de los polinomios permite escribir dos igualdades que relacionan el dividendo, el divisor, el cociente y el resto. Si llamamos P(x) al dividendo, Q(x) al divisor, C(x) al cociente y R(x) al resto, se verifica:

$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$	$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

Las dos igualdades son importantes y cada una se usa cuando es necesaria.

División exacta

Cuando al dividir se obtiene como resto el polinomio «0», decimos que la división es exacta y las igualdades anteriores se escriben sin el polinomio R(x):

$P(x) = Q(x) \cdot C(x)$	$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x)$

Enunciados

Usando el dividendo y el divisor de cada pregunta, realiza la división de los polinomios, diciendo cuál es el cociente y cuál es el resto. A continuación, escribe dos igualdades que relacionen los cuatro polinomios.

① Dividendo: $3x+6$; divisor: x^2-3x+2

② Dividendo: x^3-3x+4; divisor: x^2+2x-1

③ Dividendo: $-12x^2+28x-15$; divisor: $6x-5$

④ Dividendo: $2x^2+x-3$; divisor: $x-2$

Resoluciones

① Como el grado del dividendo es menor que el grado del divisor, la división no se puede realizar.

② Realizamos la operación:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -3x & +4 & x^2+2x-1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & +x & & x-2 \\
\cline{1-3}
/ & -2x^2 & -2x & +4 & \\
 & 2x^2 & +4x & +2 & \\
\cline{2-4}
 & & 2x & +6 &
\end{array}$$

Solución → cociente: $x-2$; resto: $2x+6$; $x^3-3x+4 = (x^2+2x-1)(x-2)+2x+6$

$$\frac{x^3-3x+4}{x^2+2x-1}=x-2+\frac{2x+6}{x^2+2x-1}$$

③ Realizamos la operación:

$$\begin{array}{rrr|l}
-12x^2 & +28x & -15 & 6x-5 \\
\cline{4-4}
12x^2 & -10x & & -2x+3 \\
\cline{1-2}
/ & 18x & -15 & \\
 & -18x & +15 & \\
\cline{2-3}
 & / & 0 &
\end{array}$$

Solución → cociente: $-2x+3$; resto: 0; $-12x^2+28x-15 = (6x-5)(-2x+3)$

$$\frac{-12x^2+28x15}{6x-5}=-2x+3$$

(Observa que esta división es exacta)

④ Realizamos la operación:

$$\begin{array}{rrr|l}
2x^2 & +x & -3 & x-2 \\
\cline{4-4}
-2x^2 & +4x & & 2x+5 \\
\cline{1-2}
 & 5x & -3 & \\
 & -5x & +10 & \\
\cline{2-3}
 & / & 7 &
\end{array}$$

Solución → cociente: $2x+5$; resto: 5; $2x^2+x-3 = (x-2)(2x+5)+7$

$$\frac{2x^2+x-3}{x-2}=2x+5+\frac{7}{x-2}$$

Enunciados

Usando el dividendo y el divisor de cada pregunta, realiza la división de los polinomios, diciendo cuál es el cociente y cuál es el resto. A continuación, escribe dos igualdades que relacionen los cuatro polinomios.

① Dividendo: $2x^3-7x^2+11x-1$; divisor: $2x-1$

② Dividendo: $x^4-4x^3+4x^2+7x-3$; divisor: x^2-3x+4

③ Dividendo: $2x^3+x-2$; divisor: $x^4+11x-2$

④ Dividendo: $6x^3-x+2$; divisor: x^2-2

⑤ Dividendo: x^3-2x^2-4x+3; divisor: x^2+x-1

⑥ Dividendo: x^5; divisor: x^3-1

⑦ Dividendo: $3x^4+6x^2-5$; divisor: x^2+4x-3

⑧ Dividendo: $6x^3-17x^2+12x-8$; divisor: $2x-3$

⑨ Dividendo: $63x^2-130x+63$; divisor: $9x-7$

⑩ Dividendo: $2x^4-8x^3-2x^2+4x-4$; divisor: $-2x+8$

Enunciados

Usando el dividendo y el divisor de cada pregunta, realiza la división de los polinomios, diciendo cuál es el cociente y cuál es el resto.

① Dividendo: $2x^3-3x^2-13x+12$; divisor: $2x^2+3x-5$

② Dividendo: $6x^3-19x^2+32x-20$; divisor: $6x-7$

③ Dividendo: $2x^4+x^3-5x^2+3x+1$; divisor: x^2+x-2

④ Dividendo: $4x^4-6x^3+2x^2+8x-8$; divisor: $2x^2-3x+4$

⑤ Dividendo: $3x^4-2x^3+16x^2-18x+30$; divisor: $3x^2-5x+6$

⑥ Dividendo: $3x^5-5x^4+7x^3-10x^2+14x-15$; divisor: x^3+x-2

⑦ Dividendo: $6x^4-7x^3-56x^2+81x-29$; divisor: $3x^2+7x-8$

⑧ Dividendo: $2x^5-3x^4+2x^3-3x^2+6x-18$; divisor: $2x-3$

⑨ Dividendo: $-2x^4+3x^3+6x^2-25x+42$; divisor: x^2-3x+5

⑩ Dividendo: $27x^2-69x+14$; divisor: $3x-7$

⑪ Dividendo: $-14x^2+79x-75$; divisor: $7x-8$

⑫ Dividendo: $2x^5-2x^4-3x^3+6x^2+x-3$; divisor: x^3-x^2+2

⑬ Dividendo: $-6x^4+23x^3-39x^2+34x-6$; divisor: $-3x^2+4x+1$

⑭ Dividendo: $15x^2-13x-2$; divisor: $5x-1$

⑮ Dividendo: $3x^4-5x^2+x+2$; divisor: x^2-1

⑯ Dividendo: $3x^4+6x^3+x^2-4x-7$; divisor: $3x^2+3x-5$

⑰ Dividendo: $6x^4-11x^3+6x^2-3$; divisor: $3x^2-4x+1$

⑱ Dividendo: $2x^5+x^4+3x^3-4x^2-2x-9$; divisor: x^3-x^2+x-2

⑲ Dividendo: $-6x^4+3x^3-4x^2+9x-2$; divisor: $-2x^2+x$

⑳ Dividendo: $x^4-4x^3+10x^2-12x+9$; divisor: x^2-2x+3

㉑ Dividendo: $3x^4+5x^3-4x^2+5x+4$; divisor: $3x+2$

㉒ Dividendo: $2x^4-5x^3+2x^2-7x+6$; divisor: $2x-5$

㉓ Dividendo: $-15x^3+18x^2-13x-2$; divisor: $-5x+1$

㉔ Dividendo: $6x^2+13x+7$; divisor: $3x+2$

㉕ Dividendo: $x^4+3x^3-13x^2+32x-25$; divisor: x^2-2x+3

㉖ Dividendo: $-2x^4+5x^3+28x^2+3x+4$; divisor: $-x^2+5x+1$

Fracciones en un cociente de polinomios

Si el dividendo o el divisor de un cociente de polinomios tiene alguna fracción en los coeficientes, siempre es posible eliminarlas multiplicando el numerador y el denominador por el mínimo común múltiplo de los denominadores de todos los coeficientes.

Ejemplo 1

El cociente $\dfrac{\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}x+1}{\frac{2}{9}x-\frac{1}{2}}$ se puede transformar en un cociente sin denominadores en los coeficientes.

Los denominadores de los coeficientes son 3, 4, 1, 9 y 2. mcm(3, 4, 1, 9, 2) = 36.

Si multiplicamos el numerador y el denominador por 36, obtenemos:

$$\frac{\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}x+1}{\frac{2}{9}x-\frac{1}{2}} = \frac{36\cdot\frac{1}{3}x^2+36\cdot\frac{3}{4}x+36}{36\cdot\frac{2}{9}x-36\cdot\frac{1}{2}} = \frac{12x^2+27x+36}{8x-18}$$

Fracciones en el desarrollo de la operación del cociente

Incluso cuando todos los coeficientes de los polinomios de un cociente son números enteros, lo más probable es que aparezcan fracciones al hacer la operación. De hecho, para conseguir que no aparezcan en un ejercicio es necesario prepararlo de antemano.

Ejemplo 2

Dividendo: $3x^2+4x+5$; divisor: $2x+3$

$$\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & +4x & +5 & 2x+3 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & -\frac{9}{2}x & & \frac{3}{2}x-\frac{1}{4} \\ \cline{1-2}
/ & -\frac{1}{2}x & +5 & \\
 & \frac{1}{2}x & +\frac{3}{4} & \\ \cline{2-3}
 & / & \frac{23}{4} &
\end{array}$$

Cociente: $\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$; resto: $\frac{23}{4}$

Ejemplo 3

Dividendo: $2x^3-3x^2+x-2$; divisor: $3x^2-x+1$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -3x^2 & +x & -2 & 3x^2-x+1 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +\frac{2}{3}x^2 & -\frac{2}{3}x & & \frac{2}{3}x-\frac{7}{9} \\ \cline{1-3}
/ & -\frac{7}{3}x^2 & +\frac{1}{3}x & -2 & \\
 & \frac{7}{3}x^2 & -\frac{7}{9}x & +\frac{7}{9} & \\ \cline{2-4}
 & / & -\frac{4}{9} & -\frac{11}{9} &
\end{array}$$

Cociente: $\frac{2}{3}x-\frac{7}{9}$; resto: $-\frac{4}{9}x-\frac{11}{9}$

Paolo Ruffini

Fue un matemático y médico italiano que vivió de 1765 a 1822.

La regla de Ruffini

- ✱ Es un método abreviado para realizar algunas divisiones de polinomios.
- ✱ Solo se puede aplicar cuando el denominador es de la forma «x−a», siendo «a» un número.
- ✱ Puedes pensar que este es un caso muy particular y que por tanto no aparecerá muy a menudo; pero, por motivos que verás en este tema, es un caso que usamos mucho.
- ✱ El método utiliza solamente los coeficientes del dividendo y el número «a».
- ✱ Se obtienen el resto y los coeficientes del cociente.

Mecánica de la regla de Ruffini

1. Se colocan en una línea los coeficientes del dividendo en orden decreciente de grados, escribiendo ceros cuando no haya monomio de algún grado.
2. Se escribe el número «a» más a la izquierda, una línea más abajo.
3. Se escribe el primer coeficiente por la izquierda del dividendo justo bajo él, dos líneas más abajo.
4. Se multiplica el número «a» por el número que haya más a la derecha en la línea de abajo y se coloca el resultado en la línea central una columna más a la derecha.
5. Se suma el número obtenido con el coeficiente que hay sobre él y se escribe el resultado en la última fila.
6. Se repiten los dos pasos anteriores hasta que no se pueda más.
7. El número más a la derecha de la última fila es el resto. El resto debe ser un número puesto que el divisor es de grado 1 y el resto debe ser de grado inferior al del divisor, luego el resto solo puede ser un polinomio de grado 0, un número.
8. Los demás números de la última fila son los coeficientes del cociente, ordenados por grados de mayor a menor. Sabemos que el grado del cociente es uno menos que el grado del dividendo, porque el divisor es de grado 1.

Ejemplo 1

Divide el polinomio $2x^3-x+3$ entre el polinomio $x-4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & & 8 & 32 & 124 \\ \hline & 2 & 8 & 31 & 127 \end{array}$$

Cociente: $2x^2+8x+31$; resto: 127

Ejemplo 2

Divide el polinomio $x^4-x^3-2x^2+3x-2$ entre el polinomio $x+1$

Importante: observa que $x+1 = x-(-1)$, así que en este caso $a=-1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & & -1 & 2 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & 0 & 3 & -5 \end{array}$$

Cociente: x^3-2x^2+3; resto: -5

Observa que en el cociente hemos obtenido un 0 como coeficiente de «x».

Enunciados

Usando el dividendo y el divisor de cada pregunta, realiza la división de los polinomios mediante la regla de Ruffini, diciendo cuál es el cociente y cuál es el resto.

① Dividendo: $2x^3-9x^2+13x-6$; divisor: $x-3$

② Dividendo: $3x^3+7x^2+4x+5$; divisor: $x+2$

③ Dividendo: $2x^3-2x^2-x+1$; divisor: $x-1$

④ Dividendo: $x^4+4x^3+3x^2-2x-2$; divisor: $x+3$

⑤ Dividendo: $2x^5+2x^4+2x^2-2x+1$; divisor: $x+1$

⑥ Dividendo: $5x^2-32x+21$; divisor: $x-6$

⑦ Dividendo: x^4-14x^2-11; divisor: $x-4$

⑧ Dividendo: x^3-3; divisor: $x+1$

⑨ Dividendo: $2x^5+9x^4-2x^3+13x^2-9x+15$; divisor: $x+5$

⑩ Dividendo: $2x^4-14x^3+x^2-7x+3$; divisor: $x-7$

⑪ Dividendo: x^4+x^3-2; divisor: $x+2$

⑫ Dividendo: $x^3-4x^2+7x-11$; divisor: $x-1$

⑬ Dividendo: $x^4+3x^3+x^2+2x-3$; divisor: $x+3$

⑭ Dividendo: $x^4-29x-3$; divisor: $x-3$

⑮ Dividendo: $2x^3+18x^2+29x-23$; divisor: $x+6$

⑯ Dividendo: $3x^5-2x^3+4$; divisor: $x-1$

⑰ Dividendo: $3x^4-12x^2+x-2$; divisor: $x-2$

⑱ Dividendo: $5x^5+5x^4+2x^3+5$; divisor: $x+1$

⑲ Dividendo: $x^5-2x^4+3x^3-31$; divisor: $x-2$

⑳ Dividendo: $x^3-8x^2+22x-10$; divisor: $x-3$

㉑ Dividendo: $x^5+x^4+3x^3+3x^2-2x+6$; divisor: $x+1$

㉒ Dividendo: $x^2-15x+56$; divisor: $x-7$

㉓ Dividendo: $2x^5+6x^4+x^3+16$; divisor: $x+3$

㉔ Dividendo: $x^4-5x^3-3x^2+15x+1$; divisor: $x-5$

㉕ Dividendo: $x^3+6x^2-20x-22$; divisor: $x+8$

㉖ Dividendo: $x^4-6x^3-7x^2+17$; divisor: $x-7$

Justificación de la regla de Ruffini

Se observa que la regla de Ruffini es válida comprobando que se hacen exactamente las mismas operaciones que en una división por el método tradicional.

Ejemplo 1

Dividendo: $3x^2-5x+2$, divisor: $x-4$

$$
\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & -5x & +2 & x-4 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & +12x & & 3x+7 \\ \cline{1-2}
/ & 7x & +2 & \\
 & -7x & +28 & \\ \cline{2-3}
 & / & 30 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rrr}
 & 3 & -5 & 2 \\
4 & & 12 & 28 \\ \hline
 & 3 & 7 & 30
\end{array}
$$

Cociente: $3x+7$, resto: 30

Ventaja de la regla de Ruffini

Al no tener que escribir las letras, la operación resulta más sencilla a nuestros ojos humanos ꙭ, es más fácil de automatizar y parece que no es necesario pensar tanto como con el método tradicional.

Programación de ordenadores

Cuando se programan ordenadores para realizar con polinomios operaciones como esta, lo más común es utilizar solo los coeficientes y es tarea de las personas que escriben el programa seguir el rastro de lo que significa cada número, igual que tú debes ser capaz de seguir el rastro de los números en el ejemplo de arriba.

Podría parecer que la matemática se ocupa solo de «hacer operaciones con números», pero estamos viendo con este ejemplo que lo importante es saber qué significan los números, porque dependiendo de su significado se harán unas u otras operaciones.

Ejemplo 2

Imaginemos que queremos automatizar el cálculo del producto de dos binomios de primer grado, productos como $(3x-2)\cdot(5x+7)$. Nos gustaría llegar a un método en el que parezca que no pensamos.

Podemos empezar por hacer la operación en general, usando letras (a, b, c, d) en vez de los números (3, −2, 5, 7):

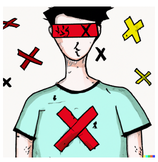
$$(ax+b)\cdot(cx+d) = acx^2 + adx + bcx + bd = acx^2 + (ad+bc)x + bd.$$

Así vemos que hay que multiplicar los coeficientes de cuatro maneras y hay una suma. Las multiplicaciones las podemos organizar como vemos abajo a la izquierda:

	c	d
a	ac	ad
b	bc	bd

	5	7
3	15	21
−2	−10	−14

Para calcular $(3x-2)\cdot(5x+7)$ hacemos las operaciones que se ven más arriba a la derecha y la suma 21−10 la podemos hacer mentalmente, con lo que el resultado final será: $(3x-2)\cdot(5x+7) = 15x^2+11x-14$.



Acabamos de «inventar» un método para hacer un producto de binomios en el que no aparecen las letras.

El programa de ordenador sería similar: pide los cuatro coeficientes, hace las cuatro multiplicaciones y la suma y entrega el resultado. ¡Muy fácil!

Factorización de un polinomio

Factorizar un polinomio consiste en escribirlo como producto de dos o más polinomios de grado menor que el suyo.

Ejemplos

① El polinomio x^2+x se puede factorizar como $(x+1)\cdot x$ porque

- x^2+x es de grado 2.
- Tanto $x+1$ como x son de grado 1.

② El polinomio x^2-1 se puede factorizar como $(x+1)\cdot(x-1)$ porque

- x^2-1 es de grado 2.
- Tanto $x+1$ como $x-1$ son de grado 1.

③ Escribir el polinomio $4x+2$ como $2\cdot(2x+1)$ no es factorizarlo porque

- $4x+2$ es de grado 1.
- $2x+1$ también es de grado 1

Relación con la factorización de números

La idea de la factorización de polinomios es muy similar a la idea de la factorización de números naturales, si definimos factorizar un número natural como escribirlo como el producto de dos o más números naturales menores que él.

Ejemplos

④ El número 6 se puede factorizar como $2\cdot3$ porque 2 y 3 son menores que 6.

⑤ El número 8 no se puede factorizar como $8\cdot1$ porque 8 no es menor que 8.

Polinomios irreducibles

✱ Se dice que un polinomio es irreducible cuando no se puede factorizar.
✱ Todos los polinomios de grado 0 son irreducibles.
✱ Todos los polinomios de grado 1 son irreducibles.

Ejemplos

⑥ El polinomio $3x-1$ es irreducible porque es de grado 1.

⑦ El polinomio $4x+2$ es irreducible porque es de grado 1.

⑧ El polinomio 5 es irreducible porque es de grado 0.

Relación con la factorización de números

El concepto de polinomio irreducible es similar al concepto de número primo, si definimos un número primo natural como aquel que no se puede factorizar.

Ejemplos

⑨ El número 15 no es primo porque se puede factorizar como $3\cdot5$.

⑩ El número 7 es primo porque solo se puede escribir como producto de la manera $7\cdot1$ (salvo el orden de los factores), que no es una factorización.

Métodos de factorización de un polinomio

Existen cuatro métodos de factorización de polinomios. Debes aprender los cuatro, porque cada polinomio puede necesitar un método diferente. Las ideas básicas de los dos primeros métodos ya las viste en el nivel 2. Los otros dos métodos los estudiaremos en este tema.

Los cuatro métodos son:

- ✱ Extraer factor común.
- ✱ Utilizar los productos notables.
- ✱ Factorizar un polinomio de grado 2.
- ✱ Utilizar una división exacta.

Ejemplos

Aunque veremos detalladamente cada método, te presentamos unos primeros ejemplos para abrir boca y que vayas teniendo una idea general; no puedes entenderlo todo, no te preocupes, lo entenderás mejor más adelante.

① Factoriza $3x^2+7x$

Podemos extraer factor común «x». Solución: $3x^2+7x = x(3x+7)$

② Factoriza $9x^2-16$

Vemos que es una diferencia de cuadrados, luego se puede escribir como una suma por diferencia, que es uno de los tres productos notables; por tanto, solución: $9x^2-16 = (3x+4)(3x-4)$

③ Factoriza $6x^2-x-2$

Como es un polinomio de segundo grado, resolvemos la ecuación obtenida igualándolo a 0:

$$6x^2-x-2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6} = \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{12} = \frac{1\pm\sqrt{49}}{12} =$$

$$= \frac{1\pm 7}{12} = \begin{cases} \dfrac{1+7}{12} \\ \dfrac{1-7}{12} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{8}{12} \\ \dfrac{-6}{12} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

. Por tanto, solución: $6x^2-x-2 = 6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

④ Factoriza x^3-x^2+x-1

Dividimos el polinomio entre $x-1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Cociente: x^2+1; resto: 0. Por tanto, solución: $x^3-x^2+x-1 = (x^2+1)(x-1)$

Factorización en polinomios irreducibles

El objetivo final de la factorización de polinomios es escribir un polinomio como producto de polinomios irreducibles. Con los cuatro métodos que vamos a estudiar no se puede resolver el problema en todos los casos, pero sí en los que se usan en la enseñanza secundaria.

Propiedad distributiva y factorización

Recuerda que la propiedad distributiva se expresa así: «a(b+c) = ab + ac».

Ahora la vamos a utilizar para convertir una suma en un producto, es decir, nos interesa verla como «ab + ac = a(b+c)»; en esta expresión decimos que estamos extrayendo (o sacando) factor común la «a».

Factorización de un polinomio extrayendo factor común

Cuando un polinomio no tiene monomio de grado 0 (llamado término independiente), es posible extraer factor común la letra indeterminada (habitualmente, la «x»).

- ✱ Ejemplo 1: $8x^2+5x = x(8x+5)$, ya que $8x^2=8xx$.
- ✱ Ejemplo 2: $-5x^2+x = x(-5x+1)$, ya que $-5x^2=-5xx$ y $x=1x$.
- ✱ Ejemplo 3: $6x^2-x = x(6x-1)$, ya que $6x^2=6xx$ y $-x=-1x$.

Si el polinomio no tiene monomio de grado 0 y tampoco lo tiene de grado 1, entonces es posible extraer factor común el cuadrado de la letra indeterminada (casi siempre será x^2).

- ✱ Ejemplo 4: $3x^3+7x^2 = x^2(3x+7)$, ya que $3x^3=3xx^2$.

Es mucho más aconsejable extraer el factor común «x^2» de un solo paso que dar dos pasos extrayendo una «x» cada vez:

- ✱ Ejemplo 5: $3x^3+7x^2 = x(3x^2+7x) = xx(3x+7) = x^2(3x+7)$. **¡No recomendado!**

En general se intenta extraer factor común la mayor potencia de la letra indeterminada que sea posible.

- ✱ Ejemplo 6: $9x^7-4x^5 = x^5(9x^2-4)$

Se puede extraer factor común de varios monomios a la vez. De hecho, **es el caso más común** en la factorización de polinomios.

- ✱ Ejemplo 7: $3x^4+2x^3-7x^2 = x^2(3x^2+2x-7)$
- ✱ Ejemplo 8: $-x^9+6x^8-3x^7+2x^6 = x^6(-x^3+6x^2-3x+2)$

Orden de los polinomios resultantes

Cuando factorizamos un polinomio no tiene ninguna importancia en qué orden escribamos los factores obtenidos, ya que la multiplicación es conmutativa.

- ✱ Ejemplo 9: $5x^2+3x = x(5x+3)$, pero también es correcto $5x^2+3x = (5x+3)x$

Extraer factor común un número

Aunque extraer factor común un número no es una factorización del polinomio, es conveniente hacerlo porque facilita las operaciones posteriores.

- ✱ Ejemplo 10: $6x+9 = 3(2x+3)$

Extraer factor común letras y un número

En algunas ocasiones será posible extraer factor común una potencia de la letra indeterminada y también un número. Puedes hacerlo en el orden que desees o incluso en un solo paso.

- ✱ Ejemplo 11: $8x^3+6x^2 = x^2(8x+6) = 2x^2(4x+3)$
- ✱ Ejemplo 12: $15x^4-9x^3 = 3(5x^4-3x^3) = 3x^3(5x-3)$
- ✱ Ejemplo 13: $-28x^{10}+35x^8 = 7x^8(-4x^2+5)$
- ✱ Ejemplo 14: $10x^9-15x^7+25x^4 = 5x^4(2x^5-3x^3+5)$

Enunciados

Factoriza los siguientes polinomios extrayendo factor común tanto como sea posible. No importa el orden en que expreses los polinomios del resultado.

① $6x^2-5x$

② $4x^3+5x^2$

③ $x^5-3x^4+8x^3$

④ $8x^2-x$

⑤ $3x^5+x^4$

⑥ $10x^2+15x$

⑦ $-x^2+7x$

⑧ $3x^3+6x^2+9x$

⑨ $2x^7+18x^6-22x^5$

⑩ $13x^3+26x^2$

⑪ $-2x^9+7x^8+5x^6$

⑫ $4x^4-5x^3+8x^2$

⑬ $8x^2+4x$

⑭ $14x^3+21x^2-7x$

⑮ $13x^8-x^5$

⑯ $12x^4+9x^3-15x^2+21x$

⑰ $8x^3-4x^2$

⑱ $11x^3+22x^2-33x$

⑲ $-9x^3+6x^2$

⑳ $15x^3+5x^2-3x$

㉑ $16x^6+32x^5-8x^4+16x^3$

㉒ x^7-10x^6

㉓ $9x^2+10x$

㉔ $-7x^3+2x^2+9x$

㉕ $2x^4-18x^3+26x^2$

㉖ $15x^7-25x^6+35x^5$

Productos notables

En el nivel 2 vimos y trabajamos los tres productos notables:

- ✱ Cuadrado de una suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ✱ Cuadrado de una diferencia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ✱ Suma por diferencia: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ahora los vamos a utilizar para convertir una suma en un producto (o una potencia), es decir, nos interesa ver todas las expresiones de derecha a izquierda.

Factorización de un polinomio usando productos notables

Cada vez que veamos una expresión similar a las que vamos a presentar a la izquierda, tendremos que comprobar si todo encaja perfectamente y, en ese caso, escribiremos la expresión de la derecha:

- ✱ Tres sumandos positivos: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- ✱ Dos sumandos positivos y uno negativos: $a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- ✱ Dos sumandos de distinto signo: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Hay que tener en cuenta que no siempre encajará todo; este método solo se puede aplicar en algunas ocasiones.

Consejos para aplicar el método

- ✱ Busca dos monomios que puedas expresar como un cuadrado perfecto.
  - ■ Ejemplos: x^2, $x^4 = (x^2)^2$, $9 = 3^2$, $16x^8 = (4x^4)^2$, $25x^6 = (5x^3)^2$, $36x^{10} = (6x^5)^2$
- ✱ Si no hay dos monomios que se puedan expresar como un cuadrado perfecto, no se puede aplicar este método.
- ✱ En la expresión solo puede haber dos o tres monomios, ni más ni menos.
- ✱ Fíjate bien en los signos de los monomios.
- ✱ Si hay tres monomios y ya has encontrado dos que se pueden expresar como un cuadrado perfecto, debes comprobar que el tercer sumando corresponde al doble del producto de las bases de los cuadrados.

Ejemplos en los que no se puede aplicar el método

① x^3-4. Aunque $4=2^2$ y se parece al esquema «a^2-b^2», no se puede escribir x^3 como un cuadrado usando exponentes naturales.

② x^4+9. Aunque x^4 y 9 sí son cuadrados exactos, los dos llevan signo positivo.

③ x^2+5x+9. Aunque x^2 es el cuadrado de x y 9 es el cuadrado de 3, el doble producto de x y 3 es 6x, pero en la expresión aparece 5x.

Ejemplos en los que sí se puede aplicar el método

④ $4x^2-25$. Hay dos cuadrados: $4x^2=(2x)^2$ y $25=5^2$. Los signos encajan.

Solución: $4x^2-25 = (2x+5)(2x-5)$

⑤ $9x^4+24x^2+16$. Hay dos cuadrados: $9x^4=(3x^2)^2$ y $16=4^2$. El doble producto de $3x^2$ y 4 es $24x^2$, que es exactamente el tercer monomio.

Solución: $9x^4+24x^2+16 = (3x^2+4)$

⑥ $16x^4-24x^2+9$. Parecido al (5), pero cambia el signo: $16x^4-24x^2+9 = (4x^2-3)^2$

Enunciados

Factoriza los siguientes polinomios utilizando productos notables.

① x^2+2x+1

② x^2-4x+4

③ x^2-4

④ $9x^6-16$

⑤ $16x^2+40x+25$

⑥ x^4-6x^2+9

⑦ x^2-2x+1

⑧ x^2-1

⑨ $25x^2+30x+9$

⑩ $x^2-12x+36$

⑪ $4x^6-4x^3+1$

⑫ $16x^2-25$

⑬ $4x^2+20x+25$

⑭ $x^2-22x+121$

⑮ $9x^2+60x+100$

⑯ $100x^2-220x+121$

⑰ $81x^2-25$

⑱ $x^2-8x+16$

⑲ $16x^2+72x+81$

⑳ $x^2-10x+25$

㉑ $4x^8+12x^4+9$

㉒ $x^{10}-4$

㉓ $9x^2+6x+1$

㉔ $25x^2-10x+1$

㉕ $36x^2-1$

㉖ $9x^2-100$

Valor numérico de un polinomio

En el nivel 2 vimos y trabajamos el concepto de valor numérico de un polinomio.

- Ejemplo 1. Siendo $Q(x) = x^3-x+6$, calcula $Q(2) \rightarrow Q(2) = 2^3-2+6 = 12$
- Ejemplo 2. Siendo $R(x) = x^4+5$, calcula $R(-3) \rightarrow R(-3) = (-3)^4+5 = 86$
- Ejemplo 3. Siendo $S(x) = x^5-3x-9$, calcula $S(0) \rightarrow S(0) = 0^5-3\cdot 0-9 = -9$

Raíz de un polinomio

- Un número es raíz de un polinomio cuando el valor numérico del polinomio en ese número es 0.
- Decimos que el polinomio **se anula** en el número.
- Es más cómoda la definición simbólica de raíz de un polinomio: el número «a» es raíz del polinomio «$P(x)$» cuando «$P(a) = 0$».

Ejemplos

- Ejemplo 4. El número -2 es raíz del polinomio $Q(x) = x^3-x+6$ porque $Q(-2) = 0$.
- Ejemplo 5. El número 5 es raíz del polinomio $T(x) = 6x-30$ porque $T(5) = 0$.
- Ejemplo 6. Los números 1 y 3 son raíces del polinomio $U(x) = x^2-4x+3$ porque $U(1) = 0$ y $U(3) = 0$.

Estudio de las raíces de un polinomio

Durante la historia de la matemática los problemas asociados a las raíces de un polinomio han sido muy importantes y su estudio ha abierto nuevas vías de investigación. Siempre ha sido interesante responder estas preguntas:

- ¿Cuántas raíces tiene un polinomio?
- ¿Existen fórmulas exactas para calcular las raíces de un polinomio?
- ¿Cómo se distribuyen las raíces de un polinomio?
- ¿Cómo se pueden calcular las raíces no exactas de un polinomio?

El matemático francés Évariste Galois (1811-1832) es una de las personalidades más relevantes de estas investigaciones. La noche antes de morir, con solo 20 años, dejó escrita una carta a sus amigos explicando las mejores ideas que había descubierto.

Relación entre raíces de un polinomio y su factorización

Estos dos problemas son duales: si resolvemos uno de ellos, resolvemos el otro:

- Cada vez que encontramos una raíz de un polinomio, podemos factorizarlo.
- Cada vez que factorizamos un polinomio, nos acercamos a calcular una raíz.

En este nivel del curso iremos profundizando en esta relación, que será la base de los dos métodos de factorización que aún nos quedan por estudiar.

Propiedades de las raíces de un polinomio

Aunque las raíces de los polinomios tienen propiedades que no se pueden demostrar en la enseñanza secundaria, es conveniente conocer alguna:

- Un polinomio de grado *n* tiene, como máximo, *n* raíces.
- Si todos los coeficientes de un polinomio son números enteros, todas las raíces del polinomio que sean números enteros son divisores del monomio de grado cero (el término independiente).

Factorización de un polinomio de grado dos

La factorización de un polinomio de grado dos depende del número de raíces que tenga. Sabemos que si un polinomio es de grado dos, puede tener dos raíces, una o ninguna. Las raíces se calculan igualando el polinomio a 0 y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante.

Factorización de un polinomio de grado dos con dos raíces

Si el polinomio ax^2+bx+c tiene dos raíces llamadas r_1 y r_2, se factoriza como

$$\boxed{ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)}$$

Factorización de un polinomio de grado dos con una raíz

Si el polinomio ax^2+bx+c tiene una raíz llamada r, se factoriza como

$$\boxed{ax^2+bx+c = a(x-r)^2}$$

Factorización de un polinomio de grado dos que no tiene raíces

Si un polinomio de grado dos no tiene raíces, es irreducible.

Enunciados

Factoriza los siguientes polinomios:

① $2x^2-7x-15$ ② $9x^2-6x+1$ ③ $3x^2+2x+2$

Resoluciones

① Averiguamos las raíces del polinomio:

$$2x^2-7x-15 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 2\cdot(-15)}}{2\cdot 2} = \frac{7\pm\sqrt{49+120}}{4} = \frac{7\pm\sqrt{169}}{4} =$$

$$= \frac{7\pm 13}{4} = \begin{cases} \dfrac{7+13}{4} \\ \dfrac{7-13}{4} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{20}{4} \\ \dfrac{-6}{4} \end{cases} = \begin{cases} 5 \\ -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$. Solución: $2x^2-7x-15 = 2(x-5)(x+\frac{3}{2})$

Observación. La solución se puede escribir sin fracciones: $(x-5)(2x+3)$

② Averiguamos las raíces del polinomio:

$$9x^2-6x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 9\cdot 1}}{2\cdot 9} = \frac{6\pm\sqrt{36-36}}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Solución: $9x^2-6x+1 = 9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

Observación. La solución se puede escribir sin fracciones:

$$9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)^2 = (3x-1)^2$$

③ Averiguamos las raíces del polinomio:

$$3x^2+2x+2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3} = \frac{-2\pm\sqrt{4-24}}{6} = \frac{-2\pm\sqrt{-20}}{6} \rightarrow \text{sin solución.}$$

Solución: el polinomio es irreducible.

Observaciones sobre la factorización de un polinomio de grado dos

El método para factorizar polinomios de grado dos es excelente y muy claro. Sin embargo, cuando se aplica en la práctica pueden aparecer algunas pequeñas dudas. Examinamos algunos casos para responder a esas dudas.

Enunciados

Factoriza los siguientes polinomios:

① x^2+x-6 ② $21x^2-5x-6$ ③ $16x^2+40x+25$

Resoluciones

① Averiguamos las raíces del polinomio:

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases}2\\-3\end{cases}$$

Solución: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

Observaciones

- Es indiferente el orden en que escribamos los dos factores; es igual de correcto escribir $(x-2)(x+3)$ que escribir $(x+3)(x-2)$.
- En este polinomio el coeficiente del monomio de grado 2 (el que estamos designando como «a») es igual a 1 y por lo tanto no aparece en la solución final; es decir, no damos la solución como «$1(x-2)(x+3)$». Pero es muy importante recordar que ese coeficiente hay que escribirlo en cualquier otro caso (es un error común omitirlo).

② Averiguamos las raíces del polinomio:

$$21x^2-5x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 21\cdot(-6)}}{2\cdot 21}=\frac{5\pm\sqrt{25+504}}{42}=\frac{5\pm 23}{42}=\ldots=\begin{cases}\frac{2}{3}\\-\frac{3}{7}\end{cases}$$

Solución: $21x^2-5x-6=21\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{3}{7}\right)$

Observación

Hay muchos casos similares a este, así que conviene detenerse en ver que la solución se puede escribir sin fracciones, aprovechando que $21=3\cdot 7$.

$$21\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{3}{7}\right)=3\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot 7\cdot\left(x+\frac{3}{7}\right)=(3x-2)(7x+3)$$

③ Averiguamos las raíces: $16x^2+40x+25=0 \Rightarrow x=\frac{-40\pm\sqrt{40^2-4\cdot 16\cdot 25}}{2\cdot 16}=\ldots=-\frac{5}{4}$

Solución: $16x^2+40x+25=16\left(x+\frac{5}{4}\right)^2$

Observaciones

- La solución se puede escribir sin fracciones, aprovechando que $16=4^2$:
  $$16\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\left(4\cdot\left(x+\frac{5}{4}\right)\right)^2=(4x+5)^2$$
- Se podía haber llegado igualmente a la solución usando un producto notable.

Enunciados

Factoriza los siguientes polinomios utilizando el método de factorización de polinomios de segundo grado. Da todas soluciones sin utilizar fracciones ni números decimales. No importa el orden en que escribas los factores.

① $2x^2+x-15$

② x^2-6x-7

③ $9x^2-24x+16$

④ $2x^2+3x+3$

⑤ $9x^2-6x-8$

⑥ $6x^2+11x-2$

⑦ $x^2-3x-28$

⑧ $25x^2+80x+64$

⑨ $4x^2-25$

⑩ $x^2-5x-66$

⑪ $3x^2-x+1$

⑫ $6x^2+13$

⑬ $56x^2+3x-20$

⑭ $4x^2-36x+81$

⑮ $x^2+11x+10$

⑯ $5x^2+8x-4$

⑰ $30x^2+61x+30$

⑱ $25x^2+60x+36$

⑲ $25x^2+4x+1$

⑳ $x^2-5x-36$

㉑ $8x^2+2x-1$

㉒ $9x^2-48x+64$

㉓ $100x^2-20x-63$

㉔ x^2+2x+5

㉕ $8x^2+63x-8$

Teorema del resto

Si se divide un polinomio entre el polinomio «x–a», el resto de la división es igual al valor numérico del polinomio en «a».

Ejemplo

Dado el polinomio $Q(x)=2x^3-3x^2+x-1$, se pide:

a) Calcular el resto de la división de Q(x) entre el polinomio «x–2».

b) Calcular el valor numérico Q(2).

c) Comprobar que los dos anteriores apartados tienen la misma solución.

Resolución

a) Calculamos el resto haciendo la división mediante la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & & 4 & 2 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & \mathbf{5} \end{array}$$

Solución: el resto de la división es 5.

b) $Q(2) = 2\cdot2^3-3\cdot2^2+2-1 = 2\cdot8-3\cdot4+1 = 16-12+1 = 5$. Solución: $Q(2)=5$.

c) Efectivamente, el resto es 5 y el valor numérico es 5, coinciden.

Demostración

Llamamos «P(x)» a un polinomio cualquiera y «a» a un número cualquiera.

Cuando dividimos P(x) entre el polinomio «x–a» se obtiene:

* El cociente, que es un polinomio y llamamos C(x)
* El resto, que debe ser un polinomio de grado menor que 1 (el grado del divisor); por tanto, el resto debe ser un polinomio de grado 0; es decir, debe ser un número. Llamamos R al resto de la división.

Sabemos como consecuencia de las propiedades de la división que

$$P(x) = C(x)\cdot(x-a) + R$$

En esta igualdad de polinomios podemos calcular el valor númerico en «a»:

$$P(a) = C(a)\cdot(a-a) + R$$

Ahora viene la clave de la demostración: como $a-a=0$, sabemos que el producto $C(a)\cdot(a-a)$ será 0 aunque no sabemos el valor de C(a).

$$P(a) = C(a)\cdot0 + R = 0 + R = R$$

Queda demostrado que $R = P(a)$.

Enunciado

Comprueba el teorema del resto usando el polinomio $T(x)=x^4+x^3-4x^2-7x-11$ y el número $a=-3$.

Resolución

Calculamos el resto de la división de T(x) entre x+3:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -4 & -7 & -11 \\ -3 & & -3 & 6 & -6 & 39 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -13 & \mathbf{28} \end{array}$$

Calculamos el valor numérico T(–3):

$T(-3) = (-3)^4+(-3)^3-4\cdot(-3)^2-7\cdot(-3)-11 = 81-27-36+21-11 = 28$

Efectivamente, coinciden el resto de la división y el valor numérico.

Enunciados

Comprueba el teorema del resto utilizando el polinomio y el número dados en cada enunciado.

① $P(x)=x^3-2x^2+2;\ a=-2$

② $P(x)=x^3-3x+4;\ a=2$

③ $P(x)=2x^2-x+7;\ a=-4$

④ $P(x)=x^3-5x^2+2x-10;\ a=5$

⑤ $P(x)=2x^3+3x^2+x+1;\ a=-2$

⑥ $P(x)=2x^3+5x^2+x+1;\ a=1$

⑦ $P(x)=x^3+3x^2+4x+12;\ a=-3$

⑧ $P(x)=x^4+2x^3-3x^2+4x+1;\ a=2$

⑨ $P(x)=-x^4-2x^3+3x^2+4x;\ a=-3$

⑩ $P(x)=3x^3+3x-4;\ a=2$

⑪ $P(x)=x^5-7x^4-2x+1;\ a=-1$

⑫ $P(x)=x^3+x^2-2x-2;\ a=5$

⑬ $P(x)=x^4-5x^3-2x+1;\ a=-3$

⑭ $P(x)=x^3-x^2+x-1;\ a=7$

⑮ $P(x)=x^3-x^2-3x-1;\ a=-5$

⑯ $P(x)=x^5+4x^2-3x+11;\ a=1$

⑰ $P(x)=x^5+4x^2-3x+11;\ a=-1$

⑱ $P(x)=2x^3-5x^2-7x-20;\ a=4$

⑲ $P(x)=2x^3+12x^2+16x+30;\ a=-5$

⑳ $P(x)=x^5-x^3+2x+1;\ a=2$

㉑ $P(x)=2x^6-3x^3+2x+1;\ a=-1$

㉒ $P(x)=x^4-3x^3-4x^2+x-2;\ a=1$

㉓ $P(x)=x^5+3x^4+2x^3+6x^2+x+3;\ a=-3$

㉔ $P(x)=x^5-2x^3-3x^2+2;\ a=3$

㉕ $P(x)=x^5-3x^4+x^3-2x^2+x+4;\ a=-2$

㉖ $P(x)=x^5-3x^4+3x^3-9x^2+2x-6;\ a=3$

Aplicaciones del teorema del resto

El teorema del resto conecta dos números que se obtienen de manera muy diferente: el resto de una división de polinomios y el valor numérico de un polinomio en un número. Ahora que sabemos que el resultado es el mismo, podemos elegir qué método usar para calcular cualquiera de los dos.

Según las herramientas disponibles (papel, calculadora, programación de ordenador) usaremos el método que nos parezca más sencillo o rápido.

Ejemplo 1

Enunciado

Calcula el resto de la división de $P(x) = x^{100}+x+1$ entre $Q(x) = x-1$.

Reflexión inicial

Podemos resolver el problema haciendo la división de polinomios mediante la regla de Ruffini, pero como el grado del polinomio P(x) es bastante alto, el método será muy largo. El enunciado solo pide el valor del resto de la división, pero no pide el cociente, así que podemos calcular el valor numérico P(1), que sabemos por el teorema del resto que será igual al resto de la división.

Resolución

$P(1) = 1^{100}+1+1 = 3$. Solución: 3.

Reflexión final

La operación ha sido tan sencilla que perfectamente la podíamos haber hecho mentalmente. Esto demuestra la gran cantidad de tiempo que hemos ahorrado.

Ejemplo 2

Enunciado

Calcula sin calculadora el valor numérico de $P(x) = 3x^5-2x^3+4x^2-x+1$ para $a = -2$.

Reflexión inicial

Aunque no es difícil hacer estas operaciones, hay que calcular varias potencias, productos y sumas. Sabemos que para aplicar la regla de Ruffini no es necesario calcular potencias, así que podemos calcular el resto de la división de P(x) entre x+2, que sabemos por el teorema del resto que será igual al valor numérico.

Resolución

Dividimos P(x) entre x+2

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & & -6 & 16 & -40 & 82 \\ \hline & 3 & -8 & 20 & -41 & 83 \end{array}$$

Solución: 83

Reflexión final

En muchos programas de ordenador se usan técnicas de este estilo para realizar algunos cálculos. Se evita usar las operaciones que requieren más tiempo de cálculo y se sustituyen por otras de ejecución más rápida. Pero para poder aplicar esas técnicas es imprescindible conocer antes las propiedades matemáticas adecuadas. La tecnología depende fundamentalmente de la ciencia.

Factorización de un polinomio usando división exacta

1. Si el número «a» es una raíz del polinomio P(x), P(a) = 0 por definición de raíz.
2. Pero, por el teorema del resto, P(a) es igual al resto de la división del polinomio entre x–a.
3. Por tanto, si «a» es una raíz del polinomio P(x), al dividir P(x) entre x–a se obtendrá de resto 0, la división será exacta.
4. Si llamamos C(x) al cociente de la división entre P(x) y x–a, se verificará

$$\boxed{P(x) = C(x)\cdot(x-a)}$$

5. Así pues, habremos conseguido una factorización del polinomio.

Ejemplo 1

Consideramos el polinomio $Q(x) = x^3-3x^2+5x-6$. Observamos (luego veremos cómo) que el número 2 es una raíz, ya que Q(2) = 0.

Dividimos Q(x) entre x–2

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 5 & -6 \\ 2 & & 2 & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

Cociente: x^2-x+3, resto: 0. Por tanto, $x^3-3x^2+5x-6 = (x^2-x+3)(x-2)$

Obtención de raíces de un polinomio

1. Sabemos que si todos los coeficientes de un polinomio son números enteros, todas las raíces del polinomio que sean números enteros son divisores del monomio de grado cero (el término independiente).
2. Por tanto, debemos ir probando entre los divisores del término independiente (tanto los positivos como los negativos) si alguno de ellos es raíz.
3. La prueba la podemos hacer calculando directamente el valor numérico del polinomio (viendo si da 0 o no) o averiguando el resto de la división entre x menos la posible raíz, ya que, por el teorema del resto, deben dar el mismo valor. Usaremos el método que nos parezca más rápido, pero dividir tiene la ventaja de que ya tendremos calculado el cociente si encontramos una raíz.

Ejemplo 2

Consideramos el polinomio $R(x) = x^3+3x^2+7x+10$.

El término independiente es 10. Sus divisores son 1, –1, 2, –2, 5, –5, 10 y –10.

Alguno de ellos podría ser raíz del polinomio.

Probamos con 1: R(1) > 0 (obviamente), luego R(1) ≠ 0; 1 no es raíz.

Probamos con –1: R(–1) = –1+3–7+10 ≠ 0; –1 no es raíz.

Probamos con 2: R(2) > 0 (obviamente), luego R(2) ≠ 0; 2 no es raíz.

Probamos con –2: dividimos R(x) entre x+2

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 7 & 10 \\ -2 & & -2 & -2 & -10 \\ \hline & 1 & 1 & 5 & 0 \end{array}$$

Cociente: x^2+x+5, resto: 0. Por tanto, –2 sí es raíz

Podemos factorizar; además, ya tenemos hecha la división:

$x^3+3x^2+7x+10 = (x^2+x+5)(x+2)$

Enunciados

Factoriza los siguientes polinomios utilizando el método de división exacta sabiendo que todos tienen exactamente una raíz, que es un número entero. No importa el orden en que escribas los factores.

① x^3-x^2+x-6

② $x^3+x^2+3x+10$

③ x^3+2x^2+6x+5

④ x^3-3x^2+7x-5

⑤ x^3+x^2-2x-8

⑥ $x^3-6x^2+12x-9$

⑦ $2x^3+3x^2+3x+2$

⑧ $3x^3+10x^2-7x+4$

⑨ $x^3+3x^2+7x+10$

⑩ $2x^3-5x^2+5x-6$

⑪ $3x^3-11x^2+8x-6$

⑫ $2x^3-5x^2+6x-3$

⑬ $x^5-2x^4-x^3+2x^2+x-2$

⑭ $3x^3-10x^2+10x-4$

⑮ $4x^3-35x^2+26x-16$

⑯ $4x^3-35x^2-8x-9$

⑰ $x^5-5x^4-2x^3+10x^2+3x-15$

⑱ $7x^3+19x^2-4x+6$

⑲ $9x^3-4x^2-4x-1$

⑳ $8x^3-4x^2-3x-1$

㉑ $4x^3+21x^2-15x+18$

㉒ $x^3-9x^2+25x-25$

㉓ $x^7-6x^6+2x-12$

㉔ $x^5-4x^4-2x^3+8x^2+6x-24$

㉕ $3x^3-20x^2-4x-21$

Factorización de un polinomio en polinomios irreducibles

Para aprovechar al máximo las ventajas de la factorización de polinomios, casi siempre nos interesa factorizar un polinomio de modo que todos los factores sean polinomios irreducibles. Este proceso es equivalente a factorizar un número natural en factores primos.

Método para factorizar un polinomio en polinomios irreducibles

Realmente, la idea del método es muy sencilla: se va aplicando uno de los cuatro métodos disponibles hasta que no se pueda aplicar ninguno más. La dificultad puede surgir porque a veces se puede aplicar más de un método en una determinada situación: sencillamente, usa el método que quieras; si lo aplicas bien, llegarás al resultado correcto por cualquier método.

Enunciados

Factoriza los siguientes polinomios en polinomios irreducibles:

① $6x^4+5x^3-29x^2-10x$

② x^4-16

Resoluciones

① Para facilitar la explicación, vamos a ir poniendo nombres a los polinomios:

$P(x) = 6x^4+5x^3-29x^2-10x$

El único metodo que podemos aplicar para factorizar P(x) es extraer factor común la «x»: $P(x) = (6x^3+5x^2-29x-10)\cdot x$. Llamamos $Q(x) = 6x^3+5x^2-29x-10$.

Para factorizar Q(x) solo podemos utilizar el método de la división exacta: las posibles raíces enteras son los divisiores del término independiente: 1, –1, 2, –2, 5, –5, 10 y –10. Vamos probando y encontramos que 2 es una raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -29 & -10 \\ 2 & & 12 & 34 & 10 \\ \hline & 6 & 17 & 5 & 0 \end{array}$$

Obtenemos que $Q(x) = (6x^2+17x+5)\cdot(x-2)$. Llamamos $R(x) = 6x^2+17x+5$.

Para factorizar R(x) solo podemos utilizar el método de factorización de polinomios de grado 2. No podemos volver a aplicar el método de división exacta porque ninguno de los divisores del término independiente es raíz de R(x).

$$6x^2+17x+5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-17\pm\sqrt{17^2-4\cdot 6\cdot 5}}{2\cdot 6} = \ldots = \frac{-17\pm 13}{12} = \begin{cases} \frac{-4}{12} \\ \frac{-30}{12} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Luego $R(x) = 6\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)$ o bien $R(x) = (3x+1)\cdot(2x+5)$, como queramos.

A lo largo del proceso hemos obtenido cuatro polinomios de grado 1, que son irreducibles, luego ya podemos dar la solución final:

Solución: $6x^4+5x^3-29x^2-10x = x\cdot(x-2)\cdot(3x+1)\cdot(2x+5)$

② Podemos usar productos notables: $x^4-16 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)(x+2)(x-2)$

$x^2+4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \rightarrow$ sin solución, luego x^2+4 es irreducible.

Solución: $x^4-16 = (x^2+4)(x+2)(x-2)$

Enunciados

Factoriza los siguientes polinomios en polinomios irreducibles:

① $25x^6-70x^5+49x^4$

② $x^4-5x^3-9x^2+81x-108$

Resoluciones

① Para facilitar la explicación, vamos a ir poniendo nombres a los polinomios:

$P(x) = 25x^6-70x^5+49x^4$

El único metodo que podemos aplicar para factorizar $P(x)$ es extraer factor común la «x», aunque lo podemos hacer cuatro veces, así que extraemos factor común x^4: $P(x) = (25x^2-70x+49)\cdot x^4$. Llamamos $Q(x) = 25x^2-70x+49$.

Para factorizar $Q(x)$ no podemos utilizar el método de la división exacta porque ninguno de los divisores del término independiente es raíz de $Q(x)$ (de todos modos, serían operaciones muy incómodas). Se puede utilizar el método de factorización de un polinomio de segundo grado, pero es mucho más rápido darse cuenta de que se puede usar un producto notable: $25x^2-70x+49 = (5x-7)^2$

Solución: $25x^6-70x^5+49x^4 = x^4\cdot(5x-7)^2$

② Para facilitar la explicación, vamos a ir poniendo nombres a los polinomios:

$R(x) = x^4-5x^3-9x^2+81x-108$

Para factorizar $R(x)$ solo podemos utilizar el método de la división exacta. El término independiente tiene muchos divisisores; no hace falta que los escribas, basta con que vayas probando hasta encontrar una raíz de $R(x)$. Empezamos por determinar que ni 1, ni −1, ni 2 ni −2 son raíces de $R(x)$; es importante recordar este dato, porque esos números ya no los volveremos a probar. El 3:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -5 & -9 & 81 & -108 \\ 3 & & 3 & -6 & -45 & 108 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 36 & 0 \end{array}$$

Tenemos que $R(x) = (x^3-2x^2-15x+36)\cdot(x-3)$; llamamos $S(x) = x^3-2x^2-15x+36$.

El siguiente paso es muy importante: hay probar si 3 también es raíz del polinomio $S(x)$; lo ha sido de $R(x)$, así que lo puede ser también de $S(x)$. Lo vemos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -15 & 36 \\ 3 & & 3 & 3 & -36 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

Tenemos que $S(x) = (x^2+x-12)\cdot(x-3)$; llamamos $T(x) = x^2+x-12$

Para factorizar $T(x)$ ya podríamos aplicar el método de factorización de polinomios de grado dos, pero también podemos volver a probar si 3 es raíz:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Tenemos que $T(x) = (x+4)\cdot(x-3)$

Como el factor $(x-3)$ ha aparecido tres veces, usaremos una potencia.

Solución: $x^4-5x^3-9x^2+81x-108 = (x+4)\cdot(x-3)^3$

Enunciados

Factoriza los siguientes polinomios en polinomios irreducibles. Escribe todas las soluciones de modo que no aparezcan fracciones ni números decimales. No importa el orden en que escribas los factores.

① x^3-1

② x^4-x^2

③ $16x^4-81$

④ x^3+8

⑤ x^3+2x^2-5x-6

⑥ x^3-x^2-20x

⑦ $3x^5-11x^4-6x^3+8x^2$

⑧ $4x^4+4x^3-11x^2-6x+9$

⑨ x^3-3x^2-70x

⑩ $2x^3-5x^2-9$

⑪ $2x^4-x^3-15x^2-19x-7$

⑫ $20x^5+33x^4-42x^3-41x^2+30x$

⑬ $x^5-2x^4+x^3$

⑭ $x^4+6x^3+9x^2-4x-12$

⑮ $35x^3-199x^2-72x+36$

⑯ $9x^6-6x^5+x^4$

⑰ $x^4+3x^3-42x^2+100x-72$

⑱ $x^5+3x^4-21x^3-43x^2+96x+180$

⑲ $x^3-2x^2-64x+128$

⑳ $56x^4+171x^3+189x^2+89x+15$

㉑ $x^4+14x^3+60x^2+50x-125$

㉒ $2x^3+34x^2-20x-8$

㉓ $x^4-12x^3+54x^2-108x+81$

㉔ $6x^3-53x^2+41x-8$

㉕ $x^4-4x^3+7x^2-12x+12$

Enunciados

① Sabemos que el número «a» es una raíz del polinomio P(x) y el número «b» es una raíz del polinomio Q(x). Calculamos el polinomio R(x)=P(x)·Q(x). Averigua el valor numérico R(a)+R(b).

② ¿Cuántas raíces tiene el polinomio x^4+2x^2+1? Justifica tu respuesta.

③ Sabemos que cuando dividimos el polinomio x^4+3x^2-5x+k entre el polinomio $x-2$ se obtiene de resto 15. Calcula el valor de «k».

④ Factoriza en factores irreducibles el polinomio x^4+2x^2+1

⑤ Sabemos que cuando dividimos el polinomio x^3+2x^2+kx-2 entre el polinomio $x+3$ se obtiene de resto 1. Calcula el valor de «k».

⑥ a) Comprueba que el polinomio x^4+4 no se puede factorizar mediante ninguno de los métodos explicados en este curso.

b) Calcula el producto $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$, preferiblemente usando productos notables.

c) Factoriza en factores irreducibles el polinomio x^4+4

⑦ Factoriza en factores irreducibles el polinomio $48x^3+20x^2-92x+35$ sabiendo que ½ es una de sus raíces. Escribe la solución de manera que no aparezcan fracciones ni números decimales.

⑧ Sabemos que un polinomio se puede factorizar como $(x-2)^5\cdot(x+5)^3\cdot x^2$

a) Averigua cuántas raíces tiene.

b) Averigua los valores de sus raíces.

⑨ Factoriza en factores irreducibles el polinomio x^6-1

⑩ Del polinomio $S(x) = kx^3-(k+1)x^2-37x+30$ no conocemos el valor de «k», pero sí sabemos que 2 es una de sus raíces. Factoriza en factores irreducibles el polinomio S(x). Escribe la solución de manera que no aparezcan fracciones ni números decimales.

⑪ Factoriza en factores irreducibles el polinomio $9x^4-6x^3+10x^2-6x+1$ sabiendo que ⅓ es una de sus raíces. Escribe la solución de manera que no aparezcan fracciones ni números decimales.

⑫ Dado el polinomio $T(x) = x^4+2x^3-19x^2-32x+48$, factoriza en factores irreducibles el polinomio $(T(x))^3$.

⑬ El polinomio U(x) tiene dos raíces; el polinomio V(x) tiene tres raíces; calculamos el polinomio Z(x) = U(x)·V(x).

a) ¿Cuál es el número mínimo de raíces de Z(x)?

b) ¿Cuál es el número máximo de raíces de Z(x)?

Ecuaciones de primer grado

En el nivel 2 ya practicamos el método de resolución de estas ecuaciones. Vimos que la solución a veces es un número entero, pero normalmente es un número racional que solemos expresar como fracción irreducible y en algunos casos como número decimal.

En este nivel 3 practicaremos cómo dar la solución como número entero o decimal ayudándonos de la calculadora.

También debemos reconocer aquellas ecuaciones que a primera vista puede parecer que no son de primer grado (porque vemos algunas potencias) pero que sí lo son. La idea más importante aquí es que solo sabemos el tipo de una ecuación cuando está lo más simplificada posible.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Si la solución no es un número entero, escríbela con cuatro cifras significativas.

① $3(5x-8)+4 = 2\cdot(2x+3)$

② $\frac{13x+5}{2}-\frac{3x-11}{4}=1$

③ $5(x-13000) = \frac{x-43}{130}+115$

④ $(x+3)(x-4) = x^2+6x+17$

Resoluciones

① $3(5x-8)+4 = 2\cdot(2x+3) \Rightarrow 15x-24+4 = 4x+6 \Rightarrow 15x-4x = 6+24-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 11x = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{11} = 2{,}363636364$

Calculadora: 2 6 ÷ 1 1 =

Solución: 2,364

② $\frac{13x+5}{2}-\frac{3x-11}{4}=1 \Rightarrow 2\cdot(13x+5) - (3x-11) = 4 \Rightarrow 26x+10-3x+11 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 26x-3x = 4-10-11 \Rightarrow 23x = -17 \Rightarrow x = -\frac{17}{23} = -0{,}739130434$

Calculadora: 1 7 ÷ 2 3 =

Solución: –0,7391

③ $5(x-13000) = \frac{x-43}{130}+115 \Rightarrow 130\cdot 5\cdot(x-13000) = x-43+130\cdot 115 \Rightarrow$

$\Rightarrow 650x-8450000=x-43+14959 \Rightarrow 650x-x = 8450000-43+14959 \Rightarrow$

$\Rightarrow 649x = 8464907 \Rightarrow x = 8464907 : 649 = 13043$

Calculadora: 8 4 6 4 9 0 7 ÷ 6 4 9 =

Solución: 13 043

④ $(x+3)(x-4) = x^2+6x+17 \Rightarrow x^2-4x+3x-12 = x^2+6x+17 \Rightarrow -4x+3x-6x = 17+19 \Rightarrow$

$\Rightarrow -7x = 29 \Rightarrow x = 29 : (-7) = -4{,}142857143$

Calculadora: 2 9 ÷ (-) 7 =

Solución: –4,143

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Si la solución no es un número entero, escríbela con cuatro cifras significativas.

① $13(x-2) = 2(3x+5)+1$

② $\frac{5x+4}{3}-\frac{2x-13}{9}=2$

③ $2(x-11000) = \frac{x-41}{5500}+80$

④ $(x+5)(x-2) = x^2+10x+2$

⑤ $\frac{2x+1}{5}-\frac{3x+7}{2}=1$

⑥ $(x-3)^2-(x-5)^2 = 1008$

⑦ $17(2x-1)+13(3x+2) = 2(x+2)$

⑧ $x^2+\frac{7x+22}{4} = \frac{(2x+9)(2x-9)}{4}$

⑨ $\frac{5(2x+1)}{3}+\frac{2(7x+4)}{7}=4$

⑩ $7(x-4)-\frac{x-5}{2} = 51$

⑪ $\left(\frac{x}{2}-3\right)^2=\frac{x^2+x-5}{4}-3$

⑫ $\frac{7x+4}{2}-\frac{5x-9}{6}=\frac{x+1}{3}$

⑬ $\frac{2(7x-3)}{9}+3=\frac{x}{2}+\frac{5(4x-1)}{6}$

⑭ $(7x+2)(7x-2) = (7x+11)^2$

⑮ $(3-x)^2 = x^2-23x+17$

⑯ $\frac{(x+2)^2}{3}-\frac{x-53}{27}=\frac{(3x-2)^2}{27}$

⑰ $17(3x+13)+\frac{x}{2} = 223$

⑱ $(2x-3)^2 = 4\cdot(x+1)^2-7x$

⑲ $-\frac{x+8}{25}=\frac{2x+1}{5}-3$

⑳ $\frac{4x-7}{2}-\frac{3x-8}{6}=\frac{5(x-1)}{3}$

Enunciados

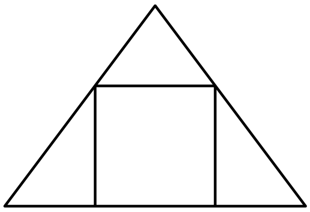
Resuelve los siguientes problemas utilizando una ecuación.

① Las agujas de un reloj se encuentran superpuestas a las 00:00:00. Calcula con una precisión de segundos a qué hora estarán situadas una a continuación de la otra por primera vez.

② Las agujas de un reloj se encuentran superpuestas a las 00:00:00. Calcula con una precisión de segundos a qué hora volverán a estar superpuestas por primera vez.

③ Averigua dos números naturales consecutivos sabiendo que el valor absoluto de la diferencia de sus cuadrados es 75.

④ Si el lado de un cuadrado aumenta 4 metros, la superficie del cuadrado aumenta 712 metros cuadrados. Calcula la longitud del lado del cuadrado; da el resultado en metros.



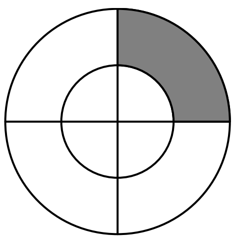
⑤ Los lados de un triángulo miden 12 metros, 10 metros y 10 metros. Apoyado en el lado mayor hay un cuadrado inscrito en el triángulo, como se ve en la figura. Calcula el lado del cuadrado; da el resultado en decímetros.

⑥ Un bambú mide 10 metros; se ha partido de tal manera que el extremo superior se apoya en el suelo a 3 metros de la base. Calcula a qué altura se ha producido la rotura; da el resultado en centímetros.

⑦ Hay una caña pegada a la pared en posición vertical y tocando el suelo. Si se baja tres centímetros la parte de arriba de la caña, hay que separar de la pared nueve centímetros la parte de abajo. Calcula en centímetros la longitud de la caña.

⑧ Julia y Carlos viven en el mismo edificio y trabajan en el mismo sitio. Cada mañana salen para trabajar a la misma hora, pero Julia tarda 20 minutos en hacer el trayecto de casa al trabajo y Carlos tarda 30 minutos. Si hoy Carlos ha salido 5 minutos antes, ¿en qué punto del trayecto se encontrarán?

⑨ Averigua dos números naturales que sumen cinco de modo que el valor absoluto de la diferencia de sus cuadrados sea 45.



⑩ En la figura vemos dos círculos concéntricos que verifican que el radio del mayor mide el doble que el radio del menor. Sabiendo que el área señalada en gris mide 9 metros cuadrados, calcula en metros cuadrados el área del menor de los círculos.

⑪ Averigua el radio de una circunferencia que verifica que a las cuerdas que miden seis metros les corresponden sagitas que miden un metro; da el resultado en metros.

⑫ Corta una cuerda de 10 metros de longitud en dos trozos de modo que al formar un cuadrado con cada trozo el valor absoluto de la diferencia de sus áreas sea 2,5 metros cuadrados.

Enunciado

① Resuelve la ecuación $x^2(x+4)+9=x^3+(2x+1)^2$

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas utilizando una ecuación.

② Un comerciante mezcla 250 litros de un vino que cuesta 1,2 euros cada litro con 350 litros de otro vino, resultando una mezcla que vale 1,55 euros cada litro. Calcula cuánto dinero cuesta cada litro del segundo tipo de vino. Da el resultado en euros.

③ Si aumentamos un número un 16 % resulta 170 unidades más que si lo disminuimos un 4 %. Averigua cuál es el número.

④ Averigua la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que su perímetro mide 234 metros y uno de los catetos mide 65 metros. Da el resultado en metros.

⑤ Se desea preparar el suelo de un patio cuadrado para su uso, con un coste de 130 euros el metro cuadrado. Calcula en metros la longitud del lado del patio sabiendo que si midiera 3 metros más, el presupuesto aumentaría en 12870 euros.

⑥ Averigua el lado de un cuadrado sabiendo que si lo aumentas en siete metros, el área aumenta siete metros cuadrados. Da el resultado en metros.

⑦ Las bases de un trapecio isósceles miden 131 metros y 75 metros; el área del trapecio mide 4635 metros cuadrados. Calcula el perímetro del trapecio; da el resultado en metros.

⑧ Un río tiene una anchura de 161 metros. Hay dos árboles enfrentados, uno a en cada orilla. Un árbol tiene 13 metros de altura y el otro 36 metros de altura. En la parte más alta de cada árbol hay un pájaro esperando para pescar algún pez del río. En un momento dado, aparece un pez en la superficie del agua y los dos pájaros, que vuelan a la misma velocidad, salen a la vez y llegan a la vez a intentar atrapar al pez. Calcula a qué distancia del pie del árbol más bajo apareció el pez.

⑨ Un grupo de amigos decide regalar a otro amigo suyo un buen regalo entre todos. Deciden el regalo, hacen las cuentas y tocan a 36 euros cada uno. Pero aparecen cuatro amigos más que quieren apuntarse al regalo y entonces ya solo tocan a 28 euros cada uno. Averigua cuánto cuesta el regalo.

⑩ Averigua un número natural entre 10 y 98 sabiendo que sus dos cifras suman 9 y que si elevamos el número al cuadrado obtenemos 1215 unidades más que si multiplicamos por 81 el cuadrado de la cifra de las decenas.

⑪ Averigua la longitud en metros de uno de los catetos de un triángulo rectángulo sabiendo que si se aumentara 62 metros, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa aumentaría 5704 metros cuadrados.

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Ya vimos y practicamos en el nivel 2 cómo resolver estas ecuaciones, pero solo en los casos en que era sencillo calcular sus soluciones. Ahora practicaremos cómo realizar las operaciones con la calculadora y redondear los resultados.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Si la solución no es un número entero, escríbela con cinco cifras significativas.

① $7x^2-15=0$

② $194x^2-6=0$

③ $19x^2+3x=0$

④ $0{,}17x^2-37{,}2x=0$

Resoluciones

① $7x^2-15=0 \Rightarrow 7x^2=15 \Rightarrow x^2=\dfrac{15}{7} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{15}{7}}=\begin{cases}1{,}4638501097\\-1{,}463850109\end{cases}$

Calculadora: $\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

Solución: $x=\begin{cases}1{,}4639\\-1{,}4639\end{cases}$

Observación: hacemos en el mismo paso la división y la raíz con la calculadora.

② $194x^2-6=0 \Rightarrow 194x^2=6 \Rightarrow x^2=\dfrac{6}{194} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{6}{194}}=\begin{cases}0{,}175863114\\-0{,}175863114\end{cases}$

Calculadora: $\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{(}\ \boxed{6}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{9}\ \boxed{4}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

Solución: $x=\begin{cases}0{,}17586\\-0{,}17586\end{cases}$

Observa que cuando trabajamos con calculadora no suele ser necesario simplificar la fracción.

③ $19x^2+3x=0 \Rightarrow x(19x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\19x+3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=-\dfrac{3}{19}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=-0{,}157894736\end{cases}$

Calculadora: $\boxed{(-)}\ \boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{9}\ \boxed{=}$

Solución: $x=\begin{cases}0\\-0{,}15789\end{cases}$

④ $0{,}17x^2-38{,}2x=0 \Rightarrow x(0{,}17x-38{,}2)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\0{,}17x-38{,}2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=\dfrac{38{,}2}{0{,}17}\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=224{,}7058824\end{cases}$

Calculadora: $\boxed{3}\ \boxed{8}\ \boxed{.}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{1}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$

Solución: $x=\begin{cases}0\\224{,}71\end{cases}$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Si la solución no es un número entero, escríbela con cinco cifras significativas.

① $13x^2-29=0$

② $13x^2-29x=0$

③ $29x^2-13=0$

④ $29x^2-13x=0$

⑤ $x^2-173=0$

⑥ $x^2-72x=0$

⑦ $1{,}3x^2-0{,}53=0$

⑧ $-17x^2+15=0$

⑨ $919x^2+7x=0$

⑩ $-x^2+18x=0$

⑪ $13x^2-1=0$

⑫ $19x^2-1823=0$

⑬ $31x^2-3x=0$

⑭ $35x^2+31x=0$

⑮ $19x^2-191=0$

⑯ $11x^2-121=0$

⑰ $13x^2+101x=0$

⑱ $41x^2-2=0$

⑲ $37x^2-41x=0$

⑳ $0{,}07x^2-19x=0$

㉑ $19x^2-20=0$

㉒ $8{,}3x^2+1{,}15x=0$

㉓ $0{,}97x^2-100=0$

㉔ $-19x^2-16x=0$

㉕ $103x^2-51=0$

㉖ $51x^2-103x=0$

Preparación para demostrar la fórmula de la ecuación de segundo grado

En el nivel 2 conociste la ecuación que permite resolver las ecuaciones de segundo grado completas, pero no vimos la demostración. Ahora que has aprendido en qué consiste la factorización de polinomios y la has practicado, vas a poder entender la demostración de la fórmula.

Ejemplos

Resuelve las siguientes ecuaciones; da cada solución como número entero o fracción irreducible.

① $(6x+1)^2 = 25$ ② $4x^2-12x+9 = 49$ ③ $x^2+4x+3 = 0$

Resolución 1: vemos que se trata de una ecuación con una sola aparición de la incógnita; por tanto, le aplicaremos el conocido método de despejar la incógnita eliminando las operaciones que la acompañar en el orden inverso al de cálculo. Comenzaremos por eliminar el cuadrado, luego el 1 y luego el 6. Lo interesante es que hay dos números que elevados al cuadrado dan 25, por lo que desde el primer paso veremos que hay dos posibilidades y habrá que tener en cuenta las dos.

$$(6x+1)^2 = 25 \Rightarrow 6x+1 = \pm\sqrt{25} \Rightarrow 6x+1 = \begin{cases} 5 \\ -5 \end{cases} \Rightarrow 6x = \begin{cases} 5-1 \\ -5-1 \end{cases} \Rightarrow 6x = \begin{cases} 4 \\ -6 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{4}{6} \\ \frac{-6}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -1 \end{cases}. \text{ Solución: } x = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -1 \end{cases}$$

Resolución 2: está claro que esta ecuación es muy poco realista, es difícil que te aparezca en un ejercicio o en un problema; pero la intención al presentártela es que veas la clave de esta técnica. Observa el problema: en la ecuación aparece la incógnita dos veces: una al cuadrado y otra sin potencia; pero si observamos que el primer miembro es el cuadrado de una diferencia, podemos factorizarlo, la incógnita ya solo aparecerá una vez y usamos la técnica del ejemplo (1). ¡Brillante!

$$4x^2-12x+9 = 49 \Rightarrow (2x-3)^2 = 49 \Rightarrow 2x-3 = \pm\sqrt{49} \Rightarrow 2x-3 = \begin{cases} 7 \\ -7 \end{cases} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 7+3 \\ -7+3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \begin{cases} 10 \\ -4 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{10}{2} \\ \frac{-4}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}. \text{ Solución: } x = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$

Resolución 3: el primer miembro no es el cuadrado de una suma, pero casi: basta añadirle una unidad para que lo sea.

$$x^2+4x+3 = 0 \Rightarrow x^2+4x+4 = 1 \Rightarrow (x+2)^2 = 1 \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x+2 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 1-2 \\ -1-2 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}. \text{ Solución: } x = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

Clave de la demostración

Estos tres ejemplos nos muestran que la idea principal es factorizar un polinomio usando algún producto notable, pero que también será necesario aplicar algún ajuste adicional para preparar la aparición del producto notable.

Fórmula para resolver las ecuaciones de segundo grado completas

Como ya vimos y practicamos en el nivel 2, las ecuaciones de segundo grado completas se resuelven usando esta fórmula:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Demostración de la fórmula

Partimos de la expresión $ax^2+bx+c=0$; usando el cuadrado de una suma para hacer una factorización, trasformaremos la expresión en otra en la que la incógnita aparecerá solo una vez; a continuación, despejaremos la incógnita.

Multiplicamos por 4a: $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow 4a^2x^2+4abx+4ac=0$

Cambiamos de miembro el 4ac: $4a^2x^2+4abx+4ac=0 \Rightarrow 4a^2x^2+4abx=-4ac$

Añadimos b^2 a los dos miembros: $4a^2x^2+4abx=-4ac \Rightarrow 4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$

Factorizamos el primer miembro: $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac \Rightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac$

Despejamos la incógnita: $(2ax+b)^2=b^2-4ac \Rightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2ax = -b\pm\sqrt{b^2-4ac} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El primer paso que se da en la demostración parece sacado de la nada, que lo damos porque sí; pero realmente se llega a él tras probar cuál es el mejor método de obtener un monomio que sea cuadrado perfecto a partir del monomio ax^2. Quizá pienses: ¿y el 4, de dónde sale? Hace falta para cuadrar el doble producto de los dos sumandos.

La humanidad no llega a estas demostraciones tan fácilmente, se tarda tiempo en encontrar el mejor método de resolver cada problema y también de mostrarlo a los demás. La investigación consiste en dedicar mucho tiempo a desechar errores y buscar, a veces a tientas, el mejor camino.

Esta demostración no es fácil, pero si le dedicas tiempo a entenderla acabarás por apreciar su ingenio y quizá te animes a investigar tú mismo en algún problema que se resulte atractivo.

Ejemplo

Vamos a resolver la ecuación $3x^2+13x-10=0$ dando los mismos pasos que en la demostración como una ayuda para entenderla:

$$3x^2+13x-10=0 \Rightarrow 36x^2+156x-120=0 \Rightarrow 36x^2+156x=120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36x^2+156x+169=169+120 \Rightarrow (6x+13)^2=289 \Rightarrow 6x+13=\pm\sqrt{289} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x+13=\begin{cases}17\\-17\end{cases} \Rightarrow 6x=\begin{cases}17-13\\-17-13\end{cases} \Rightarrow 6x=\begin{cases}4\\-30\end{cases} \Rightarrow x=\begin{cases}\frac{4}{6}\\\frac{-30}{6}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{3}\\-5\end{cases}$$

Solución: $x=\begin{cases}\frac{2}{3}\\-5\end{cases}$

Ecuaciones de segundo grado completas

Ya vimos y practicamos en el nivel 2 cómo resolver estas ecuaciones, pero solo en los casos en que era sencillo calcular sus soluciones. Ahora practicaremos cómo realizar las operaciones con la calculadora y redondear los resultados.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Escribe los resultados con cinco cifras significativas.

① $3x^2-4x-2=0$ ② $17x^2+23x+2=0$ ③ $49x^2-126x+81=0$

Resoluciones

① $3x^2-4x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3}=\dfrac{4\pm\sqrt{16+24}}{6}=\dfrac{4\pm\sqrt{40}}{6}=$

$=\begin{cases} 1{,}72075922 \\ -0{,}387425886 \end{cases}$

Calculadora: (4 + √ 4 0) ÷ 6 = ▩ ▲ ▶ ▶ – =

Solución: $x=\begin{cases} 1{,}7208 \\ -0{,}38743 \end{cases}$

- ✱ Hay operaciones que hacemos más rápidamente mentalmente que con la calculadora.
- ✱ A partir del momento de calcular la raíz cuadrada, lo apropiado es hacer ya todas las operaciones a la vez con la calculadora, para no perder exactitud inútilmente.
- ✱ Para hacer la operación con la resta, es muy cómodo editar la operación con la suma que acabamos de hacer y sustituir el signo + por el signo –.

② $17x^2+23x+2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-23\pm\sqrt{23^2-4\cdot17\cdot2}}{2\cdot17}=\dfrac{-23\pm\sqrt{393}}{34}=\begin{cases} -0{,}09340507 \\ -1{,}259536106 \end{cases}$

Calculadora: 2 3 x^2 – 4 × 1 7 × 2 = ⇨ 393

((-) 2 3 + √ 3 9 3) ÷ 3 4 = ▩ ▲ ▶ ▶ – =

Solución: $x=\begin{cases} -0{,}093405 \\ -1{,}2595 \end{cases}$

- ✱ Podemos hacer con la calculadora aquellas operaciones que den resultados exactos y luego escribirlos en nuestro desarrollo.
- ✱ También podríamos optar por hacer la operación completa en la calculadora, pero eso podría aumentar la probabilidad de cometer algún fallo.

③ $49x^2-126x+81=0 \Rightarrow x=\dfrac{126\pm\sqrt{126^2-4\cdot49\cdot81}}{2\cdot49}=\dfrac{126}{98}=1{,}285714286.$

Calculadora: 1 2 6 x^2 – 4 × 4 9 × 8 1 = ⇨ 0 ▩ 1 2 6 ÷ 9 8 =

Solución: $x=1{,}2857$

- ✱ Sabemos que $(-126)^2=126^2$, por eso nos hemos ahorrado escribir –126 dentro de la raíz cuadrada.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Si la solución no es un número entero, escríbela con cinco cifras significativas.

① $2x^2-5x-4=0$

② $3x^2+8x+2=0$

③ $169x^2-26x+1=0$

④ $x^2+11x-2=0$

⑤ $x^2-13x+4=0$

⑥ $x^2+30x+225=0$

⑦ $3x^2+7x+1=0$

⑧ $5x^2-10x+4=0$

⑨ $2x^2+13x+7=0$

⑩ $-5x^2+8x+2=0$

⑪ $-x^2+6x+2=0$

⑫ $2x^2+7x+1=0$

⑬ $2x^2-6x+1=0$

⑭ $13x^2+19x+2=0$

⑮ $17x^2-13x+2=0$

⑯ $289x^2+714x+441=0$

⑰ $-19x^2+7x+2=0$

⑱ $529x^2-46x+1=0$

⑲ $7x^2+6x+1=0$

⑳ $9x^2-13x+2=0$

㉑ $-x^2+19x+3=0$

㉒ $17x^2+23x+5=0$

㉓ $19x^2-31x+3=0$

㉔ $5x^2+13x-1=0$

㉕ $x^2+2x-19=0$

㉖ $x^2-104x+15=0$

Generalidades de las ecuaciones de segundo grado

Antes de seguir adelante con ecuaciones de segundo grado más complicadas, resumimos algunos de sus datos importantes:

- Se simplifican lo máximo posible antes de resolverlas.
- Pueden tener dos, una o ninguna solución.
- Las soluciones pueden ser números enteros, números racionales o puede que haya que calcularlas como números decimales redondeados.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Las soluciones que no sean números enteros, escríbelas con cuatro cifras significativas.

① $3x^2+17=0$ ③ $19x^2=0$ ⑤ $7x^2+2x-3=0$

② $3x^2-17=0$ ④ $x^2+6x=0$ ⑥ $7x^2+2x+3=0$

Resoluciones

① $3x^2+17=0 \Rightarrow 3x^2=-17 \Rightarrow x^2=-\frac{17}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{17}{3}} \rightarrow$ sin solución

Solución: la ecuación no tiene solución

- No es necesario usar la calculadora.

② $3x^2-17=0 \Rightarrow 3x^2=17 \Rightarrow x^2=\frac{17}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{17}{3}}=\begin{cases}2{,}380476143\\-2{,}380476143\end{cases}$

Calculadora: √ (1 7 ÷ 3) =

Solución: $x=\begin{cases}2{,}380\\-2{,}380\end{cases}$

- Lo mejor es hacer la división y la raíz cuadrada en la misma operación.

③ $19x^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$. Solución: $x=0$

- No es necesario usar la calculadora.

④ $x^2+6x=0 \Rightarrow x(x+6)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x+6=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=-6\end{cases}$. Solución: $x=\begin{cases}0\\-6\end{cases}$

⑤ $7x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot7\cdot(-3)}}{2\cdot7}=\frac{-2\pm\sqrt{88}}{14}=\begin{cases}0{,}527202251\\-0{,}812916537\end{cases}$

- El radicando (88) se puede calcular a mano, mentalmente o con calculadora, pero es imprescindible hacer las dos últimas operaciones con calculadora de una sola vez, primero con el signo «+» y luego con el signo «–».

Solución: $x=\begin{cases}0{,}5272\\-0{,}8129\end{cases}$

⑥ $7x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot7\cdot3}}{2\cdot7}=\frac{-2\pm\sqrt{-80}}{14} \rightarrow$ sin solución

Solución: la ecuación no tiene solución.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Escribe con cuatro cifras significativas las soluciones que no sean números enteros.

① $7x^2+37=0$

② $7x^2-37=0$

③ $31x^2=0$

④ $x^2-8x=0$

⑤ $9x^2+x-4=0$

⑥ $9x^2+x+4=0$

⑦ $31x^2-129=0$

⑧ $7x^2+81x=0$

⑨ $4x^2+3x-2=0$

⑩ $4x^2+3x+2=0$

⑪ $-2x^2-3=0$

⑫ $x^2+7x-2=0$

⑬ $17x^2+2x-9=0$

⑭ $15x^2+2x+1=0$

⑮ $3x^2-17x+2=0$

⑯ $x^2+13x+9=0$

⑰ $11x^2-131=0$

⑱ $189x^2+7x=0$

⑲ $4x^2+7x+4=0$

⑳ $4x^2+7x-4=0$

㉑ $x^2-11x+2=0$

㉒ $x^2-11x-2=0$

㉓ $7x^2+11x+9=0$

㉔ $11x^2-9=0$

㉕ $x^2-9x+1=0$

㉖ $9x^2+x+2=0$

Resolución general de ecuaciones de segundo grado

Método general para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita:

1. Se eliminan todos los paréntesis y todas las fracciones que aparezcan. En los casos más complicados puede ser necesario aplicar este paso varias veces. El orden no suele ser importante.
2. Se organizan los monomios de modo que en un miembro queden todos ellos y en el otro el número 0. Es conveniente en este paso escribir seguidos todos los monomios semejantes y por orden de grado.
3. Se suman todos los monomios semejantes entre sí.
4. Si es posible, se aconseja simplificar la expresión resultante.
5. Se resuelve por el método apropiado la ecuación simplificada obtenida.

Dependiendo de la facilidad de la ecuación y de tu habilidad, podrás saltarte pasos o encontrar tus propios atajos, no hay por qué seguir al pie de la letra el método.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Escribe con cinco cifras significativas las soluciones que no sean números enteros.

① $\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(x+5)^2}{3}=2x+27$ ② $5(2x+7)^2=4(2+35x)$ ③ $(4x+2)^2=(3x+2)^2$

Resoluciones

① $$\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(x+5)^2}{3}=2x+27 \xRightarrow{\text{Paso 1}} 3(x^2-6x+9)+2(x^2+10x+25)=6(2x+27) \xRightarrow{\text{Paso 1}}$$

$$\Rightarrow 3x^2-18x+27+2x^2+20x+50=12x+162 \xRightarrow{\text{Paso 2}}$$

$$\Rightarrow 3x^2+2x^2-18x+20x-12x+27+50-162=0 \xRightarrow{\text{Paso 3}} 5x^2-10x-85=0 \xRightarrow{\text{Paso 4}} x^2-2x-17=0 \xRightarrow{\text{Paso 5}}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-17)}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{4+68}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{72}}{2}=\begin{cases}5{,}242640687\\-3{,}242640678\end{cases}$$

Solución: $x=\begin{cases}5{,}2426\\-3{,}2426\end{cases}$

② $$5(2x+7)^2=4(2+35x) \xRightarrow{\text{Paso 1}} 5(4x^2+28x+49)=8+140x \xRightarrow{\text{Paso 1}} 20x^2+140x+245=8+140x \xRightarrow{\text{Paso 2}}$$

$$\Rightarrow 20x^2+140x-140x+245-8=0 \xRightarrow{\text{Paso 3}} 20x^2+237=0 \xRightarrow{\text{Paso 5}} x=\pm\sqrt{\frac{-237}{20}} \rightarrow \text{sin solución}$$

Solución: la ecuación no tiene solución.

③ $$(4x+2)^2=(3x+2)^2 \xRightarrow{\text{Paso 1}} 16x^2+16x+4=9x^2+12x+4 \xRightarrow{\text{Paso 2}} 16x^2-9x^2+16x-12x+4-4=0 \xRightarrow{\text{Paso 3}}$$

$$\Rightarrow 7x^2+4x=0 \xRightarrow{\text{Paso 5}} x(7x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\7x+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=-\frac{4}{7}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=-0{,}571428571\end{cases}$$

Solución: $x=\begin{cases}0\\-0{,}57143\end{cases}$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que todas tienen dos soluciones que son números enteros.

① $(x+5)(x-2)=2(x+1)$

② $(3x+2)^2=(2x+3)^2$

③ $(2x+1)^2=12x+61$

④ $\frac{x^2}{2}=9x-40$

⑤ $(x+1)^2+(x+2)^2=685$

⑥ $\frac{3x^2-20x}{4}+\frac{(x-2)^2}{4}=17$

⑦ $(5x+2)(x-3)+84=(3-x)(2+x)+28x$

⑧ $(4x-7)(2x+7)+49x=(x+8)(x-8)+15$

⑨ $(2x-3)^2+(2x+7)(2x-7)=4(2-x)$

⑩ $\frac{40}{3}+\frac{7x-9}{6}=\frac{x-1}{6}+x^2$

⑪ $(5x-4)^2=3x+(2x+5)^2+201$

⑫ $(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2=77$

⑬ $x^2+\frac{14x+29}{2}+\frac{3x+2}{3}=\frac{1}{6}$

⑭ $(3x+2)^2-75=(3x+1)(x+1)+2x$

⑮ $x^2+\frac{x-19}{5}+\frac{2(x-16)}{3}=\frac{58x+203}{15}$

⑯ $5x^2-(2x-5)(3x+1)=27$

⑰ $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=11$

⑱ $(2x+5)^2+x=(3x+1)^2+24$

⑲ $(2x-1)^2+5=\frac{7(x+3)^2}{2}$

⑳ $3(x+5)(x-5)=2(x+1)^2$

㉑ $\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=(x-7)^2$

㉒ $(2x+1)^2-(3x+2)(x-5)=281$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Escribe con cinco cifras significativas las soluciones que no sean números enteros.

① $(x+1)^2-3x=4$

② $x+\left(\frac{x}{3}-2\right)^2=10$

③ $(2x-1)^2+(3x-2)^2=25$

④ $(3x+5)(x-2)+(2x+3)^2=100$

⑤ $(7x+4)(7x-12)=98x-169$

⑥ $(x+3)^2+(x+2)^2=10$

⑦ $(2x+5)^2=(x+1)^2+18x$

⑧ $\left(\frac{x}{3}-2\right)^2+\left(\frac{x}{2}-2\right)^2=1$

⑨ $(2x+5)(2x-5)=(x+1)^2+1$

⑩ $\frac{(x+5)^2}{3}+\frac{7}{2}=x$

⑪ $(4x-3)^2+(3x-5)^2=972$

⑫ $((2x+1)(2x-1))^2=16x^4$

⑬ $\frac{x^2}{4}+\frac{(x+1)^2}{2}=17$

⑭ $4x^2-3x-1=5(81x-2081)$

⑮ $\frac{x^2}{6}-\frac{x}{9}=\frac{1}{18}$

⑯ $\frac{x^2}{12}-\frac{x-7}{4}=\frac{1}{3}$

⑰ $\frac{x^2}{14}-\frac{(x+1)^2}{10}=\frac{1}{7}$

⑱ $(x-32)^2-(2x-53)^2=11$

⑲ $(5x-2)^2+x+5=(2x-3)^2$

⑳ $\frac{x^2}{2}-\frac{x-2}{4}=\frac{x^2}{3}-\frac{x-1746}{6}$

㉑ $(x-1)^2-(2x+5)^2+(3x-4)^2=52$

㉒ $(37x+51)^2+(41x+73)^2=-1$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Escribe con cinco cifras significativas las soluciones que no sean números enteros.

① $(x-2)^2=7+x$

② $\frac{x^2+x}{3}-x=3$

③ $(x+7)(x+4)=28$

④ $\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}=\frac{x+1}{4}$

⑤ $\frac{x^2+3}{2}-\frac{x+7}{3}=1$

⑥ $(x-3)^2+(x-5)^2=-2$

⑦ $\frac{x^2-1}{5}-\frac{x-1}{3}=1$

⑧ $\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}=\frac{1}{5}$

⑨ $2(x+5)^2-(2x-5)^2=0$

⑩ $1-\frac{x-1}{2}=\frac{x^2+6}{4}$

⑪ $\left(\frac{x}{2}+5\right)^2=16$

⑫ $2(x^2-3)+5(x-1)=33$

⑬ $\frac{x^2}{4}-\frac{2-x}{3}=\frac{1}{3}$

⑭ $\frac{x^2}{3}-6x=-9$

⑮ $(x+2)^2+4x+8=0$

⑯ $(x-2)(x+5)=2x-4$

⑰ $\frac{(x+1)^2}{3}-\frac{(x-2)^2}{2}=4$

⑱ $(2x+7)^2=(x+8)(x+20)$

⑲ $(x-3)^2+(x-4)^2=13$

Enunciado

⑳ Resuelve la ecuación $\frac{x}{5}+2x=x^2-4{,}55$

Resolución de problemas mediante ecuaciones de segundo grado

Hay muchos enunciados de problemas que nos llevan a la necesidad de plantear y resolver una ecuación de segundo grado para encontrar la solución del problema. Por ejemplo, la aplicación del teorema de Pitágoras, con sus tres cuadrados, es fácil que lleve a una ecuación de segundo grado.

Ya has estudiado en los niveles 1 y 2 cómo resolver problemas usando ecuaciones, pero hasta ahora todas las ecuaciones que te han aparecido han sido de primer grado. Como una ecuación de segundo grado puede tener ninguna, una o dos soluciones, su discusión es considerablemente más difícil que cuando trabajamos con ecuaciones de primer grado.

Casos posibles al discutir las soluciones

La discusión de las soluciones de una ecuación de segundo grado en el contexto de la resolución de un problema es uno de los aspectos más importantes de este nivel 3; ahora es cuando deberás afinar al máximo tu comprensión del problema.

Para ir preparándote, te explicamos todos los casos que pueden ocurrir; será tarea tuya decidir en cada problema cómo actuar.

- La ecuación no tiene solución y por tanto el problema no tiene solución.

  Este caso no te podía aparecer nunca con ecuaciones de primer grado, ya que estas siempre tienen una solución. Pero sí te podía aparecer cuando la expresión algebraica del enunciado te llevaba a una contradicción.

- La ecuación tiene una sola solución, pero no es válida en el problema y el problema no tiene solución.

  Por ejemplo, el problema te puede pedir un número natural pero la solución de la ecuación es un número entero negativo.

- La ecuación tiene una sola solución, que es válida en el problema y por tanto el problema tiene una sola solución.

  Esto es similar al caso de resolver problemas con ecuaciones de primer grado.

- La ecuación tiene dos soluciones pero ninguna de ellas es válida y el problema no tiene solución.

  Por ejemplo, el problema te pide un número entero y ninguna de las dos soluciones del problema lo es.

- La ecuación tiene dos soluciones, una de ellas es válida y la otra no, de modo que el problema solo tiene una solución.

  Esta situación se da muy a menudo cuando buscamos una longitud, área o volumen, que sabemos que debe ser positiva, y una de las soluciones es negativa.

- La ecuación tiene dos soluciones, las dos son válidas y cada una da una solución distinta del problema, que por tanto tiene también dos soluciones.

  Este caso no se puede dar cuando resolvemos problemas con ecuaciones de primer grado.

- La ecuación tiene dos soluciones y las dos son válidas, pero las dos llevan a la misma solución del problema, que por tanto tiene una única solución.

  En estos casos suele existir una especie de simetría en las dos soluciones.

Enunciados

① Averigua dos números enteros consecutivos tales que su producto sea 2862.

② Averigua dos múltiplos de 4 consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 106.

③ Calcula las dimensiones de un rectángulo de 196 metros de perímetro y 2384 metros cuadrados de área. Da el resultado en metros.

Resoluciones

① Llamamos «x» al menor de los números pedidos. El otro será «x+1».

Como el producto debe ser 2862, planteamos la ecuación x(x+1)=2862.

Resolvemos la ecuación: $x(x+1)=2862 \Rightarrow x^2+x-2862=0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x=\begin{cases}53\\-54\end{cases}$

Discutimos las soluciones:

Si x=53, x+1=54 y obtenemos la pareja de números enteros 53 y 54.

Si x=–54, x+1=–53 y obtenemos la pareja de números enteros –54 y –53.

Solución: hay dos parejas de números que son solución del problema: la pareja 53 y 54 y la pareja –54 y –53.

Observación: sería un error muy grave decir que la solución del problema es la pareja 53 y –54, ya que esos dos números no son consecutivos.

② Llamamos «x» al menor de los múltiplos de 4 pedidos. El siguiente es «x+4».

Planteamos y resolvemos una ecuación: $x^2+(x+4)^2=106 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+x^2+8x+16-106=0 \Rightarrow 2x^2+8x-90=0 \Rightarrow x^2+4x-45=0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x=\begin{cases}5\\-9\end{cases}$

Discutimos las soluciones: ninguna es válida porque ninguna de las dos es un número múltiplo de 4.

Solución: el problema no tiene ninguna solución.

Observación: en muchos problemas como este es posible llegar a la conclusión de que no tienen solución sin plantear la ecuación; en este caso se puede razonar así: la suma de los cuadrados de dos múltiplos de 4 debe ser también múltiplo de 4 pero el número 106 no lo es. Este razonamiento puede ser difícil.

③ Llamamos «x» a una cualquiera de las dimensiones. Como el perímetro es 196, el doble de la suma de las dos dimensiones es 196, luego la suma de las dos dimensiones es 196:2=98. Por tanto, la otra dimensión es «98–x».

Área: $x(98-x)=2384 \Rightarrow 98x-x^2-2384=0 \Rightarrow x^2-98x+2384=0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x=\begin{cases}53\\45\end{cases}$

Si x=53, 98–x=45; si x=45, 98–x=53; por tanto, las dos soluciones de la ecuación llevan a la misma solución del problema.

Solución: las dimensiones son 53 metros y 45 metros.

Observación: las dos soluciones de la ecuación forman la solución del problema; pero no te fies de que ocurra a menudo, ya que solo hay algunos casos así.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas utilizando una ecuación.

① El cuadrado de un número entero y su mitad suman 915. Averigua el número.

② El triple de un número entero y el doble de su cuadrado suman 1952. Averigua el número.

③ Averigua tres números naturales consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 302.

④ El séxtuple de un número es siete unidades menor que su cuadrado. Calcula el número.

⑤ El cuadrado de un número es doce unidades mayor que su cuádruple. Calcula el número.

⑥ El cuadrado de un número y su óctuple suman 713. Averigua el número.

⑦ Encuentra dos números enteros consecutivos tales que su producto sea once unidades mayor que su suma.

⑧ Encuentra dos números enteros negativos consecutivos tales que su producto sea 19 unidades mayor que su suma.

⑨ Averigua dos números naturales que sumen 33 tales que la suma de sus cuadrados sea 549.

⑩ Descompón 33 en dos sumandos tal que el cuadrado del mayor y el doble del cuadrado del menor sumen 774.

⑪ Calcula las longitudes de los lados de un triángulo sabiendo que, medidas en metros, son números naturales consecutivos y que si al lado menor se le restan seis metros, el triángulo se convierte en un triángulo rectángulo.

⑫ Calcula las longitudes de los lados de un triángulo sabiendo que, medidos en metros, son números naturales consecutivos y que si a los dos lados mayores se les suman seis metros, el triángulo se convierte en un triángulo rectángulo.

⑬ Calcula las longitudes de los lados de un triángulo sabiendo que, medidas en metros, son números naturales consecutivos y que si al mayor se le suman siete metros, el triángulo se convierte en un triángulo rectángulo.

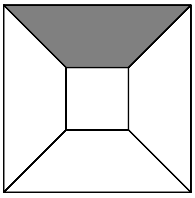
⑭ Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que el cateto mayor mide 56 m y que el doble del cateto menor es una unidad mayor que la hipotenusa.

⑮ Calcula dos números naturales que sumen cuatro y tales que la suma de sus cuadrados sea ochenta.

⑯ Calcula las dimensiones de un rectángulo de 48 m^2 de área sabiendo que un lado es dos metros mayor que el otro.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas utilizando una ecuación.



① De la figura de la derecha se sabe que la longitud del lado del cuadrado mayor es el triple que la longitud del lado del cuadrado menor y que el área de la zona gris es 578 metros cuadrados. Calcula en metros la longitud del lado del cuadrado mayor.

② Una familia dispone en su chalet de una piscina cuyas dimensiones son 20 metros y 12 metros. Construyen alrededor de la piscina un pasillo antideslizante con la misma anchura por todas partes. Calcula en metros la anchura del pasillo sabiendo que su área mide 105 metros cuadrados.

③ Averigua dos números cuya diferencia es 10 y el valor absoluto de la diferencia de sus cubos es 12 250.

④ Calcula en metros el perímetro de un rombo de 5400 m^2 de área sabiendo que las dos diagonales suman 222 m.

⑤ Para embaldosar un patio con baldosas cuadradas idénticas hacen falta 10000 baldosas; si cada baldosa tuviera cuatro centímetros más de lado, harían falta 3600 baldosas menos. Calcula en centímetros el lado de las baldosas.

⑥ Divide una cuerda de ocho metros en dos trozos de modo que la suma de las áreas de los cuadrados formados con los trozos sea 2,5 metros cuadrados.

⑦ Se divide una cuerda de cinco metros en dos trozos y se forma un cuadrado con cada trozo, resultando que un cuadrado tiene el doble de área que el otro. Calcula la longitud del trozo mayor de la cuerda; da el resultado en metros con tres cifras significativas.

⑧ Calcula la longitud de cada cateto de un triángulo rectángulo isósceles sabiendo que la hipotenusa mide trece metros. Da el resultado en metros con tres cifras significativas.

⑨ Dos vehículos están juntos y salen a la vez en direcciones perpendiculares con velocidades de 55 m/s y 63 m/s. Calcula cuánto tiempo debe pasar para que se encuentren a exactamente un kilómetro. Da el resultado en segundos con cuatro cifras significativas.

⑩ Las dos cifras de un número suman 12. Si al cuadrado del número le sumamos 48, obtenemos un tercio del cuadrado del número que resulta al invertir el orden de las cifras del primero. Averigua el número.

⑪ Calcula el radio de una circunferencia sabiendo que a las cuerdas que miden igual que el radio les corresponde una sagita de dos metros. Da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

⑫ El término general de una progresión aritmética es $a_n=3n+4$. Calcula el menor valor de «n» que verifica que la suma de los «n» primeros términos de la progresión «a» sea mayor que 1000.

Justificación del estudio de una sola ecuación lineal con dos incógnitas

En el nivel 2 trabajamos los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas más sencillos y sus tres métodos algebraicos de resolución. Para profundizar en el estudio de los más complejos necesitamos detenernos en examinar las características de una sola ecuación lineal de dos incógnitas.

Una ecuación lineal con dos incógnitas

Si llamamos «x» e «y» a dos incógnitas, estos son ejemplos de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

Ejemplo 1: $2x-3y=24$ Ejemplo 2: $5x+2y=50$ Ejemplo 3: $-x+7y=-15$

Observa que en todos los ejemplos las incógnitas están elevadas a 1 (que no se escribe) y nunca están multiplicadas entre sí; es decir, todos los monomios que aparecen en la expresión son de grado 1.

Una ecuación no lineal con dos incógnitas

Si alguna incógnita estuviera elevada a algún número distinto de 1 o las incógnitas estuvieran multiplicadas entre sí, la ecuación ya no sería lineal, porque habría algún monomio de grado mayor que 1.

Las siguientes expresiones son ecuaciones no lineales con dos incógnitas:

Ejemplo 4: $x^2+y^2=5$ Ejemplo 5: $xy=4$ Ejemplo 6: $x+y^2=8$

Número de soluciones de una ecuación con dos incógnitas

El caso más general y más útil es que una ecuación de dos incógnitas, sea lineal o no, tenga infinitas soluciones. Hay muchos casos diferentes, una ecuación podría no tener ninguna solución o solamente una; pero las que tienen más aplicación práctica son precisamente aquellas que tienen infinitas soluciones.

Pero tener infinitas soluciones no significa que **cualquier** pareja de números sea una solución de la ecuación, sino que hay infinitas parejas de números que verifican la solución; precisamente lo interesante es **cúales** son esas parejas.

Solución por tanteo

Como siempre que te enfrentas a un nuevo tipo de ecuaciones, es muy interesante que intentes encontrar soluciones tanteando. Te proponemos que encuentres por tanteo dos soluciones de cada uno de los seis ejemplos anteriores.

Algunas soluciones

Como cada ecuación de las seis propuestas tiene infinitas soluciones, solo te ofrecemos dos de cada una, que no tienen por qué ser las mismas que has pensado tú. De hecho, esperamos que las tuyas tengan números más sencillos. Simplemente, asegúrate de estas son correctas y las tuyas también.

$2x-3y=24$ $\begin{cases}x=6\\y=-4\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3\\y=-10\end{cases}$	$5x+2y=50$ $\begin{cases}x=6\\y=10\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\\y=30\end{cases}$	$-x+7y=-15$ $\begin{cases}x=-6\\y=-3\end{cases}$ $\begin{cases}x=29\\y=2\end{cases}$
$x^2+y^2=5$ $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$	$xy=4$ $\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}$	$x+y^2=8$ $\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$ $\begin{cases}x=-8\\y=-4\end{cases}$

Expresión general de una ecuación lineal con dos incógnitas

Si llamamos «x» e «y» a las incógnitas y «a», «b» y «c» a tres números conocidos, la expresión general de una ecuación lineal con dos incógnitas es

$$\boxed{ax+by=c}$$

Soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas

Hay varios casos, que explicamos desde el más general al más particular. No son casos que haya que saber de memoria, lo importante es poder reconocer y deducir el comportamiento de cualquier ecuación.

- $a \neq 0$ y $b \neq 0$. La ecuación tiene infinitas soluciones. Dado cualquier valor de una incógnita, siempre hay una solución con ese valor, aunque es necesario calcular el valor de la otra incógnita.

  Ejemplo 1. La ecuación $3x+4y=12$ tiene infinitas soluciones.

  Ejemplo 2. La ecuación $5x+7y=0$ tiene infinitas soluciones.

  Ejemplo 3. La ecuación $x-7y=9$ tiene infinitas soluciones.

- $a=0$ y $b \neq 0$. La ecuación tiene infinitas soluciones.
  - En todas las soluciones la incógnita «y» tiene el mismo valor.
  - La incógnita «x» puede tomar cualquier valor.
  - La ecuación se puede simplificar hasta llegar a una expresión $y=k$.

  Ejemplo 4. La ecuación $0x+5y=7$ tiene infinitas soluciones

  En todas las soluciones se verifica que $y=\frac{7}{5}$.

  La incógnita «y» puede tener cualquier valor.

  La ecuación se puede escribir $y=\frac{7}{5}$.

- $a \neq 0$ y $b=0$. La ecuación tiene infinitas soluciones.
  - En todas las soluciones la incógnita «x» tiene el mismo valor.
  - La incógnita «y» puede tomar cualquier valor.
  - La ecuación se puede simplificar hasta llegar a una expresión $x=k$.

  Ejemplo 5. La ecuación $5x+0y=4$ tiene infinitas soluciones.

  En todas las soluciones se verifica que $x=\frac{4}{5}$.

  La incógnita «y» puede tener cualquier valor.

  La ecuación se puede escribir $x=\frac{4}{5}$.

- $a=b=0$ y $c \neq 0$. La ecuación no tiene ninguna solución, aunque la expresión no debería ser considerada una ecuación porque se puede escribir como $0=c$; realmente, la expresión es una contradicción.

  Ejemplo 6. La ecuación $0x+0y=1$ no tiene ninguna solución.

  Ejemplo 7. La ecuación $0x+0y=-3$ no tiene ninguna solución.

- $a=b=c=0$. Cualquier pareja de números es solución de la ecuación, aunque la expresión no debería ser considerada una ecuación porque se puede escribir como $0=0$; realmente, la expresión es una identidad.

  Ejemplo 8. Cualquier pareja de números es solución de la ecuación $0x+0y=0$.

Obtención de soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas

Cuando una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones en las que el valor de una incógnita depende del valor de la otra, hay que averiguar fácilmente soluciones de la ecuación.

Inventar un valor y despejar el otro

Podemos inventar un valor cualquiera para una de las dos incógnitas, sustituirlo en la ecuación y despejar cuál debe ser el valor de la otra. Suele ser preferible, por simplicidad, intentar que los dos valores sean números enteros, aunque no siempre es posible. En muchos casos podrás hacer mentalmente todas las operaciones.

Ejemplo 1. Dada la ecuación $2x+3y=17$, averigua la solución en la que $x=-2$.

$x=-2 \Rightarrow 2(-2)+3y=17 \Rightarrow -4+3y=17 \Rightarrow 3y=21 \Rightarrow y=7$. Solución: $\begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases}$

Ejemplo 2. Dada la ecuación $5x-3y=22$, averigua la solución en la que $y=6$.

$y=6 \Rightarrow 5x-3\cdot 6=22 \Rightarrow 5x=22+18 \Rightarrow 5x=40 \Rightarrow x=8$. Solución: $\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$

Dar a una incógnita el valor 0 permite encontrar rápidamente soluciones de la ecuación, aunque muchas veces el otro valor sea una fracción, que intentaremos escribir como fracción irreducible.

Ejemplo 3. Dada la ecuación $3x+7y=21$, averigua la solución en la que $x=0$.

$x=0 \Rightarrow 3\cdot 0+7y=21 \Rightarrow 7y=21 \Rightarrow y=3$. Solución: $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$

Ejemplo 4. Dada la ecuación $3x+7y=21$, averigua la solución en la que $y=0$.

$y=0 \Rightarrow 3x+7\cdot 0=21 \Rightarrow 3x=21 \Rightarrow x=7$. Solución: $\begin{cases} x=7 \\ y=0 \end{cases}$

Ejemplo 5. Dada la ecuación $4x+5y=6$, averigua la solución en la que $y=0$.

$y=0 \Rightarrow 4x+5\cdot 0=6 \Rightarrow 4x=6 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$. Solución: $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=0 \end{cases}$

Despejar una incógnita y dar valores a la otra

Se puede usar este método cuando hay que obtener varias soluciones. Se puede despejar cualquiera de las dos incógnitas. Con este método suele ser más fácil encontrar soluciones enteras.

Ejemplo 6. Dada la ecuación $7x+2y=9$, averigua tres soluciones con valores enteros.

$7x+2y=9 \Rightarrow 2y=9-7x \Rightarrow y=\frac{9-7x}{2}$; $x=1 \Rightarrow y=1$; $x=3 \Rightarrow y=-6$; $x=-1 \Rightarrow y=8$

Solución: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=3 \\ y=-6 \end{cases}$ y $\begin{cases} x=-1 \\ y=8 \end{cases}$

Esta manera de obtener soluciones relaciona este tema con el tema de las tablas de valores del nivel 2 y con el tema de funciones de este nivel 3.

Enunciados

Escribe como fracción irreducible las soluciones que no sean números enteros.

① Dada la ecuación $2x+3y=9$, averigua la solución en la que $y=1$.

② Dada la ecuación $17x+7y=-14$, averigua la solución en la que $x=0$.

③ Dada la ecuación $5x-9y=5$, averigua la solución en la que $x=1$.

④ Dada la ecuación $5x-2y=17$, averigua la solución en la que $x=3$.

⑤ Dada la ecuación $3x+5y=1$, averigua la solución en la que $y=2$.

⑥ Dada la ecuación $-2x+7y=1$, averigua la solución en la que $y=-3$.

⑦ Dada la ecuación $8x+y=7$, averigua la solución en la que $x=\frac{1}{2}$.

⑧ Dada la ecuación $9x+7y=3$, averigua la solución en la que $y=0$.

⑨ Dada la ecuación $5x-2y=13$, averigua la solución en la que $y=1$.

⑩ Dada la ecuación $x+9y=17$, averigua la solución en la que $x=-1$.

⑪ Dada la ecuación $3x+7y=1$, averigua la solución en la que $y=-2$.

⑫ Dada la ecuación $-x+3y=16$, averigua la solución en la que $y=5$.

⑬ Dada la ecuación $5x-9y=35$, averigua la solución en la que $y=0$.

⑭ Dada la ecuación $3x+8y=5$, averigua la solución en la que $y=\frac{1}{4}$.

⑮ Dada la ecuación $2x-y=9$, averigua la solución en la que $x=2$.

⑯ Dada la ecuación $10x+9y=15$, averigua la solución en la que $y=0$.

⑰ Dada la ecuación $-x+3y=8$, averigua la solución en la que $y=1$.

⑱ Dada la ecuación $17x+8y=16$, averigua la solución en la que $x=0$.

⑲ Dada la ecuación $-2x+5y=13$, averigua la solución en la que $x=1$.

⑳ Dada la ecuación $7x+5y=19$, averigua la solución en la que $y=1$.

㉑ Dada la ecuación $6x+5y=3$, averigua la solución en la que $y=-1$.

㉒ Dada la ecuación $13x+15y=26$, averigua la solución en la que $y=0$.

㉓ Dada la ecuación $2x+5y=21$, averigua la solución en la que $y=3$.

㉔ Dada la ecuación $3x+y=9$, averigua la solución en la que $x=1$.

㉕ Dada la ecuación $2x-5y=1$, averigua la solución en la que $y=-1$.

㉖ Dada la ecuación $2x-y=7$, averigua la solución en la que $x=2$.

Representación gráfica de una ecuación con dos incógnitas

Aunque a las personas que estudian matemáticas se les presente la materia dividida en áreas, como álgebra, geometría, funciones, etcétera, en realidad las áreas están interrelacionadas. Los más grandes matemáticos de la historia siempre han sido los que encuentran estas relaciones.

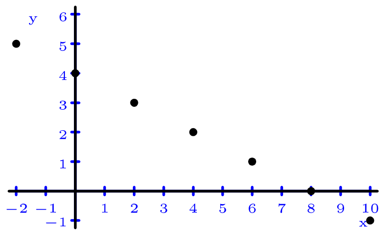
Así pues, nos planteamos el siguiente problema general: dada una ecuación de dos incógnitas deseamos saber qué figura geométrica se forma cuando representamos en unos ejes de coordenadas todas sus soluciones.

Investigación preliminar

Enunciado: averigua qué figura geométrica se forma al representar gráficamente todas las soluciones de la ecuación $x+2y=8$.

Empezamos por averiguar unas cuantas soluciones de la ecuación, que tengan soluciones enteras para que sea más fácil su manejo:

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=8 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=10 \\ y=-1 \end{cases}$$



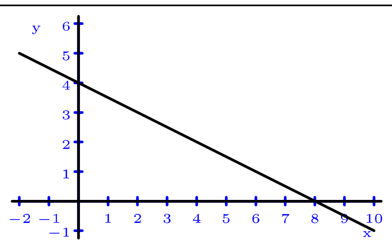
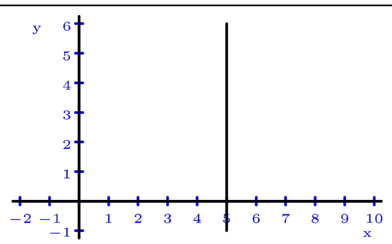
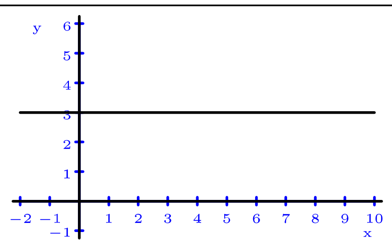
Para representar las soluciones con ejes de coordenadas, podemos usar el eje de abscisas para representar los valores de la incógnita «x» y el eje de ordenadas para los de la incógnita «y». Entonces, cada solución quedará representada por un punto del plano. Vemos la representación arriba a la derecha. Te parecerá claro que todos los puntos pertenecen a la misma recta. Pues, efectivamente, si representáramos **todas** las soluciones, obtendríamos una línea recta.

Representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas

Dada la ecuación lineal con dos incógnitas «$ax+by=c$», se verifica:

* Si $a\neq 0$ y $b\neq 0$, la representación de todas las soluciones de la ecuación es una línea recta oblicua.
* Si $a\neq 0$ y $b=0$, la representación de todas las soluciones de la ecuación es una línea recta vertical.
* Si $a=0$ y $b\neq 0$, la representación de todas las soluciones de la ecuación es una línea recta horizontal.

Ejemplos

Ejemplo 1: $x+2y=8$	Ejemplo 2: $x=5$	Ejemplo 3: $y=3$
		

Representación gráfica de una ecuación no lineal con dos incógnitas

El estudio de la representación gráfica de las ecuaciones no lineales con dos incógnitas es muy amplio y profundo. Algunos de los casos más sencillos se estudian en los niveles 4 y 5, pero a partir de ahí es materia de estudios universitarios. Un ejeplo: la representación gráfica de la ecuación $x^2+y^2=1$ es una circunferencia de centro el centro de coordenadas y radio 1, según veremos en el nivel 4.

Método para representar gráficamente una ecuación lineal con dos incógnitas

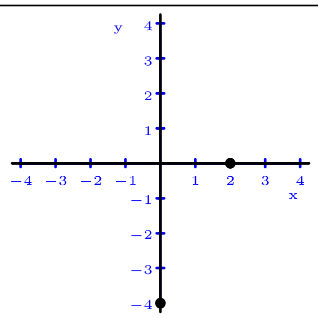
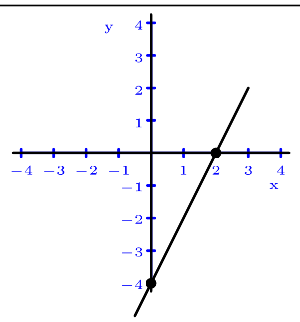
- ✱ Sabemos que la representación gráfica de todas las soluciones de una ecuación lineal es una línea recta.
- ✱ Para dibujarla basta encontrar dos soluciones de la ecuación, representar sus puntos asociados en unos ejes de coordenadas y unirlos con una línea recta.
- ✱ Si los puntos que encuentras están demasiados juntos, la gráfica te puede salir algo defectuosa; en ese caso, puedes averiguar alguna solución adicional para disponer de algún punto más.
- ✱ Auque es lógico que marques los puntos que encuentres, procura que la línea recta vaya más allá de esos puntos, porque hacerlo de una manera u otra tiene distinto significado, como veremos en el nivel 4. Si una línea no acaba en un punto marcado, entendemos que es infinita, que es lo ocurre en este caso.
- ✱ Dependiendo de dificultad de los números, podrías representar los puntos directamente averiguando mentalmente alguna solución.
- ✱ No siempre se acierta al primer intento eligiendo la escala de los ejes.

Enunciados

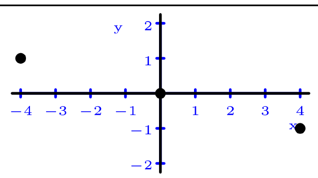
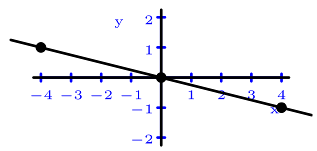
Representa gráficamente todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.

① $2x-y=4$ ② $x+4y=0$ ③ $3x-10y=-15$

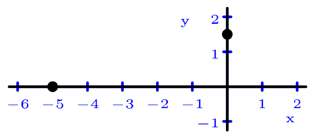
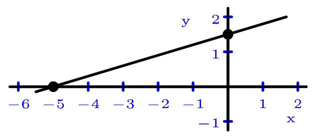
Resolución 1

Dos soluciones:	Su representación:	Unimos los puntos:
$\begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$		

Resolución 2

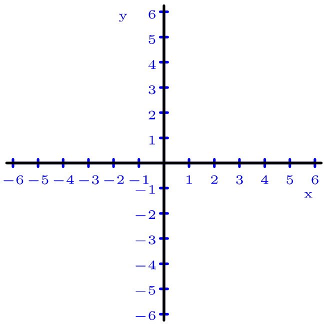
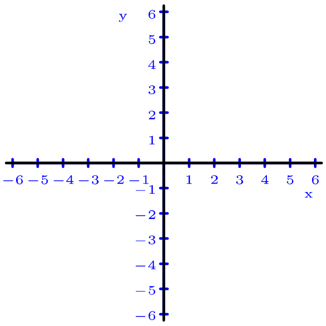
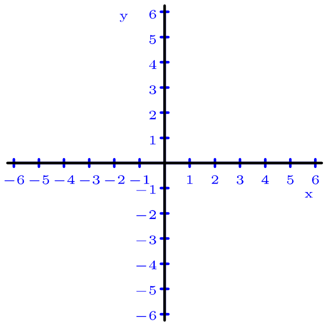
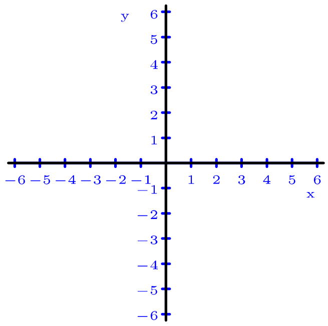
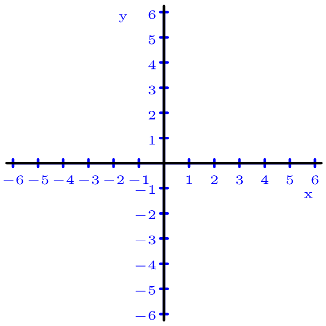
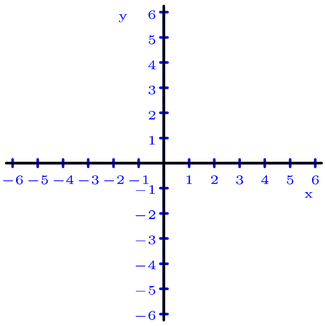
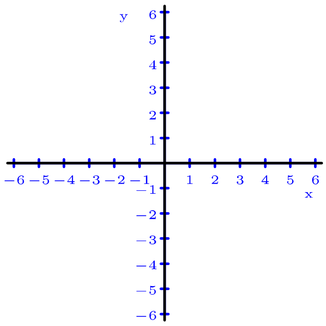
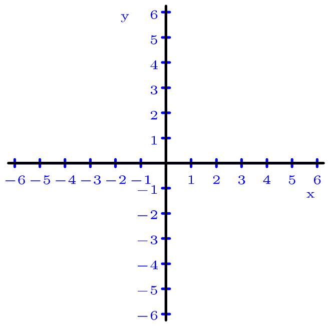
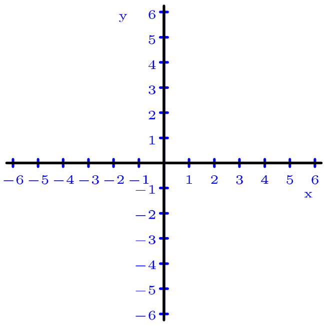
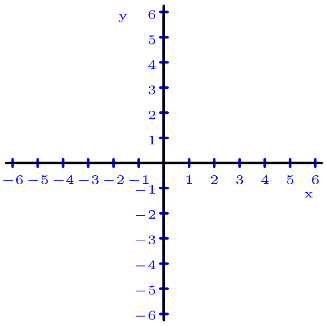
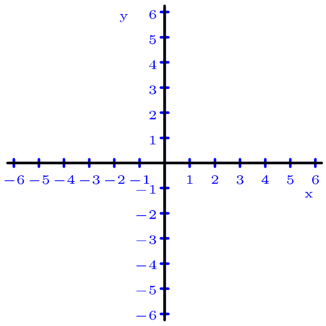
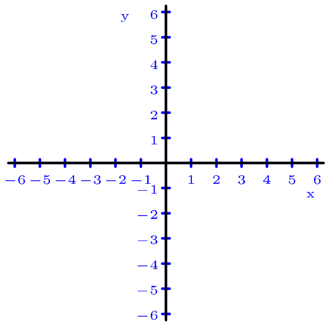
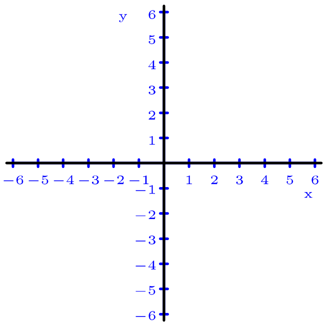
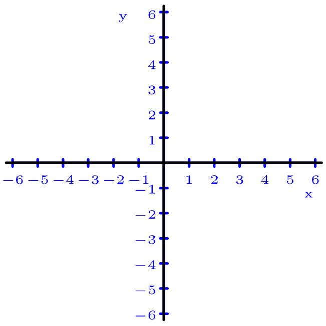
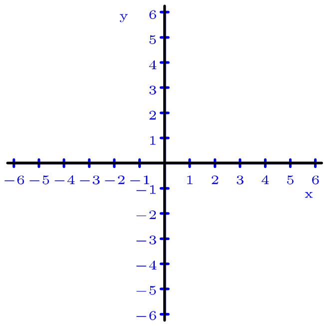
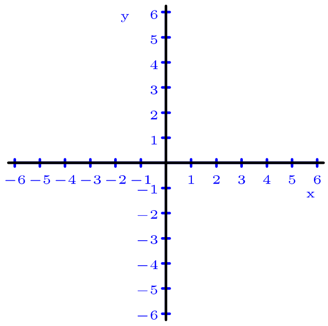
Tres soluciones:	Su representación:	Unimos los puntos:
$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}, \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$		

Resolución 3

Dos soluciones:	Su representación:	Unimos los puntos:
$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=-5 \\ y=0 \end{cases}$		

Enunciados

Representa gráficamente todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.

① $3x+2y=6$ 	② $x-2y=0$ 	③ $5x+3y=-15$ 	④ $4x+3y=0$ 
⑤ $-x+2y=4$ 	⑥ $5x-4y=20$ 	⑦ $4x+y=4$ 	⑧ $-5x+6y=30$ 
⑨ $6x+5y=30$ 	⑩ $10x+6y=15$ 	⑪ $3x-y=6$ 	⑫ $x+3y=0$ 
⑬ $2x+3y=6$ 	⑭ $2x-y=-4$ 	⑮ $x+2y=-6$ 	⑯ $-x+y=3$ 

Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una vez que sabemos representar gráficamente todas las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas, podemos usar el método para resolver aproximadamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

- ✱ La idea clave es representar las rectas formadas por las soluciones de cada ecuación y decir cuáles son aproximadamente las coordenadas del punto común a las dos rectas, que constituirán la solución del sistema de ecuaciones.
- ✱ Este método solo sirve para dar una solución aproximada, porque se basa en nuestra apreciación de las coordenadas del punto común.
- ✱ Si pensamos que las soluciones son números enteros o fracciones sencillas, podremos comprobar su veracidad sustituyendo los valores en las ecuaciones.
- ✱ La idea de la representación gráfica tiene usos más interesantes, que veremos un poco más adelante: nos ayudará a entender mejor el comportamiento de algunos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que aún no hemos visto.

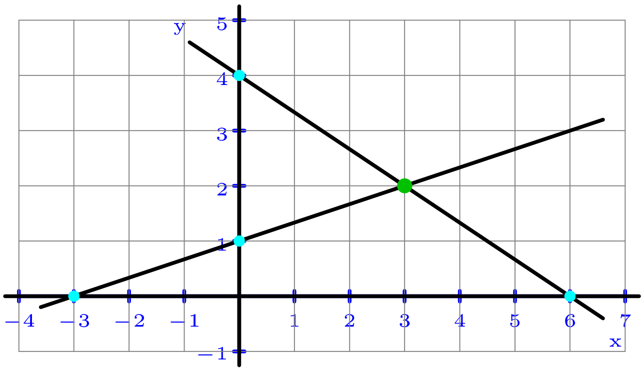
Enunciado

Resuelve gráficamente el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-3y=-3 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$

Resolución

Para representar gráficamente las soluciones de la ecuación $x-3y=-3$ usamos las soluciones $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$. Podríamos haber usado otras soluciones.

Para representar gráficamente las soluciones de la ecuación $2x+3y=12$ usamos las soluciones $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ y $\begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}$. Podríamos haber usado otras soluciones.



El punto de corte de las dos rectas parece ser el punto de coordenadas (3,2), luego la solución aproximada es $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

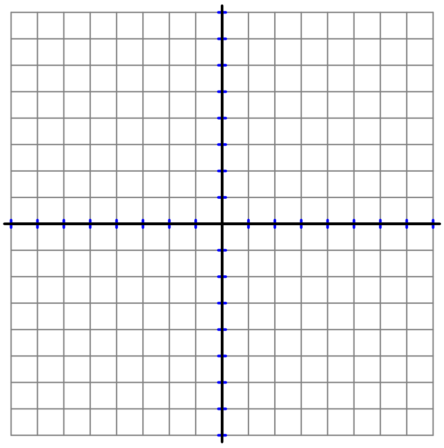
Para ver si la solución es exacta, hacemos la comprobación en las dos ecuaciones:
$x-3y=3-3\cdot 2=-3$ ✓; $2x+3y=2\cdot 3+3\cdot 2=12$ ✓

Solución: $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

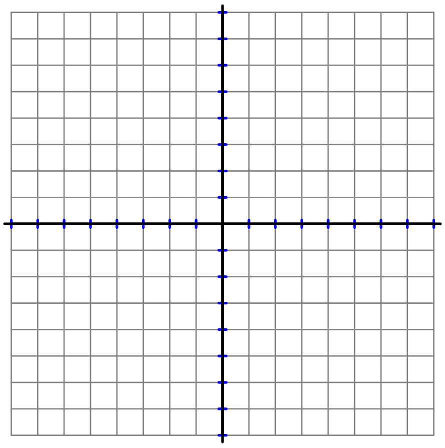
Enunciados

Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones sabiendo que todas las soluciones son números enteros.

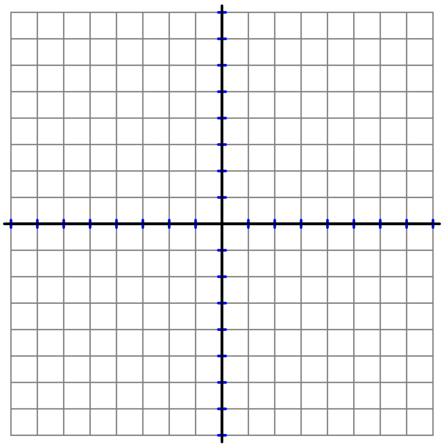
① $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=3 \end{cases}$



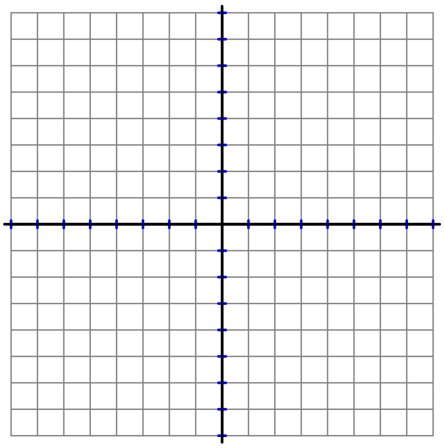
② $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+y=-8 \end{cases}$



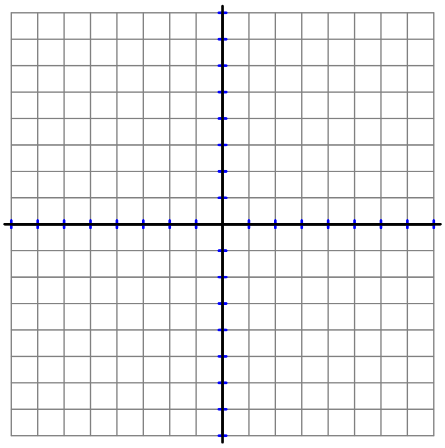
③ $\begin{cases} x-y=-4 \\ 2x+y=7 \end{cases}$



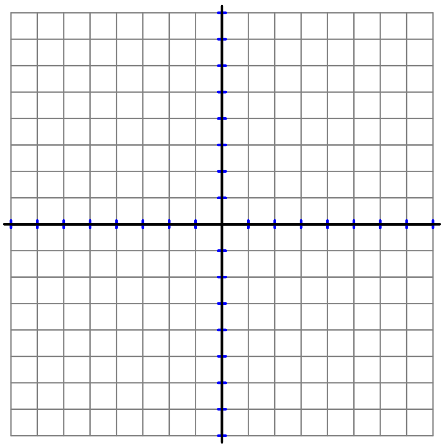
④ $\begin{cases} x-3y=-6 \\ 4x+3y=21 \end{cases}$



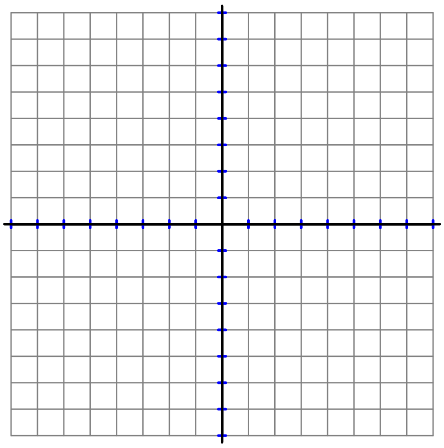
⑤ $\begin{cases} x-y=7 \\ 3x+2y=-4 \end{cases}$



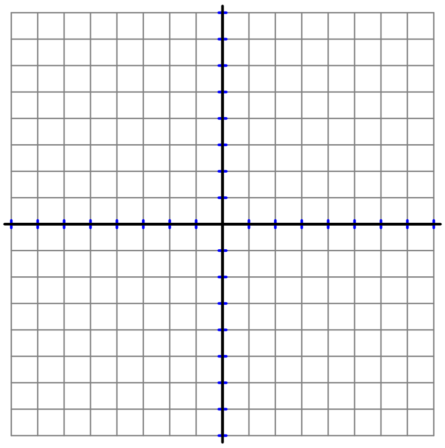
⑥ $\begin{cases} x-4y=-4 \\ x+2y=8 \end{cases}$



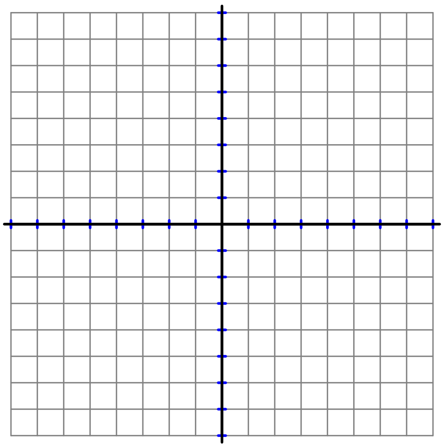
⑦ $\begin{cases} x-y=-7 \\ x+3y=1 \end{cases}$



⑧ $\begin{cases} 3x-5y=-12 \\ 3x+y=6 \end{cases}$



⑨ $\begin{cases} 3x-y=-3 \\ 3x+2y=-12 \end{cases}$

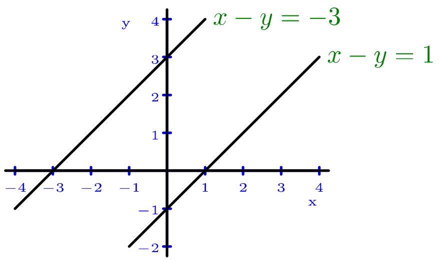
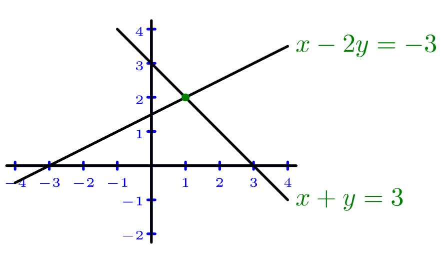
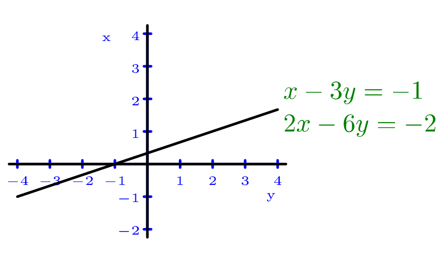


Tipos de sistemas de dos ecuaciones lineales

Atendiendo a cuántas soluciones tiene un sistema de dos ecuaciones lineales, los sistemas reciben distintos nombres:

* Sistemas **incompatibles**. No tienen ninguna solución. La representación gráfica de las soluciones de cada ecuación consiste en dos rectas paralelas. Cuando se intentan resolver mediante reducción, sustitución o igualación se llega a una contradicción.
* Sistemas **compatibles**. Tienen exactamente una solución. La representación gráfica de las soluciones de cada ecuación consiste en dos rectas que se cortan en un punto, que corresponde precisamente con la solución. Los valores exactos de la solución se pueden encontrar mediante reducción, sustitución o igualación.
* Sistemas **indeterminados**. Tienen infinitas soluciones. La representación gráfica de las soluciones de cada ecuación consiste en una única recta. Cuando se intentan resolver mediante reducción, sustitución o igualación, se llega a una identidad.

Ejemplos

Ejemplo 1. $\begin{cases} x-y=-3 \\ x-y=1 \end{cases}$	Ejemplo 2. $\begin{cases} x-2y=-3 \\ x+y=3 \end{cases}$	Ejemplo 3. $\begin{cases} x-3y=-1 \\ 2x-6y=-2 \end{cases}$
		
Sistema incompatible	Sistema compatible	Sistema indeterminado

Resoluciones

① Si lo resolvemos por reducción, al restar las dos ecuaciones se obtiene 0=–4, que es una contradicción, luego no la puede verificar ninguna pareja de números, por lo que vemos que el sistema es incompatible.

② La solución del sistema es $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$, como se puede comprobar.

③ Para resolver el sistema el primer paso lógico, con cualquier método que utilizamos, es simplificar la segunda ecuación entre 2, con lo que el sistema queda con dos ecuaciones iguales: $\begin{cases} x-3y=-1 \\ x-3y=-1 \end{cases}$. Obviamente, cualquier solución de la primera ecuación es solución de la segunda, y viceversa, con lo que una de las dos sobra (es redundante). El sistema queda reducido a la ecuación x–3y=–1, que sabemos que tiene infinitas soluciones, luego es indeterminado. Si lo intentáramos resolver por reducción, llegaríamos al restar las ecuaciones a la expresión 0=0 (una identidad), que no sirve para resolver el sistema.

Clasificación de sistemas de dos ecuaciones lineales

Clasificar un sistema de ecuaciones, en general, significa determinar de qué tipo es, sin necesidad de resolverlo. En el caso de los sistemas de dos ecuaciones lineales, clasificarlo significa determinar si es incompatible, compatible o indeterminado. Se puede preguntar la clasificación de un sistema sin pedir también su resolución o bien preguntar las dos cosas.

El ejercicio de clasificar un sistema de dos ecuaciones lineales solo resulta de algún interés cuando las ecuaciones no están simplificadas, porque si nos las presentan completamente simplificadas, es obvio, como vamos a ver ahora.

Sistemas incompatibles

Un sistema de dos ecuaciones lineales incompatible **siempre** se puede llegar a escribir como $\begin{cases} ax+by=c \\ ax+by=d \end{cases}$, con $c \neq d$. Es decir, con los primeros miembros de cada ecuación iguales pero los segundos miembros distintos.

Sistemas indeterminados

Un sistema de dos ecuaciones lineales indeterminado **siempre** se puede llegar a escribir como $\begin{cases} ax+by=c \\ ax+by=c \end{cases}$. Es decir, con las dos ecuaciones idénticas.

Sistemas compatibles

Un sistema de dos ecuaciones lineales compatible **nunca** se puede llegar a escribir como $\begin{cases} ax+by=c \\ ax+by=d \end{cases}$. Es decir, con los primeros miembros de cada ecuación iguales.

Ejemplos

Ejemplo 1. $\begin{cases} 5x+4y=21 \\ 5x+4y=32 \end{cases}$	Ejemplo 2. $\begin{cases} 7x+9y=11 \\ 7x+9y=11 \end{cases}$	Ejemplo 3. $\begin{cases} 2x+3y=17 \\ x+3y=13 \end{cases}$
Sistema incompatible	Sistema indeterminado	Sistema compatible

Enunciados

Clasifica los siguientes sistemas:

① $\begin{cases} 3x+6y=-12 \\ 2x+10y=15 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 14x+21y=28 \\ 8x+20y=16 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} -6x+10y=14 \\ 9x+15y=-35 \end{cases}$

Resoluciones

① $\begin{cases} 3x+6y=-12 \\ 2x+10y=15 \end{cases} \left| \begin{matrix} x+2y=-4 \\ x+2y=3 \end{matrix} \right.$. Solución: incompatible

② $\begin{cases} 14x+21y=28 \\ 8x+20y=16 \end{cases} \left| \begin{matrix} 2x+3y=4 \\ x+5y=4 \end{matrix} \right.$. Solución: compatible.

③ $\begin{cases} -6x+10y=14 \\ 9x-15y=-35 \end{cases} \left| \begin{matrix} 3x-5y=-7 \\ 3x-5y=-7 \end{matrix} \right.$. Solución: indeterminado

Enunciados

Clasifica los siguientes sistemas:

① $\begin{cases} 2x-5y=3 \\ -2x+5y=-3 \end{cases}$

② $\begin{cases} 3x+7y=12 \\ 6x+16y=24 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 5x+6y=0 \\ 8x-y=0 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x+3y=9 \\ 2x+6y=10 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} 15x+30y=5 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y=2 \\ 8x+y=24 \end{cases}$

⑧ $\begin{cases} 5x-7y=4 \\ -5x+7y=4 \end{cases}$

⑨ $\begin{cases} 7x-11y=0 \\ -7x+11y=0 \end{cases}$

⑩ $\begin{cases} 14x-10y=22 \\ 21x-15y=33 \end{cases}$

⑪ $\begin{cases} 2x-4y=6 \\ 3x+6y=9 \end{cases}$

⑫ $\begin{cases} \frac{5}{7}x-\frac{1}{14}y=\frac{3}{7} \\ -20x+2y=12 \end{cases}$

⑬ $\begin{cases} 2x+12y=10 \\ 3x+12y=15 \end{cases}$

⑭ $\begin{cases} 2x-12y=10 \\ 3x-18y=15 \end{cases}$

⑮ $\begin{cases} 3x-4y=9 \\ -3x+4y=-18 \end{cases}$

⑯ $\begin{cases} -9x-21y=18 \\ 6x+14y=-12 \end{cases}$

Resolución general de un sistema de dos ecuaciones lineales

- Los sistemas de ecuaciones no suelen aparecer ya simplificados, como hemos venido trabajando hasta ahora, ni en ejercicios ni en problemas.
- Normalmente habrá que realizar algunas operaciones sencillas con ellos antes de aplicar uno de los métodos que conocemos.
- Hasta llegar a la expresión final simplificada, se suele trabajar con cada ecuación independientemente, aunque se escriban las dos a la vez.
- Si en una de las ecuaciones ya no hay que hacer ninguna operación, se copia.
- En cada paso se dice que vamos obteniendo **sistemas equivalentes** (se llaman así a los que tienen las mismas soluciones).

Método general para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales

1. En cada ecuación se eliminan todos los paréntesis y todas las fracciones que aparezcan. En los casos más complicados puede ser necesario aplicar este paso varias veces. El orden no suele ser importante.
2. En cada ecuación se organizan los monomios de modo que en los primeros miembros aparezcan primero los de una incógnita, luego los de la otra y en los segundos miembros queden los monomios sin incógnita.
3. Se suman todos los monomios semejantes entre sí.
4. Si es posible, se aconseja simplificar las expresiones resultantes.
5. Se resuelve por reducción, sustitución o igualación el sistema simplificado obtenido.

Dependiendo de la facilidad del sistema y de tu habilidad, podrás saltarte pasos o encontrar tus propios atajos, no hay por qué seguir al pie de la letra el método.

Enunciado

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2(x-y)=1-y \\ \dfrac{x+y}{7}+x=y-2 \end{cases}$

Resolución

Paso 1 Paso 2 Paso 3 Paso 4

$$\begin{cases} 2(x-y)=1-y \\ \dfrac{x+y}{7}+x=y-2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 2x-2y=1-y \\ x+y+7x=7y-14 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2x-2y+y=1 \\ x+7x+y-7y=-14 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2x-y=1 \\ 8x-6y=-14 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2x-y=1 \\ 4x-3y=-7 \end{array}$$

Paso 5: elegimos para continuar el método de sustitución, pero podríamos haber elegido también reducción o igualación:

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-3y=-7 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 2x-1=y \\ 4x-3(2x-1)=-7 \end{array} \right| \; 4x-6x+3=-7 \Rightarrow -2x=-7-3 \Rightarrow -2x=-10 \Rightarrow x=5$$

$y = 2x-1 = 2\cdot 5-1 = 9$

Solución: $\begin{cases} x=5 \\ y=9 \end{cases}$

Observación: en el paso 4 hemos repetido la ecuación de arriba.

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

① $\begin{cases} 1-2(y-x)=\dfrac{3(2x+y)}{2} \\ \dfrac{x}{5}=5+\dfrac{y}{2} \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2(x+2y)=29-y \\ \dfrac{x-1}{4}-\dfrac{4y-1}{8}=\dfrac{1}{8} \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x-1=\dfrac{y}{2} \\ 3y=9x-3 \end{cases}$

Resolución 1

$$\begin{cases} 1-2(y-x)=\dfrac{3(2x+y)}{2} \\ \dfrac{x}{5}=5+\dfrac{y}{2} \end{cases} \left| \begin{matrix} 2-4(y-x)=3(2x+y) \\ 2x=50+5y \end{matrix} \right. \left| \begin{matrix} 2-4y+4x=6x+3y \\ 2x-5y=50 \end{matrix} \right|$$

$$\left| \begin{matrix} 4x-6x-4y-3y=-2 \\ 2x-5y=50 \end{matrix} \right. \left| \begin{matrix} -2x-7y=-2 \\ 2x-5y=50 \end{matrix} \right| -12y=48 \Rightarrow y=-4$$

2x–5y=50 ⇒ 2x–5(–4)=50 ⇒ 2x=50–20 ⇒ 2x=30 ⇒ x=15

Solución: $\begin{cases} x=15 \\ y=-4 \end{cases}$

Resolución 2

$$\begin{cases} 2(x+2y)=29-y \\ \dfrac{x-1}{4}-\dfrac{4y-1}{8}=\dfrac{1}{8} \end{cases} \left| \begin{matrix} 2x+4y=29-y \\ 2(x-1)-(4y-1)=1 \end{matrix} \right. \left| \begin{matrix} 2x+4y+y=29 \\ 2x-2-4y+1=1 \end{matrix} \right. \left| \begin{matrix} 2x+5y=29 \\ 2x-4y=2 \end{matrix} \right| 9y=27 \Rightarrow y=3$$

2x–4y=2 ⇒ x–2y=1 ⇒ x–2·3=1 ⇒ x=7

Solución: $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$

Comentario: la expresión «2x–4y=2» no la hemos simplificado entre 2 porque así hemos podido utilizar el método de reducción directamente; sin embargo, para calcular más adelante el valor de «x» sí la hemos simplificado.

Resolución 3

$$\begin{cases} x-1=\dfrac{y}{2} \\ 3y=9x-3 \end{cases} \left| \begin{matrix} 2x-2=y \\ y=3x-1 \end{matrix} \right| \text{ } 2x-2=3x-1 \Rightarrow 2x-3x=-1+2 \Rightarrow -x=1 \Rightarrow x=-1$$

y=3x–1=3(–1)–1=–4

Solución: $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$

Comentario: no hemos colocado los monomios en las ecuaciones porque hemos visto que se podía aplicar el método de igualación directamente. Es un buen ejemplo de un atajo.

Consejos

✱ Usa el método general cuando no veas ningún atajo.

✱ Utiliza una manera personal de resolver los sistemas cuando se te ocurra.

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas:

①	$\begin{cases} \frac{y}{3}+1=\frac{x}{2} \\ 2(y-10)=\frac{x-2}{2} \end{cases}$	②	$\begin{cases} \frac{3x}{5}-\frac{y}{25}=\frac{28}{25} \\ \frac{y-x}{7}=x-1 \end{cases}$	③	$\begin{cases} 2(x+1)-3(y+2)=35 \\ \frac{3x}{2}+\frac{y}{3}=6 \end{cases}$
④	$\begin{cases} \frac{x-y}{2}+x=-1 \\ 3(y-x)-2=4 \end{cases}$	⑤	$\begin{cases} \frac{x-2}{3}+\frac{3y+1}{2}=12 \\ x-\frac{1-5y}{2}=22 \end{cases}$	⑥	$\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=5 \\ \frac{y-x}{5}=1 \end{cases}$
⑦	$\begin{cases} \frac{x+y}{2}+x=9 \\ 3(y-x)-5=-35 \end{cases}$	⑧	$\begin{cases} \frac{x+5}{2}-\frac{5y-1}{3}=2 \\ x+\frac{3y+5}{11}=6 \end{cases}$	⑨	$\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{7}=6 \\ \frac{y-x}{2}=3 \end{cases}$
⑩	$\begin{cases} \frac{x+y}{4}-\frac{2x+y}{6}=1 \\ \frac{3(y-x)}{4}+\frac{y+2}{3}=12 \end{cases}$	⑪	$\begin{cases} \frac{x+y}{6}+\frac{x-y}{7}=4 \\ x+5y=\frac{2x+y}{5}+3 \end{cases}$	⑫	$\begin{cases} \frac{2x-3y}{5}+y=x+7 \\ 3(x+9y)=\frac{x+y}{2}-1 \end{cases}$
⑬	$\begin{cases} \frac{2x-y}{4}-\frac{x+2y}{5}=4 \\ \frac{2x-y}{5}-\frac{y+2}{2}=4 \end{cases}$	⑭	$\begin{cases} \frac{x+2y}{2}=2(x+y)+1 \\ \frac{x}{4}-\frac{x-y}{11}=2x+y-1 \end{cases}$	⑮	$\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=0 \\ \frac{x+y}{3}=1 \end{cases}$
⑯	$\begin{cases} \frac{x-y}{6}-\frac{x+y}{45}=\frac{1}{2} \\ \frac{2x+3y}{5}=\frac{x}{10}+6 \end{cases}$	⑰	$\begin{cases} 20+2x=y \\ 4y-17=x \end{cases}$	⑱	$\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y-6}{5}=9 \\ \frac{x}{11}-\frac{y+4}{2}=-7 \end{cases}$
⑲	$\begin{cases} \frac{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}}{5}=\frac{\frac{x}{5}-\frac{y}{10}}{6} \\ 2(x+y)=y+6 \end{cases}$	⑳	$\begin{cases} 3\left(\frac{x}{6}-\frac{y}{2}\right)=4 \\ \frac{x+3y}{7}-\frac{x-y}{10}=1 \end{cases}$	㉑	$\begin{cases} 2(2x+y)=3(x-y-11) \\ 4(3x-y)+69=5(3x-2y) \end{cases}$
㉒	$\begin{cases} \frac{2y-x}{9}=y-3 \\ y-\frac{x+y}{3}=6 \end{cases}$	㉓	$\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{y-x}{3}=x+5 \\ \frac{x+2y}{7}-\frac{x-2}{5}=6 \end{cases}$	㉔	$\begin{cases} \frac{x-y}{4}+\frac{5x+3y}{2}=0 \\ \frac{6x+y}{5}-\frac{x+3y}{4}=0 \end{cases}$
㉕	$\begin{cases} 2x+7=-3y \\ 4x-2y=58 \end{cases}$	㉖	$\begin{cases} 2(x-y)=-3y-1 \\ 8-(x-2y)=-2x \end{cases}$	㉗	$\begin{cases} y=x-11 \\ 2y=20-4x \end{cases}$

Enunciado

Averigua un número capicúa de tres cifras sabiendo que las tres cifras suman 13 y que si al número se le suma 364, se obtiene otro número capicúa de tres cifras, pero intercambiadas respecto al número original.

Comentarios

* Si un número tiene tres cifras y llamamos «c» a la cifra de las centenas, «d» a la cifra de las decenas y «u» a la cifra de las unidades, el número es igual a «100c + 10d + u». Ejemplo: 482 = 100·4 + 10·8 + 2.
* Del enunciado entendemos que en el número pedido la cifra de las centenas es la misma que la de las unidades, porque el número es capicúa.
* Del enunciado entendemos que al sumar 364 al número original, la cifra de las centenas (que también es la de las unidades) se convierte en la de las decenas y la de las decenas se convierte en la de las centenas y en la de las unidades.

Resolución

Llamamos «x» a la cifra de las centenas, que es la misma que la de las unidades.

Llamamos «y» a la cifra de las decenas.

Como la suma de las tres cifras es 13, $2x+y=13$; será una de nuestras ecuaciones.

Como al sumar al número 364 se invierten los papeles de las cifras,

$100x+10y+x+364=100y+10x+y$, será otra de nuestras ecuaciones.

Como la primera ecuación ya está simplificada, procedemos a simplificar al máximo la segunda:

$100x+10y+x+364=100y+10x+y \Rightarrow 100x+x-10x+10y-100y-y=-364 \Rightarrow$

$\Rightarrow 91x-91y=-364 \Rightarrow x-y=-4$.

Planteamos y resolvemos el sistema:

$\left\{\begin{matrix} 2x+y=13 \\ x-y=-4 \end{matrix}\right|$ $3x=9 \Rightarrow x=3$; $x-y=-4 \Rightarrow 3-y=-4 \Rightarrow y=7$. Solución del sistema: $\left\{\begin{matrix} x=3 \\ y=7 \end{matrix}\right.$

Solución: 373

¿Usar una ecuación o un sistema?

Algunos enunciados piden explícitamente usar una ecuación para resolver un problema; otros piden usar un sistema de ecuaciones. Si el enunciado lo solicita, hay que respetar la exigencia. Pero algunos enunciados no indican si hay que usar una ecuación o un sistema; en ese caso, será tarea tuya decidir qué usar, caso de que sea posible usar ambas técnicas.

Ejemplo: el problema «averigua dos números que sumen 12 de modo que el triple del mayor sea 21 unidades mayor que el doble del menor» se puede resolver tanto con una ecuación como con un sistema.

Resolución con una **ecuación**: llamamos «x» al número mayor; el menor será $12-x$.

$3x=2(12-x)+21 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x=9 \Rightarrow 12-x=12-9=3$. Solución: 9 y 3.

Resolución con un **sistema**: llamamos «x» al número mayor e «y» al número menor.

$\left\{\begin{matrix} x+y=12 \\ 3x=2y+21 \end{matrix}\right| \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=9 \\ y=3 \end{matrix}\right.$. Solución: 9 y 3.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas utilizando un sistema de ecuaciones.

① Hace cuatro años, Nara tenía el doble de edad que su hermana Fyra, y dentro de tres años, Nara tendrá $\frac{3}{2}$ de la edad de Fyra. Averigua las edades de las dos hermanas.

② Si el pastor Peeta le diera a la pastora Katniss seis de sus ovejas, ella tendría el doble que él. Si Katniss le diera 19 de sus ovejas a Peeta, entonces él tendría el triple que ella. Averigua cuántas ovejas tiene cada uno.

③ La suma de las edades de un padre y de su hijo es 42 años. Dentro de nueve años la edad del padre será tres veces la del hijo. ¿Qué edad tienen ahora el padre y el hijo?

④ En una exposición de lámparas solo hay lámparas con una bombilla o con tres bombillas. Si se encienden a la vez las quince lámparas expuestas, la estancia queda iluminada por 29 bombillas. ¿Cuántas lámparas hay de cada tipo?

⑤ La suma de dos números es 50. Calcula dichos números si siete veces el menor es igual al doble del mayor disminuido en uno.

⑥ Por cuatro albrinas y seis alcomanes tengo que pagar 6,8 euros, pero si compro diez albrinas me hacen un descuento del 20 % en cada una y si compro veinte alcomanes me hacen un descuento del 30 % en cada uno, de modo que por diez albrinas y veinte alcomanes solo tengo que pagar 14,8 euros. Calcula el precio en euros que tiene cada albrina y cada alcomán.

⑦ Si yo te doy a ti tres de mis crequitones, tendríamos los mismos; pero si me los dieras tú a mí, yo tendría el triple que tú. ¿Cuántos tenemos cada uno?

⑧ Mario quiere descomponer el número 46 en dos sumandos que sean números naturales, de tal manera que si uno se divide entre 7 y el otro entre 3, la suma de los cocientes es 10. ¿Cuál sería esa descomposición?

⑨ Como llueve, los amigos Ángel y Benito deciden pasar la tarde con videojuegos. Ángel alquila tres juegos y Benito dos, todos al mismo precio. Cuando una amiga, Carla, decide sumarse a la sesión, dice Ángel: «No alquiles más juegos, que ya tenemos cinco; pon cuatro euros y los repartiremos entre Benito y yo de forma que todos hayamos puesto lo mismo». ¿Qué cantidad (en euros) corresponde a Benito?

⑩ Averigua los cuatro primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que la suma de los dos primeros es -51 y la de los dos siguientes es 9.

Enunciado

⑪ Averigua el valor de las incógnitas «x», «y», «z» y «t» en el siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas: $\begin{cases} 2z+3x-y+4t=32 \\ 5x+7y=16 \\ 2x-9t+5z+3y=217 \\ 9x-5y=152 \end{cases}$

Concepto de función

En el nivel 2 viste que hay ocasiones en las que el valor de una magnitud depende del valor de la otra; por ejemplo, cuando ambas son directamente proporcionales o inversamente proporcionales. En la vida real es muy importante la idea de **relación**: cada mamífero tiene una madre, cada número tiene un doble, cada punto de la tierra tiene una latitud, etcétera.

En matemáticas, las funciones son el concepto que usamos para manejar algunas de estas relaciones. Es una idea muy rica, con muchas particularidades y el ladrillo fundamental de esta parte de las matemáticas llamada análisis.

En este nivel 3 veremos solo las primeras definiciones sobre funciones y al principio te pueden resultar algo extrañas, por ser un objeto de estudio completamente nuevo en tu formación y que habrá que aplicar más adelante de muchas maneras distintas, pero ten en cuenta que a lo largo de los niveles que quedan de curso irás estudiando y ampliando tu conocimiento de las funciones.

De momento, quédate una idea principal: una función es la **relación** entre los valores de dos magnitudes. Fíjate bien: la **relación**, no los propios valores.

Definiciones

- Una **variable** es una magnitud que puede tomar diferentes valores.
- Una **función** es la **relación** entre dos variables.
- **Variable independiente** es la que puede tomar cualquier valor, aunque sea respetando algunas restricciones.
- **Variable dependiente** es la que toma valores según los toma la independiente.
- Una función asocia a cada valor de la variable independiente un **único** valor de la variable dependiente.
- **Dominio** de una función es el conjunto de valores que admite la variable independiente.
- En muchas ocasiones es necesario especificar las unidades en que se van a medir las variables, sobre todo si la función se utiliza para resolver un problema de la vida real; pero en otras ocasiones las unidades no importan porque se va a estudiar la propia relación.

Ejemplo

Cuando estudiamos el área del cuadrado vimos que se calcula como el cuadrado de la longitud del lado. Es decir, el área de un cuadrado **depende** de la longitud del lado; visto desde el nuevo punto de vista, ahora estamos ante la **función área**.

- Las variables que manejamos son la longitud del lado del cuadrado y el área del cuadrado.
- La función es la **relación** que existe entre la longitud del lado del cuadrado y el área del cuadrado.
- La variable independiente es la longitud del lado del cuadrado.
- La variable dependiente es el área del cuadrado.
- A cada valor de la longitud del lado le corresponde un único valor del área.
- El dominio de la función es el conjunto de números positivos, porque la longitud del lado debe ser positiva.
- Como unidades podemos usar cualquier unidad de longitud y su correspondiente unidad de superficie, como metros y metros cuadrados, por ejemplo.

Identificación de las variables de una función

Cuando observamos un proceso y queremos estudiarlo mediante una función, el primer paso es detectar cuáles son las variables que aparecen. Una de ellas podrá variar libremente (aunque sea cumpliendo alguna restricción natural) y la otra tomará valores según los vaya tomando la primera. La función será, por tanto la relación entre esas dos variables.

Como la relación suele estar clara, una de las dificultades es distinguir cuál de las variables es la independiente y cuál es la dependiente. Nos interesará estudiar cómo va cambiando la variable dependiente según cambie la independiente. Buscaremos cuál es la que cambia primero y cuál es la que cambia según lo haga la otra.

Enunciados

En los siguientes textos aparece una función. Identifica cuáles son las variables independiente y dependiente.

① Un avión comercial realiza el mismo recorrido una y otra vez, pero quienes los gestionan saben que cuanto más deprisa lo realizan, menos tiempo tardan.

② Una persona está estudiando una carrera universitaria pero trabaja algunas horas a la semana para ayudar a pagar sus gastos. Cuanto más tiempo dedica a trabajar, más dinero gana.

③ Una persona se encuentra en su infancia y se ha aficionado mucho a comprar dulces. Sus padres le dan muy poco dinero, porque se lo gasta todo en dulces. Aunque la persona es pequeña, sabe que cuanto más dinero le den sus padres, más dulces puede comprar.

Resolución 1

Variable independiente: la velocidad a la que deciden viajar cada vez.

Variable dependiente: el tiempo que tardan en completar el recorrido.

Resolución 2

Variable independiente: el tiempo que dedica a trabajar.

Variable dependiente: el dinero que gana trabajando.

Resolución 3

Variable independiente: el dinero que le dan sus padres cada vez.

Variable dependiente: la cantidad de dulces que compra cada vez.

Comentario

Si los enunciados fueran ligeramente diferentes, las variables podrían estar cambiadas, indicando que ahora nos interesa la relación al revés que antes. Por ejemplo, fíjate en estos enunciados alternativos:

④ Alternativa a (1). Los que gestionan los viajes en avión anotan cuidadosamente cuánto tiempo tardan en hacer cada recorrido y a partir de ahí calculan a qué velocidad lo han completado.

⑤ Alternativa a (2). La persona estudiante primero piensa cuánto dinero necesita ganar y a partir de ahí calcula cuánto tiempo debe trabajar.

⑥ Alternativa a (3). La persona decide cuántos dulces quiere comprar y luego le pide el dinero que necesita a sus padres.

Enunciados

En los siguientes textos aparece una función. Identifica cuáles son las variables independiente y dependiente.

① Un grupo de amigos y amigas están preparando una fiesta y van a un supermercado a comprar refrescos. Saben que cuánto más compren, más tendrán que pagar.

② Un grupo de estudiantes está aprendiendo qué es la ley de la gravitación universal de Newton. Para ello, se dedican a lanzar canicas desde las diferentes plantas de un edificio. Lo primero que descubren es que cuánto más alto es el lugar desde el que las lanzan, más tiempo tardan en llegar las canicas al suelo.

③ Una persona mayor decide empezar a hacer algo de ejercicio para mejorar su calidad de vida y empieza a salir a caminar cada tarde un rato. Pronto descubre que cuanto más tiempo está andando, más distancia recorre.

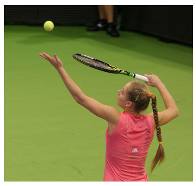
④ Las personas que practican submarinismo se enfrentan al problema de la presión que deben soportar sus cuerpos: cuanto más profundo se sumergen, mayor es la presión que soportan.

⑤ Cuando vas a comprar una televisión nueva, casi siempre la quieres mayor que la que ya tienes, pero los vendedores te explican que cuanto mayor sea la pantalla, más lejos debes colocarte para verla en óptimas condiciones. El tamaño de pantalla que más se usa es simplemente la longitud de su diagonal.

⑥ En las tiendas de bricolaje te venden tableros de madera para que tú los cortes como quieras y los uses para tus cosas; pero cuanto mayores son, más dinero te cuestan.

⑦ Una familia está ahorrando para poder comprar su propia casa. En el barrio que donde querrían comprarla, todas las casas tienen el mismo precio por metro cuadrado de superficie, pero ellos querrían comprarse una casa lo mayor posible, así que deciden seguir ahorrando más tiempo.

⑧ En algunos torneos de tenis la organización dona una cantidad fija de dinero a una ONG cada vez que un jugador o jugadora consigue un saque directo (en inglés, un *ace*). La ONG, lógicamente, desea que haya muchos saques directos en el torneo.



⑨ Si un coche con motor de combustión tiene que hacer un recorrido determinado, el consumo de combustible depende de la velocidad media. Cuanto más deprisa se hace el recorrido, más combustible se consume.

⑩ Nos fijamos en todos los conos que tienen la misma área de la base. Está claro que cuánto más altos son, más volumen tienen.

⑪ Nos fijamos en todos los conos que tienen la misma altura. Está claro que cuánto más volumen tienen, mayor es el área de la base.

Expresión analítica de una función

- ✱ Es una expresión algebraica que permite calcular el valor de la variable dependiente conocido el valor de la variable independiente.
- ✱ Para poder escribirla es imprescindible representar cada variable por una letra distinta.
- ✱ Las letras usadas para representar las variables pueden ser de cualquier alfabeto. En matemáticas puras es muy habitual usar la «x» para la variable independiente e «y» para la variable dependiente, pero es perfectamente posible usar otras letras que sean más fáciles de asociar con el significado de las variables.
- ✱ La expresión analítica es la manera más habitual de manejar una función.
- ✱ En muchos problemas, lo más importante es averiguar la expresión analítica.
- ✱ Permite hacer un estudio muy completo de las características de la función.

Enunciados

En los siguientes textos se hace referencia a una función. Averigua la expresión analítica de la función. Antes, deberás especificar cuáles son las variables, qué letras vas a usar para representarlas y qué unidad vas a usar para medirlas.

① El área de un cuadrado depende de la longitud del lado del cuadrado.

② Según sea la velocidad media de un vehículo en hacer un recorrido de 350 kilómetros, ¿cuánto tiempo se tarda en completarlo?

Resolución 1

- ✱ Variable independiente: longitud del lado del cuadrado; usamos «x» para designarla; la medimos en unidades de longitud. Como vale cualquier unidad, usamos «u» para designar la unidad.
- ✱ Variable dependiente: área del cuadrado; usamos «A» para designarla; la medimos en unidades cuadradas, u^2.
- ✱ Expresión analítica: $A = x^2$
- ✱ Comentario: si hubiéramos utilizado «y» para designar la variable dependiente, la expresión analítica hubiera sido $y = x^2$

Resolución 2

- ✱ Variable independiente: velocidad media; usamos «v» para designarla; la medimos en kilómetros cada hora (km/h).
- ✱ Variable dependiente: tiempo usado en completar el recorrido; usamos «t» para designarlo; la medimos en horas.
- ✱ Expresión analítica: como $\text{velocidad}=\dfrac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$, sabemos que $v=\dfrac{350}{t}$, luego podemos despejar «t»: $v=\dfrac{350}{t} \Rightarrow vt=350 \Rightarrow t=\dfrac{350}{v}$

Comentarios

- ✱ Una vez establecidas las unidades que se van a usar para medir las variables, no es necesario escribirlas en la expresión analítica.
- ✱ Las letras usadas para representar las variables se llaman **variables mudas**, lo que significa que se podrían haber usado otras letras distintas.

Enunciados

En los siguientes textos se hace referencia a una función. Averigua la expresión analítica de la función y escríbela del modo más sencillo que puedas. Antes, deberás especificar cuáles son las variables, qué letras vas a usar para representarlas y qué unidad vas a usar para medirlas.

① Nos fijamos en todos los triángulos isósceles en los que la altura correspondiente al lado desigual mide el séxtuple que el lado desigual. El área del triángulo depende de la longitud del lado desigual.

② Nos fijamos en todos los prismas de base cuadrada en los que la altura mide el triple que el lado de las bases. El volumen del prisma depende de la longitud del lado de las bases.

③ Nos fijamos en todos los rectángulos que tienen un área de 10 metros cuadrados. Estudiamos cuánto mide una de las dimensiones según cambia la otra.

④ Una persona entrena ciclismo dando vueltas a un circuito; sabe que tarda 20 minutos en dar una vuelta al circuito y quiere saber cuántas vueltas dará según el tiempo que esté entrenando.

⑤ En una tienda de comida a granel se puede comprar la cantidad de alubias que se desee con un precio de 3,25 euros cada kilogramo; incluso es posible llevar tu propio recipiente, para generar menos residuos. Una persona ha olvidado llevar el suyo y necesita comprar allí mismo uno, que tiene un precio de 2,55 euros. Queremos saber cuánto pagará en total esa persona según la cantidad de alubias que compre.

⑥ Una glorieta de un pueblo se va decorar con un monumento con forma de cubo (hexaedro). El material del cubo cuesta 500 euros el metro cúbico, preparar las paredes del cubo tiene un coste de 2500 euros cada metro cuadrado y preparar el techo del cubo tiene un coste de 3400 euros cada metro cuadrado. Los ciudadanos se plantean de qué tamaño hacer el cubo y quieren saber qué coste tendrá el monumento según sea de grande.

⑦ Una familia adinerada desea construir una piscina en una parte de su jardín; va a pedir que sea cuadrada, pero aún no ha decidido el tamaño. Lo que sí sabe es que va a añadir un pasillo antideslizante de un metro de anchura todo alrededor de la piscina. La familia quiere averiguar qué superficie tendrá el pasillo según sea el tamaño de la piscina.

⑧ En una receta de un bizcocho se dice que hay que poner 150 gramos de mantequilla por cada 200 gramos de harina que se usen. Como una persona aficionada a la cocina va a preparar el bizcocho con otras cantidades, desea saber cuánta mantequilla hay que poner según cuánta harina se decida usar.

⑨ La ley cuadrático-cúbica es un principio matemático usado en biología y en mecánica que describe el cociente entre volumen y área de un cuerpo a medida que varía su tamaño; por ejemplo, explica los límites de tamaño de los animales y el diseño de algunos aviones. Queremos saber cómo cambia en una esfera el cociente entre su volumen y su área según cambia su radio.

Uso del nombre de una función

* En muchas ocasiones es más sencillo manejar una o más funciones poniéndole un nombre a cada una.
* Las funciones se pueden nombrar con cualquier letra de cualquier alfabeto e incluso con cualquier otro signo.
* El nombre de la función se puede usar para dar su expresión analítica.
* **Ejemplo**: la función con expresión analítica y=2x+1 se podría llamar «A».
    - Entonces, se puede escribir A(x)=2x+1.
    - La expresión «A(x)» se lee «A **de** equis».
    - Es posible escribir también y=A(x), sin ver la expresión analítica; esta notación se usa para indicar que el valor de «y» depende del de la «x».
* Observa que esta manera de escribir ya la usamos con los polinomios. Ahora la estamos generalizando.

Cálculos con funciones usando los nombres

Es importante que te acostumbres a usar los nombres de las funciones y cómo hacerlo para calcular valores de la función, porque es uno de los usos más habituales de los nombres.

Enunciados

Usando las funciones $B(x)=\frac{x}{2}$, $C(x)=x^2-4$ y $D(x)=-x+5$, se pide:

① Calcula B(–16)	② Calcula C(7)	③ Calcula D(–4)
④ Calcula B(8)+C(3)–D(7)	⑤ Calcula B(C(8))	⑥ Calcula C(B(8))

Resuelve las siguientes ecuaciones:

⑦ B(x)=31	⑧ C(x)=21	⑨ B(C(x))=16	⑩ C(B(x))=60

Resoluciones

① $B(-16)=\frac{-16}{2}=-8$

② $C(7)=7^2-4=49-4=45$

③ $D(-4)=-(-4)+5=4+5=9$

④ $B(8)+C(3)-D(7)=4+5-(-2)=11$

⑤ $B(C(8))=B(60)=30$

⑥ $C(B(8))=C(4)=12$

⑦ $B(x)=31 \Rightarrow \frac{x}{2}=31 \Rightarrow x=62$

⑧ $C(x)=21 \Rightarrow x^2-4=21 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\begin{cases}5\\-5\end{cases}$

⑨ $B(C(x))=16 \Rightarrow \frac{C(x)}{2}=16 \Rightarrow C(x)=32 \Rightarrow x^2-4=32 \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=\begin{cases}6\\-6\end{cases}$

⑩ $C(B(x))=60 \Rightarrow C\left(\frac{x}{2}\right)=60 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2-4=60 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2=64 \Rightarrow \frac{x}{2}=\begin{cases}8\\-8\end{cases} \Rightarrow x=\begin{cases}16\\-16\end{cases}$

Nota: los pasos señalados con «⇒» son especialmente difíciles, estúdialos.

Enunciados

Se dan las siguientes funciones: $A(x)=x-1$, $B(x)=\frac{x}{3}$, $C(x)=\frac{x^2+1}{2}$, $D(x)=x^2-x$.

Averigua el valor numérico de las siguientes expresiones. Los que no sean números enteros, exprésalos como fracción irreducible.

① $A(-13)$	② $B(27)$	③ $C(7)$	④ $D(4)$
⑤ $A(4)+B(-9)$	⑥ $B(15)+C(-1)$	⑦ $C(3)+D(-1)$	⑧ $D(2)+A(2)$
⑨ $A(B(12))$	⑩ $B(A(-8))$	⑪ $C(D(3))$	⑫ $D(C(3))$

Resuelve las siguientes ecuaciones. Las soluciones que no sean números enteros, exprésalas como fracción irreducible.

⑬ $A(x)=-17$	⑭ $B(x)=6$	⑮ $C(x)=41$	⑯ $D(x)=20$
⑰ $A(B(x))=2$	⑱ $B(A(x))=2$	⑲ $A(x)+B(x)=23$	⑳ $C(x)+D(x)=1$

Enunciados

Se dan las siguientes funciones: $E(x)=2x+5$, $F(x)=\frac{5x}{4}$, $G(x)=\frac{x^2-6}{5}$, $H(x)=2x^2+x$.

Averigua el valor numérico de las siguientes expresiones. Los que no sean números enteros, exprésalos como fracción irreducible.

㉑ $E(-4)$	㉒ $F(8)$	㉓ $G(6)$	㉔ $H(-1)$
㉕ $E(0)-G(14)$	㉖ $H(0)+F(-12)$	㉗ $G(0)+F(1)$	㉘ $H(3)-E(-2)$

Resuelve las siguientes ecuaciones. Las soluciones que no sean números enteros, exprésalas como fracción irreducible.

㉙ $E(x)=-31$	㉚ $F(x)=30$	㉛ $G(x)=50$	㉜ $H(x)=10$
㉝ $E(x)+F(x)=1$	㉞ $H(x)-G(x)=34$	㉟ $E(x)+H(x)=3$	㊱ $F(x)+8=E(x)$

Enunciados

Se dan las siguientes funciones: $L(x)=2x$, $M(x)=\frac{x}{7}$, $N(x)=\frac{3x^2}{2}$, $P(x)=x^3$.

Averigua el valor numérico de las siguientes expresiones.

㊲ $M(P(7))$	㊳ $P(M(7))$	㊴ $L(M(-14)+P(1))$	㊵ $L(P(N(-2)))$
㊶ $L(M(-14))$	㊷ $M(L(-14))$	㊸ $L(N(P(-1)))$	㊹ $P(P(M(M(49))))$

Resuelve las siguientes ecuaciones. Las soluciones que no sean números enteros, exprésalas como fracción irreducible.

㊺ $L(x)=2$	㊻ $M(x)=-1$	㊼ $N(x)=24$	㊽ $L(x)-N(x)=0$

Dominio de una función

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.

Expresión del dominio de una función

Ya que el dominio de una función es un conjunto, lo más apropiado es expresarlo usando la notación de conjuntos; no obstante, eso no es posible hacerlo correctamente hasta el nivel 4. Por tanto, en este nivel 3 utilizaremos o bien el lenguaje común o bien alguna expresión con desigualdades.

El dominio puede no ser todos los números

Hay varios motivos por los que el dominio de una función puede no ser el conjunto de todos los números posibles:

✱ La expresión analítica de la función no se puede aplicar para algún valor.

- Ejemplo 1. La función de expresión analítica $f(x)=\frac{1}{x}$ no se puede calcular para el valor $x=0$, puesto que la expresión $\frac{1}{0}$ no tiene sentido en matemáticas. Por tanto, el dominio de la función f es el conjunto de números distintos de cero. También se puede expresar como el conjunto de números «x» que verifican «$x \neq 0$».
- Ejemplo 2. La función de expresión analítica $r(x)=\sqrt{x}$ no se puede calcular para valores negativos de «x». Por tanto, el dominio de la función r es el conjunto de números mayores o iguales a cero. También se puede expresar como el conjunto de números «x» que verifican «$x \geq 0$».

✱ Del enunciado del problema se deduce que no todos los valores son válidos.

- Ejemplo 3. La función que expresa el área de un cuadrado según el valor de la longitud de su lado es $A(x)=x^2$. Como el lado del cuadrado debe ser un número positivo, el dominio de la función A es el conjunto de números mayores que cero.También se puede expresar como el conjunto de números «x» que verifican «$x > 0$».

✱ En la vida real no tiene sentido dar ciertos valores a la variable independiente.

- Ejemplo 4. Si en física vamos a estudiar el comportamiento de una partícula según su velocidad, sabemos que no podrá ser superior a la de la luz, así que los valores de la velocidad deberán estar entre 0 y 300 000 metros cada segundo. Si llamamos «x» a la velocidad, deberá verificar dos desigualdades: $0 \leq x$ y $x \leq 300\,000$, que suelen escribirse unidas, por comodidad y legibilidad: $0 \leq x \leq 300\,000$.

✱ Quien va a trabajar con la función desea por algún motivo restringir los valores de la variable independiente.

- Ejemplo 5. Una empresa que fabrica automóviles desea estudiar el comportamiento ante choques de sus vehículos según la velocidad que lleven. Pero solo estará interesada en estudiar lo que ocurra en cierto intervalo de velocidades; por ejemplo, entre 20 y 140 kilómetros cada hora. En ese caso la variable independiente «x» deberá verificar las dos desigualdades $20 \leq x \leq 140$.

Descripción de una función

Para poder utilizar de manera provechosa una función, el primer paso es ser capaces de describirla. Partimos de un enunciado en algún lenguaje natural (en nuestro caso, el español) y tenemos que detectar cuáles son las variables independiente y dependiente (mejor en ese orden), averiguar cuál es la expresión analítica y estudiar el dominio de la función. Hasta ahí es el objetivo del nivel 3.

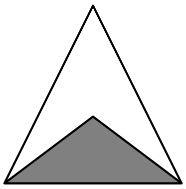
Enunciados

En cada uno de los siguientes enunciados se habla de una función. Identifica en cada función cuáles son las variables independiente y dependiente, di cómo las vas a nombrar y con qué unidad las vas a medir. Averigua su expresión analítica y di cuál es el dominio de la función.

① Un comerciante vende el último rollo de 100 metros que le queda de cierto tejido a un precio de 2,45 euros cada metro. Estudia el coste del trozo de tela que se compre en función de su longitud.

② Cierta compañía de comunicaciones solo permite llamadas de un máximo de una hora, que cobra a 25 céntimos de euro cada minuto con un coste fijo por establecimiento de llamada de un euro. Estudia el coste de la llamada en función de lo que dure.

③ En un triángulo isósceles que tiene 8 metros de base y 12 metros de altura se inscribe otro triángulo isósceles de la misma base. Estudia el área del triángulo inscrito en función de su altura.



Resolución 1

Variable	**Magnitud**	**Nombre**	**Unidad**
Independiente	Longitud de tela comprada	x	metro
Dependiente	Coste del trozo comprado	y	euro

Expresión analítica: $y = 2{,}45x$. Dominio: $0 < x \leq 100$.

Resolución 2

Variable	**Magnitud**	**Nombre**	**Unidad**
Independiente	Tiempo de la llamada	x	minuto
Dependiente	Coste de la llamada	y	euro

Expresión analítica: $y = 1 + 0{,}25x$. Dominio: $0 < x \leq 60$.

Resolución 3

Variable	**Magnitud**	**Nombre**	**Unidad**
Independiente	Altura del triángulo inscrito	x	metro
Dependiente	Área del triángulo inscrito	A	metro cuadrado

Expresión analítica: $A = \dfrac{8\,x}{2} = 4x$. Dominio: $0 < x \leq 12$.

Enunciados

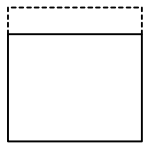
En cada uno de los siguientes enunciados se habla de una función. Identifica en cada función cuáles son las variables independiente y dependiente, di cómo las vas a nombrar y con qué unidad las vas a medir. Averigua su expresión analítica y di cuál es el dominio de la función.

① En un supermercado se puede comprar zumo de naranja recién exprimido que te llevas en una botella en la que cabe, como máximo, cuatro litros, por la que te cobran 50 céntimos de euro. El precio del zumo es 1,35 euros cada litro. Estudia el coste del zumo que compras en función de cuánto compras.

② En una heladería venden megahelados con un máximo de un kilogramo. Por cada helado cobra 2 céntimos de euro cada gramo y un fijo de 0,5 euros. Estudia el coste de un helado en función de su masa.

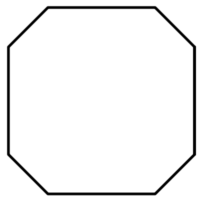
③ En un circuito de karts te dejan alquilar un vehículo como máximo dos horas; te cobran 2 euros cada minuto y además un coste fijo de 10 euros. Estudia cuánto vas a pagar en función del tiempo que alquiles un kart.

④ A un cuadrado de siete metros de lado le recortas por un lado una tira rectangular. Estudia el área de la figura resultante en función de la anchura de la tira.



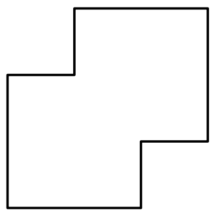
⑤ Hay infinitos rombos en los que la diagonal mayor es el doble que la diagonal menor. Describe la función que relaciona la longitud de la diagonal menor de esos rombos con su área.

⑥ A un cuadrado de seis metros de lado se le recorta un triángulo rectángulo isósceles de cada esquina. Estudia el área de la figura resultante en función de la longitud del cateto del triángulo recortado.



⑦ Un grifo con un caudal de tres litros cada minuto alimenta un pilón que tiene un metro de altura y como base un rectángulo de dimensiones 50 centímetros y 30 centímetros. El pilón está vacío y comenzamos a echar agua con el grifo. Describe la función que relaciona cuánto tiempo lleva saliendo agua del grifo con la altura alcanzada por el agua en el pilón.

⑧ Colocamos dos cuadrados iguales en la posición que se indica en la figura, de modo que los segmentos largos tienen el doble de longitud que los segmentos cortos. Describe la función que relaciona el lado de esos cuadrados con el área de la figura resultante.



⑨ En un cuadrado cuyo lado mide ocho metros trazamos un segmento que une el centro con el vértice superior izquierdo, como se ve en la primera figura. A continuación, un punto va recorriendo todo el perímetro partiendo del vértice superior izquierdo hasta dar la vuelta completa, arrastrando con él el segmento. Describe la función que relaciona cuánta longitud avanza el punto con el área que se va «barriendo».

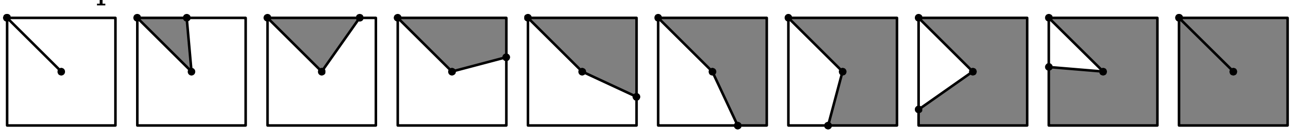


Tabla de valores de una función

Es una tabla en la que se relacionan o bien todos o bien algunos valores de las variables independiente y dependiente.

Ejemplo 1

Enunciado. Esta es una tabla de valores (parcial) de una función llamada C:

Variable independiente	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Variable dependiente	–9	–7	–5	–3	–1	1	3	5	7

Se pide: (a) averigua el siguiente valor: C(–4); (b) resuelve la ecuación C(x)=3.

Resolución. Basta mirar los valores correspondientes en la tabla.

Solución: (a) C(–4)=–9; (b) C(x)=3 ⇒ x=2.

Obtener una tabla de valores a partir de la expresión analítica

Si se conoce la expresión analítica de una función, se puede obtener fácilmente una tabla de valores dando los valores necesarios a las variables.

Ejemplo 2

Enunciado. Dada la función $f(x)=x^2-7$, rellena la siguiente tabla de valores:

Variable independiente	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Variable dependiente									

Resolución. Hacemos las operaciones: f(–4)=9, f(–3)=2, f(–2)=–3, f(–1)=–6, f(0)=–7, f(1)=–6, f(2)=–3, f(3)=2, f(4)=9. Solución:

Variable independiente	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Variable dependiente	9	2	–3	–6	–7	–6	–3	2	9

Obtener tabla de valores a partir de un experimento

Cuando se desea estudiar la relación entre dos variables, pero aún no se conoce la expresión analítica, se suele plantear un experimento para medir los valores de las dos variables, que se escriben en una tabla de valores.

Ejemplo 3

El científico italiano Galileo Galilei (1564-1642) diseñó un plano inclinado para estudiar la relación entre la altura desde la que cae un objeto esférico y el tiempo que tarda en llegar al suelo. Usando un plano inclinado en vez de aplicar directamente la caída libre consiguió que los objetos tardaran más en caer y así pudo medir mejor el tiempo. El plano se conserva en el museo Galileo de Florencia (Italia).

Con la notación de este curso y los conocimentos actuales, sabemos que Galileo pudo haber obtenido algo similar a esto:

Variable	Magnitud	Unidad	Tabla de valores			
Independiente	Longitud recorrida	metro	1	2	3	4
Dependiente	Tiempo invertido	segundo	0,7	0,9	1,1	1,3

Una interesante conclusión, muy rápida: en recorrer el cuádruple de distancia, el objeto tarda aproximadamente el doble de tiempo.

Enunciados

Se dan las siguientes funciones mediante tablas de valores; la letra que hay a la izquierda es el nombre de la función.

A	Variable independiente	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	Variable dependiente	5	4	3	2	1	0	–1	–2	–3

B	Variable independiente	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	Variable dependiente	–11	–9	–7	–5	–3	–1	1	3	5

C	Variable independiente	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	Variable dependiente	–1	0	1	2	3	4	5	6	7

D	Variable independiente	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	Variable dependiente	–11	–8	–5	–2	1	4	7	10	13

E	Variable independiente	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	Variable dependiente	11	9	7	5	3	1	–1	–3	–5

F	Variable independiente	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	Variable dependiente	14	11	8	5	2	–1	–4	–7	–10

Averigua el valor numérico de las siguientes expresiones.

① A(–4)	② B(–2)	③ C(0)	④ D(3)
⑤ A(–1)+B(–1)	⑥ B(3)–C(–4)	⑦ C(–3)·D(4)	⑧ D(1)+A(0)
⑨ D(A(0))	⑩ A(D(0))	⑪ C(D(1))	⑫ D(C(1))
⑬ B(C(1))	⑭ C(B(1))	⑮ A(A(–2))	⑯ B(B(B(B(3))))
⑰ D(C(B(A(0))))	⑱ A(B(C(D(–1))))	⑲ D(A(C(B(1))))	⑳ A(D(B(C(–1))))
㉑ E(–2)	㉒ E(4)	㉓ F(–4)	㉔ F(4)
㉕ E(F(2))	㉖ F(E(2))	㉗ E(F(0))	㉘ F(E(0))

Resuelve las siguientes ecuaciones.

㉙ A(x)=0	㉚ B(x)=5	㉛ C(x)=0	㉜ D(x)=–5
㉝ B(A(x))=5	㉞ D(B(x))=4	㉟ A(C(x))=–2	㊱ C(D(x))=7
㊲ C(B(A(x)))=6	㊳ B(A(D(x)))=–9	㊴ B(B(B(x)))=–5	㊵ D(D(D(x)))=13
㊶ B(x)=x	㊷ C(x)=2x	㊸ B(x)=D(x)	㊹ A(x)+B(x)=0
㊺ E(x)=9	㊻ F(x)=–4	㊼ E(x)=x	㊽ E(x)=F(x)

Expresión analítica a partir de una tabla de valores de una función

Un problema que siempre ha resultado muy interesante en matemáticas es el de obtener la expresión analítica de una función cuando lo que se conoce de la función es una tabla de valores parcial.

Hay casos muy sencillos que verás dentro de poco en este mismo tema, casos más complicados que estudiarás en este curso más adelante, casos difíciles que se pueden resolver de manera aproximada y casos tan complicados que son objeto de investigación de alto nivel.

Para comenzar a trabajar este problema vamos a utilizar una aproximación muy intuitiva. Te propondremos una tabla de valores y tendrás que buscar qué operaciones se pueden hacer con todos los valores de la variable independiente para obtener todos los valores de la variable dependiente; tienen que ser siempre las mismas operaciones para todos los valores. Si consigues averiguar eso, que no siempre será fácil, pasarás a escribirlas como expresión analítica usando las letras que te hayan propuesto (aunque se podrían usar otras, como ya sabes).

Ejemplos

Enunciado: averigua la expresión analítica de las siguientes funciones dadas por tablas de valores.

①	Variable independiente	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	y	–9	–6	–3	0	3	6	9

②	Variable independiente	t	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	z	9	4	1	0	1	4	9

Resoluciones

1. Vemos que los valores de la variable dependiente se obtienen multiplicando por tres los valores de la variable independiente. Solución: $y=3x$.
2. Vemos que los valores de la variable dependiente se obtienen elevando al cuadrado los valores de la variable independiente. Solución: $z=t^2$.

Consejo

Tener familiaridad con las expresiones analíticas de las diferentes funciones te irá sirviendo para averiguar las de otras funciones.

Ejemplos

③	Variable independiente	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	y	–8	–5	–2	1	4	7	10

④	Variable independiente	p	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	q	8	3	0	–1	0	3	8

Resoluciones

3. Los valores de la variable dependiente son una unidad más que los de la función del ejemplo (1). Solución: $y=3x+1$.
4. Los valores de la variable dependiente son una unidad menos que los de la función del ejemplo (2). Solución: $q=p^2-1$.

Enunciados

Averigua la expresión analítica de las siguientes funciones.

①	Variable independiente	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	y	–30	–20	–10	0	10	20	30

②	Variable independiente	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	z	–28	–18	–8	2	12	22	32

③	Variable independiente	p	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	q	3	2	1	0	–1	–2	–3

④	Variable independiente	r	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	s	5	4	3	2	1	0	–1

⑤	Variable independiente	x	0	1	4	9	16	25	36
	Variable dependiente	y	0	1	2	3	4	5	6

⑥	Variable independiente	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	y	–27	–8	–1	0	1	8	27

⑦	Variable independiente	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	y	3	2	1	0	1	2	3

⑧	Variable independiente	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	b	4	3	2	1	2	3	4

⑨	Variable independiente	y	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	m	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5

⑩	Variable independiente	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	u	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9

⑪	Variable independiente	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	d	109	104	101	100	101	104	109

⑫	Variable independiente	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	y	12	8	4	0	–4	–8	–12

⑬	Variable independiente	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	t	15	11	7	3	–1	–5	–9

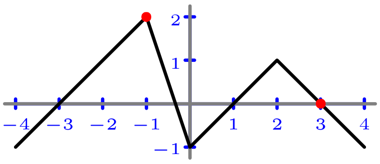
⑭	Variable independiente	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	Variable dependiente	p	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8

Representación gráfica de una función

- Es un conjunto de puntos dibujados en unos ejes de coordenadas que representan las parejas de valores de las dos variables.
- La abscisa de cada punto es el valor de la variable independiente.
- La ordenada de cada punto es el valor de la variable dependiente.
- En la mayor parte de los casos la representación gráfica es una línea.
- No puede haber más de un punto con una determinada abscisa.
- Puede haber varios puntos con la misma ordenada.

Ejemplo 1

A la derecha vemos, en color negro, la representación gráfica de una función, en la que se han señalado dos puntos, en color rojo, para la explicación.



- El punto (−1,2) corresponde al valor −1 para la variable independiente y 2 para la variable dependiente.
- El punto (3,0) corresponde al valor 3 para la variable independiente y 0 para la variable dependiente.

Representaciones gráficas en la vida real

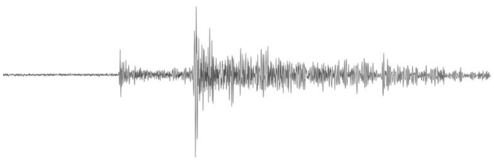
Existen muchos aparatos en la vida real que generan directamente la representación gráfica de una función. Es muy habitual que la variable independiente sea el tiempo y la variable dependiente sea alguna magnitud de interés para un estudio.

Ejemplo 2

Los sismógrafos ayudan a los geólogos a conocer los movimientos de la corteza de la Tierra, la Luna y Marte, especialmente los seismos o terremotos. Las primeras versiones de los sismógrafos dibujaban una línea con medios mecánicos.

Los gráficos que genera un sismógrafo se llaman sismogramas. En ellos, la variable independiente es el tiempo y la variable dependiente es la longitud del desplazamiento.

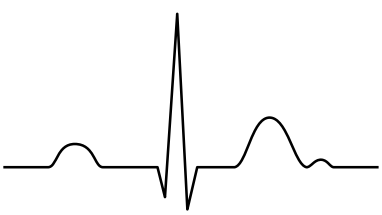
Aquí vemos el sismograma relizado por el módulo de descenso inSight en Marte en 2019. Se aprecia un movimiento brusco seguido de otros movimientos cada vez menos intensos.



Ejemplo 3

Los electrocardiógrafos ayudan a los médicos cardiólogos a estudiar el comportamiento del corazón visualizando cómo cambian sus señales eléctricas.

Los gráficos que genera un electrocardiógrafo se llaman electrocardiogramas. En ellos, la variable independiente es el tiempo y la variable dependiente es la diferencia de potencial (voltaje) en algún punto del corazón.

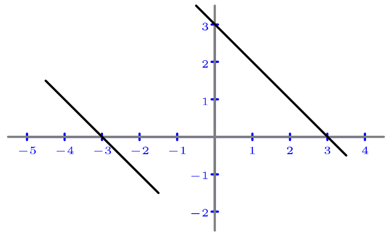


A la derecha vemos el electrocardiograma que corresponde a un solo latido de un ser humano en condiciones normales.

Obtención de valores a partir de la representación gráfica de una función

Dada la representación gráfica de una función es posible calcular valores de las variables, aunque si la representación se ha obtenido de la vida real, es muy posible que solo se puedan obtener de manera aproximada. En este nivel 3 los valores obtenidos serán exactos, para que te sea más sencilla la operación.

Enunciado



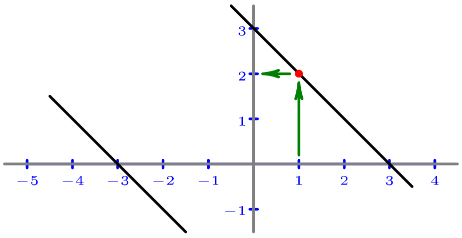
La representación gráfica de la función «f» se ve a la derecha. Se pide:

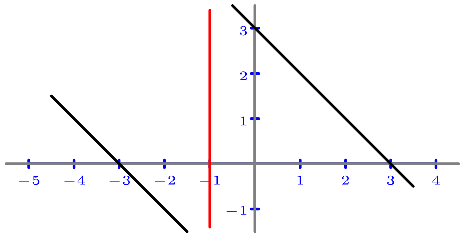
(a) Averigua los valores numéricos f(1) y f(–1).

(b) Resuelve las ecuaciones f(x)=–1, f(x)=1 y f(x)=–2.

Resolución

Para calcular f(1) partimos en el eje de abscisas del valor x=1, trazamos un segmento vertical por él hasta cortar la representación gráfica y a partir de ese punto trazamos un segmento horizontal hasta que corte al eje de ordenadas; vemos que llegamos al valor y=2. Por tanto, **f(1)=2**. (Figura de abajo a la izquierda.)



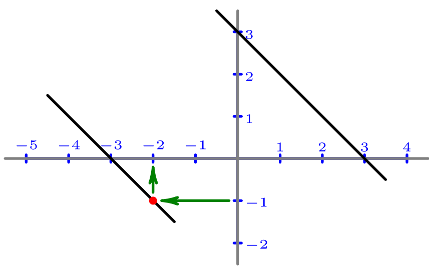


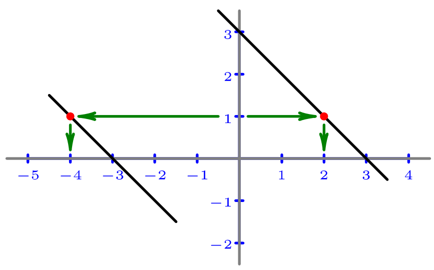
Para calcular f(–1) trazamos un segmento vertical que pase por el punto (–1,0) y vemos que no corta a la representación gráfica, luego –1 no pertenece al dominio de la función f. Por tanto, **f(–1) no existe**. (Figura de arriba a la derecha.)

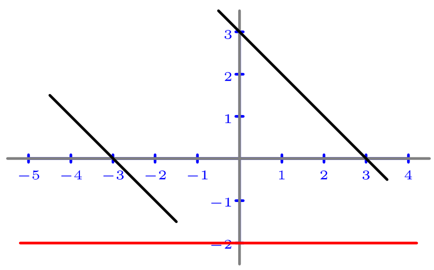
Para resolver f(x)=–1 partimos en el eje de ordenadas del valor y=–1, trazamos un segmento horizontal por él hasta cortar la representación gráfica y a partir de ese punto trazamos un segmento vertical hasta que corte al eje de abscisas; vemos que llegamos al valor x=–2. Por tanto, f(x)=–1 ⇒ **x=–2**. (Figura de abajo a la izquierda.)

Para resolver f(x)=1 partimos en el eje de ordenadas del valor y=1, trazamos un segmento horizontal por él hasta cortar la representación gráfica y a partir de los dos puntos obtenido trazamos segmentos verticales hasta que corten al eje de abscisas; vemos que llegamos a los valores x=–4 y x=2. Por tanto, f(x)=–1 ⇒ $\mathbf{x=}\begin{cases}\mathbf{-4}\\ \mathbf{2}\end{cases}$. (Figura de abajo en el centro.)

Para resolver f(x)=–2 partimos en el eje de ordenadas del valor y=–2, trazamos un segmento horizontal por él hasta cortar la representación gráfica y vemos que no hay ningún punto de corte. Por tanto, la ecuación **no tiene solución**. (Figura de abajo a la derecha.)

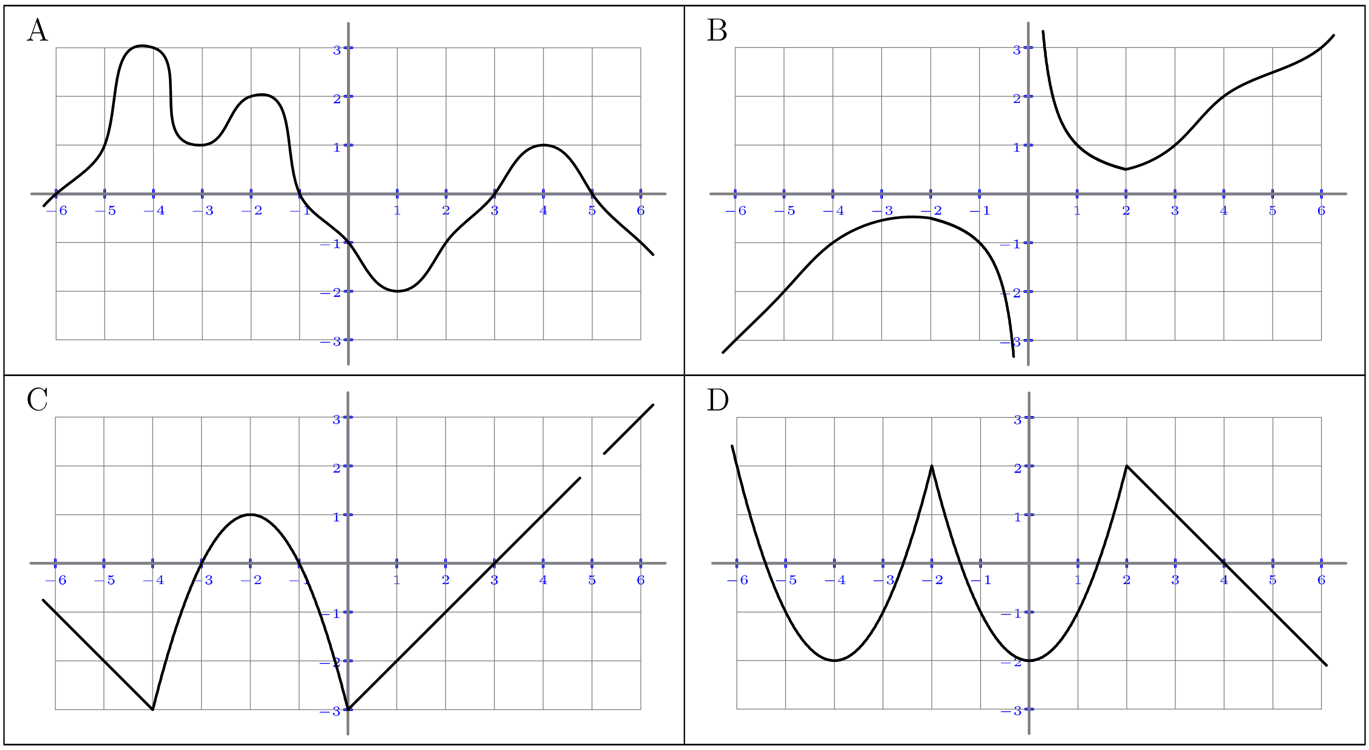






Enunciados

Se dan las siguientes funciones mediante su representación gráfica; la letra que hay en cada cuadro arriba a la izquierda es el nombre de la función.



Averigua el valor numérico de las siguientes expresiones sabiendo que, cuando existen, son números enteros.

1 A(–5)	2 A(–2)	3 A(2)	4 A(6)
5 B(–6)	6 B(–4)	7 B(0)	8 B(4)
9 C(–4)	10 C(–1)	11 C(0)	12 C(5)
13 D(–3)	14 D(–2)	15 D(1)	16 D(4)
17 B(A(–4))	18 A(B(–4))	19 D(C(0))	20 C(D(0))
21 C(A(4))	22 A(C(4))	23 B(C(6))+C(B(6))	24 D(D(D(4)))

Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que, cuando tienen solución, estas son números enteros.

25 A(x)=3	26 A(x)=–2	27 A(x)=–3	28 A(x)=–1
29 B(x)=–1	30 B(x)=1	31 B(x)=0,5	32 B(x)=0
33 C(x)=1	34 C(x)=–3	35 C(x)=2	36 C(x)=0
37 D(x)=3	38 D(x)=2	39 D(x)=–1	40 D(x)=–2
41 B(x)=x	42 D(x)=x	43 x+D(x)=0	44 x+B(x)=0

Funciones constantes

Una función constante es aquella en la que la variable dependiente siempre toma el mismo valor.

Ejemplo 1

La siguiente tabla de valores corresponde a una función constante porque la variable dependiente siempre vale 2:

Variable independiente	x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Variable dependiente	y	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Expresión analítica de una función constante

En la expresión analítica de una función constante no aparece la variable independiente. Si llamamos «y» a la variable dependiente de una función constante y llamamos «k» al valor que siempre toma la variable dependiente, la expresión analítica de la función es

$$\boxed{y = k}$$

Si llamamos A la misma función, entonces su expresión analítica es

$$\boxed{A(x) = k}$$

Ejemplo 2

La siguiente tabla de valores corresponde a una función constante llamada B:

B	Variable independiente	x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	Variable dependiente	y	–3	–3	–3	–3	–3	–3	–3	–3	–3

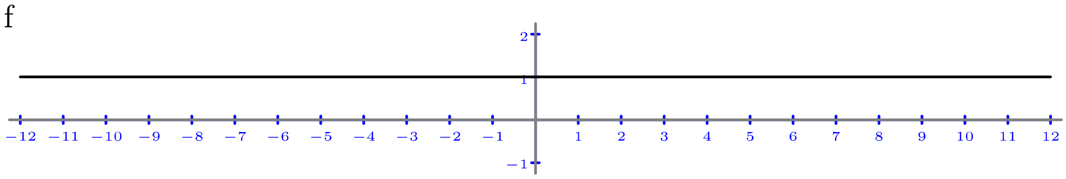
Su expresión analítica es «y=–3» y también «B(x)=–3»

Representación gráfica de una función constante

La representación gráfica de una función constante es una línea recta horizontal formada por todos los puntos que tienen como ordenada el valor de la variable dependiente.

Ejemplo 3

A continuación se puede ver la representación gráfica de la función f(x)=1.



Observa que la línea realmente es infinita: la abscisa puede ser cualquier número, ya que no hemos restringido el dominio de ninguna manera.

Comentario

Las funciones constantes son un poco desconcertantes a primera vista, porque la variable dependiente no varía en absoluto, lo que parece una contradicción; aún así, son importantes en el desarrollo general del análisis matemático. Son las funciones más sencillas, tienen propiedades fáciles de entender y forman parte de funciones más complicadas.

Enunciados

Escribe la expresión analítica de las siguientes funciones constantes dadas por sus tablas de valores:

①	Variable independiente	x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	Variable dependiente	y	7	7	7	7	7	7	7	7	7

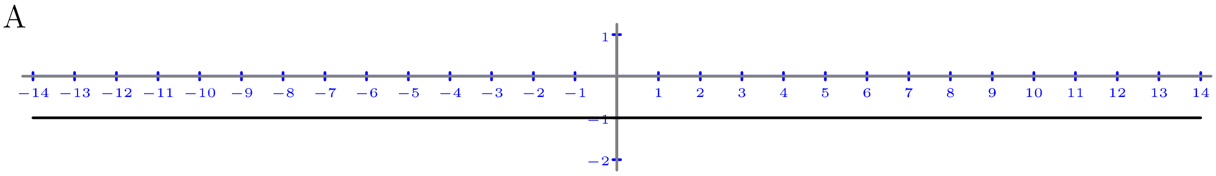
②	Variable independiente	x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	Variable dependiente	y	–11	–11	–11	–11	–11	–11	–11	–11	–11

③	Variable independiente	x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
	Variable dependiente	y	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75

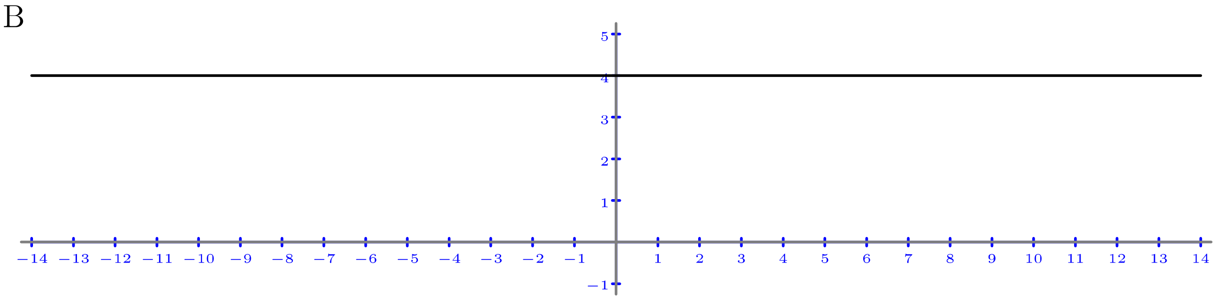
Enunciados

Escribe la expresión analítica de las siguientes funciones constantes dadas por sus representaciones gráficas; la letra que hay en cada cuadro arriba a la izquierda es el nombre de la función.

④



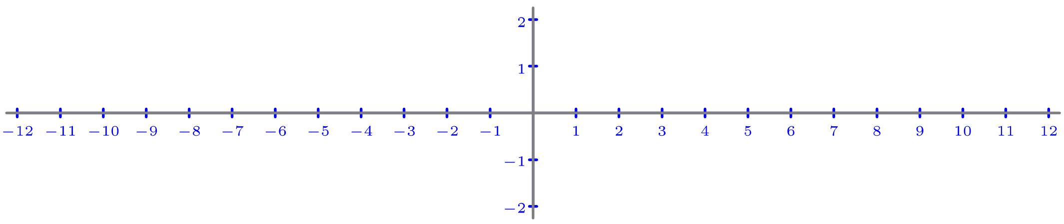
⑤



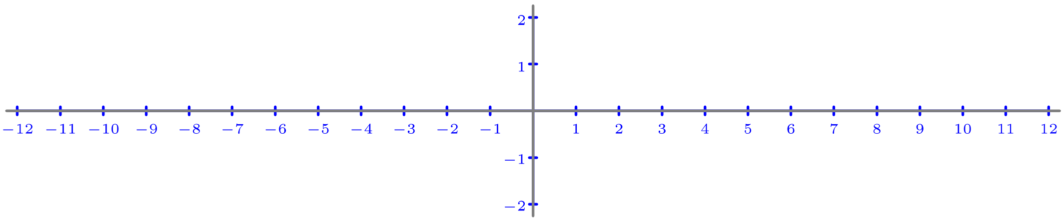
Enunciados

Representa gráficamente las siguientes funciones constantes dadas por su expresión analítica:

⑥ y = 0,5



⑦ y = –1,5



Funciones constantes por tramos

En la vida real nos encontramos muy a menudo con funciones que toman valores constantes, pero distintos, según el tramo en el que se encuentre la variable independiente.

Ejemplo 1

Un grupo de amigos está preparando una fiesta en la universidad para sacar dinero para un viaje. Te encargan a ti ir a una tienda a hacer fotocopias del cartel que habéis preparado. Preguntas el precio de cada fotocopia pero los de la tienda te dicen que depende de cuántas copias vayas a hacer. Si haces más, el precio es más barato. Te pueden remitir a una tabla parecida a esta:

Número de copias	De 1 a 99	De 100 a 499	500 o más
Precio de cada copia	0,029 euros	0,025 euros	0,023 euros

Ejemplo 2

En casi todos los países sus ciudadanos pagan anualmente un impuesto que depende del dinero que hayan ganado ese año. Para que paguen un porcentaje mayor de sus ganancias los más ricos, se recurre a aplicar porcentajes distintos según la cantidad ganada. Por ejemplo:

Dinero ganado	0 - 12 450	12 450 - 20 200	20 200 - 35 200	35 200 - 60 000	Más de 60 000
Porcentaje	19 %	24 %	30 %	37 %	45 %

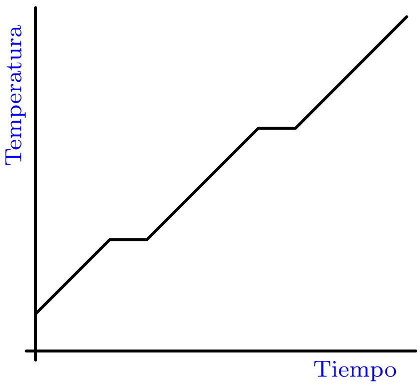
Ejemplo 3

En física se estudia que cuando se aplica calor a una sustancia en estado sólido, esta se calienta hasta una temperatura en la que empieza a pasar a estado líquido (temperatura de fusión); cuando llega a esa temperatura, se mantiene en ella durante un periodo de tiempo mientras cambia de sólido a líquido; cuando ya ha pasado a estado líquido, sigue aumentando su temperatura hasta que llega a la que empieza a pasar a estado gaseoso (temperatura de ebullición); cuando llega, se mantiene en ella durante un periodo de tiempo mientras cambia de líquido a gaseoso; cuando ya ha pasado a estado gaseoso, sigue aumentando su temperatura.

Por ejemplo, el agua tiene una temperatura de fusión de 0 °C y una temperatura de ebullición de 100 °C. Sabes que si calientas hielo en un recipiente, este se calienta, luego pasa a agua líquida, luego esta se calienta, luego pasa a vapor de agua y este podría calentarse aún más si no se hubiera escapado del recipiente.

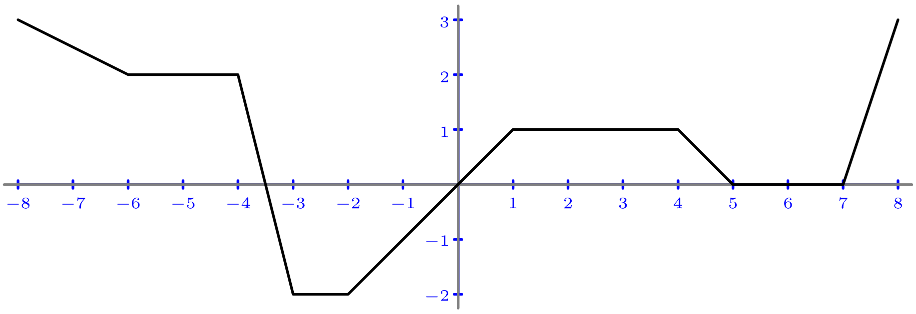
Representación gráfica

Vamos aplicando calor a una sustancia que esté en estado sólido en un recipiente cerrado. Podemos representar gráficamente la función que relaciona el tiempo que llevamos aplicando calor con la temperatura de la sustancia. En la representación gráfica se aprecian dos tramos en los que la temperatura es constante: son los tramos en los que se cambia de estado.



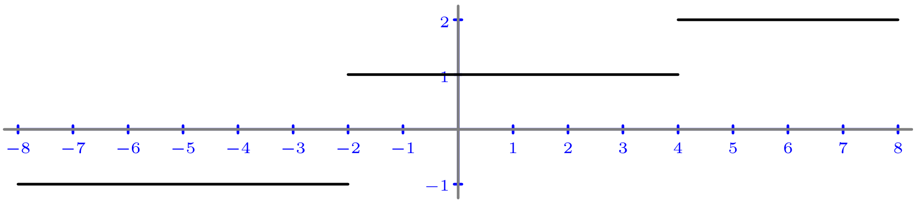
Enunciados

① La función «f» está definida mediante la siguiente representación gráfica:



Averigua los siguientes valores: f(–5), f(–2,5), f(1,7), f(3,6), f(5,5), f(6,5)

② La función «g» está definida mediante la siguiente representación gráfica:

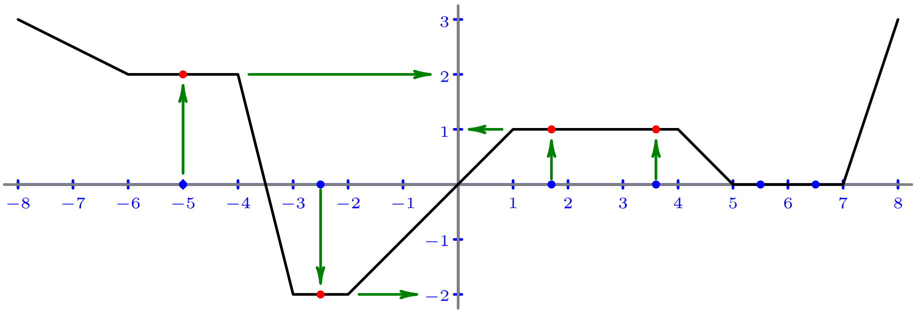


Averigua los siguientes valores: g(–5,4), g(0,8), g(6,7)

Resoluciones

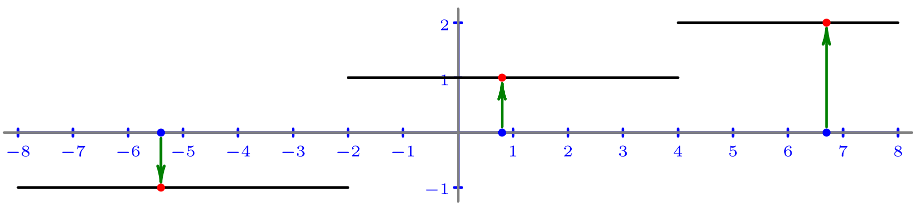
Todos los valores pedidos corresponden a tramos en los que la función es constante, precisamente para practicar este concepto.

① Partimos en el eje de abscisas de los valores pedidos con líneas verticales hasta cortar a la gráfica y vemos la ordenada de los puntos. Señalamos algunos:



Solución: f(–5)=2, f(–2,5)=–2, f(1,7)=1, f(3,6)=1, f(5,5)=0, f(6,5)=0

② Señalamos los puntos:

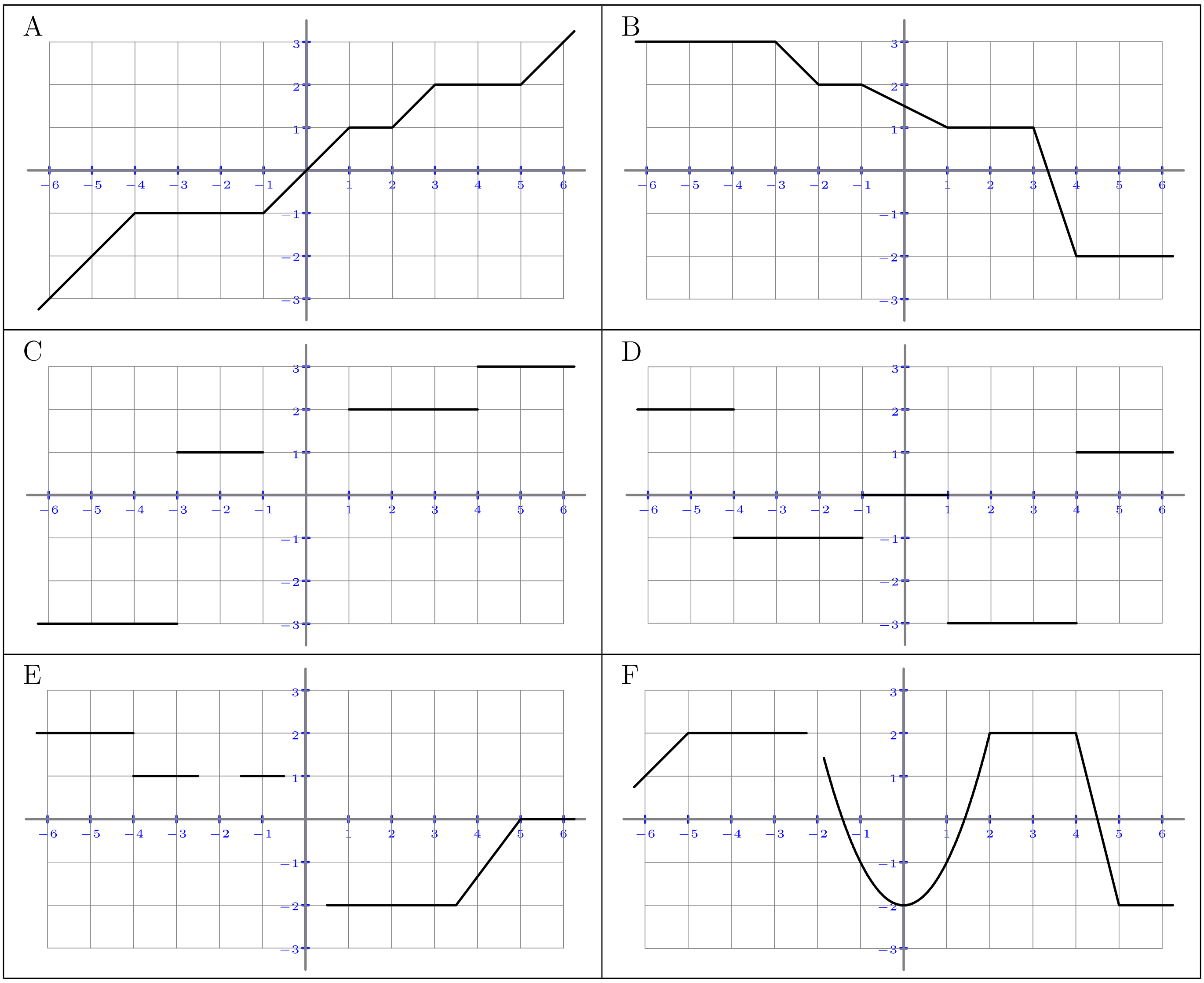


Solución: g(–5,4)=–1, g(0,8)=1, g(6,7)=2

Comentarios: (1) Las funciones como esta se llaman «funciones escalonadas». (2) Observa que, solo con la representación gráfica, no podríamos saber los valores g(–2) ni g(4). Resolveremos esto en el nivel 4.

Enunciados

Se dan las siguientes funciones mediante su representación gráfica; la letra que hay en cada cuadro arriba a la izquierda es el nombre de la función.

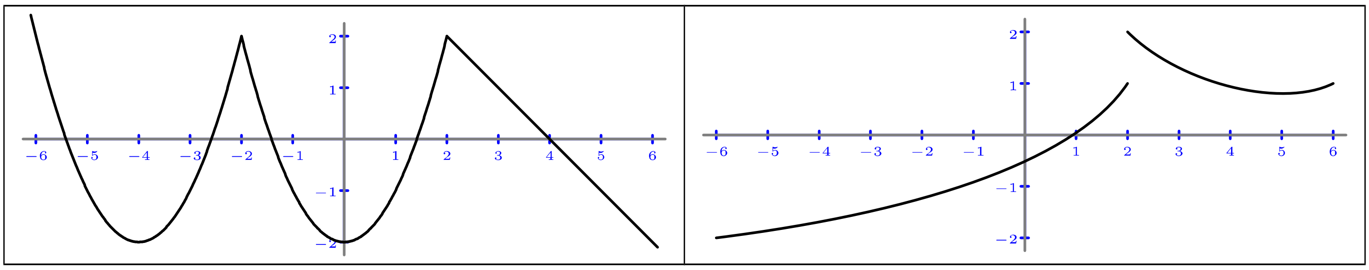


Averigua el valor numérico de las siguientes expresiones sabiendo que, cuando existen, son números enteros.

① A(–3)	② A(–2)	③ A(1,5)	④ A(4)
⑤ B(–5)	⑥ B(–1,5)	⑦ B(2,5)	⑧ B(5)
⑨ C(–6)	⑩ C(–2)	⑪ C(0)	⑫ C(3)
⑬ D(–5)	⑭ D(–3)	⑮ D(0)	⑯ D(–3)
⑰ E(–5)	⑱ E(–2)	⑲ E(0)	⑳ E(3)
㉑ F(–4)	㉒ F(–2)	㉓ F(3)	㉔ F(5,5)
㉕ B(A(5))	㉖ A(B(5))	㉗ C(C(5))	㉘ D(D(–6))

Continuidad

Una función puede ser continua o no serlo. Puedes ver fácilmente la diferencia con las siguientes dos funciones, dadas por su representación gráfica: la función de la izquierda es continua y la de la derecha no lo es.



Definición intuitiva de continuidad

La manera intuitiva de definir la continuidad es muy sencilla: una función es continua cuando se puede representar gráficamente **sin levantar** el lapicero del papel (o la tiza de la pizarra, etcétera); no es continua cuando hay algún valor de la variable independiente en el que es necesario separar el lapicero del papel, dar un «salto» y seguir dibujando; los puntos en los que hay que hacer eso se llaman **puntos de discontinuidad**.

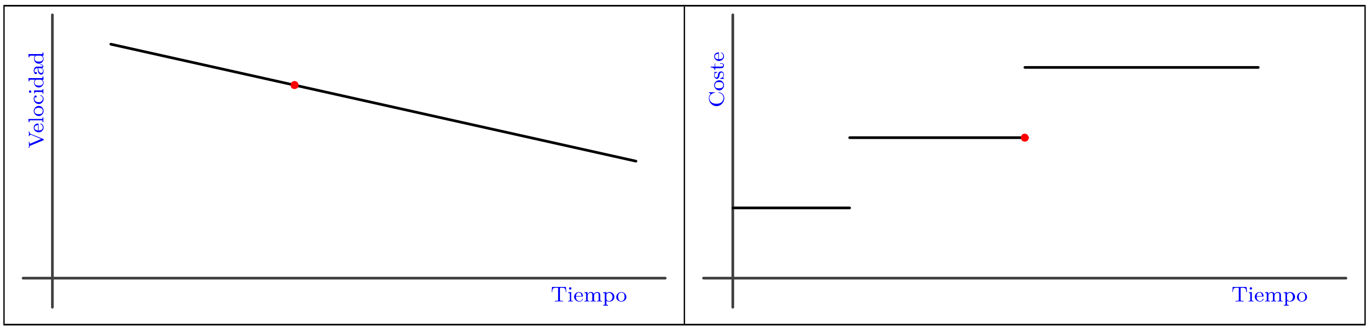
La definición intuitiva es adecuada en este nivel 3 para que te vayas familiarizándo con el concepto, pero tiene el problema de que no está redactada de un modo suficientemente preciso como para hacer estudios rigurosos. Por eso, en el nivel 5 veremos una definición mucho más adecuada.

Propiedad de las funciones continuas

En una función continua, pequeños cambios en el valor de la variable independiente provocan cambios también pequeños en el valor de la variable dependiente.

Ejemplos

① Cuando haces un recorrido en el coche, la velocidad media depende del tiempo que hayas tardado en hacer el recorrido. Si tardas un poquito más, la velocidad media es un poquito menor; si tardas un poquito menos, la velocidad media es un poquito mayor. La gráfica, con las unidades adecuadas, puede ser como abajo a la izquierda, en la que hemos marcado un punto de referencia.



② Cuando se aparca un coche en zonas de establecimiento regulado, el ayuntamiento cobra una cantidad dependiendo del tiempo que esté el coche aparcado, pero es habitual que las tarifas cambien bruscamente cada cierto tiempo. En esos momentos, si dejas el coche solo un poquito más, pagas mucho más: son puntos de discontinuidad; vemos un ejemplo arriba a la derecha.

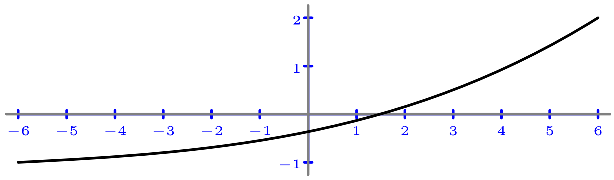
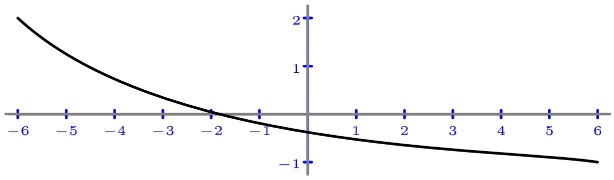
Crecimiento

Uno de los usos más frutíferos de las funciones es la resolución de problemas de **optimización**, es decir: calcular para qué valores de las variables algo que nos interesa obtiene el mejor valor posible: menor gasto, máximo beneficio, máximo alcance, etcétera.

Para prepararnos para definir con precisión estos conceptos en el nivel 5, comenzamos en este nivel 3 por familiarizarnos de una manera intuitiva con qué entendemos por función creciente, función decreciente, máximo y mínimo relativo y máximo y mínimo absoluto. Todos esos conceptos se agrupan con la denominación genérica de **estudio del crecimiento de una función**.

Función creciente y función decreciente

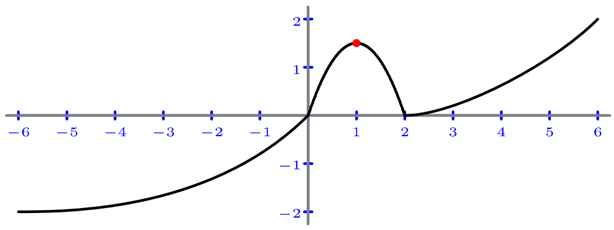
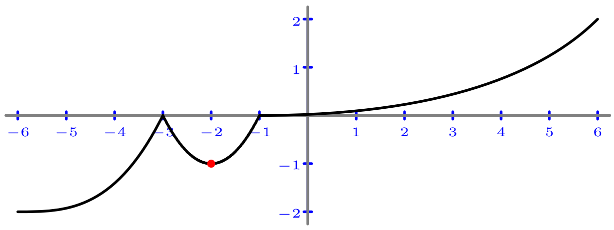
- ✱ Una función es creciente cuando la variable dependiente va tomando valores cada vez mayores cuando la variable independiente va tomando valores cada vez mayores; vemos un ejemplo abajo a la izquierda.

- ✱ Una función es decreciente cuando la variable dependiente va tomando valores cada vez menores cuando la variable independiente va tomando valores cada vez mayores; vemos un ejemplo arriba a la derecha.

Máximo relativo y mínimo relativo

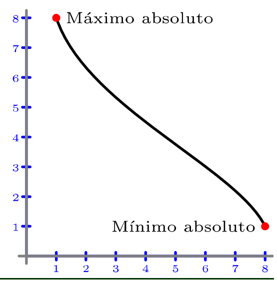
- ✱ Una función tiene un máximo relativo en un punto de su gráfica cuando en él la variable dependiente toma valores mayores que en los puntos que tienen un valor de la variable independiente muy cercano al del punto, tanto por la derecha como por la izquierda. Hemos marcado en la gráfica de abajo a la izquierda un punto con un máximo relativo.

- ✱ Una función tiene un mínimo relativo en un punto de su gráfica cuando en él la variable dependiente toma valores menores que en los puntos que tienen un valor de la variable independiente muy cercano al del punto, tanto por la derecha como por la izquierda. Hemos marcado en la gráfica de arriba a la derecha un punto con un mínimo relativo.

Máximo absoluto y mínimo absoluto

- ✱ Una función tiene un máximo absoluto en un punto de su gráfica cuando en él la variable dependiente toma un valor mayor o igual que en cualquier otro punto.
- ✱ Una función tiene un mínimo absoluto en un punto de su gráfica cuando en él la variable dependiente toma un valor menor o igual que en cualquier otro punto.



Enunciados

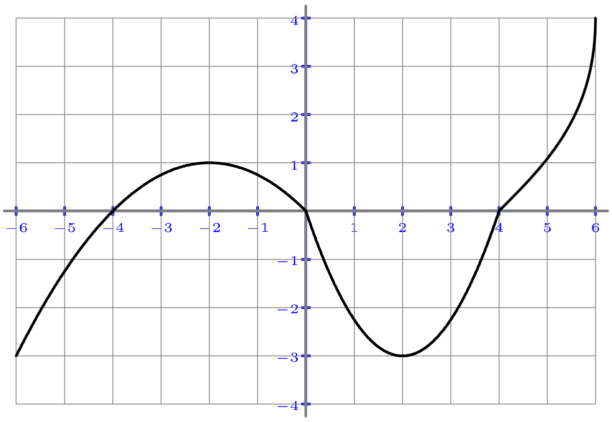
Se dan las siguientes funciones mediante su representación gráfica. Para cada una de ellas se pide:

(a) Decir si es continua o no es continua; si no lo es, decir los valores de la variable independiente que son puntos de discontinuidad.

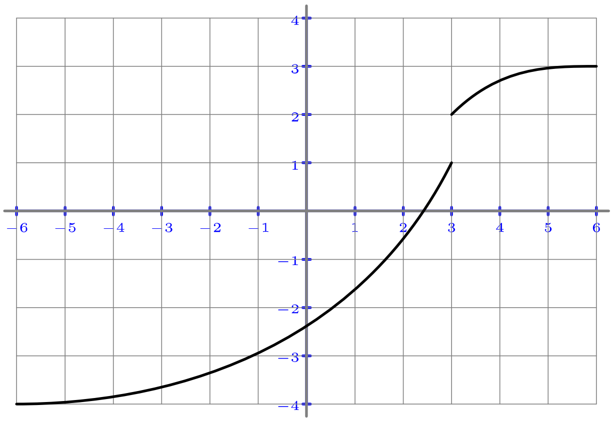
(b) Si son crecientes, decrecientes o ninguna de las dos cosas; si no son ni crecientes ni decrecientes, decir las coordenadas de los máximos relativos y los mínimos relativos.

(c) Decir las coordenadas de los máximos absolutos y los mínimos absolutos.

①



②



Resoluciones

① (a) La función es continua.

(b) La función no es creciente ni decreciente.

La función tiene un máximo relativo en el punto (–2,1).

La función tiene un mínimo relativo en el punto (2,–3).

(c) La función tiene un máximo absoluto en el punto (6,4).

La función tiene dos mínimos absolutos en los puntos (–6,–3) y (2,–3).

Nota: La función no tiene un mínimo relativo en el punto (–6,–3) porque no está definida a su izquierda.

Nota: La función no tiene un máximo relativo en el punto (6,4) porque no está definida a su derecha.

② (a) La función no es continua.

La función tiene un punto de discontinuidad en 3.

(b) La función es creciente.

(c) La función tiene un máximo absoluto en el punto (6,3).

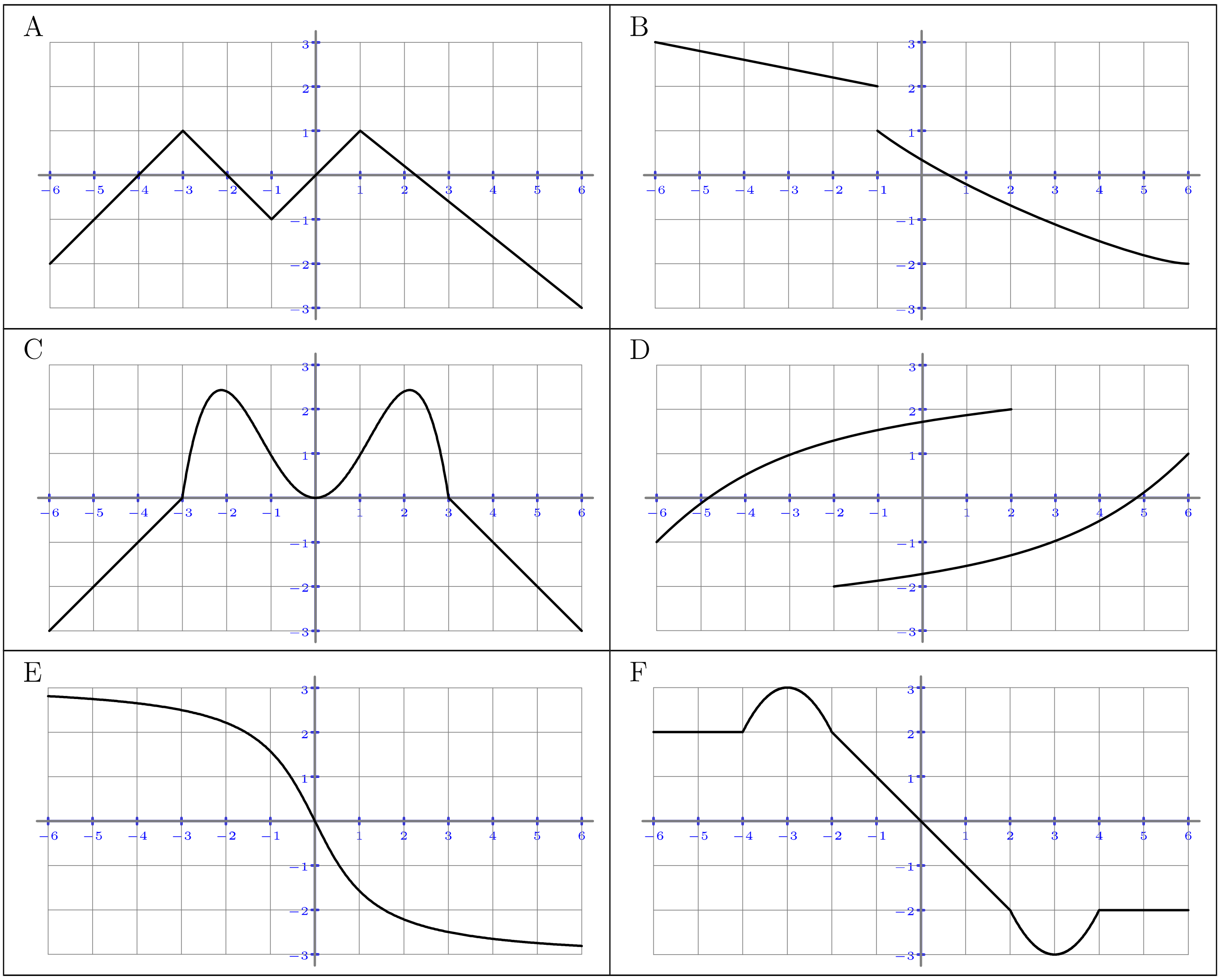
La función tiene un mínimo absoluto en el punto (–6,–4).

Nota: La función no tiene un mínimo relativo en el punto (–6,–4) porque no está definida a su izquierda.

Nota: La función no tiene un máximo relativo en el punto (6,3) porque no está definida a su derecha.

Enunciados

Se dan las siguientes funciones mediante su representación gráfica, aunque una de ellas realmente no corresponde a una función; la letra que hay en cada cuadro arriba a la izquierda es el nombre de la función.



① ¿Cuál de las gráficas no corresponde a una función?

② ¿Cuáles son las funciones decrecientes?

③ ¿Cuáles son las funciones continuas?

④ ¿Cuáles son las funciones crecientes?

⑤ ¿Qué funciones tienen exactamente dos máximos relativos?

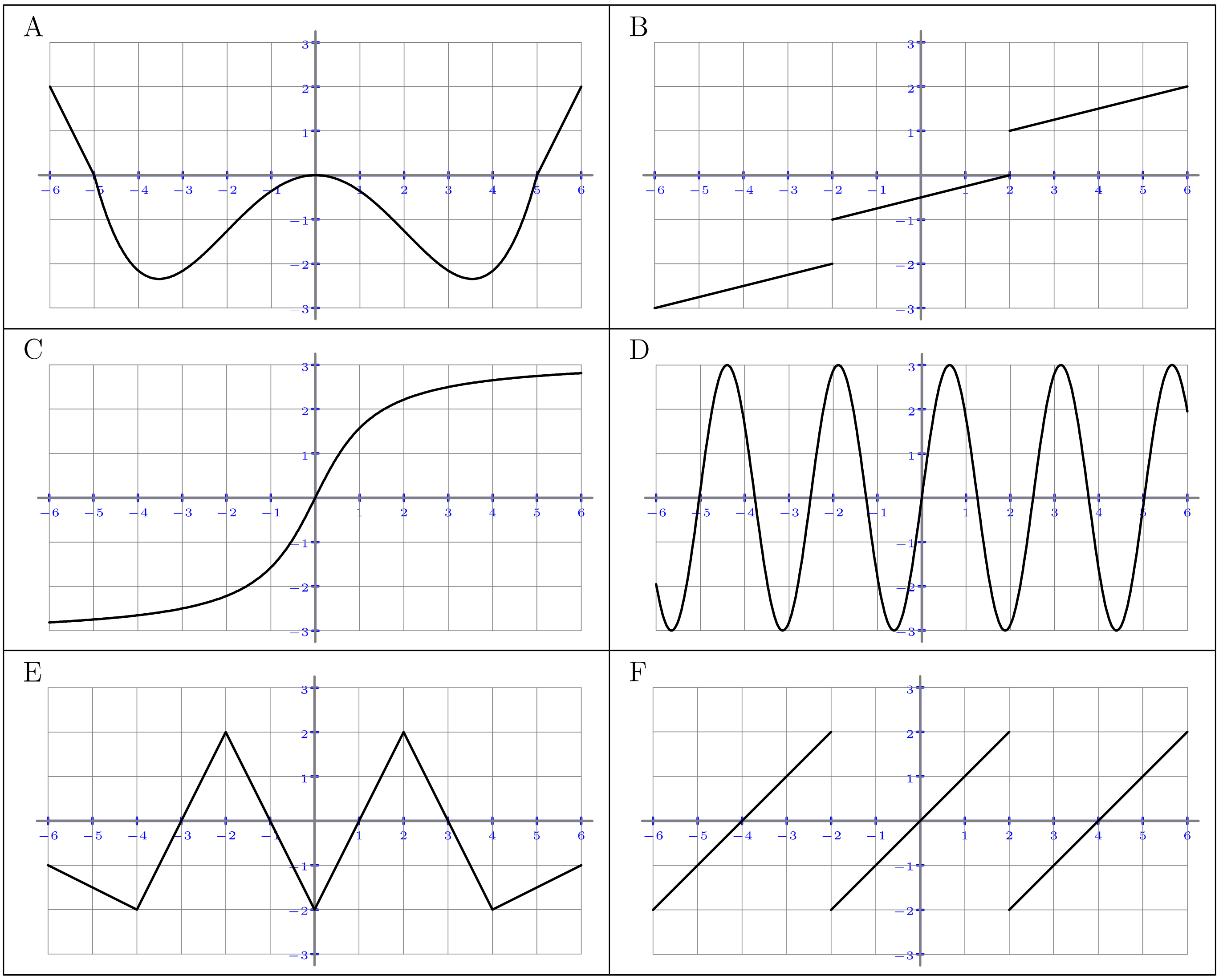
⑥ ¿Qué funciones tienen exactamente dos mínimos relativos?

⑦ ¿Qué función tiene dos mínimos absolutos?

⑧ ¿En qué función el máximo absoluto coincide con el máximo relativo y el mínimo absoluto coincide con el mínimo relativo?

Enunciados

Se dan las siguientes funciones mediante su representación gráfica; la letra que hay en cada cuadro arriba a la izquierda es el nombre de la función.



① ¿Cuáles son las funciones continuas?

② ¿Qué función tiene más puntos de discontinuidad?

③ ¿Cuáles son las funciones crecientes?

④ ¿Qué funciones tienen un máximo relativo en el punto (0,0)?

⑤ ¿Qué funciones tienen un mínimo relativo en el punto (0,0)?

⑥ ¿Qué función tiene más mínimos relativos?

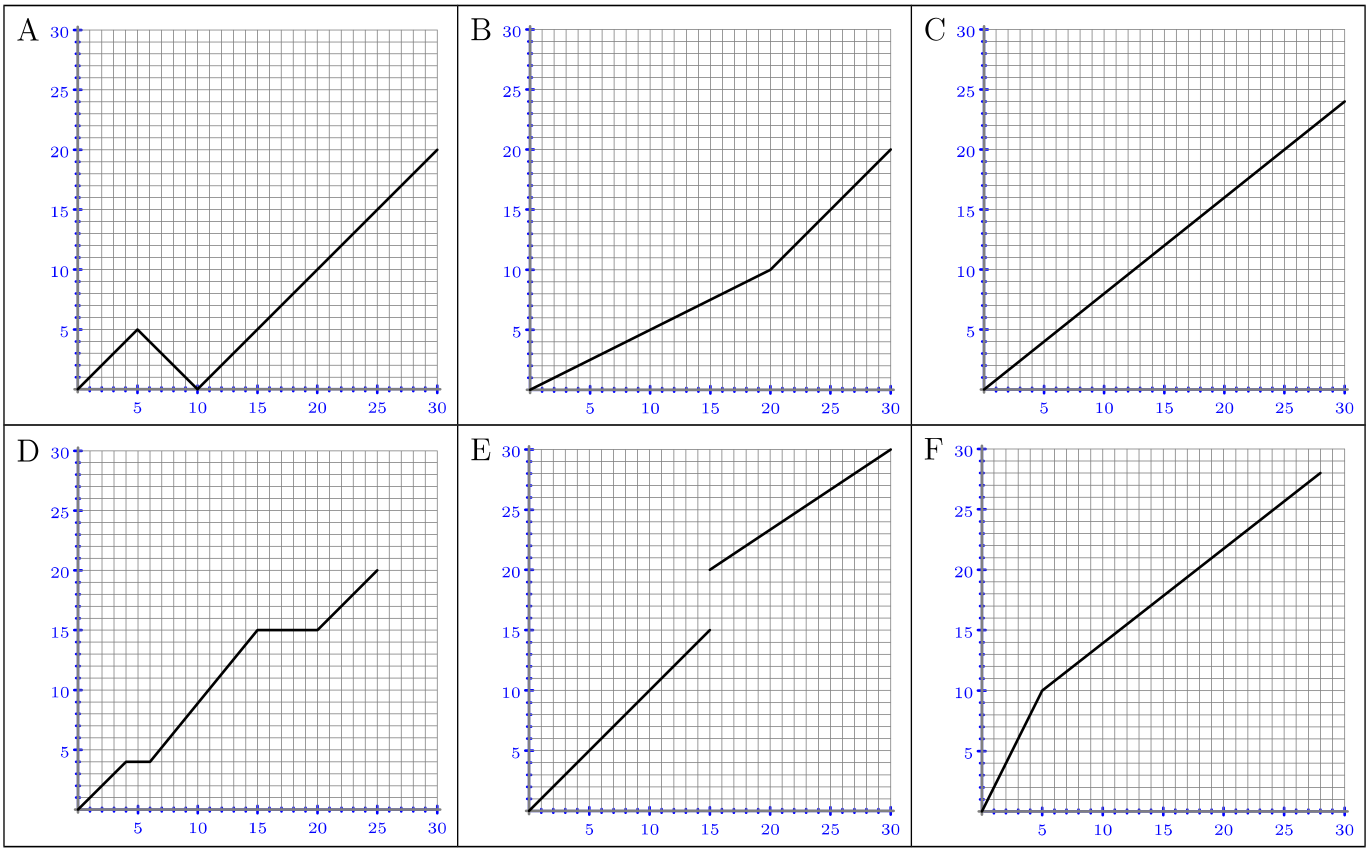
⑦ ¿Qué funciones tienen exactamente dos mínimos relativos?

⑧ ¿Qué funciones tienen exactamente dos máximos relativos?

⑨ ¿En qué funciones la diferencia entre la ordenada del máximo absoluto y la ordenada del mínimo absoluto es 4?

Enunciados

Cinco personas estudian en un instituto y suelen ir andando desde su casa. Un día usan sus aparatos de localización y hacen cada una una gráfica representando la función que relaciona cuánto tiempo llevan andando desde casa (en minutos) con la distancia a la que están de casa (en hectómetros). Estas son las gráficas.



① ¿Cuál es la gráfica que no corresponde a ninguna de las cinco personas?

② ¿Qué gráfica corresponde a una persona que se olvida algo en casa y tiene que volver a buscarlo?

③ (a) ¿Qué gráfica corresponde a una persona que se para alguna vez?

(b) ¿Cuántos minutos en total está parada?

④ ¿Qué grafica corresponde a la persona que tarda menos tiempo en llegar?

⑤ Di las gráficas de las personas que viven más cerca del instituto.

⑥ Calcula en kilómetros cada hora la velocidad de la persona que corresponde a la gráfica C.

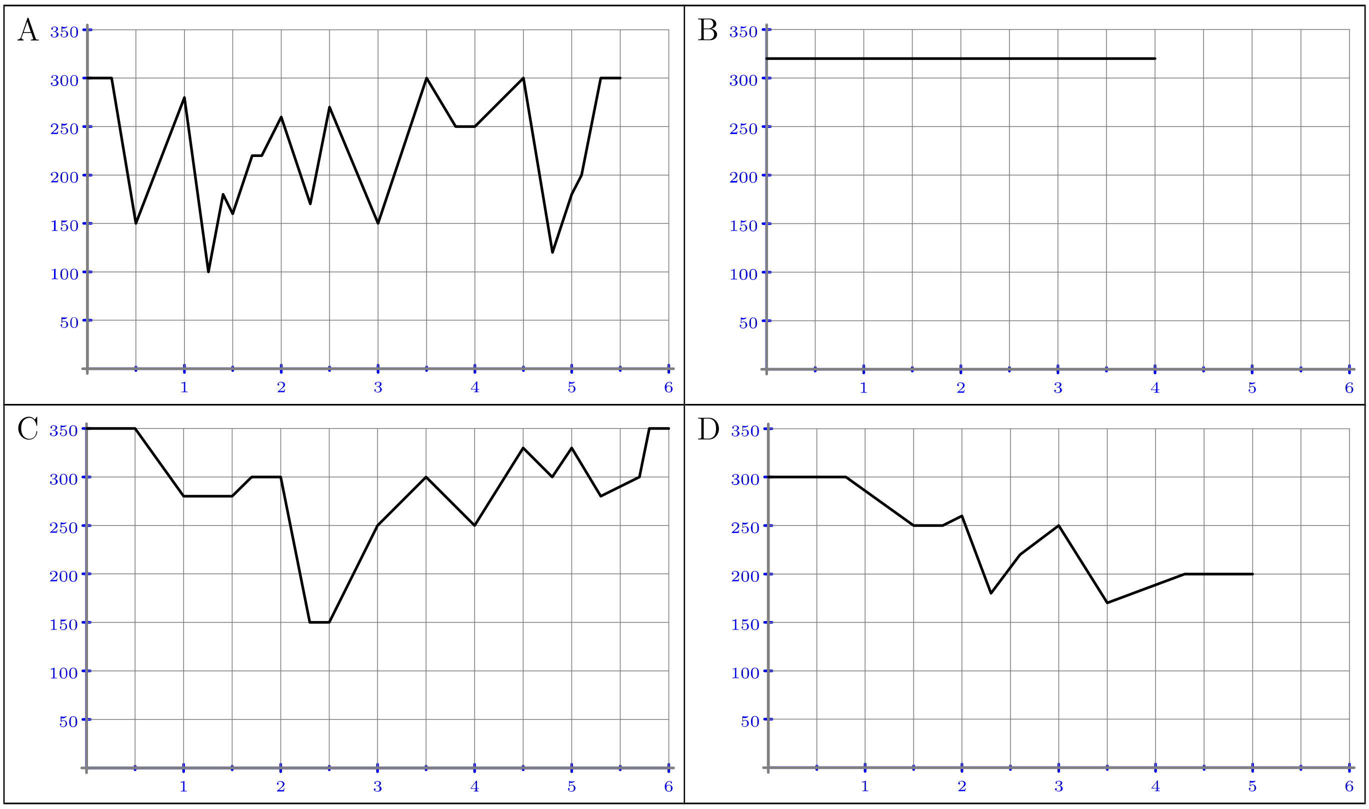
⑦ ¿Qué gráfica corresponde a una persona que empieza andando despacio y termina andando rápido?

⑧ (a) ¿Qué gráfica corresponde a una persona que sale corriendo de casa?

(b) Calcula en kilómetros cada hora la velocidad a la que corre.

Enunciados

Una escudería de Fórmula 1 realiza pruebas a lo largo de la pretemporada en tres circuitos automovilísticos. Las pruebas consisten en tandas de entre veinte y treinta vueltas al circuito. En cada vuelta, el equipo de ingeniería va midiendo la velocidad del coche en cada punto del circuito, determinado por la distancia desde la meta hasta el punto. Estas son las gráficas (aproximadas) correspondientes a las vueltas más rápidas en cada uno de los tres circuitos; la distancia se mide en kilómetros y la velocidad en kilómetros cada hora.



① ¿Cuál de las gráficas no corresponde a ninguno de los tres circuitos? Explica por qué.

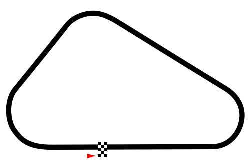
② ¿Cuánto mide el circuito más corto?

③ ¿Cuánto mide el circuito más largo?

④ (a) ¿Cuál es la gráfica que corresponde al circuito en el que se alcanza la mayor velocidad? (b) ¿Cuál es esa velocidad?

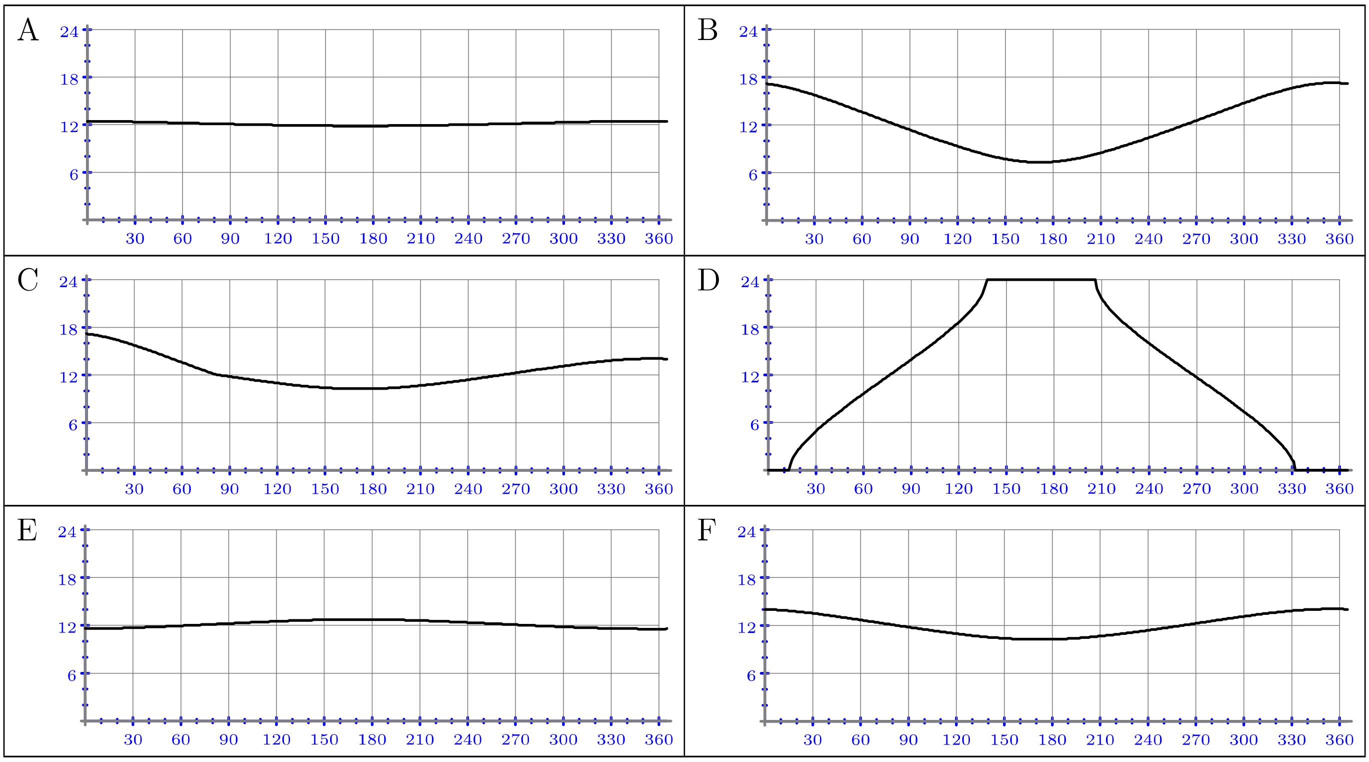
⑤ (a) ¿Cuál es la gráfica que corresponde al circuito en el que se alcanza la menor velocidad? (b) ¿Cuál es esa velocidad?

⑥ Uno de los circuitos de pruebas corresponde a un circuito de NASCAR, el deporte automovilístico más popular en Estados Unidos. Muchos de los circuitos de la NASCAR son ovales, con solo dos o tres curvas; a la derecha vemos el de Pocono. Las curvas están peraltadas para poder tomarlas a la máxima velocidad. ¿Cuál es la gráfica que corresponde al circuito de NASCAR?



Enunciados

Podemos definir el tiempo de luz de un día como el tiempo que pasa desde que amanece hasta que anochece. El tiempo de luz de un día depende principalmente de dos factores: la latitud del lugar de la Tierra y el día del año en que nos encontremos. Las siguientes gráficas corresponden al tiempo de luz a lo largo del año 2023 en cinco ciudades:



Las ciudades, los países a los que pertenecen y su latitud son:

Ciudad	Tromsø	Caracas	Macasar	Gaborone	Ushuaia
País	Noruega	Venezuela	Indonesia	Botsuana	Argentina
Latitud	69°38′59″N	10°30′00″N	5°09′43″S	24°39′25″S	54°48′26″S

① ¿Cuál es la gráfica que no corresponde con ninguna de las ciudades?

② ¿Cuál es la gráfica que corresponde a Tromsø?

③ ¿Cuál es la gráfica que corresponde a Caracas?

④ ¿Cuál es la gráfica que corresponde a Macasar?

⑤ ¿Cuál es la gráfica que corresponde a Gaborone?

⑥ ¿Cuál es la gráfica que corresponde a Ushuaia?

⑦ ¿En qué ciudad hay al año más de un mes seguido sin que se ponga el sol?

⑧ ¿En qué ciudad del hemisferio sur se dan los días más largos en enero?

⑨ ¿En qué ciudad del hemisferio sur se dan los días más largos en julio?

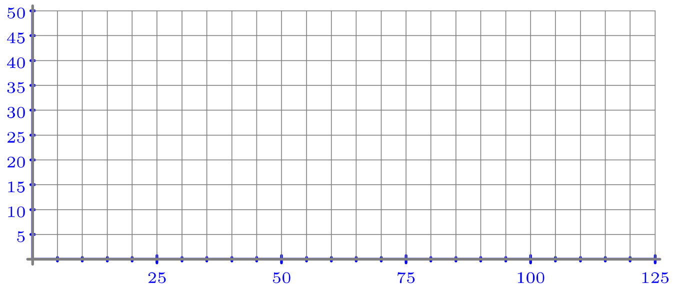
Enunciados

Disponemos de un recipente para almacenar agua con forma de hexaedro (sin tapa) cuyo lado mide 50 centímetros. El grifo con el que vamos a llenarlo tiene un caudal de un litro cada minuto. Queremos estudiar cómo sube la altura del agua en el recipiente conforme va pasando el tiempo; para ello usamos esta función:

Variable	**Magnitud**	**Nombre**	**Unidad**
Independiente	Tiempo que estamos echando agua	t	minuto
Dependiente	Altura que alcanza el agua	a	centímetro

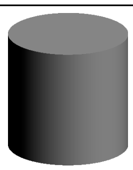
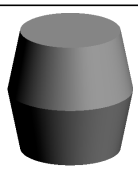
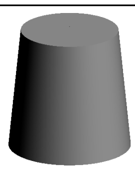
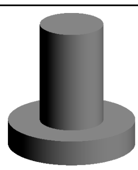
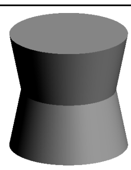
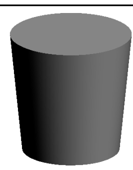
① Averigua la expresión analítica de la función.

② Dibuja la representación gráfica de la función. Puedes usar este modelo:

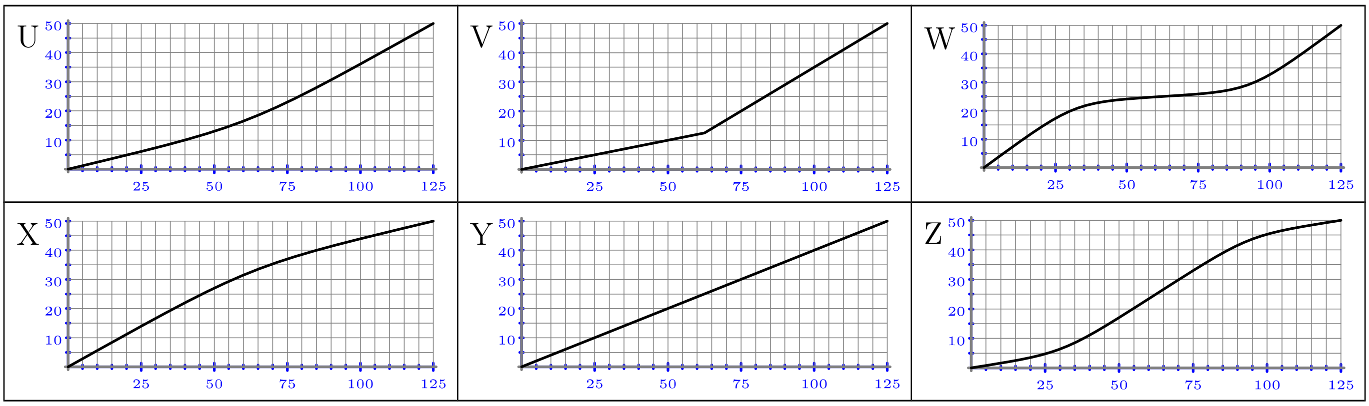


Cuando el recipiente tiene una forma más complicada, la expresión analítica es más difícil de obtener, pero puedes pensar cuál debe ser la representación.

Consideramos seis recipientes con el mismo volumen y la misma altura que el hexaedro, pero con distinta forma:

Ⓐ 	Ⓑ 	Ⓒ 	Ⓓ 	Ⓔ 	Ⓕ 

Sabemos que las gráficas de sus funciones de llenado son estas:



③ Relaciona cada forma con su gráfica.

Forma	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ	Ⓕ
Gráfica						

Definición de función lineal

Es aquella que tiene como expresión analítica un polinomio de primer grado.

Ejemplos

Las siguientes funciones son funciones lineales:

① $y=5x-4$ ② $y=3x$ ③ $y=0{,}23x+0{,}11$ ④ $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

Las siguientes funciones no son funciones lineales:

⑤ $y=\frac{1}{x}$ ⑥ $y=x^2+4$ ⑦ $y=7$ ⑧ $y=x^3+2x+3$

Expresión analítica general de una función lineal

La expresión analítica de una función lineal es muy sencilla, ya que solo depende de dos números: el coeficiente del monomio de primer grado y el coeficiente del monomio de grado 0 (también llamado término independiente).

Por tanto, todas las funciones lineales se pueden escribir como

$$\boxed{y = mx + q}$$

donde «m» es un número distinto de 0 y «q» es un número que sí puede ser cero.

Nota: si «m» fuera cero, la función sería constante, no lineal.

* El número «m» recibe el nombre de **pendiente**.
* El número «q» recibe el nombre de **ordenada en el origen**.

Tipos de funciones lineales

Consideramos la función lineal $y=mx+q$.

* Si $q\neq 0$, la función se llama **función afín**.
* Si $q=0$, la función se llama **función de proporcionalidad**.
* Si $m>0$, la función es creciente.
* Si $m<0$, la función es decreciente.

Ejemplos

⑨ La función lineal $y=-7x+8$ es una función afín (y decreciente).

⑩ La función lineal $y=2x$ es una función de proporcionalidad (y creciente).

Representación gráfica de una función lineal

* La representación gráfica de una función lineal siempre es una recta oblicua (es decir, ni horizontal ni vertical).
* La pendiente de la función mide la inclinación de la recta.
* Si la función lineal es una función afín, la recta no pasa por el origen de coordenadas.
* Si la función lineal es una función de proporcionalidad, la recta pasa por el origen de coordenadas.
* Las rectas horizontales son siempre la representación gráfica de una función constante.
* Las rectas verticales no son la gráfica de ninguna función.

Enunciados

Di si las siguientes funciones son lineales o no lo son:

① $y=19x-15$	② $y=3x+\frac{1}{x}$	③ $y=-x$	④ $y=\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}$
⑤ $y=x^3+5$	⑥ $y=\frac{4x+8}{3}$	⑦ $y=-5x+8-\frac{1}{x^2}$	⑧ $y=0{,}13x+\frac{9}{7}$

Dadas las siguentes funciones lineales, se pide:
a) Decir si son funciones afines o funciones de proporcionalidad.
b) Decir cuál es el valor de la pendiente.
c) Decir cuál es el valor de la ordenada en el origen.
d) Decir si la función es creciente o decreciente.

⑨ $y=2x+17$	⑩ $y=-x+4$	⑪ $y=x$	⑫ $y=-\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$
⑬ $y=\frac{6x-5}{13}$	⑭ $y=8+3x$	⑮ $y=4x+\frac{1}{3}$	⑯ $y=-3x$

Resolución

① Sí	② No	③ Sí	④ Sí	⑤ No	⑥ Sí	⑦ No	⑧ Sí

	⑨ $y=2x+17$	⑩ $y=-x+4$	⑪ $y=x$	⑫ $y=-\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$
(a)	Función afín	Función afín	F. proporcionalidad	Función afín
(b)	2	–1	1	$-\frac{1}{7}$
(c)	17	4	0	$\frac{2}{7}$
(d)	Función creciente	Función decreciente	Función creciente	Función decreciente

	⑬ $y=\frac{6x-5}{13}$	⑭ $y=8+3x$	⑮ $y=4x+\frac{1}{3}$	⑯ $y=-3x$
(a)	Función afín	Función afín	Función afín	F. proporcionalidad
(b)	$\frac{6}{13}$	8	4	–3
(c)	$-\frac{5}{13}$	3	$\frac{1}{3}$	0
(d)	Función creciente	Función creciente	Función creciente	Función decreciente

Enunciados

Di si las siguientes funciones son lineales o no lo son:

① $y=13x^2+6x$	② $y=-6x+\frac{1}{5}$	③ $y=-2x+3$	④ $y=\frac{x}{4}$
⑤ $y=\frac{1}{x+3}$	⑥ $y=\frac{5}{8}x-\frac{9}{8}$	⑦ $y=\frac{x-1}{7}$	⑧ $y=\frac{3}{11}x-\frac{11}{x}$

Enunciados

Dadas las siguentes funciones lineales, se pide:

a) Decir si son funciones afines o funciones de proporcionalidad.

b) Decir cuál es el valor de la pendiente.

c) Decir cuál es el valor de la ordenada en el origen.

d) Decir si la función es creciente o decreciente.

	⑨ $y=4x-5$	⑩ $y=-x-\frac{1}{3}$	⑪ $y=\frac{x}{3}$	⑫ $y=4-3x$
(a)				
(b)				
(c)				
(d)				

	⑬ $y=3x-\frac{5}{12}$	⑭ $y=x-10$	⑮ $y=-7x$	⑯ $y=\frac{6x-5}{3}$
(a)				
(b)				
(c)				
(d)				

	⑰ $y=-\frac{3}{5}x$	⑱ $y=-x+4$	⑲ $y=6x$	⑳ $y=-\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}$
(a)				
(b)				
(c)				
(d)				

Enunciados

En cada uno de los siguientes enunciados se habla de una función lineal. Identifica en cada función cuáles son las variables independiente y dependiente, di cómo las vas a nombrar y con qué unidad las vas a medir. Averigua su expresión analítica y di si es una función afín o una función de proporcionalidad.

① En una tienda de barrio venden chorizo del bueno a 15 euros cada kilogramo. Estudia el coste del chorizo en función de cuánto compras.

② En una tienda de venta a granel puedes comprar lentejas a 11 euros cada kilogramo y tienes que comprar también una bolsa que cuesta 0,5 euros para llevártelas. Estudia el coste de las lentejas en función de cuánto compras.

③ Un coche circula a una velocidad constante de 70 kilómetros cada hora. Estudia la distancia que recorre en función de cuánto tiempo lleva en marcha.

④ En una casa de lujo hay un pasillo muy largo que tiene 1,5 metros de anchura; los dueños quieren cubrirlo parcialmente con una alfombra fabricada especialmente para ellos con una anchura de 1,5 metros. La alfombra tiene un coste de 550 euros cada metro de longitud y la instalación tiene un coste fijo de 2500 euros. Estudia el coste total de la alfombra en función de su longitud.

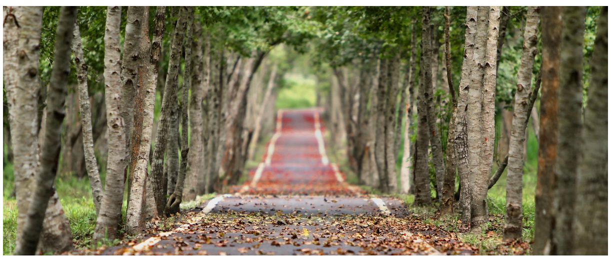
⑤ Una persona con una alta cualificación profesional cobra por sus servicios cincuenta euros cada hora más un fijo en cada caso de doscientos euros. Estudia el coste total de contratarla en función del tiempo que tenga que trabajar en tu caso.

⑥ Una familia quiere vender su casa y pide ayuda profesional a una empresa de compraventa de inmuebles. La empresa cobra por sus servicios un tres por ciento del precio final de la casa y un fijo por la operación de 1500 euros. Estudia cuánto dinero gana la empresa en función del precio final de la vivienda.

⑦ Queremos construir un ortoedro con una base de 4 metros cuadrados. Estudia el volumen del ortoedro en función de su altura.

⑧ La ley cuadrático-cúbica es un principio matemático usado en biología y en mecánica que describe el cociente entre volumen y área de un cuerpo a medida que varía su tamaño; por ejemplo, explica los límites de tamaño de los animales y el diseño de algunos aviones. Queremos saber cómo cambia en un hexaedro el cociente entre su volumen y su área según cambia su lado.

⑨ En un pueblo tienen una carretera poco transitada que deciden preparar para que sea más agradable pasear por ella. El proyecto incluye plantar árboles, con un coste de 250 euros cada árbol, y poner algún tipo de adorno entre cada dos árboles, con un coste de 500 euros cada adorno. Estudia el coste total de la preparación en función de cuántos árboles se planten.



Representación gráfica de una función de proporcionalidad

Sabemos dos características de la gráfica de una función de proporcionalidad:

✱ Es una línea recta.

✱ Pasa por el punto (0,0).

Por tanto, para poder completar la gráfica solo nos falta encontrar otro punto de la gráfica y unir los dos puntos mediante una línea recta.

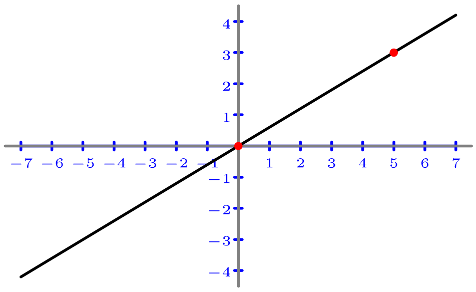
Ejemplo 1

Enunciado: representa gráficamente la función $y=\frac{3}{5}x$

Resolución. Cuando la pendiente viene dada en forma de fracción, es una buena idea dar a la variable el valor del denominador de la fracción, porque así se obtiene un punto con coordenadas enteras. Si no fuera posible, cualquier valor distinto de cero valdría.

$x=5 \Rightarrow y=\frac{3}{5}\cdot 5=3 \Rightarrow$ el punto (5,3) pertenece a la gráfica de la función.

Unimos los puntos (0,0) y (5,3) mediante una línea recta. La línea realmente es infinita, pero como nuestro espacio es limitado, solo dibujamos una parte. A la derecha vemos el resultado. Hemos marcado los dos puntos usados para que los veas, pero no es necesario hacerlo en la realidad.



Ejemplo 2

Enunciado: representa gráficamente la función $y=-2x$

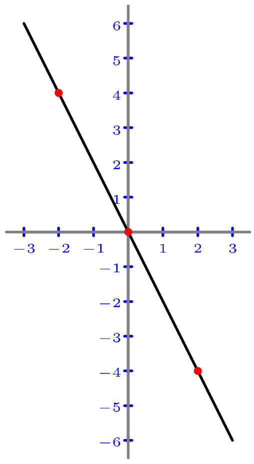
Resolución. La pendiente es un número entero, así que podemos dar a la variable independiente cualquier valor que nos permita calcular un punto con coordenadas con valores lo suficientemente comedidos para poder representarlo. En estas representaciones nos enfrentamos muchas veces a la situación de que los números que nos salen son muy grandes y no es fácil encontrar la escala adecuada.

$x=2 \Rightarrow y=-2\cdot 2=-4 \Rightarrow$ el punto (2,–4) pertenece a la gráfica de la función.

Para estar más seguros de nuestra representación, perfectamente podemos calcular algún punto más. Además, como todos deben estar alineados, será fácil detectar fallos de cálculo.

$x=-2 \Rightarrow y=-2\cdot(-2)=4 \Rightarrow$ el punto (–2,4) pertenece a la gráfica de la función.

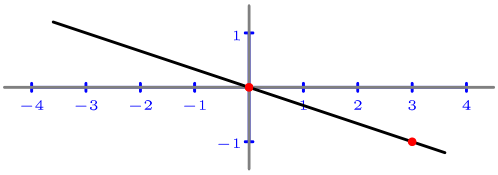
Vemos a la derecha la gráfica obtenida.



Ejemplo 3

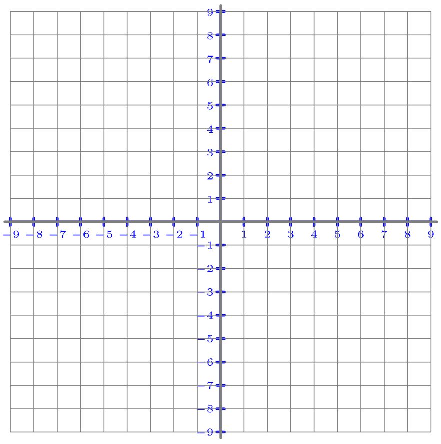
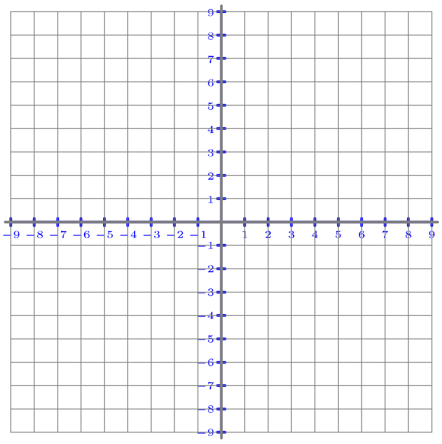
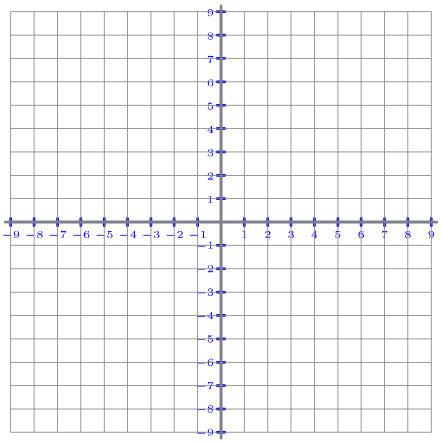
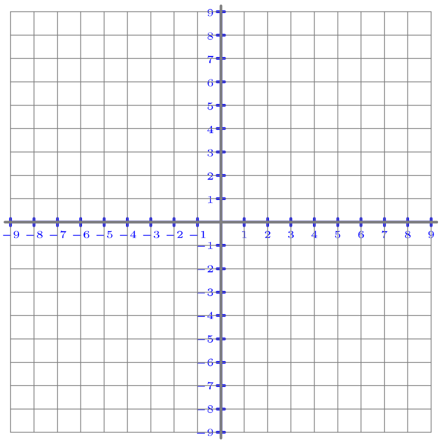
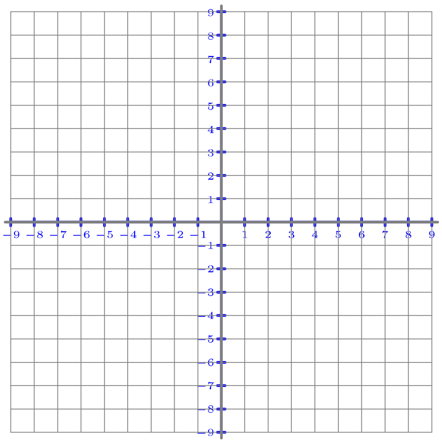
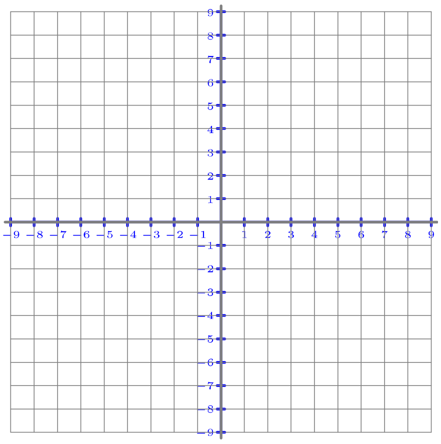
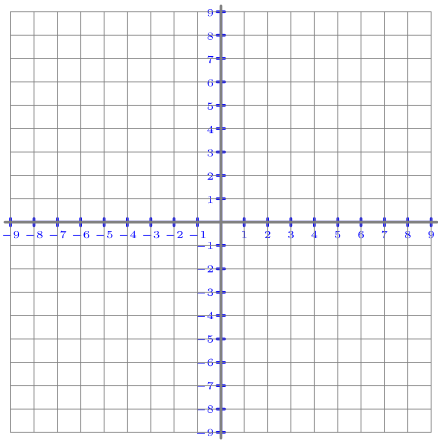
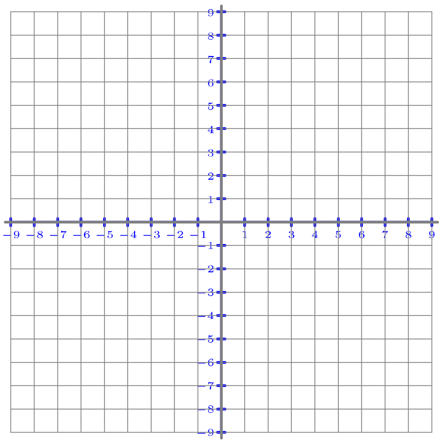
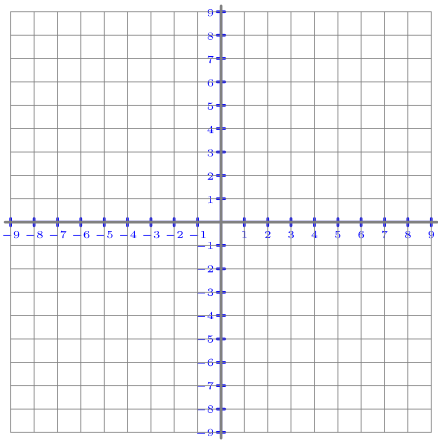
Enunciado: representa gráficamente la función $y=-\frac{1}{3}x$

Resolución: $x=3 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow$ obtenemos el punto (3,–1).



Enunciados

Representa gráficamente las siguientes funciones de proporcionalidad.

① $y=x$	② $y=-x$	③ $y=\frac{2}{5}x$
		
④ $y=2x$	⑤ $y=\frac{1}{3}x$	⑥ $y=-\frac{4}{5}x$
		
⑦ $y=-\frac{3}{2}x$	⑧ $y=-3x$	⑨ $y=\frac{5}{4}x$
		

Representación gráfica de una función afín

Sabemos que la gráfica de una función afín es una línea recta; por lo tanto, para dibujarla correctamente necesitamos conocer dos puntos. Para ello, damos dos valores a la variable dependiente, obtenemos los de la dependiente, representamos los puntos y los unimos con una línea recta. Dos valores interesantes para la variable independientes suelen ser:

* El 0. El valor obtenido para la variable dependiente será la ordenada en el origen. Es un valor muy fácil de calcular, aunque puede ser fraccionario.
* El denominador de la pendiente, que podría ser 1.

Se puede calcular más de dos puntos, que deberán quedar alineados. Es interesante hacerlo cuando los dos puntos obtenidos estén muy cercanos.

Enunciados

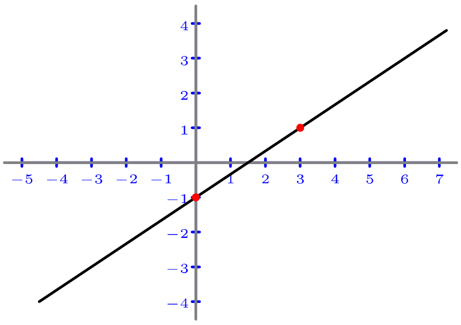
① Representa gráficamente la función $y=\frac{2}{3}x-1$

② Representa gráficamente la función $y=-x+\frac{3}{2}$

Resolución 1

$x=0 \Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot 0-1=-1 \Rightarrow$ el punto $(0,-1)$ pertenece a la gráfica de la función.

$x=3 \Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot 3-1=1 \Rightarrow$ el punto $(3,1)$ pertenece a la gráfica de la función.

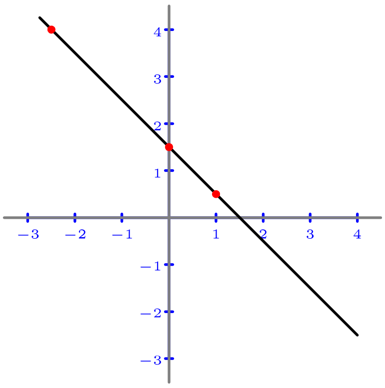


Resolución 2

$x=0 \Rightarrow y=-0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow$ el punto $(0,\frac{3}{2})$ pertenece a la gráfica de la función.

$x=1 \Rightarrow y=-1+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow$ el punto $(1,-\frac{1}{2})$ pertenece a la gráfica de la función.

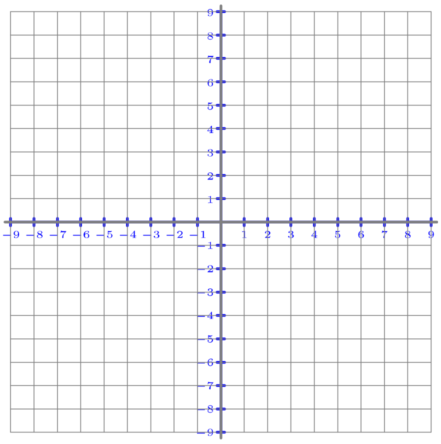
$x=-\frac{5}{2} \Rightarrow y=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4 \Rightarrow$ el punto $(-\frac{5}{2},4)$ pertenece a la gráfica de la función.



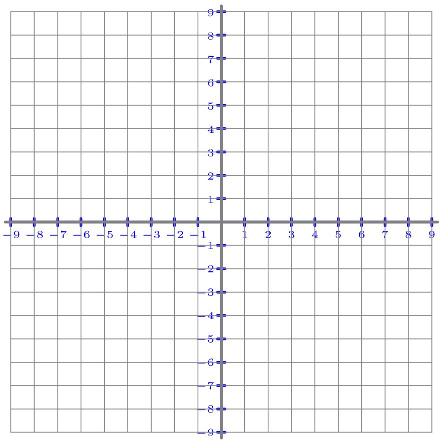
Enunciados

Representa gráficamente las siguientes funciones afines.

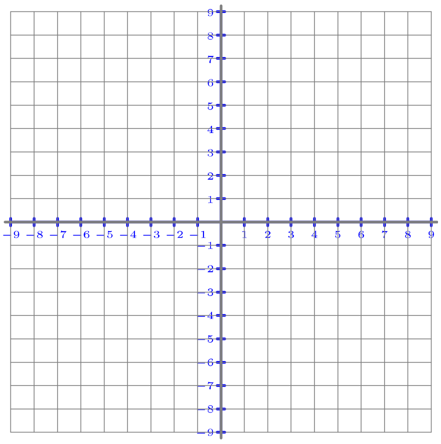
① $y=\frac{2}{3}x+2$



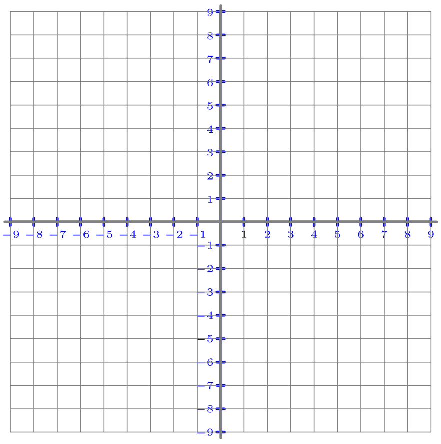
② $y=-\frac{1}{3}x+2$



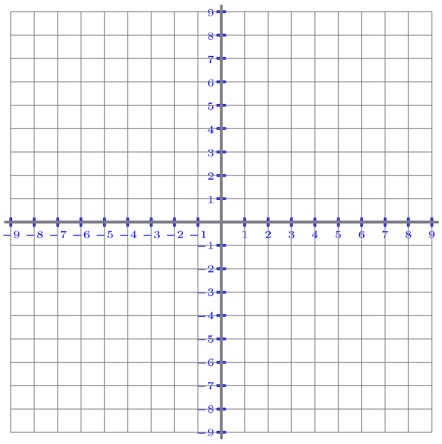
③ $y=\frac{1}{3}x-3$



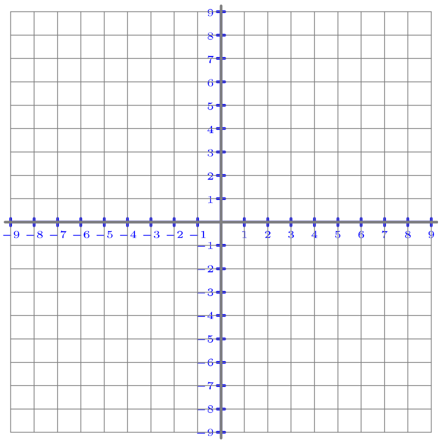
④ $y=\frac{4}{5}x-1$



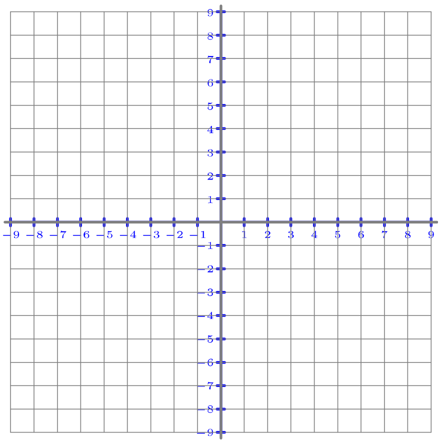
⑤ $y=-\frac{3}{5}x+1$



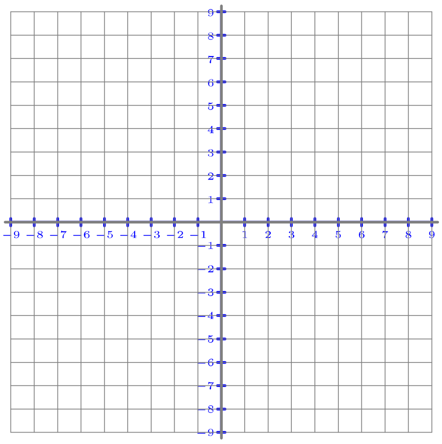
⑥ $y=\frac{1}{2}x-4$



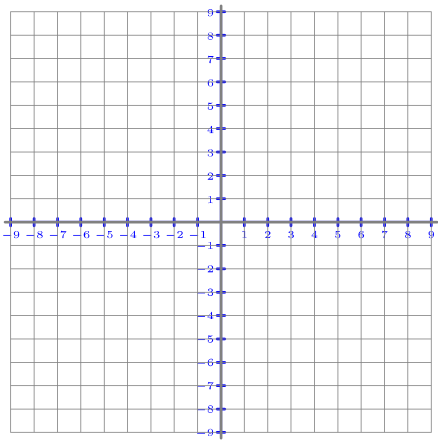
⑦ $y=x+1$



⑧ $y=-2x+3$



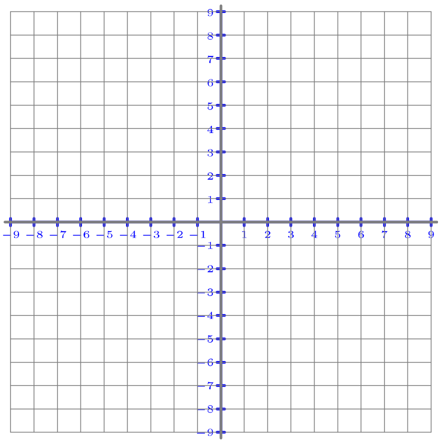
⑨ $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$



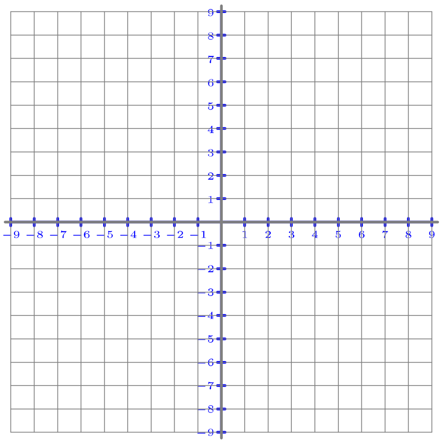
Enunciados

Representa gráficamente las siguientes funciones lineales.

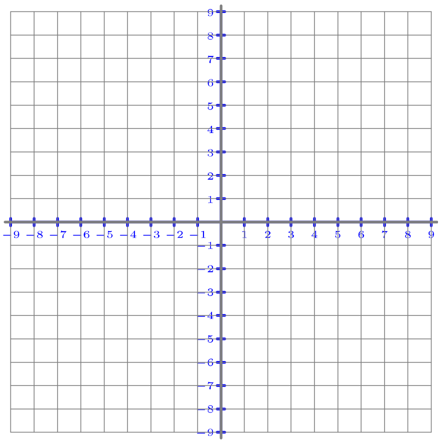
① $y=\frac{1}{2}x$



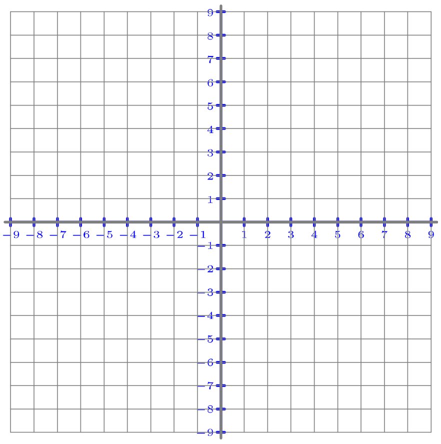
② $y=\frac{1}{2}x+3$



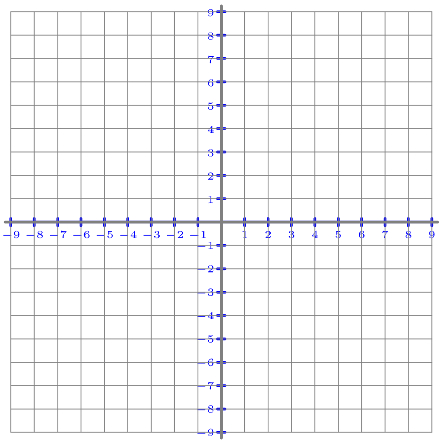
③ $y=\frac{1}{2}x-2$



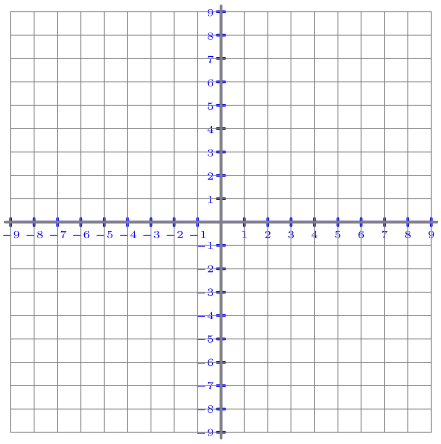
④ $y=-\frac{4}{5}x$



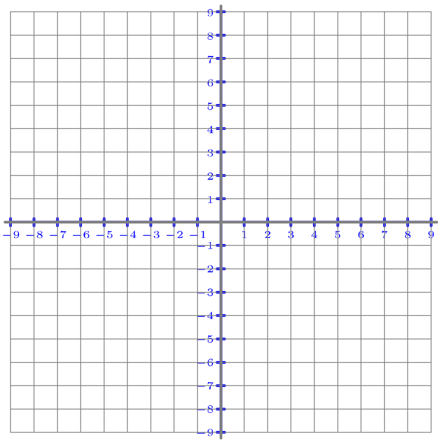
⑤ $y=-\frac{4}{5}x+2$



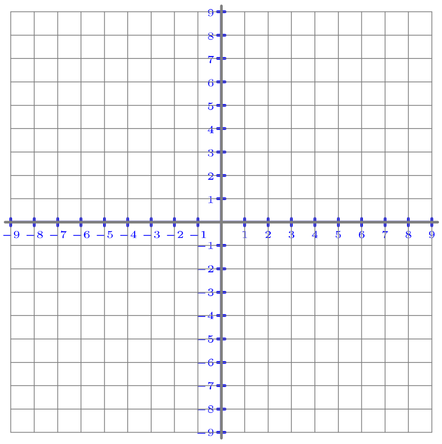
⑥ $y=-\frac{4}{5}x-1$



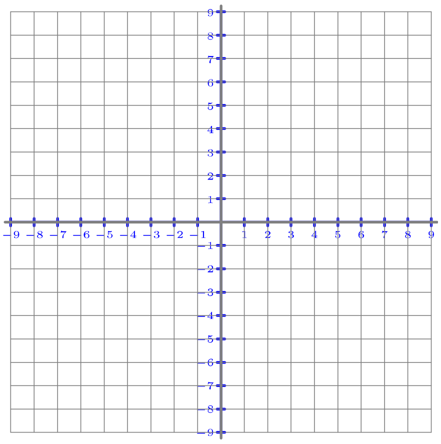
⑦ $y=\frac{3}{4}x$



⑧ $y=\frac{3}{4}x-2$



⑨ $y=\frac{3}{4}x+1$



Interpretación de la pendiente de una función lineal

La pendiente de una función lineal es igual al cociente obtenido al dividir el incremento de la variable dependiente entre el incremento de la variable independiente cuando se comparan dos parejas de valores de las variables.

Aunque en este contexto siempre se utiliza la palabra «incremento», este puede ser positivo (un aumento) o negativo (una disminución).

Ejemplo 1

Consideramos la función $y=-\frac{5}{7}x+4$. Obtenemos dos parejas de valores:

$x=-7 \Rightarrow y=-\frac{5}{7}\cdot(-7)+4=5+4=9 \Rightarrow$ obtenemos la pareja de valores $(-7,9)$

$x=14 \Rightarrow y=-\frac{5}{7}\cdot 14+4=-10+4=-6 \Rightarrow$ obtenemos la pareja de valores $(14,-6)$

Cuando pasamos de la pareja $(-7,9)$ a la pareja $(14,-6)$:

El incremento de la variable independiente es $14-(-7)=21$

El incremento de la variable dependiente es $-6-9=-15$

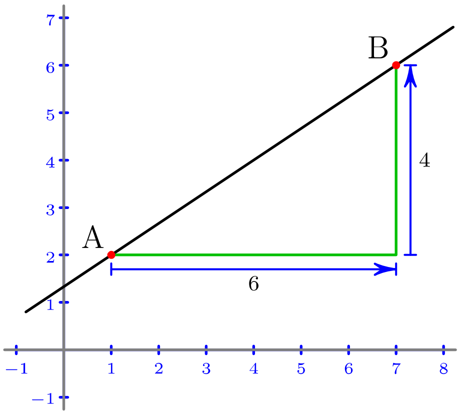
La pendiente es el cociente $\frac{-15}{21}$, fracción que es una fracción equivalente a $-\frac{5}{7}$.

Ejemplo 2

Consideramos la función $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$. Obtenemos dos parejas de valores:

$x=1 \Rightarrow y=2$; obtenemos el punto $A=(1,2)$. $x=7 \Rightarrow y=6$; obtenemos el punto $B=(7,6)$.

Representamos los puntos en la gráfica de la función:



Observamos qué ocurre cuando nos trasladamos por la gráfica desde el punto A hasta el punto B:

El incremento de la variable independiente es 6.

El incremento de la variable dependiente es 4.

Por tanto, la pendiente es el cociente de los incrementos: $\frac{4}{6}$, fracción equivalente a $\frac{2}{3}$

El triángulo formado por la gráfica entre A y B (en negro) y los incrementos (en verde) es muy importante en matemáticas.

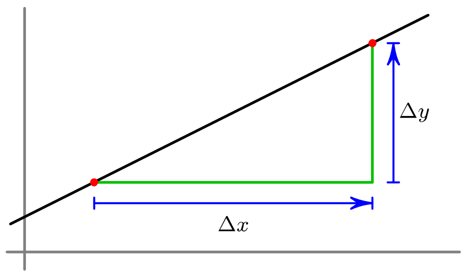
Notación para los incrementos

Para designar el incremento de una variable es costumbre en matemáticas utilizar la letra griega delta mayúscula («Δ»); así, el incremento de «x» se designa «Δx» y el incremento de «y» se designa «Δy».

Relación entre pendiente e incrementos de las variables

En la función lineal de expresión analítica $y=mx+q$ se consideran dos parejas de valores de las variables. Se verifica que

$$\boxed{m=\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$



Interpretación de la ordenada en el origen de una función lineal

La ordenada en el origen de una función lineal es la ordenada del punto de corte de la gráfica de la función con el eje de ordenadas.

Demostración

La expresión analítica de la función lineal es y=mx+q.

Damos a la «x» el valor «0»: x=0 ⇒ y=m·0+q=q.

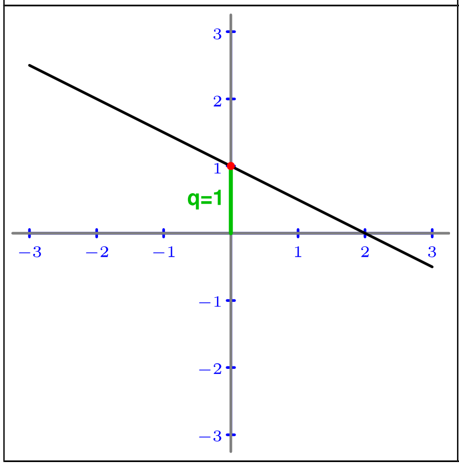
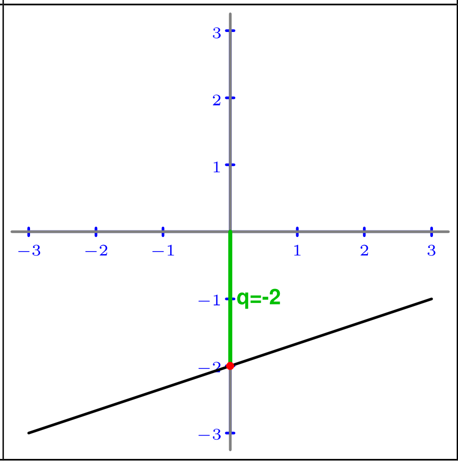
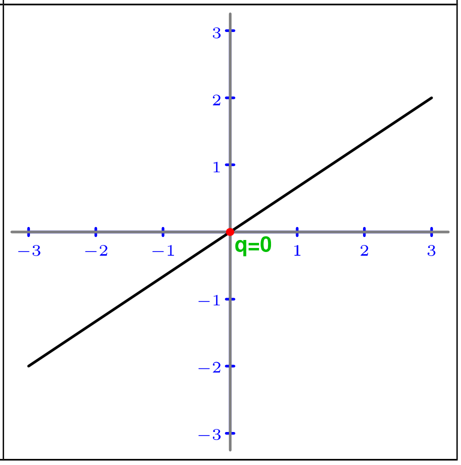
Por tanto, el punto (0,q) pertenece a la gráfica de la función; como también es un punto del eje de ordenadas, es el punto de corte de la gráfica de la función y el eje de ordenadas.

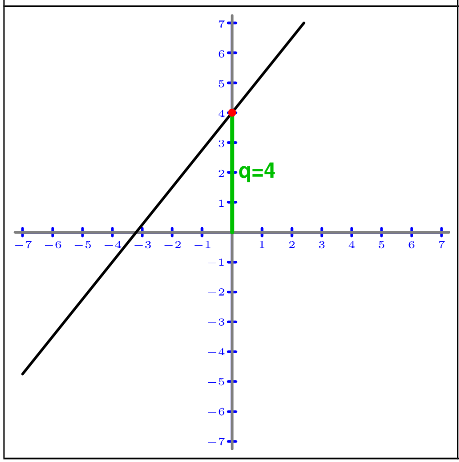
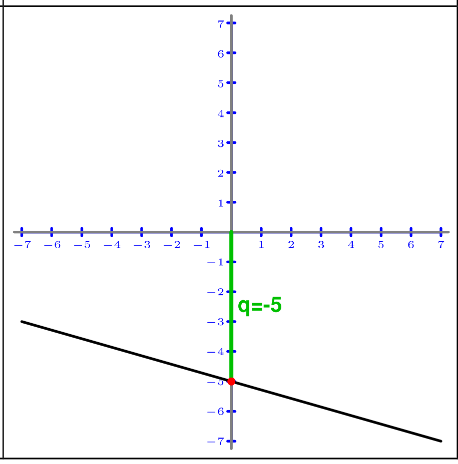
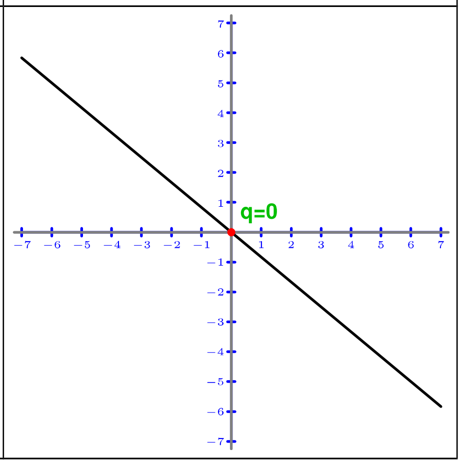
Ejemplos

Señalamos dos valores interesantes:

✱ El punto de corte de la gráfica de la función lineal y el eje de ordenadas está marcado en color rojo.

✱ El valor de la ordenada en el origen está marcado en color verde.

① $y=-\frac{1}{2}x+1$	② $y=\frac{1}{3}x-2$	③ $y=\frac{2}{3}x$
		

④ $y=\frac{5}{4}x+4$	⑤ $y=-\frac{2}{7}x-5$	⑥ $y=-\frac{5}{6}x$
		

Expresión analítica a partir de la gráfica de una función lineal

Conocida la representación gráfica de una función lineal, en muchos casos es posible obtener con exactitud su expresión analítica.

El proceso consta de dos partes independientes:

* Obtención de la ordenada en el origen.
* Obtención de la pendiente.

Obtención de la ordenada en el origen

Se busca el punto de corte de la gráfica de la función con el eje de ordenadas y la ordenada del punto obtenido es la ordenada en el origen de la función.

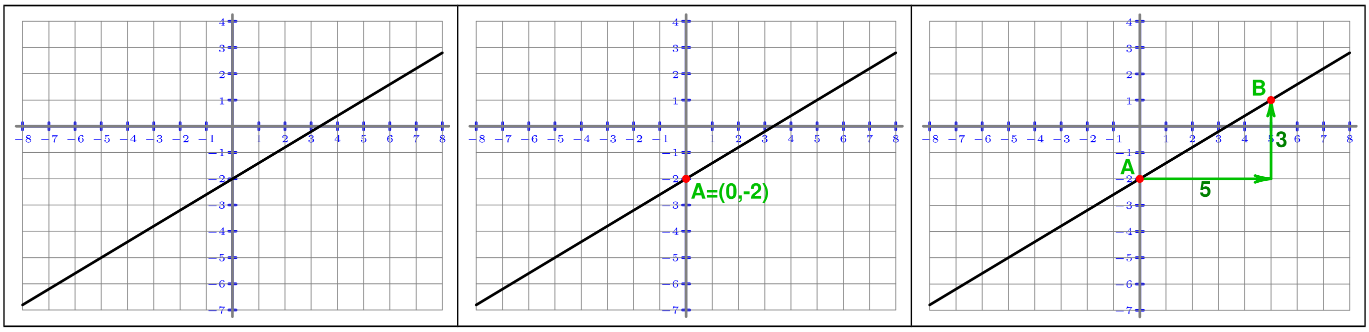
Obtención de la pendiente

Se identifican dos puntos de la gráfica de la función, a ser posible con las coordenadas enteras. La pendiente es el cociente entre el incremento de la variable dependiente entre el incremento de la variable independiente cuando se pasa de uno de los puntos al otro. Si se obtiene una fracción, es mejor simplificarla hasta llegar a una fracción irreducible.

Ejemplo

En el siguiente ejemplo se muestran tres ilustraciones:

* La de la izquierda es el enunciado: nos dan la representación gráfica de una función y nos piden su expresión analítica.
* La del centro es la búsqueda del valor de la ordenada en el origen.
* La de la derecha es la búsqueda del valor de la pendiente.



Enunciado: averigua la expresión analítica de la función cuya gráfica se ve en la ilustración de la izquierda.

Resolución

Como la gráfica es una línea recta oblicua, deducimos que la función pedida es una función lineal, luego su expresión analítica es y=mx+q, en la que hay que averiguar los valores de «q» y «m».

* El punto de corte de la gráfica con el eje de ordenadas es el punto A=(0,–2), luego q=–2.
* Considerando los puntos de la gráfica A=(0,–2) y B=(5,1), la pendiente es:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1-(-2)}{5-0}=\frac{3}{5}$$

Solución: $y=\frac{3}{5}x-2$

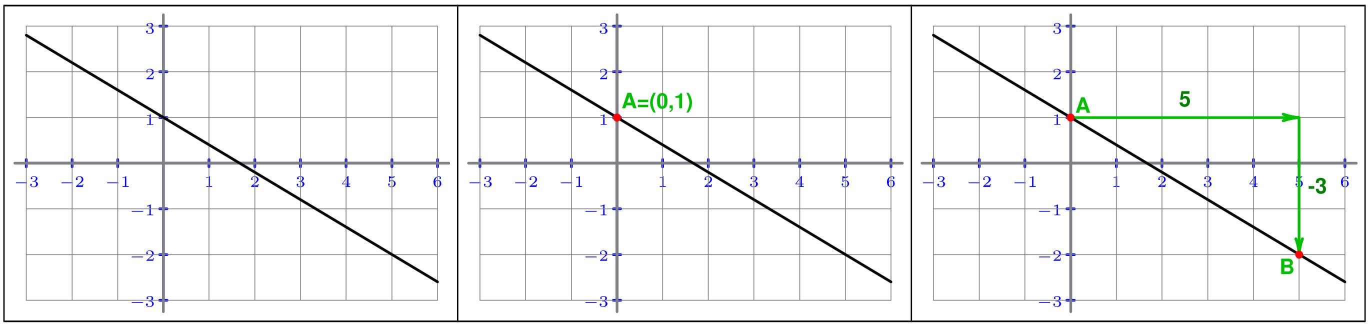
Ejemplos de obtención de la expresión analítica a partir de la gráfica de una función lineal

En los siguientes ejemplos se muestran tres ilustraciones:

- ✱ La de la izquierda es el enunciado: nos dan la representación gráfica de una función y nos piden su expresión analítica.
- ✱ La del centro es la búsqueda del valor de la ordenada en el origen.
- ✱ La de la derecha es la búsqueda del valor de la pendiente.

Como la gráfica de cada ejemplo es una línea recta oblicua, deducimos que la función pedida es una función lineal, luego su expresión analítica es y=mx+q.

Ejemplo 1

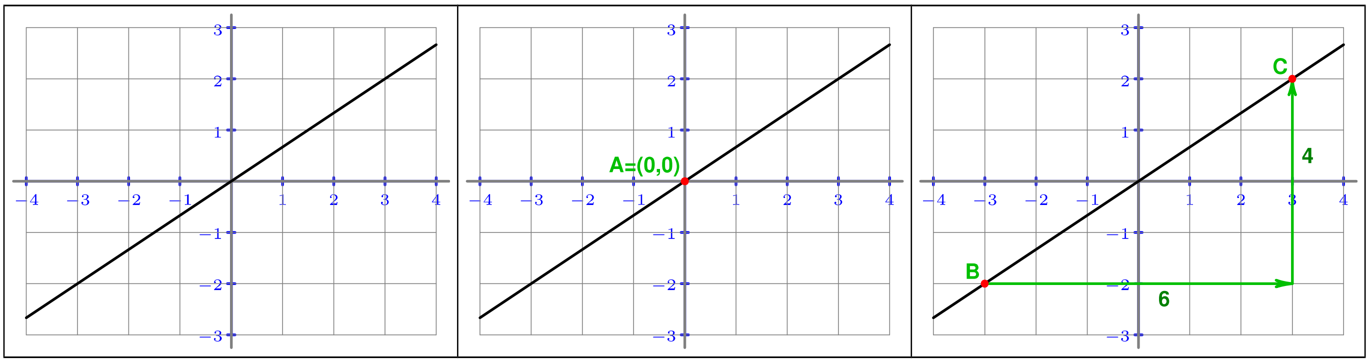


- ✱ El punto de corte de la gráfica con el eje de ordenadas es el punto A=(0,1), luego q=1.
- ✱ Considerando los puntos de la gráfica A=(0,1) y B=(5,–2), la pendiente es:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2-1}{5-0}=-\frac{3}{5}$$

Solución: $y=-\frac{3}{5}x+1$

Ejemplo 2



- ✱ El punto de corte de la gráfica con el eje de ordenadas es el punto A=(0,0), luego q=0.
- ✱ Considerando los puntos de la gráfica B=(–3,–2) y C=(3,2), la pendiente es:

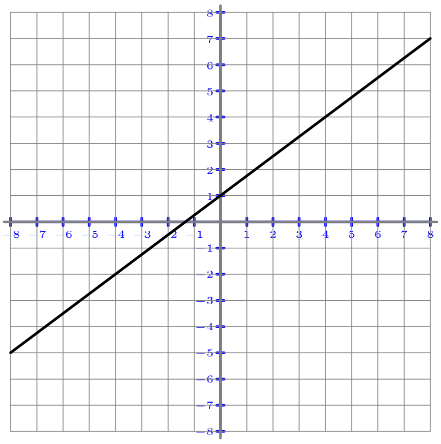
$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-(-2)}{3-(-3)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. (Hubiera sido más fácil usar A y C, pero hemos usado B y C para que veas que se pueden usar cualesquiera dos puntos).

Solución: $y=\frac{2}{3}x$

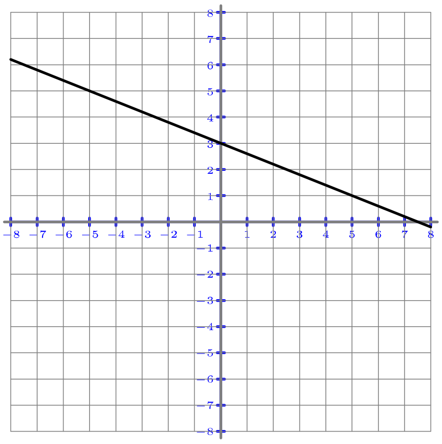
Enunciados

Averigua la expresión analítica de las siguientes funciones dadas por su representación gráfica:

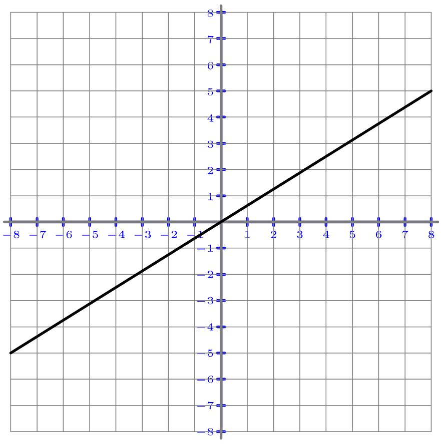
①



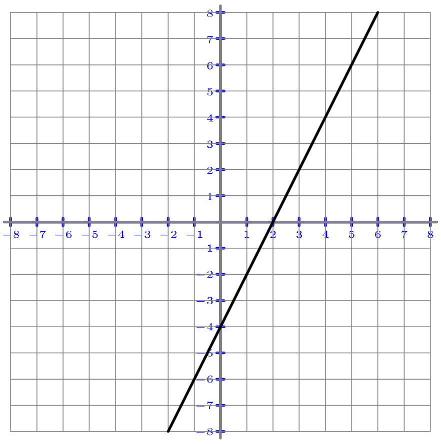
②



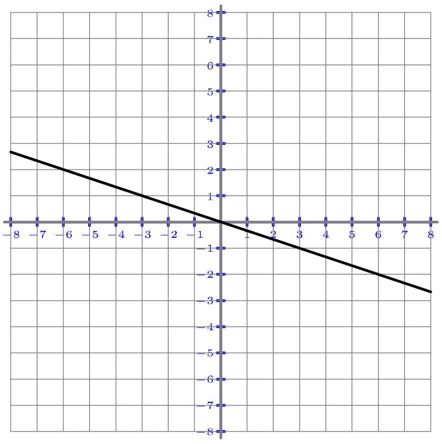
③



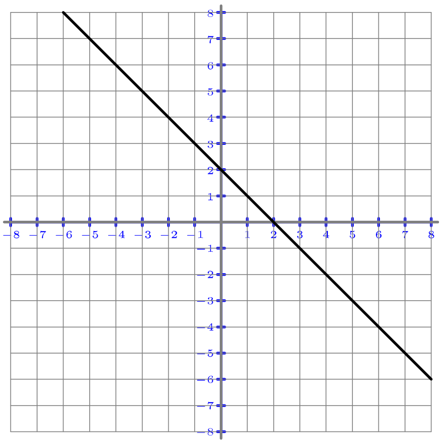
④



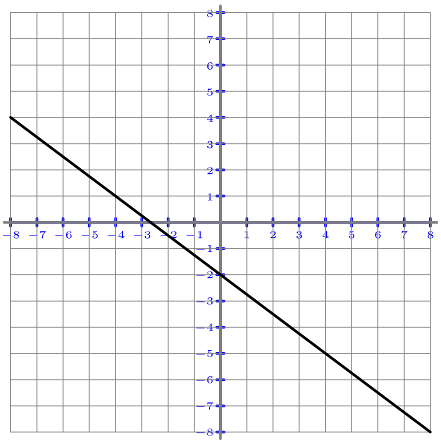
⑤



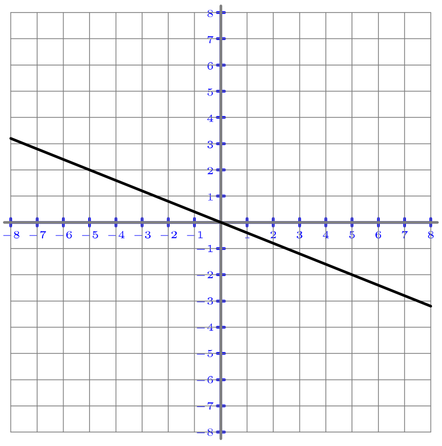
⑥



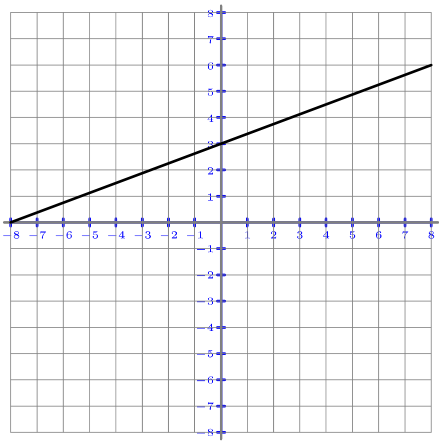
⑦



⑧



⑨



Obtención de la expresión analítica de una función lineal a partir de la pendiente y una pareja de valores

Cuando se conoce la pendiente de una función lineal y una pareja de valores de sus dos variables, es muy sencillo obtener la expresión analítica de la función: basta sustituir los valores y despejar el valor de la ordenada en el origen.

Enunciados

① Averigua la expresión analítica de la función lineal «f» sabiendo que su pendiente es 3 y que f(4)=5.

② Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es –4 y que el punto (–3,14) pertenece a la gráfica de la función.

③ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es ⅔ y que el punto (9,6) pertenece a la gráfica de la función.

Resoluciones

① Sabemos que la expresión analítica de una función lineal es $f(x)=mx+q$.

Tenemos el dato de que $m=3$, luego $f(x)=3x+q$.

Como $f(4)=5$: $f(4)=5 \Rightarrow 3\cdot 4+q=5 \Rightarrow q=5-12=-7$

Solución: $f(x)=3x-7$

② Sabemos que la expresión analítica de una función lineal es $y=mx+q$.

Tenemos el dato de que $m=-4$, luego $y=-4x+q$.

Como el punto (–3,14) pertenece a la gráfica: $14=-4(-3)+q \Rightarrow q=14-12=2$

Solución: $y=-4x+2$

③ Sabemos que la expresión analítica de una función lineal es $y=mx+q$.

Tenemos el dato de que $m=\frac{2}{3}$, luego $y=\frac{2}{3}x+q$.

Como el punto (9,6) pertenece a la gráfica: $6=\frac{2}{3}\cdot 9+q \Rightarrow q=6-6=0$

Solución: $y=\frac{2}{3}x$

Comentario

Si los números que se manejan en algún caso no son enteros, podemos utilizar en las operaciones o bien fracciones (normalmente irreducibles) o bien números decimales, lo que nos venga mejor.

Relación de este problema con la geometría

En el nivel 4 volveremos a resolver este problema, pero en un contexto geométrico. Ya que la representación gráfica de una función lineal es una línea recta, hay una fuerte relación entre la expresión analítica de una función lineal y el manejo de las rectas en geometría.

En el nivel 4 veremos enunciado este problema como «encuentra la ecuación de una recta conocida su pendiente y un punto por el que pasa», pero la resolución que veremos es equivalente a la que estudiamos en este nivel 3.

Enunciados

① Averigua la expresión analítica de la función lineal «g» sabiendo que su pendiente es 2 y que g(6)=7.

② Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es –3 y que el punto (3,–1) pertenece a la gráfica de la función.

③ Averigua la expresión analítica de la función lineal «h» sabiendo que su pendiente es –7 y que h(–2)=14.

④ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es 9 y que el punto (2,1) pertenece a la gráfica de la función.

⑤ Averigua la expresión analítica de la función lineal «A» sabiendo que su pendiente es ⅞ y que A(1)=1.

⑥ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es –⅕ y que el punto (–2,1) pertenece a la gráfica de la función.

⑦ Averigua la expresión analítica de la función lineal «B» sabiendo que su pendiente es 15 y que B(2)=0.

⑧ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es ¾ y que el punto (16,12) pertenece a la gráfica de la función.

⑨ Averigua la expresión analítica de la función lineal «C» sabiendo que su pendiente es 1 y que C(–3)=–6.

⑩ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es –5 y que el punto (2,3) pertenece a la gráfica de la función.

⑪ Averigua la expresión analítica de la función lineal «D» sabiendo que su pendiente es ¾ y que D(6)=5.

⑫ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es –9 y que el punto (–1,12) pertenece a la gráfica de la función.

⑬ Averigua la expresión analítica de la función lineal «E» sabiendo que su pendiente es 0,3 y que D(2)=1,4.

⑭ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es ½ y que el punto (–5,–1) pertenece a la gráfica de la función.

⑮ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es 1,4 y que el punto (2;–2,5) pertenece a la gráfica de la función.

⑯ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es 2 y que el punto (3,–1) pertenece a la gráfica de la función.

⑰ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es –4 y que el punto (2,0) pertenece a la gráfica de la función.

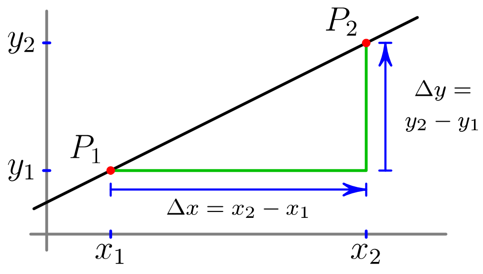
⑱ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que su pendiente es –13 y que el punto (–2,26) pertenece a la gráfica de la función.

Obtención de la expresión analítica de una función lineal a partir de dos parejas de valores

Cuando se conocen dos parejas de valores de sus dos variables, es posible obtener la expresión analítica de la función con varios métodos distintos. Como todos llevan al mismo resultado, será decisión tuya qué metodo usar.

Fórmula para calcular la pendiente

Supongamos que conocemos dos parejas de valores correspondientes a la función lineal $y = mx+q$. Llamamos a las parejas de valores $P_1 = (x_1,y_1)$ y $P_2 = (x_2,y_2)$, ya que corresponden con dos puntos de la representación gráfica de la función, como vemos en la ilustración de la derecha. Entonces:



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Demostración

Como $P_1 = (x_1,y_1)$, $y_1 = mx_1+q$; como $P_2 = (x_2,y_2)$, $y_2 = mx_2+q$.

Restamos la segunda igualdad menos la primera y obtenemos:

$y_2 - y_1 = mx_2+q-(mx_1+q) = mx_2+q-mx_1-q = mx_2-mx_1 = m(x_2-x_1)$

Por último, despejamos: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ejemplo

Enunciado: averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que los puntos (–2,–7) y (3,8) pertenecen a la gráfica de la función.

Resolución: primero calculamos la pendiente usando la fórmula y luego calculamos la ordenada en el origen usando uno cualquiera de los puntos.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-(-7)}{3-(-2)} = \frac{15}{5} = 3$$

Punto $(-2,-7) \rightarrow -7 = 3\cdot(-2)+q \Rightarrow q = -1$

(Si hubiéramos usado el punto (3,8), también hubiéramos obtenido $q = -1$).

Solución: $y = 3x-1$

Comentario

Si los números que se manejan en algún caso no son enteros, podemos utilizar en las operaciones o bien fracciones (normalmente irreducibles) o bien números decimales, lo que nos venga mejor.

Relación de este problema con la geometría

En el nivel 4 volveremos a resolver este problema, pero en un contexto geométrico. Ya que la representación gráfica de una función lineal es una línea recta, hay una fuerte relación entre la expresión analítica de una función lineal y el manejo de las rectas en geometría.

En el nivel 4 veremos enunciado este problema como «encuentra la ecuación de una recta conocidos dos puntos por los que pasa», pero las resoluciones que veremos son equivalentes a las que estudiamos en este nivel 3.

Obtención de la expresión analítica de una función lineal a partir de dos parejas de valores

Cuando se conocen dos parejas de valores de sus dos variables, es posible obtener la expresión analítica de la función con varios métodos distintos. Como todos llevan al mismo resultado, será decisión tuya qué metodo usar.

Ejemplo

Enunciado: averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que los puntos (–1,–3) y (8,9) pertenecen a la gráfica de la función.

Enunciado alternativo: averigua la expresión analítica de la función lineal «A» sabiendo que $A(-1) = -3$ y $A(8) = 9$.

Primera resolución: primero calculamos la pendiente usando la fórmula y luego calculamos la ordenada en el origen usando uno cualquiera de los puntos.

La expresión analítica de la función lineal es $y = mx+q$

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{9-(-3)}{8-(-1)} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. Por tanto, la expresión analítica es $y = \frac{4}{3}x+q$

Sustituimos en la expresión los valores del punto (–1,–3):

$y = \frac{4}{3}x+q \Rightarrow -3 = \frac{4}{3}(-1)+q \Rightarrow q = -3+\frac{4}{3} = -\frac{5}{3}$

Si hubiéramos sustituido en la expresión el punto (8,9), hubiéramos obtenido el mismo valor: $y = \frac{4}{3}x+q \Rightarrow 9 = \frac{4}{3}\cdot 8+q \Rightarrow q = 9-\frac{32}{3} = -\frac{5}{3}$

Solución: $y = \frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$. Solución alternativa: $A(x) = \frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

Segunda resolución: planteamos y resolvemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas usando los dos puntos.

La expresión analítica de la función lineal es $y = mx+q$

Sustituyendo el punto (8,9) obtenemos la expresión $9 = 8m+q$

Sustituyendo el punto (–1,–3) obtenemos la expresión $-3 = -m+q$

Planteamos el sistema $\begin{cases} 8m+q=9 \\ -m+q=-3 \end{cases}$, que resolvemos mediante reducción:

$\left.\begin{cases} 8m+q=9 \\ -m+q=-3 \end{cases}\right| \; 9m = 12 \Rightarrow m = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$-m+q=-3 \Rightarrow -\frac{4}{3}+q=-3 \Rightarrow q = -3+\frac{4}{3} = -\frac{5}{3}$

Solución: $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$. Solución alternativa: $A(x)=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

Comentarios

* Los dos métodos de resolución llevan exactamente a las mismas operaciones, por lo que son equivalentes.
* El método de resolución mediante un sistema de ecuaciones resuelto mediante el método de reducción está inspirado en la demostración de la fórmula de la pendiente.

Enunciados

① Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que los puntos (2,–2) y (5,7) pertenecen a la gráfica de la función.

② Averigua la expresión analítica de la función lineal «A» sabiendo que A(1) = 3 y A(4) = –9.

③ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que los puntos (–2,1) y (7,19) pertenecen a la gráfica de la función.

④ Averigua la expresión analítica de la función lineal «B» sabiendo que B(1) = 5 y B(–4) = –30.

⑤ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que los puntos (–8,0) y (4,6) pertenecen a la gráfica de la función.

⑥ Averigua la expresión analítica de la función lineal «C» sabiendo que C(5) = 3 y C(–1) = –1.

⑦ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que los puntos (6,8) y (10,13) pertenecen a la gráfica de la función.

⑧ Averigua la expresión analítica de la función lineal «D» sabiendo que D(–6) = 5 y D(4) = –1.

⑨ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que los puntos (4,1) y (–10,–2) pertenecen a la gráfica de la función.

⑩ Averigua la expresión analítica de la función lineal «E» sabiendo que E(2) = –1 y E(–8) = 6.

⑪ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que los puntos (2,2) y (4,0) pertenecen a la gráfica de la función.

⑫ Averigua la expresión analítica de la función lineal «F» sabiendo que F(4) = 1 y F(–3) = –20.

⑬ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que los puntos (15,4) y (33,8) pertenecen a la gráfica de la función.

⑭ Averigua la expresión analítica de la función lineal «G» sabiendo que G(–27) = 21 y G(18) = –14.

⑮ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que los puntos (6,6) y (–9,–19) pertenecen a la gráfica de la función.

⑯ Averigua la expresión analítica de la función lineal «H» sabiendo que H(2) = 1 y H(–14) = –5.

⑰ Averigua la expresión analítica de una función lineal sabiendo que los puntos (0,4) y (–1,–15) pertenecen a la gráfica de la función.

⑱ Averigua la expresión analítica de la función lineal «R» sabiendo que R(1) = 8 y R(0) = 17.

Obtención de una tercera pareja de valores de una función lineal conocidas dos parejas de valores

Supongamos que de una función lineal conocemos dos parejas de valores (que corresponden con dos puntos de su representación gráfica). Entonces:

* Dado un valor cualquiera de la variable independiente, es posible calcular el valor correspondiente de la variable dependiente.
* Dado un valor cualquiera de la variable dependiente, es posible calcular el valor correspondiente de la variable independiente.

Ejemplo

Enunciado: de la función lineal «L» se sabe que $L(-2) = -2$ y $L(6) = 4$. Se pide:

(a) Calcula $L(2)$; (b) Resuelve la ecuación $L(x) = -5$

Resolución. Comenzaremos obteniendo la expresión analítica de la función utilizando las dos parejas de valores del enunciado. Cuando la tengamos, podremos resolver los dos apartados en cualquier orden.

Como la función es lineal, su expresión analítica es $L(x) = mx+q$

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-(-2)}{6-(-2)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Por tanto, la expresión analítica es $L(x) = \frac{3}{4}x+q$

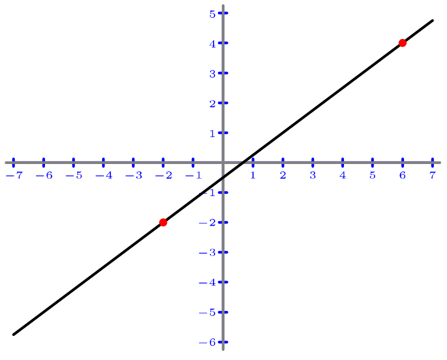
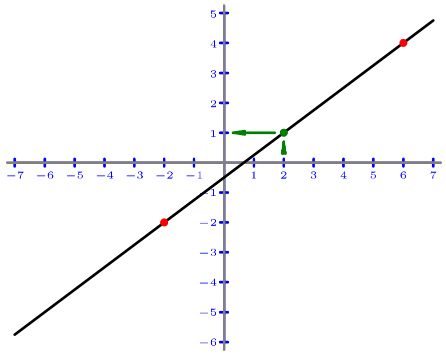
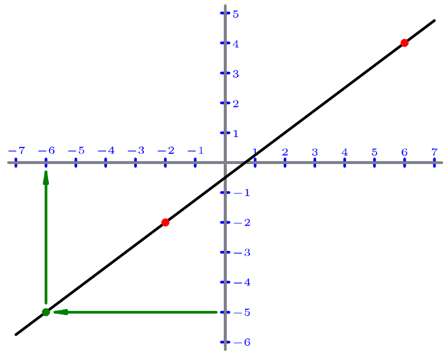
$L(6)=4 \Rightarrow \frac{3}{4}\cdot 6+q = 4 \Rightarrow q = 4-\frac{3}{2}\cdot 3 = 4-\frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$. Por tanto, $L(x) = \frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

(a) $L(2) = \frac{3}{4}\cdot 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2} = 1$. Solución: $L(2) = 1$

(b) $L(x) = -5 \Rightarrow \frac{3}{4}x-\frac{1}{2} = -5 \Rightarrow 3x-2 = -20 \Rightarrow 3x = -18 \Rightarrow x = -6$. Solución: $x = -6$

Representación gráfica

En este problema, igual que ocurre en otros muchos que tienen valores pequeños y enteros, la representación gráfica casi da la solución exacta. En todo caso, aunque no se pueda usar para obtener valores exactos, la representación gráfica ayuda a comprender mejor la situación, así que es una muy buena ayuda.

		
Con los dos valores conocidos de la función representamos dos puntos de la gráfica y los unimos con una línea recta, que es la representación gráfica de la función.	Para $x = 2$, subimos desde el eje de abscisas hasta la gráfica y nos encontramos con el punto (2,1), luego su ordenada es 1 y por eso $L(2) = 1$	Como $L(x) = -5$, partimos desde el eje de ordenadas para $y = -5$ hasta encontrarnos con la gráfica en el punto $(-6,-5)$, luego $x = -6$ y por tanto $L(x)=-5 \Rightarrow x=-6$

Nota

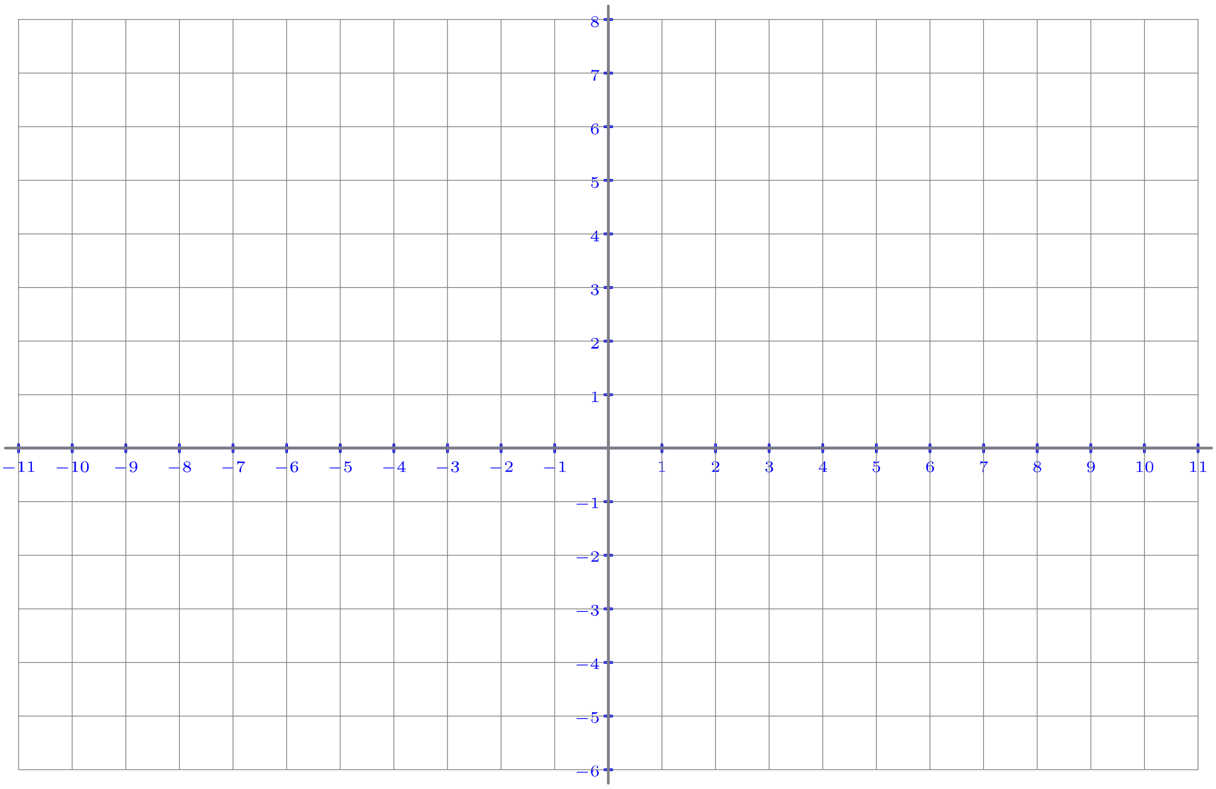
Este método se utiliza con funciones no lineales para obtener valores aproximados.

Enunciados

① De la función lineal «L» se sabe que L(–10) = 7 y L(10) = –5. Se pide:

(a) Calcula L(–5); (b) Calcula L(0); (c) Resuelve la ecuación L(x) = –2

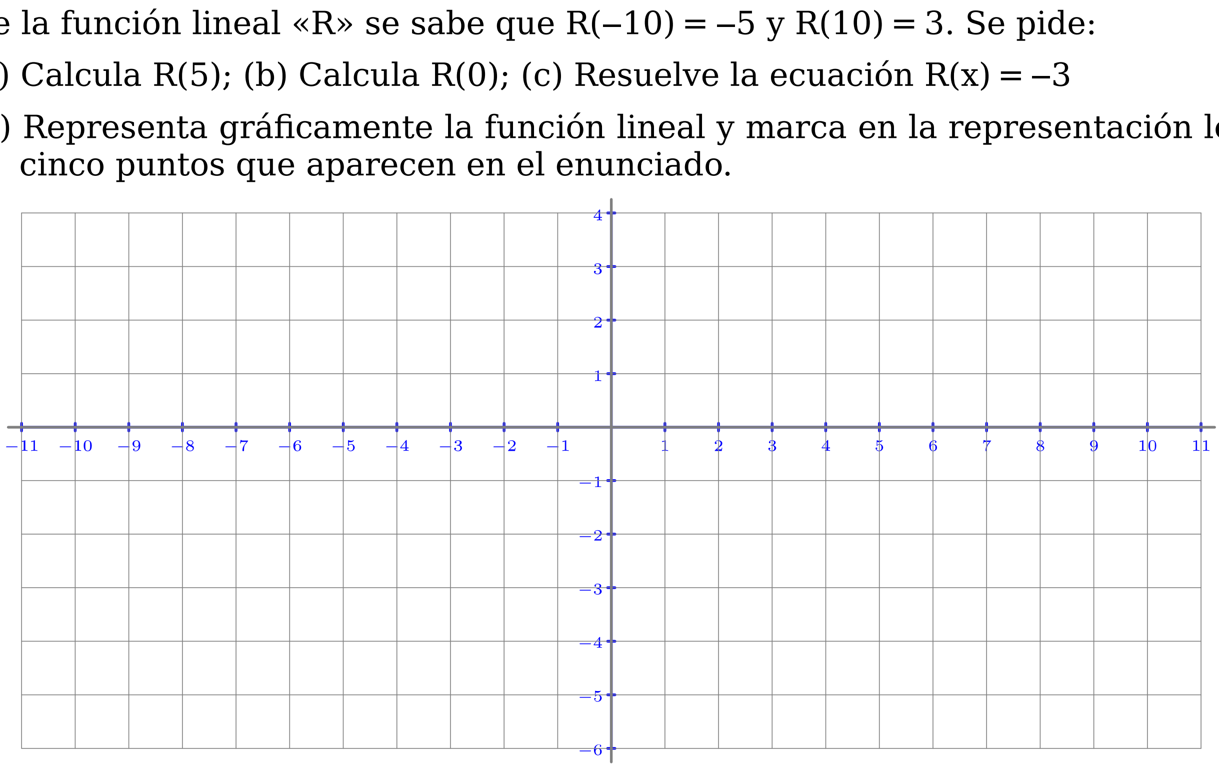
(d) Representa gráficamente la función lineal y marca en la representación los cinco puntos que aparecen en el enunciado.



② De la función lineal «R» se sabe que R(–10) = –5 y R(10) = 3. Se pide:

(a) Calcula R(5); (b) Calcula R(0); (c) Resuelve la ecuación R(x) = –3

(d) Representa gráficamente la función lineal y marca en la representación los cinco puntos que aparecen en el enunciado.



Enunciado

De la función lineal «L» se sabe que $L\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{50}{63}$ y $L\left(\frac{3}{14}\right)=\frac{31}{42}$. Se pide:

(a) Calcula $L\left(\frac{1}{2}\right)$; (b) Resuelve la ecuación $L(x)=\frac{11}{7}$

Expresa como fracción irreducible todos los números que no sean enteros.

Resolución

Como la función es lineal, su expresión analítica es $L(x)=mx+q$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{31}{42}-\frac{50}{63}}{\frac{3}{14}-\frac{2}{7}}=\frac{7}{9}.$$

Calculadora: (3 1 a b/c 4 2 – 5 0 a b/c 6 3) ÷
(3 a b/c 1 4 – 2 a b/c 7) ÷ = ⇨ 7⌟9

Por tanto, la expresión analítica es $L(x)=\frac{7}{9}x+q$

$$L\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{50}{63} \Rightarrow \frac{7}{9}\cdot\frac{2}{7}+q=\frac{50}{63} \Rightarrow q=\frac{50}{63}-\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$$

Calculadora: 5 0 a b/c 6 3 – 7 a b/c 9 × 2 a b/c 7 = ⇨ 4⌟7

Por tanto, $L(x)=\frac{7}{9}x+\frac{4}{7}$

(a) $L\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{7}=\frac{121}{126}$

Calculadora: 7 a b/c 9 × 1 a b/c 2 + 4 a b/c 7 = ⇨ 121⌟126

Solución: $L\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{121}{126}$

(b) $L(x)=\frac{11}{7} \Rightarrow \frac{7}{9}\cdot x+\frac{4}{7}=\frac{11}{7} \Rightarrow x=\frac{\frac{11}{7}-\frac{4}{7}}{\frac{7}{9}}=\frac{9}{7}$

Calculadora: (1 1 a b/c 7 – 4 a b/c 7) ÷ 7 a b/c 9 ÷ = d/c ⇨ 9⌟7

Solución: $x=\frac{9}{7}$

Comentarios

* Haremos las operaciones con lápiz y papel o usaremos la calculadora según veamos la dificultad de cada operación: para las más sencillas se tarda más con la calculadora, para las más difíciles suele ser más fiable la calculadora.
* Si el enunciado lo permitiera, podríamos haber utilizado números decimales en vez de fracciones, pero hubiéramos cometido errores de redondeo porque en este ejercicio los números decimales son periódicos. Si los números decimales fueran exactos y cortos, serían admisibles.

Enunciados

Expresa como número decimal todos los números que no sean enteros.

① De la función lineal «L» se sabe que L(0,3) = –8,114 y L(2,7) = 2,254.
(a) Calcula L(–0,7); (b) Resuelve la ecuación L(x) = –2,498

② De la función lineal «R» se sabe que R(–4,2) = 7,8666 y R(0,32) = –0,59936.
(a) Calcula R(2,3); (b) Resuelve la ecuación R(x) = 2,6222

Resoluciones

① Como la función es lineal, su expresión analítica es L(x) = mx+q

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2{,}254-(-8{,}114)}{2{,}7-0{,}3} = 4{,}32$$

Calculadora: (2 . 2 5 4 + 8 . 1 1 4) ÷ 2 . 4 = ⇨ 4.32

Por tanto, la expresión analítica es L(x) = 4,32x+q

L(2,7)=2,254 ⇒ 4,32·2,7+q=2,254 ⇒ q = 2,254–4,32·2,7 = –9,41

Calculadora: 2 . 2 5 4 – 4 . 3 2 × 2 . 7 = ⇨ -9.41

Por tanto, L(x) = 4,32x–9,41

(a) L(–0,7) = 4,32·(–0,7)–9,41 = –12,434

Calculadora: 4 . 3 2 × (-) . 7 – 9 . 4 1 = ⇨ - 12.434

Solución: L(–0,7) = –12,434

(b) L(x)=–2,498 ⇒ 4,32x–9,41= –2,498 ⇒ $x = \dfrac{9{,}41-2{,}498}{4{,}32} = 1{,}6$

Calculadora: (9 . 4 1 – 2 . 4 9 8) ÷ 4 . 3 2 = ⇨ 1.6

Solución: x = 1,6

② Como la función es lineal, su expresión analítica es R(x) = mx+q

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-0{,}59936-7{,}8666}{0{,}32-(-4{,}2)} = -1{,}873$$

Por tanto, la expresión analítica es R(x) = –1,873x+q

L(0,32)=–0,59936 ⇒ –1,873·0,32+q=–0,59936 ⇒ q = –0,59936+1,873·0,32 = 0

Por tanto, R(x) = –1,873x

(a) R(2,3) = –1,873·2,3 = –4,3079

Solución: R(2,3) = –4,3079

(b) R(x)=2,6333 ⇒ –1,873x = 2,6333 ⇒ $x = \dfrac{2{,}6333}{-1{,}873} = -1{,}4$

Solución: x = –1,4

Comentario

En estos ejercicios aparecen números decimales exactos y cortos, lo que permite hacerlos como hemos presentado; pero si los números decimales que aparecen son largos o exceden la capacidad de cálculo de la calculadora, es mejor usar dos memorias de la calculadora para mejorar la precisión y la comodidad en los cálculos.

Enunciado

De la función lineal «L» se sabe que L(–1,2) = –4,88 y L(2,9) = 5,49. Se pide:

(a) Calcula L(1,7); (b) Resuelve la ecuación L(x) = 6,5

Da las soluciones con cuatro cifras significativas.

Resolución

Como la función es lineal, su expresión analítica es L(x) = mx+q

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5{,}49-(-4{,}88)}{2{,}9-(-1{,}2)} = 2{,}53.$$

Calculadora: (5 . 4 9 + 4 . 8 8) ÷ (2 . 9 + 1 . 2) ÷ = ⇨ 2.529268293

Vemos que el resultado obtenido tiene muchas cifras y probablemente sea inexacto, así que anotamos el resultado como «2,53» sabiendo que es solo una aproximación, pero almacenamos el resultado en la memoria «A» de la calculadora:

Calculadora: Ans STO A =

No importa que escribamos «m» solo con tres cifras significativas en el papel, eso es solo indicativo, porque lo importante es que haremos la operación usando toda la precisión de la calculadora.

Escribimos la expresión analítica como L(x) = 2,53x+q

L(2,9) = 5,49 ⇒ 2,53·2,9+q=5,49 ⇒ q = 5,49–2,53·2,9 = –1,84

Calculadora: 5 . 4 9 – RCL A × 2 . 9 = ⇨ - 1.844878049

Vemos que el resultado obtenido tiene muchas cifras y probablemente sea inexacto, así que anotamos el resultado como «–1,84» sabiendo que es solo una aproximación, pero almacenamos el resultado en la memoria «B» de la calculadora:

Calculadora: Ans STO B =

No importa que escribamos «q» solo con tres cifras significativas en el papel, eso es solo indicativo, porque lo importante es que haremos la operación usando toda la precisión de la calculadora.

Escribimos la expresión analítica como L(x) = 2,53x–1,84

(a) L(1,7) = 2,53·1,7–1,84 = 2,455

Calculadora: RCL A × 1 . 7 + RCL B = ⇨ 2.454878049

Observa que hemos usado los valores de las memorias de las calculadoras (no los números escritos) y que el resultado final lo damos con las cifras significativas pedidas en el enunciado.

Solución: L(1,7) = 2,455

(b) L(x) = 6,5 ⇒ 2,53x–1,84 = 6,5 ⇒ $x = \frac{6{,}5-(-1{,}84)}{2{,}53} = 3{,}299$

Calculadora: (6 . 5 – RCL B) ÷ RCL A = ⇨ 3.299324976

Observa que hemos usado los valores de las memorias de las calculadoras (no los números escritos) y que el resultaso final lo damos con las cifras significativas pedidas en el enunciado.

Solución: x = 3,299

Enunciados

Expresa como fracción irreducible todos los números que no sean enteros.

① De la función lineal «L» se sabe que $L\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{5}$ y $L\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{23}{6}$. Se pide:

(a) Calcula $L\left(\frac{4}{3}\right)$; (b) Resuelve la ecuación $L(x)=-\frac{31}{30}$

② De la función lineal «L» se sabe que $L\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{5}{6}$ y $L\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{3}$. Se pide:

(a) Calcula $L\left(-\frac{1}{2}\right)$; (b) Resuelve la ecuación $L(x)=\frac{1}{2}$

③ De la función lineal «L» se sabe que $L\left(\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{4}$ y $L\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{5}{3}$. Se pide:

(a) Calcula $L\left(-\frac{4}{5}\right)$; (b) Resuelve la ecuación $L(x)=\frac{5}{12}$

④ De la función lineal «L» se sabe que $L\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{10}{9}$ y $L\left(-\frac{3}{14}\right)=\frac{5}{6}$. Se pide:

(a) Calcula $L\left(\frac{9}{7}\right)$; (b) Resuelve la ecuación $L(x)=\frac{1}{5}$

Enunciados

Expresa como número decimal todos los números que no sean enteros.

⑤ De la función lineal «L» se sabe que L(2,2) = –1,46 y L(–1,5) = –7,75.
(a) Calcula L(0,9); (b) Resuelve la ecuación L(x) = –8,77

⑥ De la función lineal «L» se sabe que L(–1,1) = 3,03 y L(–2,3) = –2,61.
(a) Calcula L(3,6); (b) Resuelve la ecuación L(x) = 9,845

⑦ De la función lineal «L» se sabe que L(8,2) = –29,52 y L(–1,3) = 4,68.
(a) Calcula L(–3,4); (b) Resuelve la ecuación L(x) = –16,56

Enunciados

Da las soluciones con cuatro cifras significativas.

⑧ De la función lineal «L» se sabe que L(–2,4) = 8,7 y L(2,9) = –1,3. Se pide:
(a) Calcula L(1,7); (b) Resuelve la ecuación L(x) = 0,455

⑨ De la función lineal «L» se sabe que L(8,2) = 4,22 y L(–2,1) = 7,38. Se pide:
(a) Calcula L(–4,5); (b) Resuelve la ecuación L(x) = –2

⑩ De la función lineal «L» se sabe que L(–1,9) = –8,3 y L(–6,2) = –6,8. Se pide:
(a) Calcula L(3,2); (b) Resuelve la ecuación L(x) = –9

Estudio conjunto de dos funciones lineales

- ✱ En muchos problemas hay que comparar dos funciones lineales para obtener un valor importante.
- ✱ Casi siempre nos interesa saber para qué pareja de valores de las variables coinciden las dos funciones.
- ✱ La interpretación gráfica del problema nos lleva a buscar el punto de corte de las dos representaciones gráficas de las funciones.
- ✱ Aunque el problema se pueda resolver sin utilizar funciones, hacerlo con ellas suele dar una visión más amplia del problema.

Enunciado

Dadas las funciones lineales $F(x) = \frac{2}{5}x+1$ y $G(x) = -\frac{1}{5}x+4$, se pide:

a) Resolver la ecuación $F(x) = G(x)$

b) Representar gráficamente las dos funciones para los valores $0 < x < 10$

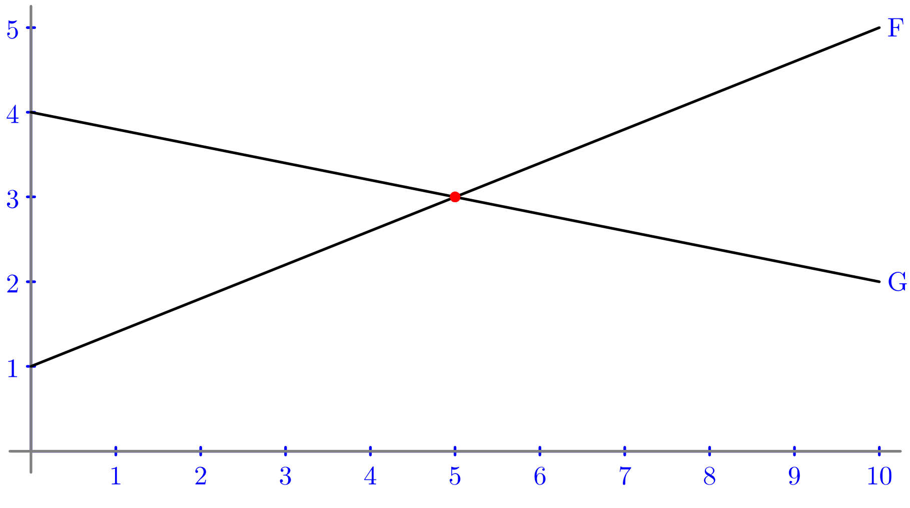
c) Decir las coordenadas del punto de corte de las dos representaciones gráficas

Resolución

a) $F(x) = G(x) \Rightarrow \frac{2}{5}x+1 = -\frac{1}{5}x+4 \Rightarrow 2x+5 = -x+20 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5.$

Solución: $x = 5$

b) Representación:



c) Sabemos por el apartado (a) que la abscisa del punto es $x = 5$.
Para calcular la ordenada podemos usar F(5) o bien G(5), ambos coinciden:

$$y = A(5) = \frac{2}{5}\cdot 5+1 = 2+1 = 3$$

$$y = B(5) = -\frac{1}{5}\cdot 5+4 = -1+4 = 3$$

La ordenada es $y = 3$

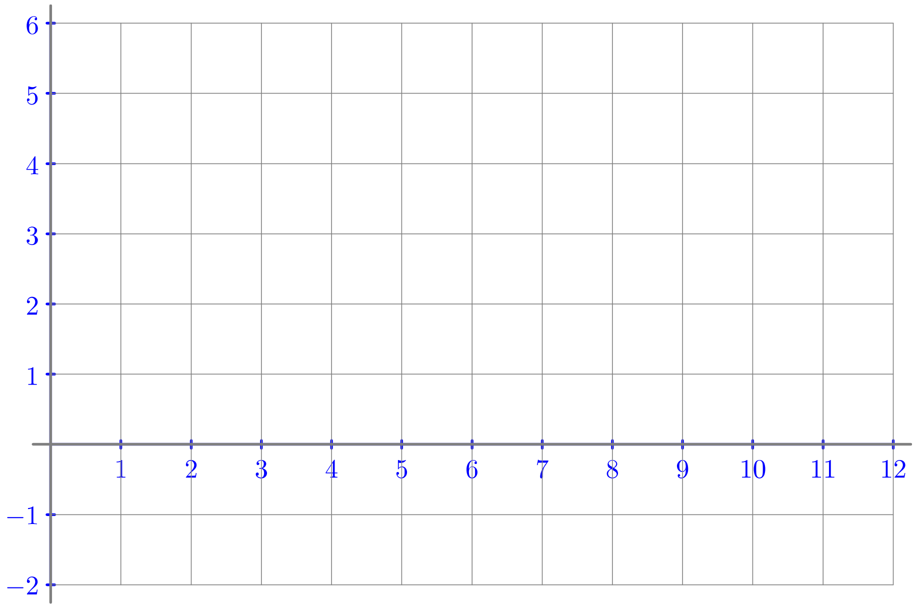
Solución: (5,3)

Enunciados

① Dadas las funciones lineales $F(x)=\frac{2}{3}x-2$ y $G(x)=-\frac{1}{6}x+3$, se pide:

a) Resolver la ecuación $F(x)=G(x)$

b) Representar gráficamente las dos funciones para los valores $0<x<12$

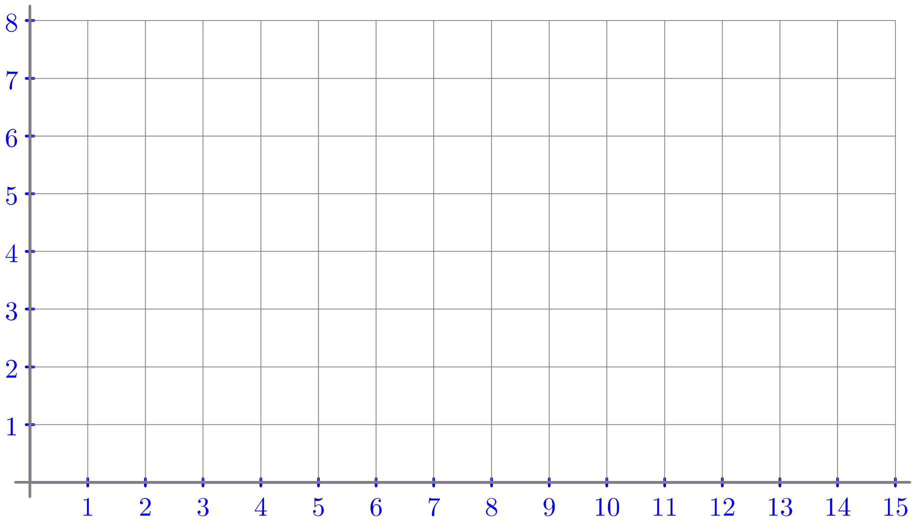


c) Las coordenadas del punto de corte de las dos representaciones gráficas

② Dadas las funciones lineales $F(x)=\frac{4}{7}x$ y $G(x)=-\frac{3}{7}x+8$, se pide:

a) Resolver la ecuación $F(x)=G(x)$

b) Representar gráficamente las dos funciones para los valores $0<x<15$



c) Las coordenadas del punto de corte de las dos representaciones gráficas

Enunciado

En una sala de juego de escape (en inglés se conocen como *escape room*) tienen una manera de cobrar que te anima a salir cuanto antes resolviendo los acertijos a toda velocidad. Cada persona que entra a la sala tiene que pagar una cantidad fija. Cuando consigue salir, le cobran otra cantidad por cada minuto que ha pasado dentro. Sabemos que Aurora ha estado 8 minutos y su factura ha sido de 9 euros. Bernardo ha estado 36 minutos y ha pagado 30 euros. Queremos averiguar dos cosas:

(a) Cuánto pagará Carmen, que ha estado 24 minutos.

(b) Cuánto tiempo ha estado Daniel, que ha pagado 13,5 euros.

Resolución

De la lectura del enunciado se deduce que hay una función que relaciona el tiempo que se está en la sala con el coste total de la diversión. Si llamamos «q» al precio de la entrada y «m» al coste de cada minuto dentro de la sala, tenemos:

Variable	Magnitud	Nombre	Unidad
Independiente	Tiempo dentro de la sala	x	minuto
Dependiente	Coste total de la diversión	y	euro

Expresión analítica: $y=mx+q$, luego la función es lineal.

Llamamos F a la función, para escribir más fácilmente sus valores.

Aurora está 8 minutos y paga 9 euros, luego $F(8)=9$.

Bernardo está 36 minutos y paga 30 euros, luego $F(36)=30$.

Averiguamos la expresión analítica de F:

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{30-9}{36-8}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$. Por tanto, la expresión analítica es $F(x)=\frac{3}{4}x+q$

$F(8)=9 \Rightarrow \frac{3}{4}\cdot 8+q=9 \Rightarrow 6+q=9 \Rightarrow q=3$, así que $F(x)=\frac{3}{4}x+3$

(a) Para saber cuánto ha pagado Carmen tenemos que calcular $F(24)$:

$$F(24)=\frac{3}{4}\cdot 24+3=18+3=21$$

Solución: Carmen ha pagado 21 euros.

(b) Si Daniel ha pagado 13,5 euros, sabemos que $F(x)=13{,}5$. Para averiguar el valor de «x» hay que resolver esa ecuación:

$$F(x)=13{,}5 \Rightarrow \frac{3}{4}\cdot x+3=13{,}5 \Rightarrow 3x+12=54 \Rightarrow 3x=42 \Rightarrow x=14$$

Solución: Daniel ha estado 14 minutos en la sala.

Averiguaciones adicionales

Además de contestar a las dos cosas que nos preguntaban, hemos calculado también «m» y «q» en la expresión analítica de la función, de modo que también sabemos estos dos valores:

- ✱ El precio de la entrada a la sala es 3 euros.
- ✱ El coste por cada minuto de permanencia en la sala es 0,75 euros.

Enunciados

① Una cooperativa vende aceite a granel, es decir, puedes comprar la cantidad que quieras. Te cobran un precio fijo por el envase y luego el aceite, que tiene un precio determinado por litro. Arbok compra 20 litros y paga 82 euros; Bulbasaur compra 4 litros y paga 18 euros. Se pide:

a) Cuánto pagará Crotilo, que ha comprado 15 litros.

b) Cuánto aceite ha comprado Dorina, que ha pagado 70 euros.

c) Cuánto cuesta cada envase.

d) Cuánto cuesta cada litro de aceite.

② La temperatura se puede medir con varias escalas distintas: en la escala Celsius (o centígrada) el agua se congela a 0 °C y ebulle a 100 °C. En la escala Fahrenheit el agua se congela a 32 °F y ebulle a 212 °F. Se sabe que la función que relaciona las dos escalas es una función lineal. Se pide:

a) Qué temperatura Fahrenheit corresponde a 20 °C.

b) Qué temperatura Fahrenheit corresponde a −15 °C.

c) Qué temperatura Celsius corresponde a 122 °F.

d) Qué temperatura se mide con el mismo número en las dos escalas.

Nota: Ander Celsius (1701-1744) fue un científico sueco y Gabriel Fahrenheit (1686-1736) fue un científico neerlandés.

③ Un termómetro defectuoso marca 1 °C al fundirse el hielo y 106 °C para el vapor del agua hirviendo. Cuando marca 17 °C ¿Cuál es la temperatura real? Da el resultado redondeado a las décimas.

④ En una atracción de feria te cobran una entrada y luego pagas un precio por cada vuelta que quieras dar en ella. Amaranta da cuatro vueltas y paga once euros. Bonifacio da once vueltas y paga 25 euros. Se pide:

a) Cuánto pagará Carla, que ha dado siete vueltas.

b) Cuántas vueltas ha dado Domiciano, que ha pagado 33 euros.

c) Cuánto cuesta la entrada.

d) Cuánto cuesta cada vuelta.

⑤ Una empresa de compra-venta de inmuebles cobra una cantidad fija por cada vivienda vendida más un tanto por ciento del precio final de la vivienda. Por vender un inmueble de 350 000 euros ha cobrado 20 500 euros; por otro de 470 000 euros ha cobrado 24 100 euros. Se pide:

a) Cuánto cobrará la empresa por vender una vivienda de 385 000 euros.

b) El precio de una vivienda por cuya la empresa cobró 25 660 euros.

c) Cuánto cobra la empresa de cantidad fija por cada operación.

d) Qué porcentaje aplica la empresa al precio de la vivienda para completar lo que cobra por cada venta.

Enunciado

En una finca se dispone de dos depósitos ortoédricos iguales (A y B) para almacenar agua, con unas dimensiones de la base de 7 metros y 4 metros y una altura de 3 metros. El depósito A se encuentra más alto que el depósito B, de modo que el agua puede fluir desde A hasta B por una cañería que admite un flujo de agua de 652 litros cada minuto. En un momento dado el depósito A está lleno y en el depósito B hay 10 metros cúbicos de agua. Si se abre la cañería, averigua cuánto tiempo ha de pasar para que haya la misma cantidad de agua en los dos depósitos. Da el resultado en minutos y segundos, redondeando al segundo.

Resolución

Volumen de cada depósito: $7 \cdot 4 \cdot 3 = 84\,m^3$

Flujo del agua en la cañería: $652\,l/min = 0{,}652\,m^3/min$

La función que relaciona cuánto tiempo pasa con la cantidad de agua que hay en el depósito A:

Variable	Magnitud	Nombre	Unidad	Nombre función	Expresión analítica
Independiente	Tiempo	x	minuto	F	$F(x)=-0{,}652x+84$
Dependiente	Volumen		m^3		

La función que relaciona cuánto tiempo pasa con la cantidad de agua que hay en el depósito B:

Variable	Magnitud	Nombre	Unidad	Nombre función	Expresión analítica
Independiente	Tiempo	x	minuto	G	$G(x)=0{,}652x+10$
Dependiente	Volumen		m^3		

Cuando hay la misma cantidad de agua en los dos depósitos se verifica $F(x) = G(x)$.

Resolvemos la ecuación:

$$F(x) = G(x) \Rightarrow -0{,}652x+84 = 0{,}652x+10 \Rightarrow -2\cdot 0{,}652 = 10-84 \Rightarrow -2\cdot 0{,}652 = -74 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot 0{,}652 = 74 \Rightarrow x = \frac{74}{2\cdot 0{,}652} = 56{,}748\ldots$$

Calculadora: 7 4 ÷ (2 × . 6 5 2) = ⇰ 56.74846626

Hemos obtenido el resultado en minutos y hay que convertirlo en minutos y segundos. Anotamos los 56 minutos y para calcular los segundos usamos la calculadora:

Calculadora: (Ans − 5 6) × 6 0 = ⇰ 44.90797546

Obtenemos 45 segundos.

Solución: 56 min 45 s

Comentario

También podríamos haber dividido el resultado entre 60 para pasarlo a horas y utilizar la tecla de conversión de horas a horas, minutos y segundos.

Calculadora: 7 4 ÷ (2 × . 6 5 2) = ⇰ 56.74846626

Ans ÷ 6 0 = °’” ⇰ 0°56°44.91 . Redondeando: 56 min 45 s

Enunciados

① Una persona lleva en su teléfono móvil dos tarjetas SIM para poder realizar llamadas con dos compañías de telecomunicaciones distintas. La compañía asociada a la tarjeta SIM1 le cobra treinta céntimos de euro de establecimiento de llamada más dos céntimos cada minuto de duración. La compañía asociada a la tarjeta SIM2 le cobra cincuenta céntimos de euro de establecimiento de llamada más un céntimo y medio cada minuto de duración. Averigua:

a) Qué tarjeta le resulta más barata usar para una llamada de un minuto.

b) Para qué duración de llamada es indiferente qué tarjeta use.

c) Qué tarjeta le resulta más barata usar para una llamada de una hora.

② Una empresa necesita para su funcionamiento una máquina que cuesta 22 800 euros. La máquina requiere un mantenimiento mensual que cuesta 200 euros por cada mes de antigüedad de la máquina; es decir: el primer mes cuesta 200 euros, el segundo 400, el tercero 600 y así sucesivamente. La empresa sabe que la máquina se puede revender en cualquier momento, pero pierde 1000 euros al mes de valoración respecto al coste inicial. Averigua en qué momento el valor de la máquina es igual que lo que cuesta su mantenimiento.

③ Una persona viaja mucho con su coche y necesita comprar uno nuevo. El modelo A tiene un coste de 45 000 euros y su mantenimiento le supone 13 céntimos de euro por kilómetro. El modelo B tiene un coste de 28 000 euros y su mantenimiento le supone 21 céntimos de euro por kilómetro. Averigua:

a) Qué coche le resulta más ecónomico si plantea usarlo 150 000 kilómetros.

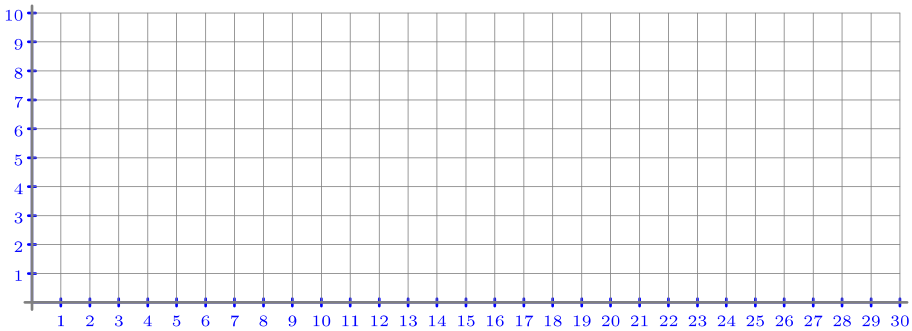
b) Para qué uso del coche en kilómetros le resulta indiferente cuál comprar.

c) Qué coche le resulta más ecónomico si plantea usarlo 300 000 kilómetros.

④ En una finca se dispone de dos depósitos ortoédricos iguales (A y B) para almacenar agua. El depósito A se alimenta por un grifo con un flujo de agua de 823 litros cada minuto. El depósito B se alimenta por un grifo con un flujo de agua de 529 litros cada minuto. En un momento dado el depósito A tiene 13 metros cúbicos, el depósito B tiene 25 metros cúbicos de agua y se abren los dos grifos a la vez. Averigua cuánto tiempo ha de pasar para que haya la misma cantidad de agua en los dos depósitos. Da el resultado en minutos y segundos, redondeando al segundo.

⑤ Dadas las funciones $A(x)=\frac{1}{3}x$, $B(x)=\frac{2}{15}x+\frac{7}{2}$ y $C(x)=-\frac{2}{15}x+8$, se pide:

a) Representar gráficamente las tres funciones para los valores $0<x<30$



b) Determinar los valores de «x» que verifican $A(x)=B(x)=C(x)$

Definición de función cuadrática

Es aquella que tiene como expresión analítica un polinomio de segundo grado.

Ejemplos

Las siguientes funciones son funciones cuadráticas:

① $y=x^2$ ② $y=3x^2-2x$ ③ $y=-x^2+7$ ④ $y=\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{2}x+4$

Las siguientes funciones no son funciones cuadráticas:

⑤ $y=\frac{1}{x^2}$ ⑥ $y=x^3+x^2$ ⑦ $y=4x+9$ ⑧ $y=x^2+\frac{1}{x}$

Expresión analítica general de una función cuadrática

La expresión analítica de una función cuadrática depende de tres números, los tres coeficientes de los monomios.

Por tanto, todas las funciones cuadráticas se pueden escribir como

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

donde «a» es un número distinto de 0 y «b» y «c» son números que sí pueden ser cero.

Nota: si «a» fuera cero, la función sería lineal (si $b\neq 0$) o constante (si $b=0$).

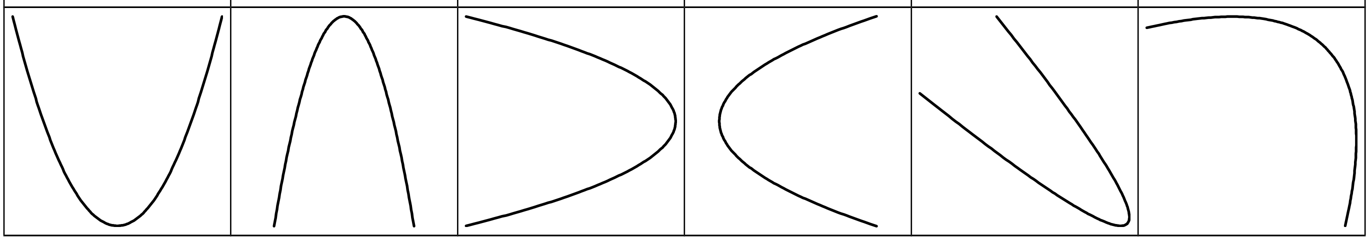
La parábola

* La parábola es una curva de longitud infinita que se puede dibujar en un plano.
* Aparece a menudo en fenómenos naturales y en aparatos tecnológicos.
  - Cuando se lanza una piedra al aire, describe una trayectoria parabólica.
  - Algunos cometas tienen trayectorias parabólicas.
  - Las antenas parabólicas se crean a partir de parábolas.
  - Los faros de los coches se crean a partir de parábolas.

Ejemplos

Vemos varias parábolas representadas a continuación. Al ser de longitud infinita, solo podemos representar una parte; hemos elegido la parte que suele ser más interesante.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6



Representación gráfica de una función cuadrática

* La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.
* No todas las parábolas son la representación gráfica de una función cuadrática. En los ejemplos de arriba, solo el (1) y el (2) corresponden a funciones cuadráticas.

Propiedades de la parábola y de la función cuadrática

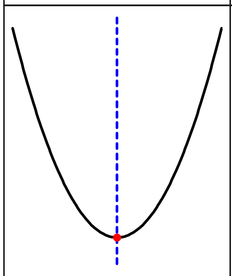
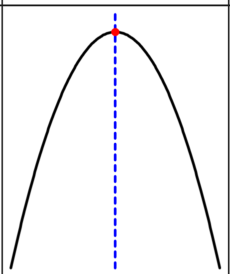
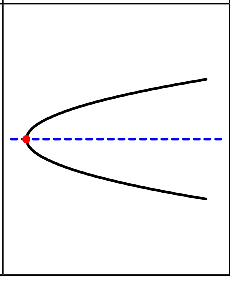
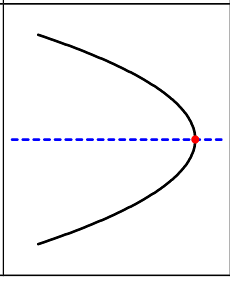
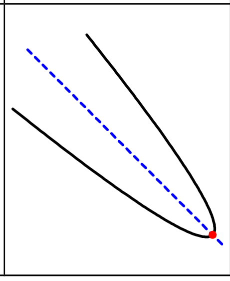
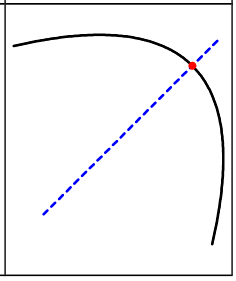
- ✱ La parábola tiene muchas propiedades geométricas muy útiles.
- ✱ La función cuadrática tiene varias propiedades analíticas muy útiles.
- ✱ Algunas de las propiedades de las parábolas y de las funciones cuadráticas están relacionadas entre sí.

Eje y vértice de la parábola

- ✱ Llamamos **eje** de una parábola a la única recta que tiene la propiedad de que si dobláramos el plano según la recta, una mitad de la parábola coincidiría exactamente con la otra mitad. Se dice que el eje de la parábola es un **eje de simetría**.
- ✱ El **vértice** de una parábola es el punto en el que se cortan la parábola y su eje.

Ejemplos

En los siguientes ejemplos hemos señalado con una línea negra la parábola, con una línea azul punteada el eje y en rojo el vértice.

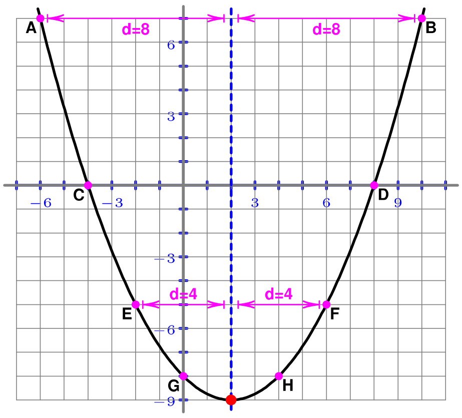
Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6
					

Propiedades de la función cuadrática

Consideramos la función cuadrática $y = ax^2+bx+c$.

- ✱ Su representación gráfica es una parábola con el eje vertical.
- ✱ Si $a > 0$, el vértice de la parábola es un mínimo absoluto y un mínimo relativo de la función, como en el ejemplo (1) de más arriba.
- ✱ Si $a < 0$, el vértice de la parábola es un máximo absoluto y un máximo relativo de la función, como en el ejemplo (2) de más arriba.

Ejemplo 7



Estudiamos algunos valores de la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{4}x^2-x-8$, representada a la derecha.

- ✱ Los puntos A y B son simétricos respecto al eje de la parábola y por eso $f(-6)=f(10)$ (ambos valen 7).
- ✱ Los puntos C y D son simétricos respecto al eje de la parábola y por eso $f(-4)=f(8)$ (ambos valen 0).
- ✱ Los puntos E y F son simétricos respecto al eje de la parábola y por eso $f(-2)=f(6)$ (ambos valen −5).
- ✱ Los puntos G y H son simétricos respecto al eje de la parábola y por eso $f(0)=f(4)$ (ambos valen −8).
- ✱ El vértice de la parábola es el punto (2,−9), que es donde la función tiene el mínimo absoluto; por eso el menor valor que alcanza la función es $y=-9$, para $x=2$.

Métodos para obtener la representación gráfica de una función

Los programas de ordenador que obtienen la representación gráfica de una función lo hacen por fuerza bruta: calculan muchos puntos y los dibujan individualmente. Sin embargo, cuando los humanos obtenemos la representación gráfica de una función, preferimos estudiarla, buscando sus puntos más importantes.

En la práctica, usamos simultáneamente la ayuda de los programas de ordenador y el estudio de la función.

El método que estudiamos en este nivel 3 para representar una función cuadrática es muy importante porque es el preludio del método general que usaremos en los siguientes niveles para representar funciones más complicadas.

Método para obtener la representación gráfica de una función cuadrática

Queremos representar gráficamente la función cuadrática $y = ax^2+bx+c$.

Estos son los pasos que daremos; los tres primeros se pueden dar en cualquier orden, es cuestión de preferencia personal, lo importante es que todos los datos obtenidos encajen perfectamente al hacer la gráfica.

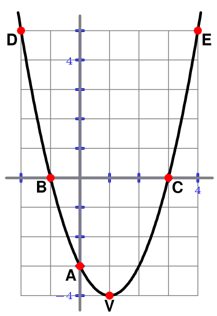
- **Corte de la gráfica con el eje de ordenadas**. Siempre hay uno; tiene «x=0» y hay que calcular la «y» sustituyendo en la expresión analítica.
- **Corte de la gráfica con el eje de abscisas**. Puede haber dos, uno o ninguno; tienen «y=0» y hay que calcular la «x» resolviendo la ecuación «$ax^2+bx+c=0$».
- **Cálculo y estudio del vértice**. Si llamamos V al vértice y escribimos sus coordenadas como $V = (v_x,v_y)$, la abscisa del vértice se puede calcular como

  $$v_x = \frac{-b}{2a}$$

  La abscisa se calcula con esta fórmula, la ordenada se calcula sustituyendo el valor de «v_x» en la expresión analítica y el signo de «a» nos indica si el vértice es un máximo o un mínimo.
- **Obtención de puntos por simetría**. Una vez calculado el vértice, ya se conoce el eje de la parábola. Esto permite averiguar puntos de la gráfica simplemente calculando el simétrico de cualquier otro que tengamos calculado.
- **Obtención de más puntos**. Siempre que nos parezca conveniente, podemos averiguar más puntos dándole valores a la «x» y calculando la «y» mediante la expresión analítica.
- Cuando nos piden hacer la representación solo para un **rango de valores** de la variable independiente, es muy útil usar los extremos del rango para averiguar los dos puntos en los que comenzar y acabar la representación, aunque sepamos que esta realmente es infinita.

Ejemplo

Antes de mostrar paso a paso cómo obtener la representación gráfica de una función cuadrática, vemos un ejemplo acabado. La función que representamos tiene expresión analítica $y = x^2-2x-3$.



Corte con el eje de ordenadas: $A = (0,-3)$.

Corte con el eje de abscisas: $B = (-1,0)$ y $C = (3,0)$.

Vértice: $V = (1,-4)$, que es un mínimo.

Puntos auxiliares: $D = (-2,5)$ y $E = (4,5)$.

Enunciado

Estudia y representa gráficamente la función $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$

Consejo

Es muy conveniente ir dibujando en una hoja en sucio la información obtenida para ir viendo en todo momento si lo que calculamos va teniendo sentido globalmente, si todo «encaja». Eso permite detectar antes los posibles errores.

Resolución

Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 2$. Punto (0,2).

Posibles puntos de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 8}}{2\cdot(-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2} =$$

$$= \frac{-2 \pm 6}{-2} = \begin{cases} \frac{-2+6}{-2} \\ \frac{-2-6}{-2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{-2} \\ \frac{-8}{-2} \end{cases} = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$. Puntos (–2,0) y (4,0).

Llamamos al vértice $V = (x_v, y_v)$.

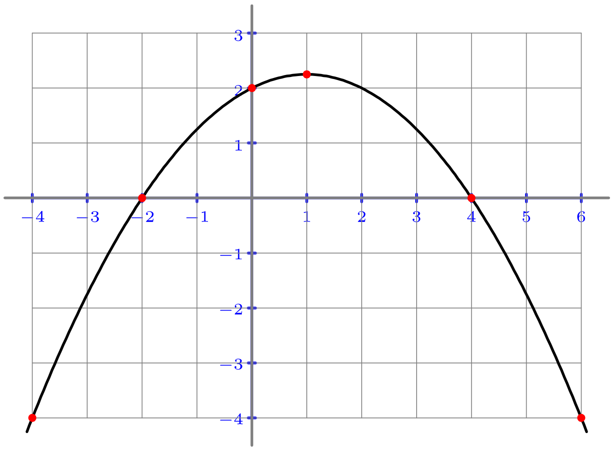
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{1}{2}}{2\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow y_v = -\frac{1}{4}\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot 1 + 2 = 2{,}25.\ V = (1;2{,}25)$$

El coeficiente de «x^2» es negativo, luego el vértice es un máximo.

Con los puntos obtenidos ya podríamos hacer la representación, pero quedará mejor si obtenemos algún punto más, que buscamos con coordenadas enteras.

$x = 6 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}\cdot 6^2 + \frac{1}{2}\cdot 6 + 2 = -9+3+2 = -4$. Punto (6,–4).

El simétrico del punto (6,–4) respecto al eje está cinco unidades más a la izquierda del eje (porque 6–1=5) y tiene la misma ordenada, luego es el punto (–4,–4).



Observación

Cuando los coeficientes son enteros, la gráfica puede ocupar mucho verticalmente.

Demostraciones en matemáticas

Las demostraciones ocupan un lugar central en matemáticas, pero se consideran más difíciles que la mera aplicación de las propiedades. Es conveniente que poco a poco te vayas acostumbrando a ver demostraciones; en el futuro, quizá tengas que inventarlas tú.

Propiedad 1

Si la representación gráfica de una función cuadrática tiene dos puntos de corte con el eje de abscisas, la abscisa del vértice es la media aritmética de las abscisas de los puntos de corte con el eje de abscisas.

Ejemplo

Si los puntos de corte son (–6,0) y (14,0), la abscisa del vértice será $\frac{-6+14}{2}=4$.

Demostración

La expresión analítica de la función cuadrática es $y=ax^2+bx+c$.
Averiguamos las abscisas de los puntos de corte:

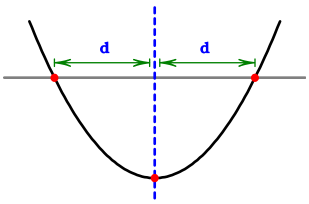
$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\begin{cases}\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\[2ex]\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{cases}$$

Calculamos la media aritmética:

$$\frac{\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2}=\frac{\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2}=\frac{-2b}{4a}=\frac{-b}{2a}$$

y, efectivamente, obtenemos la abscisa del vértice.

Observación



Otra manera de entender esta propiedad consiste en observar que los dos puntos de corte con el eje de absisas son simétricos respecto al eje de la parábola.

Propiedad 2

Si la representación gráfica de una función cuadrática tiene un solo punto de corte con el eje de abscisas, el punto de corte es el vértice.

Ejemplo

Si el único punto de corte es (7,0), el vértice es (7,0).

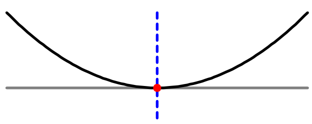
Demostración

La expresión analítica de la función cuadrática es $y=ax^2+bx+c$.

Si la representación gráfica tiene un solo punto de corte con eje de abscisas es porque la ecuación $ax^2+bx+c=0$ solo tiene una solución, que calculamos:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b}{2a}$, que es, efectivamente, la abscisa del vértice.

Observación



Otra manera de entender esta propiedad consiste en observar que el vértice es el simétrico de sí mismo respecto al eje de la parábola y relacionarla con la propiedad anterior.

Enunciado

Estudia y representa gráficamente la función $y = x^2+4x+4$

Consejo

Es muy conveniente ir dibujando en una hoja en sucio la información obtenida para ir viendo en todo momento si lo que calculamos va teniendo sentido globalmente, si todo «encaja». Eso permite detectar antes los posibles errores.

Resolución

Punto de corte con el eje de ordenadas: $x = 0 \Rightarrow y = 4$. Punto (0,4).

Posibles puntos de corte con el eje de abscisas: $y = 0 \Rightarrow x^2+4x+4 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{0}}{2} = \frac{-4\pm 0}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Punto (–2,0).

Llamamos al V al vértice. Como la gráfica solo corta en un punto al eje de abscisas, el punto de corte es el vértice: V = (–2,0). (También podríamos haberlo calculado usando la fórmula de la abscisa del vértice, pero así es mucho más rápido.)

El coeficiente de «x^2» es positivo, luego el vértice es un mínimo.

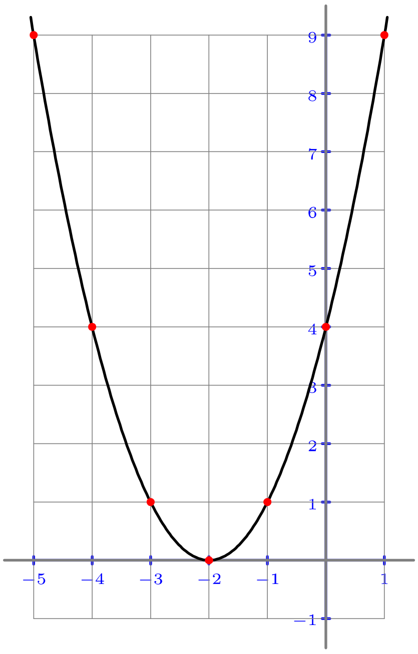
Este ejemplo muestra uno de los casos más desfavorables: solo hemos obtenido dos puntos hasta el momento. Por tanto, es recomendable obtener algún punto más.

El simétrico del punto (0,4) respecto al eje está dos unidades más a la izquierda del eje y tiene la misma ordenada, luego es el punto (–4,4).

Con los tres puntos obtenidos ya podríamos hacer la representación, pero quedará mejor si obtenemos algún punto más, que buscamos con coordenadas enteras. Son recomendables los valores $x = -1$, por estar entre el vértice y el eje de ordenadas, y $x = 1$, por estar un poco más lejos que los que ya tenemos.

$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2+4\cdot(-1)+4 = 1-4+4 = 1$. Punto (–1,1). Su simétrico: (–3,1).

$x = 1 \Rightarrow y = 1^2+4\cdot 1+4 = 9$. Punto (1,9). Su simétrico: (–5,9).



Enunciados

Dadas las siguientes funciones cuadráticas, se pide para cada una:

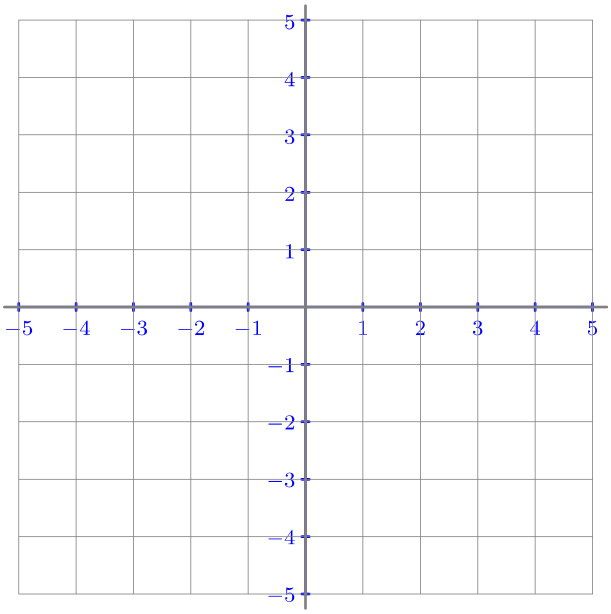
a) Averiguar las coordenadas del punto de corte de la representación gráfica con el eje de ordenadas.

b) Averiguar las coordenadas de los puntos de corte de la representación gráfica con el eje de abscisas.

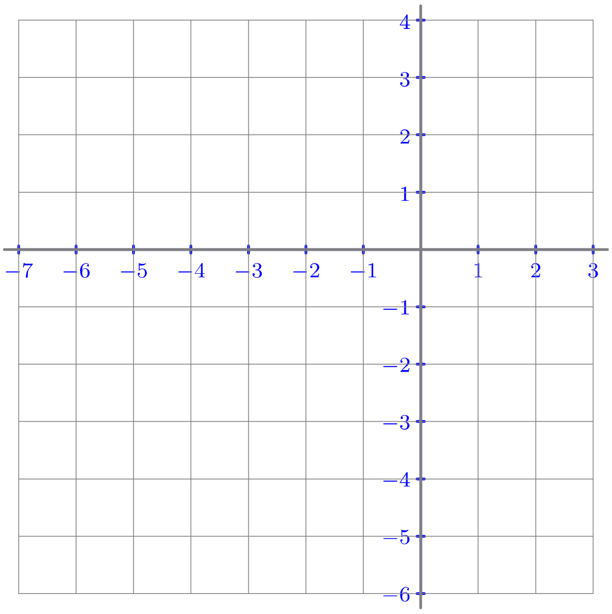
c) Averiguar las coordenadas del vértice, indicando si es un máximo o un mínimo.

d) Representar gráficamente de modo aproximado la función, calculando los puntos auxiliares que consideres necesario y sin salirte del espacio asignado.

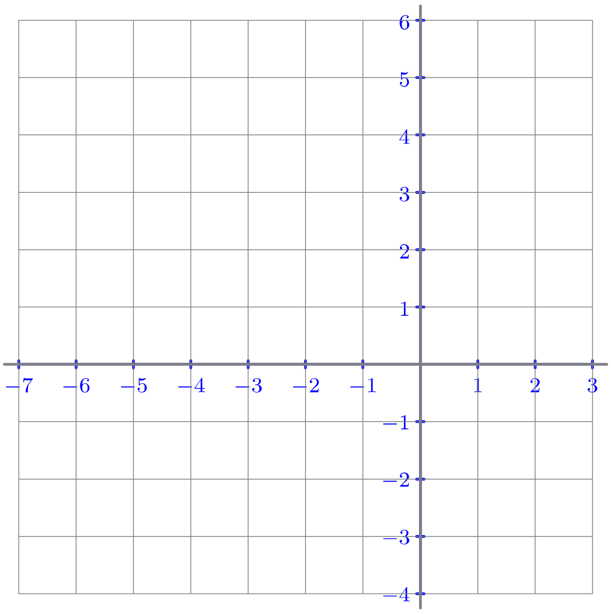
① $y = x^2+2x-3$



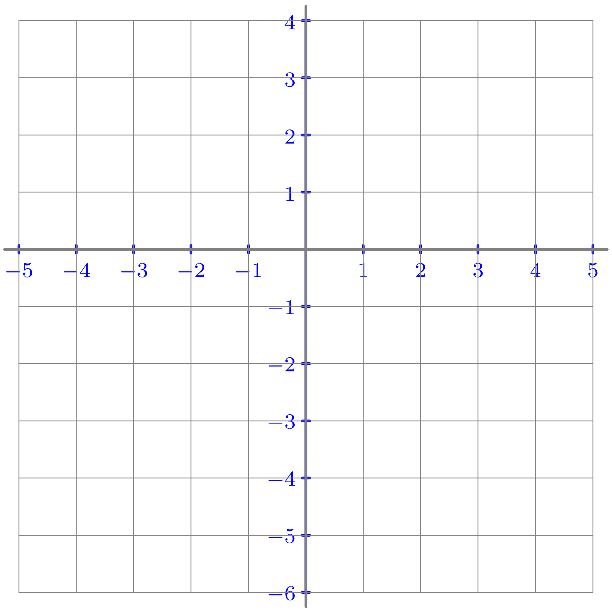
② $y = -x^2-6x-5$



③ $y = x^2+4x$



④ $y = -x^2+4$



Enunciados

Dadas las siguientes funciones cuadráticas, se pide para cada una:

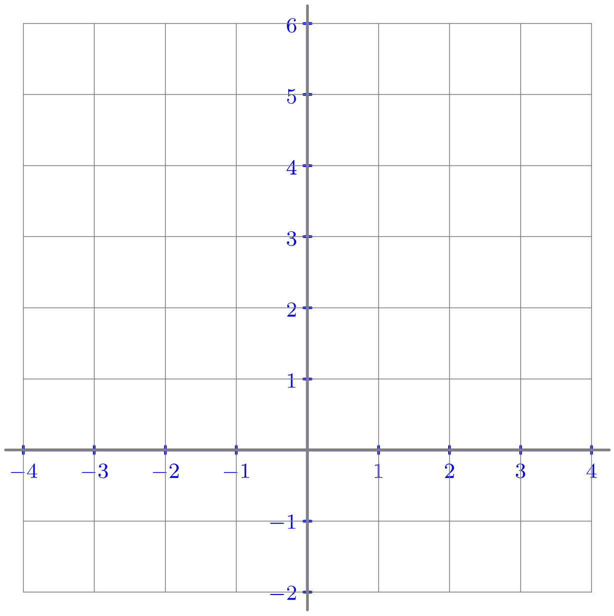
a) Averiguar las coordenadas del punto de corte de la representación gráfica con el eje de ordenadas.

b) Averiguar las coordenadas de los puntos de corte de la representación gráfica con el eje de abscisas.

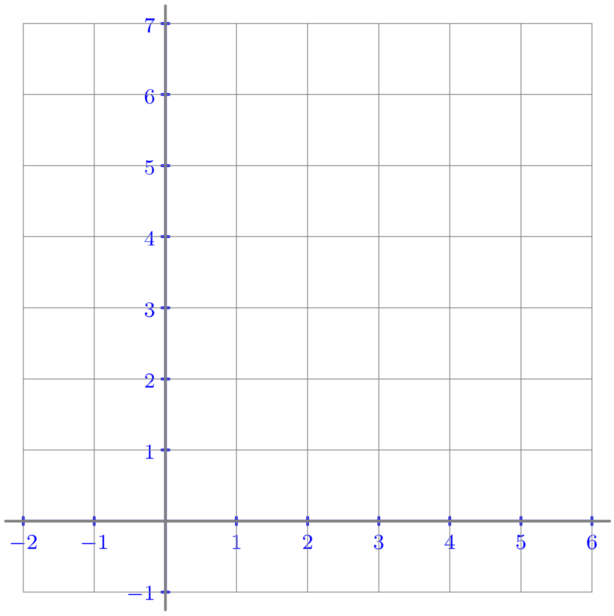
c) Averiguar las coordenadas del vértice, indicando si es un máximo o un mínimo.

d) Representar gráficamente de modo aproximado la función, calculando los puntos auxiliares que consideres necesario y sin salirte del espacio asignado.

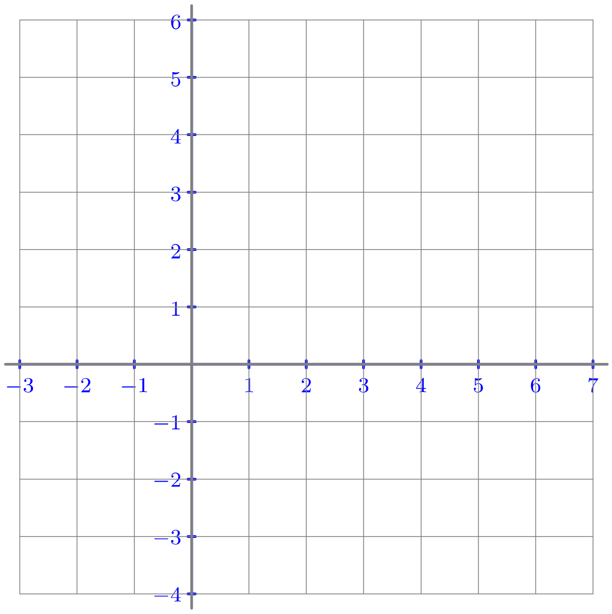
① $y = \frac{1}{4}x^2$



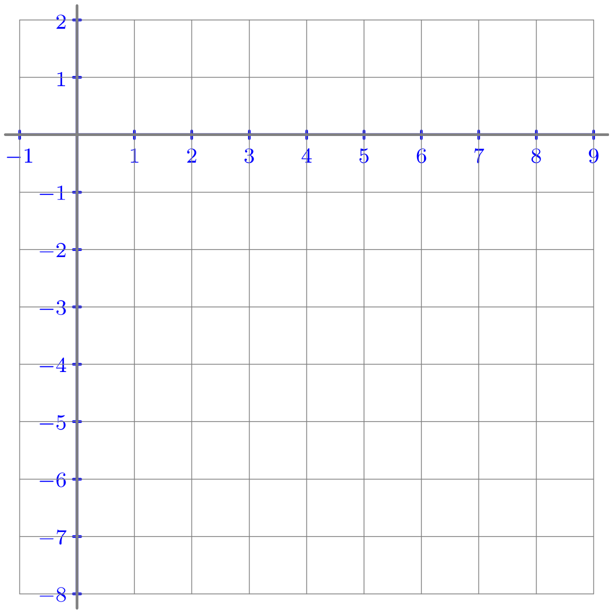
② $y = x^2 - 4x + 5$



③ $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$



④ $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4$



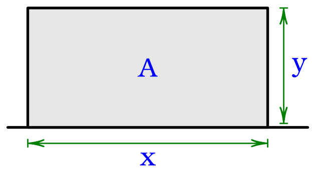
Enunciado

Sobre una recta se sitúa apoyado en uno de sus lados un rectángulo de ocho metros de perímetro. Se pide:

a) Describir la función que relaciona la longitud del lado apoyado en la recta con el área del rectángulo.

b) Averiguar para qué valor del lado apoyado en la recta se obtiene la mayor área de todos los posibles rectángulos.

Resolución



Llamamos «x» a la longitud en metros del lado apoyado en la recta e «y» a la longitud del otro lado.

Como el perímetro del rectángulo es ocho metros,

$2x+2y = 8 \Rightarrow x+y = 4 \Rightarrow y = 4-x$

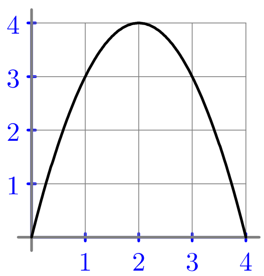
Llamamos «A» al área del rectángulo: $A = x \cdot y = x(4-x) = 4x-x^2 = -x^2+4x$

a) La descripción de la función:

Variable	**Magnitud**	**Nombre**	**Unidad**
Independiente	Longitud del lado apoyado en la recta	x	metro
Dependiente	Área del rectángulo	A	metro cuadrado

Expresión analítica: $A = -x^2+4x$. Dominio: $0 < x < 4$.

b) Representamos gráficamente la función para los valores de la variable independiente en su dominio:



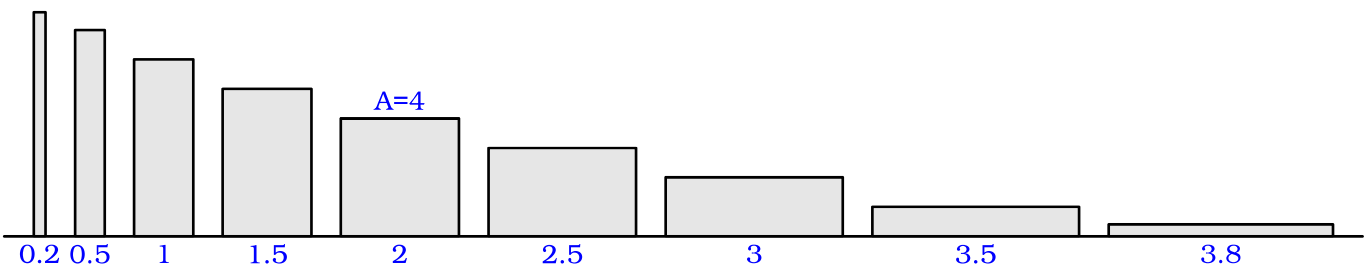
Vemos que el mayor valor del área se alcanza en el vértice de la parábola, que es un máximo. Por tanto, hay que calcular la abscisa del vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

Solución: 2 metros.

Comentario

Para entender mejor el problema, vemos algunos rectángulos según cambia el valor de la variable independiente y nos fijamos en el central, que es un cuadrado:

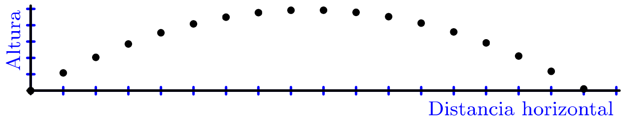


Enunciados

① Averigua la expresión analítica de la función cuadrática «f» que verifica estas tres igualdades: $f(0) = 0$, $f(1) = -2$ y $f(-1) = 8$.

② Averigua el menor valor que puede tomar la expresión «$(2x-5)(4x-7)$» cuando se dan a la «x» todos los valores posibles. Da el resultado como número decimal con la máxima precisión.

③ Cuando un jugador de béisbol batea, es decir, golpea con el bate la bola que le lanza el *pitcher*, la bola dibuja una trayectoria parabólica. Aunque la posición de la bola depende del tiempo como variable independiente según se estudia en física, es posible transformar la función de modo que la variable independiente («x») sea la distancia en horizontal entre la bola y el bateador y la variable dependiente («y») sea la altura de la bola.



Los buenos bateadores normalmente intentan lanzar la pelota fuera del estadio, lo que se conoce como un *home run*. En esos bateos, la velocidad de la bola cuando sale del bate puede ser de unos 160 km/h y el ángulo con el que sale la bola de alrededor de 30°. Con esos datos, y simplificando un poco la descripción física, la expresión analítica de la función es

$y = -0{,}003378x^2 + 0{,}5774x$, midiendo «x» e «y» en metros.

Se pide, dando la respuesta en metros redondeando a la décima:

a) A qué distancia del bateador caería la bola en el suelo si no hubiera nadie para recogerla antes de caer.

b) La altura máxima que alcanza la bola en su trayectoria.

④ Una empresa que alquila en la playa hamacas ha calculado que en temporada alta puede alquilar cada hamaca durante un total de 12 horas al día. Antes de fijar el precio de alquiler por hora analiza experiencias anteriores y sabe que (i) si el alquiler por hora fuera 0 €, la hamaca estaría todas las horas del día alquilada (ii) si el alquiler por hora fuera 96 céntimos o más, a los clientes les parecería demasiado caro y no alquilaría ninguna hamaca (iii) para precios entre 0 euros y 96 céntimos por hora, por cada 8 céntimos de aumento en el precio la hamaca se alquilaría una hora menos. La empresa modelizó el tiempo de alquiler de cada hamaca en la temporada según el siguiente modelo lineal:

$T(p) = 12 - \frac{p}{8}$, con $0 \le p \le 96$, donde «p» es el precio del alquiler por hora en céntimos de euro y $T(p)$ el tiempo en horas en que la hamaca estaría alquilada al día si se fija el precio en «p» céntimos. Se pide:

a) Muestra si la función con la que modelizó la empresa el tiempo que la hamaca está alquilada en función del precio cumple las tres condiciones.

b) El beneficio que se obtiene cada día vendrá dado por: $B(p) = p \cdot T(p)$. Determina el precio al que debería fijar el alquiler por hora para obtener el mayor beneficio y calcula dicho beneficio.

Teorema de Pitágoras con raíces inexactas

En los niveles 1 y 2 utilizaste el teorema de Pitágoras para resolver muchos problemas; pero tiene la dificultad de que las raíces cuadradas que aparecen suelen ser inexactas. En este nivel 3 usaremos la calculadora para resolver problemas más realistas, pero siempre buscando aprovechar la precisión de la calculadora para dar los resultados del modo más correcto posible.

Enunciados

Da todos los resultados con cuatro cifras significativas.

① Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7 metros y 9 metros. Calcula la longitud de la hipotenusa.

② La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 m y uno de los catetos mide 13 m. Calcula: a) La longitud del otro cateto. b) El perímetro del triángulo.

③ La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 78 y uno de los catetos mide 27. Calcula: a) El perímetro del triángulo. b) El área del triángulo.

Resoluciones

① Llamamos a a la longitud de la hipotenusa.

Por el teorema de Pitágoras, $a^2 = 7^2+9^2 = 49+81 = 130 \Rightarrow a = \sqrt{130} = 11{,}40$

Calculadora: `√` `1` `3` `0` `=` ⇨ 11.40175425

Solución: 11,40 metros.

Nota. Se podía haber calculado directamente: `√` `(` `7` `x²` `+` `9` `x²` `)` `=`

② Llamamos b a la longitud del cateto desconocido.

Por el teorema de Pitágoras, $b^2+13^2 = 15^2 \Rightarrow b = \sqrt{15^2-13^2} = 7{,}483$

Calculadora: `√` `(` `1` `5` `x²` `–` `1` `3` `x²` `)` `=` ⇨ 7.483314774

Perímetro = b+13+15 = 35,48

Calculadora: `Ans` `+` `1` `3` `+` `1` `5` `=` ⇨ 35.48331477

Nota. Usar la tecla `Ans` es más cómodo que volver a teclar el número.

Solución: (a) 7,483 m (b) 35,48 m²

③ Llamamos b a la longitud del cateto desconocido.

Por el teorema de Pitágoras, $b^2+27^2 = 78^2 \Rightarrow b = \sqrt{78^2-27^2} = 73{,}17$

Calculadora: `√` `(` `7` `8` `x²` `–` `2` `7` `x²` `)` `=` ⇨ 73.17786551

Como vamos a usar este número en las dos siguientes operaciones, lo guardamos en una memoria. Calculadora: `Ans` `STO` `M` `=`

Perímetro = b+27+78 = 178,2.

Calculadora: `RCL` `M` `+` `2` `7` `+` `7` `8` `=` ⇨ 178.1778655

Área = b·27:2 = 987,9. Calculadora: `RCL` `M` `×` `2` `7` `÷` `2` ⇨ 987.9011843

Solución: (a) 178,2 u (b) 987,9 u²

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios calculando todos los resultados con seis cifras significativas y dándolos en la misma unidad que los datos o en el cuadrado de esa unidad, según corresponda.

① Los catetos de un triángulo rectángulo miden 59 metros y 87 metros. Calcula la longitud de la hipotenusa.

② La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 33 metros y uno de los catetos mide 27 metros. Calcula: a) La longitud del otro cateto. b) El perímetro del triángulo.

③ La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 93 y uno de los catetos mide 41. Calcula: a) El perímetro del triángulo. b) El área del triángulo.

④ Calcula el área de un triángulo equilátero sabiendo que su lado mide 48 m.

⑤ Calcula el área de un triángulo sabiendo que sus lados miden 102 metros, 102 metros y 37 metros.

⑥ Calcula el perímetro de un triángulo sabiendo que tiene dos lados iguales, el tercero mide 123 metros y la altura correspondiente a este tercer lado mide 33 metros.

⑦ Calcula el perímetro y el área de un triángulo sabiendo que dos de sus lados miden 67 metros y la altura correspondiente al tercer lado mide 51 metros.

⑧ Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado sabiendo que su lado mide 309 metros.

⑨ Calcula el perímetro de un rombo sabiendo que sus diagonales miden 239 metros y 337 metros.

⑩ Calcula el área de un rombo sabiendo que su lado mide 73 metros y una de las diagonales mide 89 metros.

⑪ Calcula el perímetro de un trapecio rectángulo sabiendo que sus bases miden 167 metros y 246 metros y el lado menor de los otros dos mide 128 metros.

⑫ Calcula el perímetro y el área de un trapecio rectángulo sabiendo que sus bases miden 77 y 62 y el lado mayor de los otros dos mide 68.

⑬ Calcula el perímetro de un trapecio isósceles sabiendo que sus bases miden 283 metros y 317 metros y la altura mide 99 metros.

⑭ Calcula el área de un trapecio isósceles sabiendo que sus bases miden 106 y 79 y los otros dos lados miden 43 cada uno.

⑮ Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles sabiendo que su base mayor mide 123 metros, la altura mide 58 metros y cada uno de los lados que no son paralelos mide 74 metros.

⑯ Calcula el área de un hexágono regular cuyos lados miden 11 metros.

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios calculando todos los resultados con cinco cifras significativas y dándolos en la misma unidad que los datos o en el cuadrado de esa unidad, según corresponda.

① Los catetos de un triángulo rectángulo miden 135 metros y 221 metros. Calcula la longitud de la hipotenusa.

② La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 348 metros y uno de los catetos mide 295 metros. Calcula: a) La longitud del otro cateto. b) El perímetro del triángulo.

③ La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 155 y uno de los catetos mide 101. Calcula: a) El perímetro del triángulo. b) El área del triángulo.

④ Calcula el área de un triángulo equilátero sabiendo que su lado mide 37 m.

⑤ Calcula el área de un triángulo sabiendo que sus lados miden 229 metros, 229 metros y 317 metros.

⑥ Calcula el perímetro de un triángulo sabiendo que tiene dos lados iguales, el tercero mide 49 metros y la altura correspondiente a este tercer lado mide 127 metros.

⑦ Calcula el perímetro y el área de un triángulo sabiendo que dos de sus lados miden 88 metros y la altura correspondiente al tercer lado mide 47 metros.

⑧ Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado sabiendo que su lado mide 88,92 metros.

⑨ Calcula el perímetro de un rombo sabiendo que sus diagonales miden 147 metros y 239 metros.

⑩ Calcula el área de un rombo sabiendo que su lado mide 156 metros y una de las diagonales mide 109 metros.

⑪ Calcula el perímetro de un trapecio rectángulo sabiendo que sus bases miden 412 metros y 305 metros y el lado menor de los otros dos mide 201 metros.

⑫ Calcula el perímetro y el área de un trapecio rectángulo sabiendo que sus bases miden 83 y 74 y el lado mayor de los otros dos mide 71.

⑬ Calcula el perímetro de un trapecio isósceles sabiendo que sus bases miden 193 metros y 108 metros y la altura mide 133 metros.

⑭ Calcula el área de un trapecio isósceles sabiendo que sus bases miden 102 y 157 y los otros dos lados miden 93 cada uno.

⑮ Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles sabiendo que su base menor mide 207 metros, la altura mide 77 metros y cada uno de los lados que no son paralelos mide 152 metros.

⑯ Calcula el área de un hexágono regular cuyos lados miden 43 metros.

Uso del número π con calculadora

En los niveles 1 y 2 utilizaste π aproximándolo como 3,14 para resolver muchos problemas; pero eso tiene la dificultad de que los resultados obtenidos son inexactos. En este nivel 3 usaremos la calculadora para resolver estos problemas de manera más cómoda, pero siempre buscando aprovechar la precisión de la calculadora para dar los resultados del modo más correcto posible. Todas las calculadoras científicas escolares incorporan una tecla para introducir el número π. Búscala, porque es la que vamos a usar.

Enunciados

Da todos los resultados con cuatro cifras significativas.

① Calcula la longitud de una circunferencia cuyo diámetro mide 5,7 metros.

② Calcula la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 4,2.

③ Calcula el área de un círculo cuyo radio mide 3,2 metros.

④ Calcula el área de un círculo cuyo diámetro mide 17,51.

Resoluciones

① Sabemos que si llamamos «l» a la longitud de la circunferencia y «d» a la longitud del diámetro, se verifica «$l=\pi d$». Por tanto,

$l=\pi d=\pi\cdot 5{,}7=17{,}91$

Calculadora: `π` `×` `5` `.` `7` `=` ⇰ 17.90707813

Solución: 17,91 m

② Sabemos que si llamamos «l» a la longitud de la circunferencia y «r» a la longitud del radio, se verifica «$l=2\pi r$». Por tanto,

$l=2\pi r=2\cdot\pi\cdot 4{,}2=26{,}39$ u.

Calculadora: `2` `×` `π` `×` `4` `.` `2` `=` ⇰ 26.38937829

③ Sabemos que si llamamos «A» al área del círculo y «r» a la longitud del radio, se verifica «$A=\pi r^2$». Por tanto,

$A=\pi r^2=\pi\cdot 3{,}2^2=32{,}17$

Calculadora: `π` `×` `3` `.` `2` `x²` `=` ⇰ 32.16990877

Solución: 32,17 m²

④ Necesitamos calcular el radio a partir del diámetro. Aunque dividir entre 2 es muy sencillo, lo hacemos con la calculadora para no tener que volver a teclear el resultado.

$d=17{,}51 \Rightarrow r=17{,}51:2=8{,}755$

Calculadora: `1` `7` `.` `5` `1` `÷` `2` `=` ⇰ 8.755

$A=\pi r^2=\pi\cdot 8{,}755^2=240{,}1$

Calculadora: `π` `×` `Ans` `x²` `=` ⇰ 240.8031554

Solución: 240,1 u²

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios y da todos los resultados en metros con seis cifras significativas.

① Calcula la longitud de una circunferencia cuyo diámetro mide 738,2 metros.

② Calcula la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 524,9.

③ Calcula el área de un círculo cuyo radio mide 347,5 metros.

④ Calcula el área de un círculo cuyo diámetro mide 167,23.

⑤ Calcula la longitud de un arco de circunferencia cuyo radio mide 37 metros y su ángulo mide 257°.

⑥ Calcula la longitud de un arco de circunferencia cuyo ángulo mide 189° sabiendo que el diámetro de su circunferencia mide 317,73 metros.

⑦ Calcula el área de un sector circular cuyo radio mide 107 metros y su ángulo mide 139°.

⑧ Calcula el área de un sector circular cuyo ángulo mide 211° sabiendo que el diámetro de su circunferencia mide 251,87 metros.

⑨ Calcula el perímetro y el área de un semicírculo de radio 377,5 metros.

⑩ Calcula el perímetro y el área de un semicírculo de diámetro 216,3 metros.

⑪ Calcula el perímetro de un sector circular cuyo radio mide 517,2 metros y su ángulo mide 73°.

⑫ Calcula el perímetro y el área de una corona circular cuyos radios miden 127 metros y 85 metros.

⑬ Calcula el perímetro y el área de una corona circular cuyos diámetros miden 229 y 114.

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios calculando todos los resultados con cinco cifras significativas y dándolos en la misma unidad que los datos o en el cuadrado de esa unidad, según corresponda.

⑭ Calcula la longitud de una circunferencia cuyo diámetro mide 93,4 metros.

⑮ Calcula la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 87,135.

⑯ Calcula el área de un círculo cuyo radio mide 27,9 metros.

⑰ Calcula el área de un círculo cuyo diámetro mide 37,15.

⑱ Calcula el perímetro y el área de un semicírculo de radio 167,23 metros.

⑲ Calcula el perímetro y el área de un semicírculo de diámetro 317,9.

⑳ Calcula el perímetro y el área de una corona circular cuyos radios miden 83,5 metros y 35,8 metros.

Uso de ecuaciones en geometría

A partir de este nivel ya se pueden resolver algunos problemas de geometría planteando y resolviendo ecuaciones y sistemas de ecuaciones. A partir de ahora, será una de las opciones que deberás considerar para resolver un problema de geometría. Es una técnica particularmente útil cuando conocemos el área de una figura y queremos calcular algún lado o el perímetro.

Enunciados

Da todos los resultados con cuatro cifras significativas.

① Calcula el perímetro de un cuadrado cuya área mide 98,3 m².

② Calcula la longitud de una circunferencia sabiendo que el área de su círculo mide 58,73 m².

Resoluciones

① Llamamos «x» a la longitud del lado del cuadrado.

Del enunciado deducimos que $x^2 = 98{,}3$.

Resolvemos la ecuación: $x^2 = 98{,}3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{98{,}3} = \begin{cases} \sqrt{98{,}3} \\ -\sqrt{98{,}3} \end{cases}$

La solución negativa no es válida puesto que la longitud del lado del cuadrado debe ser positiva.

Nota 1: este razonamiento se da tan a menudo en este tipo de problemas que muchas veces ni siquiera se comenta, y se pasa directamente a considerar solo la solución positiva.

Nota 2: Observa que el enunciado no pide la longitud del lado, luego no es necesario calcular ahora el valor de la raíz. Si se pidiera, calcularíamos el resultado de la raíz, pero luego usaríamos la tecla `Ans` o bien alguna memoria manual de la calculadora.

Calculamos el perímetro:

Perímetro $= 4x = 4\sqrt{98{,}3} = 39{,}66$

Calculadora: `4` `×` `√` `9` `8` `.` `3` `=` ⇨ 39.65854259

Solución: 39,66 m

② Llamamos «r» a la longitud del radio de la circunferencia.

Del enunciado deducimos que $\pi r^2 = 58{,}73$.

Resolvemos la ecuación: $\pi r^2 = 58{,}73 \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{58{,}73}{\pi}}$

Nota 3: nos hemos quedado directamente con la solución positiva.

Calculamos la longitud de la circunferencia:

Longitud $= 2\pi r = 2\pi\sqrt{\dfrac{58{,}73}{\pi}} = 27{,}17$

Calculadora: `2` `×` `π` `×` `√` `(` `5` `8` `.` `7` `3` `÷` `π` `)` `=` ⇨ 27.16657774

Solución: 27,17 m

Cálculo del área de un polígono regular conocido su lado

Hay un problema que aún no sabes resolver en su caso general: conocida la longitud del lado de un polígono regular, calcular su área.

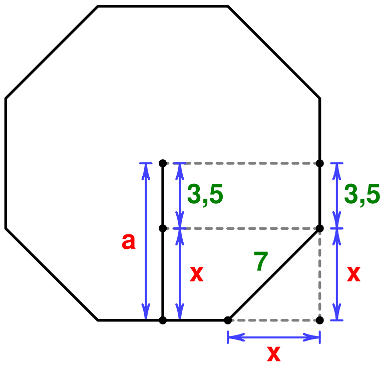
* En el nivel 1 lo resolviste, pero porque los enunciados incluían el valor de la longitud de la apotema.
* En el nivel 4 lo resolverás completamente.
* En el nivel 3 has practicado cómo hacerlo en el triángulo equilátero y en el hexágono regular (el caso del cuadrado es trivial).
* Ahora verás cómo resolverlo en el caso del octógono regular usando una ecuación y un triángulo rectángulo que solo aparece en el octógono regular, pero en ningún otro polígono regular.

Cálculo del área de un octógono regular conocido su lado

Enunciado

Calcula el área de un octógono regular cuyo lado mide 7 metros. Da el resultado en metros cuadrados con cuatro cifras significativas.

Resolución



Para calcular la apotema («a») aprovechamos que se puede obtener sumando las longitudes de dos segmentos: uno es la mitad del lado (mide 3,5 metros) y el otro se puede calcular usando el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo que existe en el octógono, pero no se encuentra en ningún otro polígono regular (el segmento que hemos llamado «x»).

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular «x»:

$x^2+x^2 = 7^2 \Rightarrow 2x^2 = 49 \Rightarrow x^2 = 24{,}5 \Rightarrow x = \sqrt{24{,}5}$

Podemos comprobar con la calculadora que esta raíz no es exacta, así que la dejamos indicada (es decir, sin sustituirla por su valor aproximado) para tener más precisión en el cálculo y más comodidad al escribir.

Conocido «x», ya se puede calcular la apotema:

$a = 3{,}5+x = 3{,}5+\sqrt{24{,}5}$. Tampoco calculamos este valor, lo *arrastramos*.

Ya se puede aplicar la fórmula para calcular el área:

$$\text{Área} = \frac{P\cdot a}{2} = \frac{8\cdot 7\cdot(3{,}5+\sqrt{24{,}5})}{2} = 4\cdot 7\cdot(3{,}5+\sqrt{24{,}5}) = 28\cdot(3{,}5+\sqrt{24{,}5}) = 236{,}6$$

Calculadora: 2 8 × (3 . 5 + √ 2 4 . 5) = ⇨ 236.5929291

Solución: 236,6 m²

Nota 1: hemos hecho parte de la operación a mano, buscando simplificaciones, y hemos dejado para la calculadora la parte más difícil e inexacta.

Nota 2: aunque el enunciado solo pedía cuatro cifras significativas, gracias a una correcta utilización de la calculadora hemos calculado nueve (la última cifra no es fiable porque puede depender del modelo de calculadora).

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios y da todos los resultados en metros con seis cifras significativas.

① Calcula el perímetro de un cuadrado cuya área mide 137,1 m².

② Calcula la longitud de una circunferencia sabiendo que el área de su círculo mide 367,5 m².

③ Calcula el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 3 m.

④ Calcula el perímetro de un semicírculo cuya área mide 279 m².

⑤ Calcula el perímetro de un sector circular cuya área mide 157 m² sabiendo que su ángulo es 90°.

⑥ Calcula el perímetro de un sector circular cuya área mide 742 m² sabiendo que su ángulo es 60°.

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios y da todos los resultados en metros cuadrados con seis cifras significativas.

⑦ Calcula el área de un octógono regular cuyo lado mide 8 metros.

⑧ Calcula el área de un octógono regular cuyo lado mide 47,23 metros.

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios y da todos los resultados en metros con cinco cifras significativas.

⑨ Calcula el perímetro de un cuadrado cuya área mide 203 m².

⑩ Calcula la longitud de una circunferencia sabiendo que el área de su círculo mide 88 m².

⑪ Calcula el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 312 m.

⑫ Calcula el perímetro de un semicírculo cuya área mide 19,3 m².

⑬ Calcula el perímetro de un sector circular cuya área mide 105 m² sabiendo que su ángulo es 90°.

⑭ Calcula el perímetro de un sector circular cuya área mide 221 m² sabiendo que su ángulo es 60°.

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios y da todos los resultados en metros cuadrados con cinco cifras significativas.

⑮ Calcula el área de un octógono regular cuyo lado mide 0,34 metros.

⑯ Calcula el área de un octógono regular cuyo lado mide 51 metros.

⑰ Calcula el área de un octógono regular cuyo lado mide 18,27 metros.

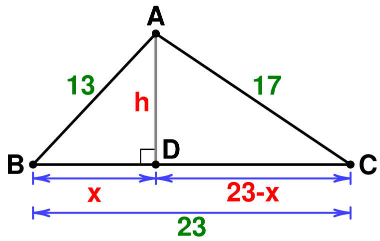
Cálculo de la longitud de una altura conocidos los lados de un triángulo

Si se conocen las longitudes de los tres lados de un triángulo, es posible calcular la longitud de cualquiera de las alturas. El método consiste en plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y averiguar el valor de una de ellas.

Ejemplo

Enunciado. Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado mayor de un triángulo cuyos lados miden 13 m, 17 m y 23 m. Da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

Resolución. En general, es conveniente hacer un dibujo aproximado del triángulo; ahora es imprescindible para entender el método:



Ponemos nombres a los vértices del triángulo: A, B y C.

Como el lado mayor mide 23 m, trazamos su altura, que es la que pide el enunciado, y la llamamos «h».

Llamamos D al punto proyección del vértice A sobre el lado BC.

La altura divide el triángulo ABC en dos triángulos rectángulos: el ADB y el ADC.

Llamamos «x» a la distancia desde el punto D hasta el vértice B. Por tanto, la distancia entre el punto D y el vértice C será «23–x».

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ADB: $h^2 = 13^2 - x^2$.

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ADC: $h^2 = 17^2 - (23-x)^2$.

Planteamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} h^2 = 13^2 - x^2 \\ h^2 = 17^2 - (23-x)^2 \end{cases}$

Aunque no es un sistema lineal (los únicos que hemos visto hasta ahora en el curso), sí que podemos aplicar uno de los métodos de resolución que hemos estudiado. (Piensa: ¿cuál?). Usamos la idea del método de igualación, pero aplicada a h^2:

$$13^2 - x^2 = 17^2 - (23-x)^2 \Rightarrow 169 - x^2 = 289 - (529 - 46x + x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 169 - x^2 = 289 - 529 + 46x - x^2 \Rightarrow 169 - 289 + 529 = 46x \Rightarrow 46x = 409 \Rightarrow x = \frac{409}{46}$$

Aunque «x» es una de las incógnitas del sistema de ecuaciones, realmente no es necesario calcular su valor concreto, puesto que nuestra tarea no es resolver el sistema de ecuaciones (solo es una ayuda), sino calcular la altura.

Volvemos al sistema de ecuaciones para calcular la «h» usando la ecuación más sencilla:

$$h^2 = 13^2 - x^2 = 169 - \left(\frac{409}{46}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{169 - \left(\frac{409}{46}\right)^2} = 9{,}484$$

Calculadora: √ (1 6 9 – (4 0 9 ÷ 4 6) x²) = ⇨ 9.4839 18335

Solución: 9,484 m

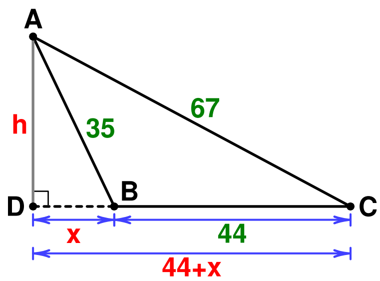
Cálculo de la longitud de una altura conocidos los lados de un triángulo cuando la altura no corta al lado

Es posible resolver este problema exactamente igual que cuando la altura corta al lado; pero aparecería una longitud negativa, por lo que la resolución se entiende mejor si la resolución se plantea de otra forma.

Ejemplo

Enunciado. Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado mediano de un triángulo cuyos lados miden 35 m, 44 m y 67 m. Da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

Resolución. Utilizamos esta notación:



Sabemos que la altura pedida no corta al lado porque $67^2>35^2+44^2$ y por tanto el ángulo en B es obtuso.

La altura define dos triángulos rectángulos: el ADB y el ADC.

Llamamos «x» a la distancia desde el punto D hasta el vértice B. Por tanto, la distancia desde el punto D hasta el vértice C será «44+x».

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ADB: $h^2 = 35^2 - x^2$.

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ADC: $h^2 = 67^2 - (44+x)^2$.

Igualando h^2: $35^2 - x^2 = 65^2 - (44+x)^2 \Rightarrow 1225 - x^2 = 4489 - (1936+88x+x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1225 - x^2 = 4489 - 1936 - 88x - x^2 \Rightarrow 88x = 4489 - 1936 - 1225 \Rightarrow$

$\Rightarrow 88x = 1328 \Rightarrow x = \dfrac{1328}{88}$

Ya podemos calcular «h»:

$$h^2 = 35^2 - x^2 = 1225 - \left(\frac{1328}{88}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{1225 - \left(\frac{1328}{88}\right)^2} = 31{,}58$$

Calculadora: √ (1 2 2 5 – (1 3 2 8 ÷ 8 8) x^2) = ⇨ 31,57949434

Solución: 31,58 m

Nota: si hubiéramos hecho mal el dibujo y por tanto hubiéramos llamado a la distancia entre D y C «44–x», como en la resolución general, hubiéramos resuelto bien el problema, pero obteniendo «$x = -\dfrac{1328}{88}$», lo que nos hubiéra resultado un poco chocante. Como para calcular la altura hay que elevar «x» al cuadrado, el signo menos no hubiera influido y hubiéramos obtenido el mismo resultado, correcto.

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios y da todos los resultados en metros con cuatro cifras significativas.

① Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado mayor de un triángulo cuyos lados miden 13 m, 17 m y 22 m.

② Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado menor de un triángulo cuyos lados miden 41 m, 42 m y 45 m.

③ Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado mediano de un triángulo cuyos lados miden 82 m, 89 m y 91 m.

④ Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado mayor de un triángulo cuyos lados miden 203 m, 173 m y 192 m.

⑤ Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado mediano de un triángulo cuyos lados miden 73 m, 97 m y 113 m.

⑥ Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado menor de un triángulo cuyos lados miden 109 m, 107 m y 193 m.

⑦ El triángulo isósceles cuyos lados miden 97 m, 97 m y 59 m tiene dos alturas que miden lo mismo. ¿Cuánto?

⑧ Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado mediano de un triángulo cuyos lados miden 4355 m, 4824 m y 6499 m.

⑨ Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado mayor de un triángulo cuyos lados miden 412 m, 421 m y 402 m.

⑩ Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado menor de un triángulo cuyos lados miden 412 m, 421 m y 402 m.

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios y da todos los resultados en metros con seis cifras significativas.

⑪ Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado mayor de un triángulo cuyos lados miden 285 m, 327 m y 393 m.

⑫ Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado mediano de un triángulo cuyos lados miden 93 m, 151 m y 113 m.

⑬ El triángulo isósceles cuyos lados miden 145 m, 145 m y 231 m tiene dos alturas que miden lo mismo. ¿Cuánto?

⑭ Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado menor de un triángulo cuyos lados miden 16,21 m, 21,16 m y 26,11 m.

⑮ Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado mediano de un triángulo cuyos lados miden 41 m, 221 m y 261 m.

Fórmula de Herón

Es una fórmula conocida desde hace milenios que permite calcular el área de un triángulo conocidas las longitudes de los lados.

Si las longitudes de los lados del triángulo son «a», «b» y «c», llamamos semiperímetro a la mitad del perímetro: $s=(a+b+c):2$. Entonces el área es

$$\boxed{\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Demostración

Existen numerosas demostraciones de esta fórmula; una de ellas es perfectamente comprensible en este nivel, aunque la vamos a omitir ahora por considerar que no aporta nada especialmente interesante en este momento.

Ejemplo

Enunciado. Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 47 m, 52 m y 59 m. Da el resultado en metros cuadrados con seis cifras significativas.

Resolución. Empezamos por calcular el semiperímetro:

$s=(a+b+c):2=(47+52+59):2=79$

Aplicamos la fórmula de Herón:

$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{79(79-47)(79-52)(79-59)} =$

$= \sqrt{79\cdot 32\cdot 27\cdot 20} = 1168{,}38$

Calculadora: √ (7 9 × 3 2 × 2 7 × 2 0) = ⇨ 1168.383499

Solución: 1168,38 m²

Nota: si las operaciones fueran más complicadas, podríamos ayudarnos de alguna memoria de la calculadora para almacenar el valor del semiperímetro.

Comprobación

Enunciado. Comprueba que se puede calcular el área del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 37 m y 48 m tanto con la fórmula habitual como con la fórmula de Herón.

Nota: evidentemente, es mucho más sencillo en este caso utilizar la fórmula habitual que aplicar la fórmula de Herón, pero está bien poner a prueba los nuevos conocimientos (si no se obtiene el mismo resultado, hay que pensar por qué, y eso puede llevar a una mejor comprensión de los procedimientos).

Resolución 1. $\text{Área} = 37\cdot 48:2 = 37\cdot 24 = 888$. Solución: 888 m²

Resolución 2. Cálculo de la hipotenusa: $a = \sqrt{37^2+48^2} = 60{,}61$

Calculadora: √ (3 7 x² + 4 8 x²) STO A = ⇨ 60.6052803

Semiperímetro $= (a+b+c):2 = (60{,}61+37+48):2 = 72{,}80$

Calculadora: (Ans + 3 7 + 4 8) ÷ 2 = ⇨ 72.80264015

$\text{Área} = \sqrt{72{,}80(72{,}80-60{,}61)(72{,}80-37)(72{,}80-48)} = 888$

√ (Ans × (Ans – RCL A) × (Ans – 3 7) (Ans – 4 8)) = ⇨ 888

Solución: 888 m²

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios y da todos los resultados en metros cuadrados con seis cifras significativas.

① Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 13 m, 17 m y 22 m.

② Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 41 m, 42 m y 45 m.

③ Calcula el área de un triángulo equilátero cuyos lados miden 82 m usando la fórmula de Herón.

④ Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados miden 203 m, 203 m y 192 m usando la fórmula de Herón.

⑤ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 73 m, 97 m y 113 m.

⑥ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 429 m, 880 m y 979 m.

⑦ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 97 m, 97 m y 59 m.

⑧ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 7 m, 11 m y 13 m.

⑨ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 19 m, 21 m y 20 m.

⑩ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 2,3 m, 4,1 m y 3,5 m.

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios y da todos los resultados en metros cuadrados con cinco cifras significativas.

⑪ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 195 m, 216 m y 291 m.

⑫ Calcula el área de un triángulo equilátero cuyos lados miden 3,56 m usando la fórmula de Herón.

⑬ Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados miden 15 m, 15 m y 19 m usando la fórmula de Herón.

⑭ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 16 m, 22 m y 21 m.

⑮ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 8 m, 9 m y 11 m.

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios y da todos los resultados en metros cuadrados con cuatro cifras significativas.

⑯ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 32 m, 21 m y 35 m.

⑰ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 36 m, 85 m y 77 m.

⑱ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 9 m, 8 m y 7 m.

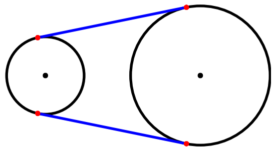
⑲ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 65 m, 72 m y 97 m.

⑳ Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 28 m, 30 m y 32 m.

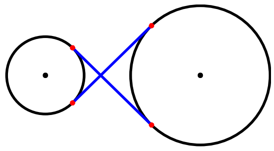
Segmentos tangentes a dos circunferencias exteriores

Si dos circunferencias son exteriores, se pueden trazar cuatro segmentos tangentes simultáneamente a las dos:

- Dos segmentos tangentes exteriores, de la misma longitud, que se caracterizan por dejar los dos centros de las circunferencias en el mismo semiplano según los dos semiplanos definidos por la recta que contiene al segmento.



- Dos segmentos tangentes interiores, de la misma longitud, que se caracterizan por dejar los dos centros de las circunferencias en distinto semiplano según los dos semiplanos definidos por la recta que contiene al segmento.

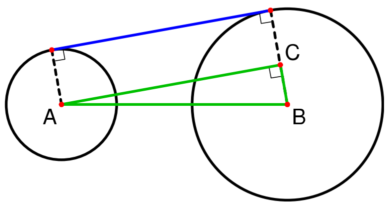


Cálculo de las longitudes de los segmentos

Enunciado. La distancia entre los centros de dos circunferencias es 45 y sus radios miden 11 y 19. Calcula con cuatro cifras significativas: (a) la longitud de cada segmento tangente exterior (b) la longitud de cada segmento tangente interior.

Resolución

(a) Hay que calcular la longitud «x» del segmento azul; usamos esta construcción:



Consideramos el triángulo rectángulo ABC, en el que:

d(A,B) = 45 porque es la distancia entre los centros.

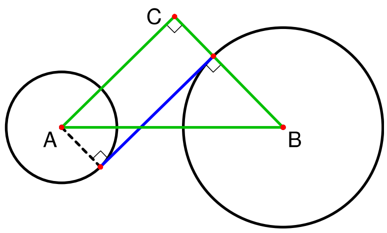
d(B,C) = 19–11 = 8 porque es la diferencia de los radios.

d(A,C) = x por la construcción de la figura.

Por el teorema de Pitágoras: $x^2+8^2 = 45^2 \Rightarrow x = \sqrt{45^2-8^2} = 44{,}28$

Calculadora: √ (4 5 x² – 8 x²) = ⇰ 44,28317965

(b) Hay que calcular la longitud «x» del segmento azul; usamos esta construcción:



Consideramos el triángulo rectángulo ABC, en el que:

d(A,B) = 45 porque es la distancia entre los centros.

d(B,C) = 19+11 = 30 porque es la suma de los radios.

d(A,C) = x por la construcción de la figura.

Por el teorema de Pitágoras: $x^2+30^2 = 45^2 \Rightarrow x = \sqrt{45^2-30^2} = 33{,}54$

Calculadora: √ (4 5 x² – 3 0 x²) = ⇰ 33,54101966

Solución: (a) 44,28 (b) 33,54

Enunciados

Resuelve los siguientes ejercicios y da todos los resultados en metros con cuatro cifras significativas.

① El punto A dista 17 metros del centro de una circunferencia cuyo radio mide 7 metros. Calcula la distancia entre el punto A y el punto de tangencia entre la circunferencia y una de las rectas que pasan por A y son tangentes a la circunferencia.

② La distancia entre los centros de dos circunferencias es 39 metros y sus radios miden 8 metros y 17 metros. Calcula la longitud de cada segmento tangente exterior a las dos circunferencias.

③ La distancia entre los centros de dos circunferencias es 13 metros y sus radios miden 4 metros y 6 metros. Calcula la longitud de cada segmento tangente interior a las dos circunferencias.

④ El punto B dista 31 metros del centro de una circunferencia. La distancia entre el punto B y el punto de tangencia entre la circunferencia y una de las rectas que pasan por B es 23 metros. Calcula la longitud del radio de la circunferencia.

⑤ La distancia entre los centros de dos circunferencias es 77 metros y el radio de la más pequeña mide 33 metros. Calcula el radio de la mayor sabiendo que la longitud de cada segmento tangente exterior a las dos circunferencias es 61 metros.

⑥ La distancia entre los centros de dos circunferencias es 51 metros y el radio de la más pequeña mide 19 metros. Calcula el radio de la mayor sabiendo que la longitud de cada segmento tangente interior a las dos circunferencias es 23 metros.

⑦ La distancia entre el punto C y el punto de tangencia entre una circunferencia y una de las rectas que pasan por C y son tangentes a la circunferencia es 103 metros. Calcula la distancia entre el centro de la circunferencia y el punto C sabiendo que el radio de la circunferencia es 37 metros.

⑧ Calcula la distancia entre los centros de dos circunferencias exteriores sabiendo que sus radios miden 13 metros y 24 metros y la longitud de cada segmento tangente exterior a las dos circunferencias es 38 metros.

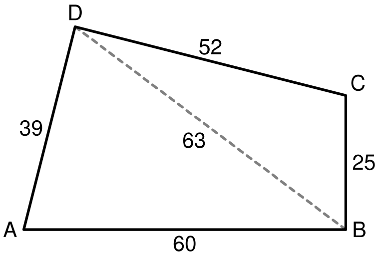
⑨ Calcula la distancia entre los centros de dos circunferencias exteriores sabiendo que sus radios miden 3 metros y 5 metros y la longitud de cada segmento tangente interior a las dos circunferencias es 16 metros.

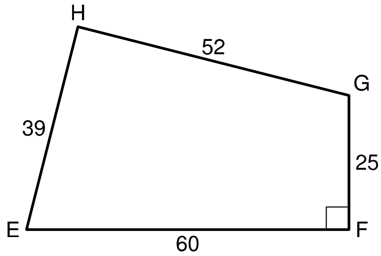
⑩ La distancia entre el punto D y el punto de tangencia entre una circunferencia y una de las rectas que pasan por D y son tangentes a la circunferencia es 47 metros. Calcula la distancia entre el centro de la circunferencia y el punto D sabiendo que el área del triángulo formado por el radio de la circunferencia, el segmento que une el punto D y el centro de la circunferencia y el radio que une el centro de la circunferencia y el punto de tangencia es 352 metros cuadrados.

Enunciados

① Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que su área mide 96 metros cuadrados y uno de los catetos mide 13 metros. Da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

② a) Calcula el área del cuadrilátero ABCD de la figura de abajo a la izquierda.





b) Calcula el área del cuadrilátero EFGH de la figura de arriba a la derecha.

③ Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo cuya área mide 73 metros cuadrados sabiendo que una de sus dimensiones mide 17 metros. Da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

④ Calcula el área de un triángulo equilátero sabiendo que su perímetro mide 103 metros. Da el resultado en metros cuadrados con seis cifras significativas.

⑤ Calcula el perímetro de un rombo sabiendo que sus diagonales miden 41 metros y 72 metros. Da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

⑥ Calcula con cuatro cifras significativas el perímetro y el área de un trapecio isósceles sabiendo que su base menor mide 75, la altura mide 24 y cada uno de los lados que no son paralelos mide 33.

⑦ Calcula el área de un círculo cuyo diámetro mide 109 metros. Da el resultado en metros cuadrados con cinco cifras significativas.

⑧ Calcula el área de un octógono regular cuyo lado mide 71 metros. Da el resultado en metros cuadrados con cinco cifras significativas.

⑨ Calcula el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 75 metros. Da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

⑩ Calcula el perímetro de un semicírculo cuya área mide 721 metros cuadrados. Da el resultado en metros con cinco cifras significativas.

⑪ Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado mayor de un triángulo cuyos lados miden 32 metros, 41 metros y 66 metros. Da el resultado en metros con seis cifras significativas.

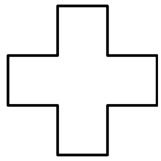
⑫ La distancia entre los centros de dos circunferencias es 42 m y sus radios miden 13 m y 24 m. Calcula en metros con cuatro cifras significativas la longitud de cada segmento tangente exterior a las dos circunferencias.

⑬ Un sector circular tiene un radio de 27 metros y un área de 20 decámetros cuadrados. Calcula la amplitud de su ángulo. Da el resultado en grados, minutos y segundos, redondeando al segundo.

Enunciados

① Calcula el perímetro de un rectángulo cuya área mide 189 metros cuadrados sabiendo que una de sus dimensiones mide el doble que la otra. Da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

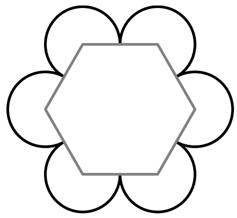
② Calcula el perímetro de la figura de la derecha (llamada cruz griega) sabiendo que su área es un metro cuadrado. Da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.



③ Calcula el perímetro de una corona circular cuya área mide 41 metros cuadrados sabiendo que el radio mayor es un metro mayor que el radio menor. Da el resultado en metros.

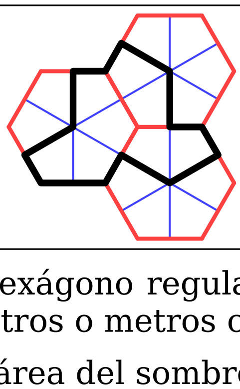
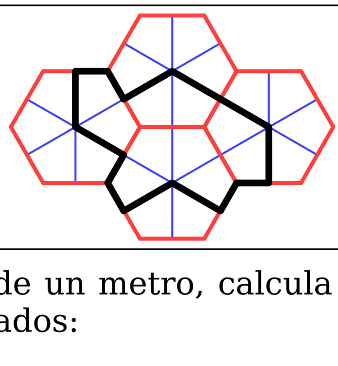
④ Simplificando un poco, una pista de atletismo al aire libre tiene una longitud, en su calle más interna, de 400 metros, que se distribuyen en dos rectas de 120 metros unidas mediante dos semicircunferencias. Calcula el radio de cada semicircunferencia; da el resultado en metros redondeando a las centésimas.

⑤ Rodeamos por fuera todos los vértices de un hexágono regular de cuatro metros de lado con unos sectores circulares que rodean completamente el hexágono, como se ve a la derecha. Calcula en metros cuadrados con cuatro cifras significativas el área total de la figura, incluido el hexágono.



⑥ Tenemos dos troncos cilíndricos, uno con 21,5 centímetros de diámetro y otro con 7,2 centímetros de diámetro. Los ponemos en el suelo, tocándose, y encima ponemos un tablón. Calcula la distancia que hay entre los puntos de contacto del tablón con cada tronco. Da el resultado en milímetros redondeando a la unidad.

⑦ A partir de sendas configuraciones de varios hexágonos regulares, se pueden obtener dos polígonos denominados «sombrero» y «tortuga», que tienen la particularidad de que con cada uno de ellos se puede teselar el plano, pero solo de manera no periódica. Aquí vemos cómo se construyen:

Sombrero	Tortuga
	

Si el lado de cada hexágono regular mide un metro, calcula con cuatro cifras significativas, en metros o metros cuadrados:

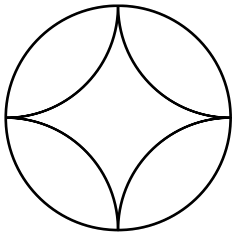
a) El perímetro y el área del sombrero.

b) El perímetro y el área de la tortuga.

⑧ Calcula con cuatro cifras significativas, en metros cuadrados, el área del triángulo cuyos lados miden 21 metros, 45 metros y 22 metros.

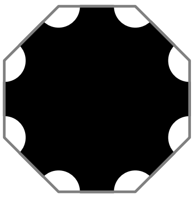
Enunciados

① En la película *El origen del planeta de los simios* (2011, dirigida por Rupert Wyatt), el protagonista es el chimpancé Cesar (nombre en inglés), que vive en una buhardilla con una ventana circular con cuatro arcos de circunferencia de adorno, como se ve en la figura. Si el diámetro de la ventana mide 1,8 metros, calcula en metros cuadrados con cuatro cifras significativas el área de la parte delimitada por los cuatro arcos.



② Las bases de un trapecio isósceles miden 131 metros y 203 metros; los otros dos lados miden 85 metros cada uno. Calcula en metros con cuatro cifras significativas la longitud de cada diagonal del trapecio.

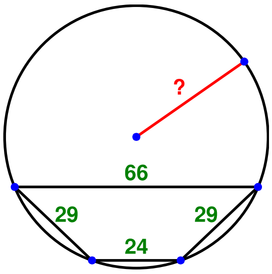
③ A un octógono regular de 10 centímetros de lado (en la ilustración de la derecha, en color gris) se le recorta de cada vértice un sector circular. Sabiendo que el área de la figura resultante (en la ilustración de la derecha, en color negro) es 400 centímetros cuadrados, calcula en centímetros con cuatro cifras significativas la longitud del radio de cada sector circular.



④ Calcula la profundidad de un estanque circular de diez metros cuadrados de área sabiendo que una caña que crece en su centro y que asoma un metro por encima del agua alcanza exactamente la superficie si se la inclina hasta el borde del estanque. Da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

⑤ Las bases de un trapecio miden 433 y 205; los otros dos lados miden 169 y 97. Calcula la longitud de la altura.

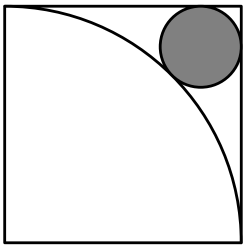
⑥ Calcula con cuatro cifras significativas la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al trapecio representado en la ilustración de la derecha. **Nota**: todos los trapecios isósceles tienen circunferencia circunscrita.



⑦ Calcula en metros con seis cifras significativas la longitud de la diagonal menor de un hexágono regular cuya diagonal mayor mide un metro.

⑧ Calcula en metros con cuatro cifras significativas la longitud del lado del hexágono regular cuya diagonal menor mide un metro.

⑨ Sabiendo que el lado del cuadrado de la figura de la derecha mide un metro, calcula en metros con cuatro cifras significativas el radio del círculo mostrado en color gris.

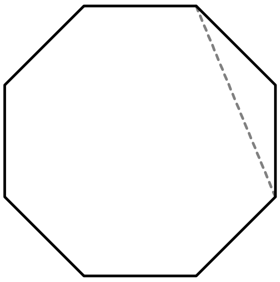
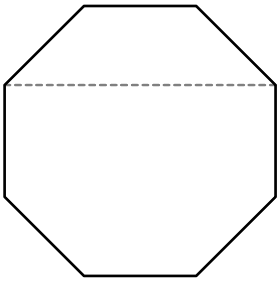
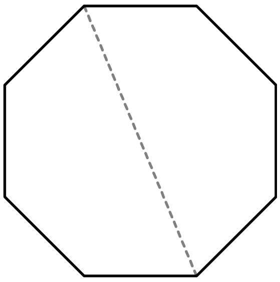
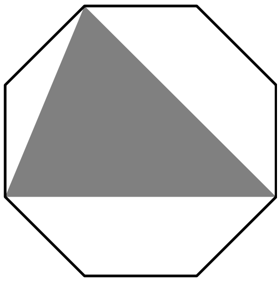


⑩ En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide «a» y los catetos miden «b» y «c». Calcula el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo.

⑪ Calcula con cuatro cifras significativas las longitudes de las tres alturas del triángulo cuyos lados miden 92, 183 y 89.

Enunciados

① Un octógono regular tiene veinte diagonales, pero solo las hay de tres longitudes diferentes; las vamos a denominar diagonal corta, diagonal mediana y diagonal larga, como se ven en las siguientes ilustraciones:

Diagonal corta	Diagonal mediana	Diagonal larga	Un triángulo
			

Sabiendo que el lado del octógono mide 100, se pide, dando los resultados redondeando a la unidad:

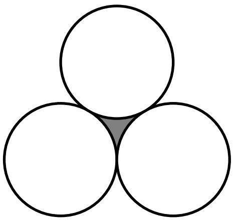
a) La longitud de cada diagonal corta.

b) La longitud de cada diagonal mediana.

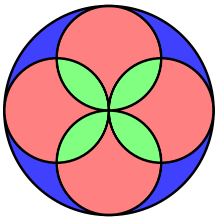
c) La longitud de cada diagonal larga.

d) El área del triángulo gris de arriba a la derecha.

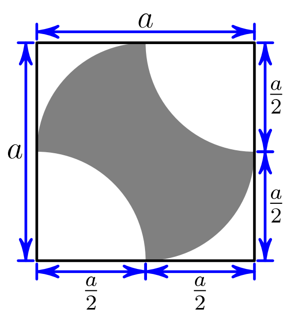
② Tres circunferencias de 1 m de radio son tangentes exteriores entre sí, como se ve en la figura de la derecha. Entre las tres definen un hueco que se muestra en gris. Calcula en metros cuadrados con seis cifras significativas el área del hueco.



③ La vidriera de la fachada principal de una iglesia contiene un rosetón como el de la figura de la derecha, coloreado en rojo, verde y azul. Sabiendo que se han empleado cuatrocientos centímetros cuadrados de cristal verde, ¿cuántos centímetros cuadrados de cristal azul son necesarios?



④ Calcula el perímetro y el área de la parte coloreada en gris de la figura de la derecha (en las dos expresiones aparecerá a).



⑤ Calcula con tres cifras significativas:

a) El porcentaje del área de un cuadrado que ocupa un círculo inscrito.

b) El porcentaje del área de un círculo que ocupa un cuadrado inscrito.

c) El porcentaje del área de un triángulo equilátero que ocupa un círculo inscrito.

d) El porcentaje del área de un círculo que ocupa un triángulo equilátero inscrito.

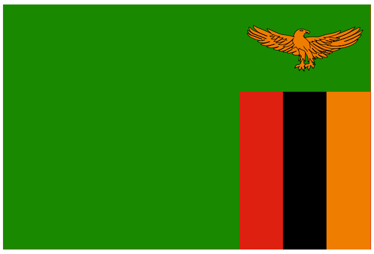
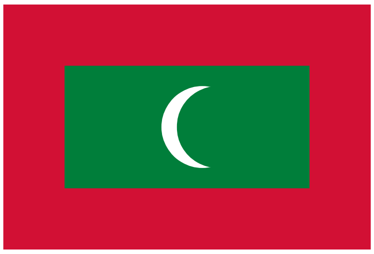
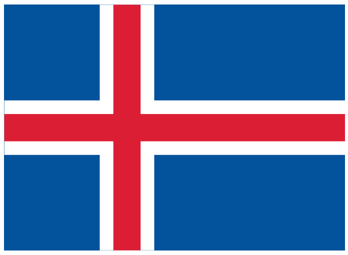
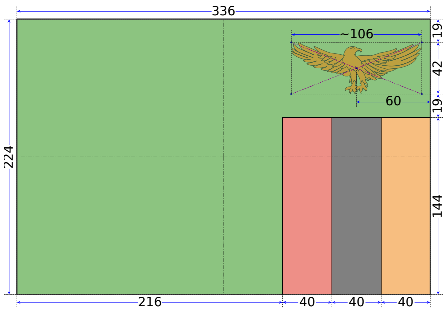
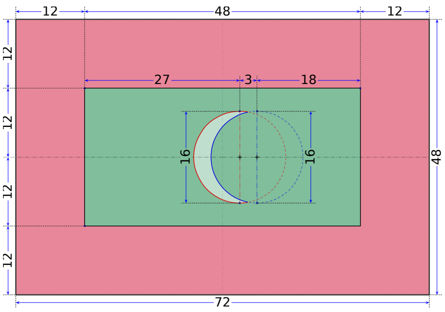
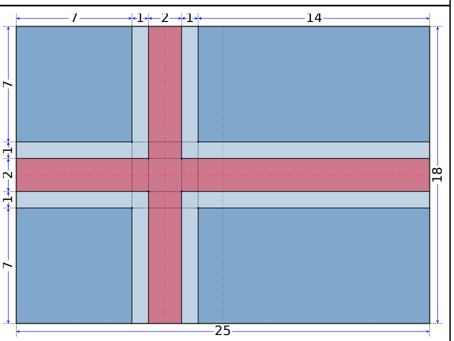
e) El porcentaje del área de un cuadrado que ocupa un octógono regular inscrito.

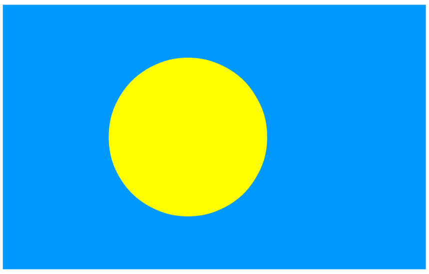
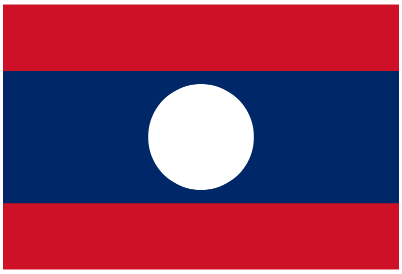
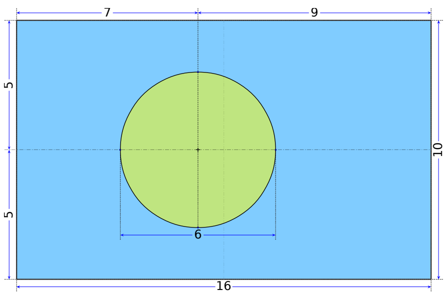
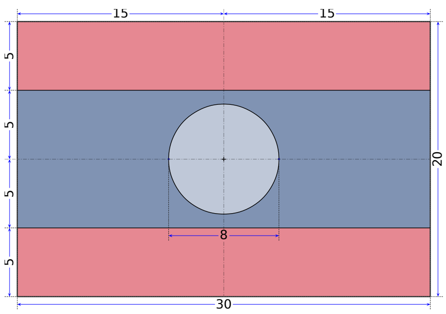
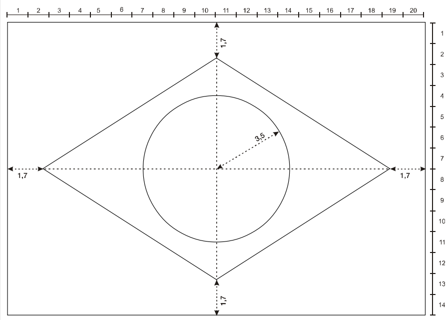
Vexilología

Es el estudio de las banderas. En la descripción de cada bandera aparecen definiciones de colores y el modo de determinar las dimensiones de cada parte. En los siguientes enunciados verás la bandera de un país y un esquema de sus dimensiones relativas (las banderas se pueden reproducir a cualquier tamaño).

Enunciados

Calcula con cuatro cifras significativas el porcentaje del color especificado respecto al área total de la bandera.

① Zambia	② Maldivas	③ Islandia
		
		
Color rojo	Color rojo	Color rojo

④ Palau	⑤ Laos	⑥ Brasil
		
		
Color azul claro	Color azul oscuro	Color amarillo

Teorema de Pitágoras con raíces inexactas

En el nivel 2 utilizaste el teorema de Pitágoras para resolver muchos problemas de geometría del espacio, pero tiene la dificultad de que las raíces cuadradas que aparecen suelen ser inexactas. En este nivel 3 usaremos la calculadora para resolver problemas más realistas, pero siempre buscando aprovechar la precisión de la calculadora para dar los resultados del modo más correcto posible.

Enunciados

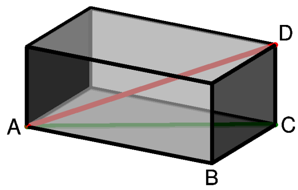
Da todos los resultados con cuatro cifras significativas.

① Las dimensiones de un ortoedro son 5 metros, 3 metros y 2 metros. Calcula la longitud de la diagonal.

② Calcula el volumen de un prisma recto de bases hexagonales de 2 metros de altura sabiendo que el lado de la base mide 3 metros.

Resoluciones

① Un dibujo, aunque sea aproximado, suele ser de utilidad para entender el problema. En la ilustración de la derecha sabemos que $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$ y $\overline{CD} = 2$, por ser las dimensiones del ortoedro. Hay que calcular $\overline{AD}$. Utilizaremos los triángulos rectángulos ABC y ACD.



Aplicamos el teorema de Pitágoras en ABC:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2+\overline{BC}^2 = 5^2+3^2 = 25+9 = 34$. (No es necesario calcular $\overline{AC}$).

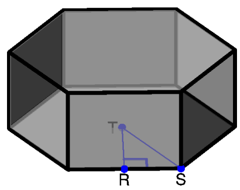
Aplicamos el teorema de Pitágoras en ACD:

$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2+\overline{CD}^2 = 34+2^2 = 34+4 = 38 \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{38} = 6{,}164$

Calculadora: √ 3 8 = ⇨ 6.164414003

Solución: 6,164 metros.

② Para calcular el volumen hace falta primero averiguar el área de la base. Para ello, hay que calcular la longitud de la apotema de los hexágonos de las bases, que llamamos a. Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo RST:



$a^2+\overline{RS}^2 = \overline{ST}^2 \Rightarrow a^2+1{,}5^2 = 3^2 \Rightarrow a = \sqrt{3^2-1{,}5^2} = 2{,}598$

Calculadora: √ (9 − 1 . 5 x²) = ⇨ 2.598076211

Aunque hemos escrito abreviado el valor numérico de a, deberemos usar su valor tal como lo hemos obtenido en la calculadora.

Área de la base = $6{\cdot}3{\cdot}a{:}2 = 9a = 23{,}38$. (Usaremos el valor de la calculadora).

Calculadora: 9 × Ans = ⇨ 23.3826859

Volumen = Base · Altura = $23{,}38 \cdot 2 = 46{,}77$

Calculadora: 2 × Ans = ⇨ 46.76537718

Solución: 46,77 m³

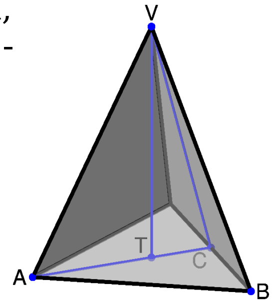
Área y volumen de una pirámide regular

En el nivel 2 vimos que los resultados en este problema suelen ser inexactos. Ha llegado el momento de usar la calculadora para calcularlos con buena aproximación.

Ejemplo

Enunciado. Calcula con cuatro cifras significativas el área y el volumen de una pirámide recta cuya base es un triángulo equilátero de 7 metros de lado sabiendo que las demás aristas miden 11 metros.

Resolución. Utilizamos la notación de la ilustración de la derecha, con cuatro triángulos rectángulos: ABC, ATV, VTC y VCB. En general, según qué datos dé el enunciado, se usarán unos u otros.



Datos: $\overline{AB} = 7$ y $\overline{AV} = 11$

Altura de la pirámide: $\overline{VT} = h$; apotema de la pirámide: $\overline{VC} = m$

Altura de la base: $\overline{AC} = a$; apotema de la base: $\overline{TC}$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC:

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 \Rightarrow a^2+3{,}5^2 = 7^2 \Rightarrow a = \sqrt{7^2-3{,}5^2} = 6{,}062$$

Calculadora: `√‾` `(` `4` `9` `−` `3` `.` `5` `x²` `)` `=` ⇰ 6,062177826

Aunque hemos escrito abreviado el valor numérico de a, deberemos usar su valor tal como lo hemos obtenido en la calculadora, así que lo guardamos en una memoria de la calculadora: `Ans` `STO` `A`

Habrá que usar el área de la base para responder a dos preguntas, así que tiene sentido calcularla independientemente y almacenar el resultado en una memoria:

Área de la base = $A_B = \overline{AB}\cdot\overline{AC}:2 = 7\cdot a:2 = 21{,}21$.

Calculadora: `7` `×` `Ans` `÷` `2` `STO` `B` `=` ⇰ 21,21762239

En este ejemplo el polígono regular de la base es un triángulo equilátero y por eso se da una circunstancia que no se da en los demás polígonos regulares: el radio de la base (AT) y la apotema de la base (TC) están relacionados de una forma muy sencilla, ya que juntos forman la altura y la mediana de la base. Como el punto T es el baricentro de la base, sabemos que dista el doble de A que de C: $\overline{AT} = 2\cdot\overline{TC}$.

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo VCB:

$$\overline{VC}^2+\overline{CB}^2 = \overline{VB}^2 \Rightarrow m^2+\left(\frac{1}{3}a\right)^2 = 11^2 \Rightarrow m = \sqrt{11^2-\left(\frac{1}{3}\cdot a\right)^2} = 10{,}81$$

Calculadora: `√‾` `(` `1` `1` `x²` `−` `(` `RCL` `A` `÷` `3` `)` `x²` `)` `=` ⇰ 10,81280106

Área = $A_B+3\cdot\overline{AB}\cdot m:2 = 21{,}21+3\cdot 7\cdot 10{,}81:2 = 134{,}8$

Calculadora: `RCL` `B` `+` `2` `1` `×` `Ans` `÷` `2` `=` ⇰ 134,7520335

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ATV:

$$\overline{VT}^2+\overline{AT}^2 = \overline{VA}^2 \Rightarrow h^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = 11^2 \Rightarrow h = \sqrt{11^2-\left(\frac{2}{3}\cdot a\right)^2} = 10{,}23$$

Calculadora: `√‾` `(` `1` `1` `x²` `−` `(` `2` `÷` `3` `×` `RCL` `A` `)` `x²` `)` `=` ⇰ 10,23067284

Volumen = $A_B\cdot h:3 = 21{,}21\cdot 10{,}23:3 = 72{,}36$

Calculadora: `RCL` `B` `×` `Ans` `÷` `3` `=` ⇰ 72,35685102

Solución → área: 134,8 m², volumen: 72,36 m³

Enunciados

① Las dimensiones de un ortoedro son 7 metros, 9 metros y 13 metros. Calcula en metros con cuatro cifras significativas la longitud de la diagonal.

② Calcula en metros cúbicos con cuatro cifras significativas el volumen de un prisma recto de bases hexagonales de 7 metros de altura sabiendo que el lado de la base mide 6 metros.

③ Calcula con cuatro cifras significativas el área y el volumen de una pirámide recta cuya base es un triángulo equilátero de 10 metros de lado sabiendo que las demás aristas miden 15 metros.

④ Calcula en metros con cinco cifras significativas la longitud de la diagonal de un hexaedro cuyo lado mide 3 metros.

⑤ Calcula con seis cifras significativas el área y el volumen de un prisma recto de 19 metros de altura sabiendo que sus bases son triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 17 metros y uno de los catetos mide 14 metros.

⑥ Calcula con cuatro cifras significativas el área y el volumen de una pirámide recta cuya base es un cuadrado de 8 metros de lado sabiendo que las demás aristas miden 13 metros.

⑦ Calcula en metros con cinco cifras significativas la longitud de la diagonal de un octaedro regular cuyo lado mide un metro.

⑧ Calcula con seis cifras significativas el área de un prisma recto de 3 m de altura sabiendo que sus bases son rombos cuyas diagonales miden 4 m y 10 m.

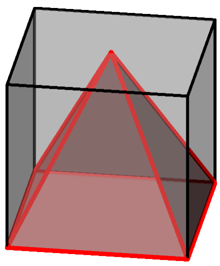
⑨ Calcula con cinco cifras significativas el área y el volumen de una pirámide recta cuya base es un hexágono de 14 metros de lado sabiendo que las demás aristas miden 19 metros.

⑩ Calcula en metros con cuatro cifras significativas la longitud de la mayor diagonal de un prisma recto de bases hexagonales de 5 metros de altura sabiendo que el lado de la base mide 3 metros.

⑪ Calcula con cinco cifras significativas el área de un prisma recto de 7 metros de altura sabiendo que sus bases son triángulos rectángulos cuyos catetos miden 9 metros y 13 metros.

⑫ Calcula con seis cifras significativas el área y el volumen de una pirámide recta cuya base es un octógono de 23 metros de lado sabiendo que las demás aristas miden 41 metros.

⑬ Dentro de un hexaedro de un metro de lado se inscribe una pirámide como se ve en la figura de la derecha. Calcula en milímetros redondeando a la unidad la longitud de las aristas laterales de la pirámide.



⑭ Calcula con seis cifras significativas el área de una pirámide recta de 164,5 m de altura sabiendo que su base es un cuadrado cuyo lado mide 230,4 m (como la pirámide de Guiza).

Uso del número π con calculadora

En los niveles 1 y 2 utilizaste π aproximándolo como 3,14 para resolver muchos problemas; pero eso tiene la dificultad de que los resultados obtenidos son inexactos. En este nivel 3 usaremos la calculadora para resolver estos problemas de manera más cómoda, pero siempre buscando aprovechar la precisión de la calculadora para dar los resultados del modo más correcto posible. Todas las calculadoras científicas escolares incorporan una tecla para introducir el número π. Búscala, porque es la que vamos a usar.

Enunciados

Da todos los resultados con cuatro cifras significativas.

① Calcula el área y el volumen de un cilindro recto cuya altura mide 7 metros y cuya base es un círculo de 3 metros de radio.

② Calcula el área y el volumen de un cono recto cuya altura mide 8 metros y cuya base es un círculo de 11 metros de radio.

Resoluciones

① Sabemos que si llamamos «h» a la longitud de la altura, «r» a la longitud del radio de la base, «A» al área y «V» al volumen, se verifica «$A = 2\pi r^2+2\pi rh$» y «$V=\pi r^2 h$». Por tanto,

$A = 2\pi r^2+2\pi rh = 2\pi\cdot 3^2+2\pi\cdot 3\cdot 7 = 18\pi+42\pi = 60\pi = 188{,}5$

Calculadora: 6 0 × π = ⇨ 188.4955592

$V = \pi r^2 h = \pi\cdot 3^2\cdot 7 = 63\pi = 197{,}9$

Calculadora: 6 3 × π = ⇨ 197.9203372

Solución → área: 188,5 m²; volumen: 197,9 m³

② Sabemos que si llamamos «h» a la longitud de la altura, «r» a la longitud del radio de la base, «g» a la longitud de la generatriz, «A» al área y «V» al volumen, se verifica «$A = \pi r^2+\pi rg$» y «$V = \pi r^2 h:3$».

Calculamos la generatriz: $g^2 = r^2+h^2 \Rightarrow g^2 = 11^2+8^2 \Rightarrow g = \sqrt{121+64} = \sqrt{185}$

Como la raíz no es exacta, la dejamos indicada.

$A = \pi r^2+\pi rg = \pi\cdot 11^2+\pi\cdot 11\sqrt{185} = \pi(121+8\sqrt{185}) = 850{,}2$

Calculadora: π × (1 2 1 + 1 1 × √ 1 8 5) = ⇨ 850.1657892

$V = \pi r^2 h:3 = \pi\cdot 11^2\cdot 8:3 = 1014$

Calculadora: π × 1 2 1 × 8 ÷ 3 = ⇨ 1013.68723

Solución → área: 850,2 m²; volumen: 1014 m³

Comentario

No es imprescindible extraer π como factor común, es posible hacer directamente las operaciones con la calculadora, pero es una técnica que será útil más adelante cuando haya que trabajar sin números concretos, solo con las expresiones con las letras, que es algo muy habitual en matemáticas.

Enunciados

Calcula el área en metros cuadrados y el volumen en metros cúbicos de las siguientes figuras. Da todos los resultados con seis cifras significativas.

① Un cilindro recto cuya altura mide 9 metros y cuya base es un círculo de 4 metros de radio.

② Un cono recto cuya altura mide 13 metros y cuya base es un círculo de 7 metros de radio.

③ Una esfera cuyo radio mide 17 metros.

④ Un cilindro recto cuya altura mide 23 metros y cuya base es un círculo de 19 metros de diámetro.

⑤ Un cono recto cuya generatriz mide 13 metros y cuya base es un círculo de 7 metros de radio.

⑥ Una esfera cuyo diámetro mide 39 metros.

⑦ Un cilindro recto cuya altura mide 6 metros y cuya base es un círculo de 6 metros de radio.

⑧ Un cono recto cuya altura mide 19 metros y cuya generatriz mide 23 metros.

⑨ Una semiesfera cuyo radio mide 31 metros.

⑩ Un cilindro recto cuya altura mide 22 metros y cuya base es un círculo de 14 metros de diámetro.

⑪ Un cono recto cuya altura mide 16 metros y cuya base es un círculo de 9 metros de radio.

⑫ Una esfera cuyo radio mide 21 metros.

⑬ Un cilindro recto cuya altura mide 3 metros y cuya base es un círculo de 10 metros de diámetro.

⑭ Un cono recto cuya generatriz mide 21 metros y cuya base es un círculo de 13 metros de diámetro.

⑮ Una esfera cuyo diámetro mide 65 metros.

⑯ Una semiesfera cuyo diámetro mide 37 metros.

⑰ Un cono recto cuya altura mide 7 metros y cuya generatriz mide 15 metros.

⑱ Un cilindro recto cuya altura mide 13 metros y cuya base es un círculo de 14 metros de diámetro.

⑲ Una semiesfera cuyo diámetro mide 27 metros.

⑳ Un cono recto cuya altura mide 31 metros y cuya base es un círculo de 25 metros de diámetro.

㉑ Una esfera cuyo radio mide 33 metros.

Uso de ecuaciones en geometría

A partir de este nivel ya se pueden resolver algunos problemas de geometría planteando y resolviendo ecuaciones y sistemas de ecuaciones. A partir de ahora, será una de las opciones que deberás considerar para resolver un problema de geometría. Es una técnica particularmente útil cuando conocemos el área o el volumen de una figura y queremos calcular algún lado o el área.

Enunciados

Da todos los resultados con cuatro cifras significativas.

① Calcula el área de un cilindro cuya altura mide 7 metros y su volumen 235 m³.

② Calcula el área de una esfera cuyo volumen mide 19 m³.

Resoluciones

① Llamamos «r» a la longitud del radio de la base del cilindro.

Del enunciado deducimos que $\pi \cdot r^2 \cdot 7 = 235$.

Resolvemos la ecuación: $\pi \cdot r^2 \cdot 7 = 235 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\dfrac{235}{7\cdot\pi}} = \sqrt{\dfrac{235}{7\cdot\pi}} = 3{,}27$

Calculadora: √‾ (2 3 5 ÷ 7 ÷ π) = ⇰ 3.268962772

La solución negativa no es válida puesto que la longitud del radio de la base debe ser positiva.

Nota 1: este razonamiento se da tan a menudo en este tipo de problemas que muchas veces ni siquiera se comenta, y se pasa directamente a considerar solo la solución positiva.

Nota 2: Observa que el enunciado no pide la longitud del radio, pero la hemos calculado por comodidad, para poder usar la tecla Ans de la calculadora.

Calculamos el área del cilindro:

Área = $2\pi r^2 + 2\pi r 7 = 2\pi r(r+7) = 210{,}9$. (Se puede hacer de varias formas).

Calculadora: 2 × π × Ans × (Ans + 7) = ⇰ 210.9193492

Solución: 210,9 m²

② Llamamos «r» a la longitud del radio de la circunferencia.

Del enunciado deducimos que $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = 19$

Resolvemos la ecuación: $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = 419 \Rightarrow r^3 = \dfrac{19\cdot 3}{4\cdot\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{19\cdot 3}{4\cdot\pi}}$

Calculamos el área de la esfera:

Área = $4\pi r^2 = 4\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\dfrac{19\cdot 3}{4\cdot\pi}}\right)^2 = 34{,}43$

Calculadora: 4 × π × (∛‾ (1 9 × 3 ÷ 4 ÷ π)) x^2 = ⇰ 34.43392468

Solución: 34,43 m²

Enunciados

Da todos los resultados con cuatro cifras significativas usando como unidad metros, metros cuadrados o metros cúbicos, según corresponda.

① Calcula el área de un cilindro cuya altura mide 9 m y su volumen 372 m^3.

② Calcula el área de una esfera cuyo volumen mide 32 m^3.

③ El volumen de un prisma recto de base cuadrada mide 193 m^3 y la altura mide 34 m. Calcula la longitud del lado de la base.

④ Calcula la longitud del lado de un hexaedro cuya área mide 217 m^2.

⑤ Calcula el área de un hexaedro cuyo volumen mide 43 m^3.

⑥ Calcula la longitud del radio de la base de un cilindro cuya altura mide 19 m y su volumen 307 m^3.

⑦ Calcula la longitud de la altura de un cilindro cuyo volumen mide 274 m^3 sabiendo que el radio de la base mide 5,2 m.

⑧ El volumen de una pirámide recta de base cuadrada mide 88 m^3 y la altura mide 32 m. Calcula la longitud del lado de la base.

⑨ Calcula el radio de una semiesfera cuyo volumen mide 89 m^3.

⑩ Calcula el radio de una semiesfera cuya área mide 73 m^2.

⑪ Calcula la longitud del radio de la base de un cono cuya altura mide 7 m y su volumen 123 m^3.

⑫ Calcula el diámetro de una esfera cuyo volumen mide 103 m^3.

⑬ Calcula la longitud de la generatriz de un cono cuya área mide 74 m^2 sabiendo que el radio de la base mide 2 m.

⑭ Calcula el diámetro de una esfera cuya área mide 97 m^2.

⑮ Calcula la longitud de la altura de un cono cuyo volumen mide 107 m^3 sabiendo que el radio de la base mide 8 m.

⑯ Calcula el diámetro de la base de un cono de 5 m de altura cuyo volumen mide 33 m^3.

⑰ Calcula el área de una semiesfera cuyo volumen mide 207 m^3.

⑱ Calcula el volumen de una semiesfera cuya área mide 193 m^2.

⑲ Calcula el volumen de un cilindro cuya área mide 249 m^2 sabiendo que el radio de las bases mide 6 m.

⑳ Calcula la longitud del radio de la esfera inscrita en un hexaedro cuyo volumen mide 400 m^3.

Enunciados

① Un diminuto ser vivo está situado en un vértice de un hexaedro cuyo lado mide un metro, se desplaza por el camino más corto posible hasta el vértice diagonalmente opuesto y vuelve al punto de partida por el otro lado, también por el camino más corto posible. Calcula con cuatro cifras significativas:

a) La longitud total que recorre, expresada en metros.

b) El área de la figura plana que describe, expresada en metros cuadrados.

② El área de un cilindro mide doce metros cuadrados y su altura mide igual que el diámetro de la base. Calcula en metros cúbicos con seis cifras significativas el volumen del cilindro.

③ Calcula en metros con cuatro cifras significativas la longitud de la altura de un cono cuya área mide 700 metros cuadrados y el radio de la base 9 metros.

④ Calcula en metros con cuatro cifras significativas la longitud del radio de un cono cuya área mide π metros cuadrados y su generatriz un metro.

⑤ Calcula en metros con cuatro cifras significativas la longitud de la menor diagonal de un prisma recto de base hexagonal cuya altura mide 24 metros sabiendo que el lado de la base mide 31 metros.

⑥ Rodea una naranja muy redonda con una cinta roja. Alarga después la cinta, de modo que rodee la naranja quedando a un metro de su superficie. Supón que pudieras hacer ahora lo mismo con la Tierra (supuesta esférica) con una cinta azul y luego la alargas de manera que rodee la Tierra quedando también a un metro de su superficie. ¿Cuál es el más grande de los alargamientos?

⑦ Se enrolla una cartulina rectangular de dimensiones 30 centímetros y 25 centímetros de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?

⑧ Construimos un cono con cartulina recortando un sector circular de 120° y radio 20 centímetros. Calcula en centímetros cúbicos con cuatro cifras significativas el volumen del cono resultante.

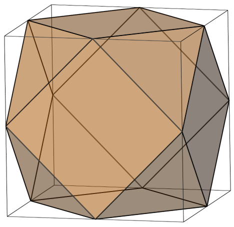
⑨ Un rectángulo de un metro de base y diez metros de altura gira 360° alrededor de una recta paralela a la altura que está situada a dos metros de distancia. Calcula con cuatro cifras significativas el área (en metros cuadrados) y el volumen (en metros cúbicos) del cuerpo que resulta.

⑩ La altura de un cilindro mide 17 centímetros y el radio de la base mide 9 centímetros. Calcula en centímetros con cuatro cifras significativas la longitud de la línea que une, dando una vuelta alrededor del cilindro, un punto de una de las bases con el punto de la otra base que se encuentra exactamente encima.

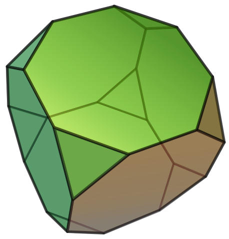
⑪ Calcula en centímetros con cuatro cifras significativas la longitud de un muelle, si se estirara hasta ponerlo recto, sabiendo que su altura mide 23 centímetros, su diámetro mide 11 centímetros y tiene exactamente cinco vueltas.

Enunciados

① Se cortan todas las esquinas de un hexaedro cuyo lado mide diez centímetros por los puntos medios de todas sus aristas y se obteniene una figura llamada cuboctaedro, formado por seis caras cuadradas y ocho triángulos equiláteros, como se ve en la figura de la derecha. Calcula en centímetros cúbicos con cuatro cifras significativas el volumen del cuboctaedro.



② En un hexaedro cuyo lado mide diez centímetros se marcan los puntos de las aristas que distan dos centímetros del vértice más cercano y después se cortan las esquinas por esos puntos, obteniéndose un hexaedro truncado formado por seis caras octogonales (que no son regulares) y ocho triángulos equiláteros, como se ve en la figura de la derecha. Calcula en centímetros cuadrados con cuatro cifras significativas el área del hexaedro truncado.



③ Cuando se entrena para jugar mejor al pádel se utilizan muchas pelotas, que luego hay que recoger. Para facilitar la ingrata tarea de recoger tantas pelotas se utilizan unos recogedores con los que no hay que agacharse. Los recogedores son cilíndricos y todas las bolas quedan recogidas en una sola columna, una sobre otra. Queremos saber cuántas pelotas caben en un recogedor y sabemos estos datos: las pelotas tienen un volumen de 150 centímetros cúbicos, el cogedor tiene un volumen de 4360 centímetros cúbicos y el diámetro del cogedor es dos milímetros mayor que el diámetro de las bolas.

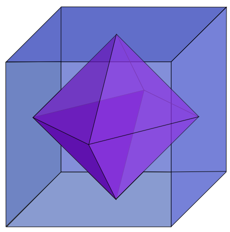
④ Durante muchos años se estudió cuál sería la manera de almacenar un conjunto de esferas del mismo tamaño de modo que ocupen en total el menor volumen posible (es decir, minimizar el volumen del espacio de los huecos entre ellas). Al final resultó que el mejor método era el que ya se estaba usando para almacenar balas de cañón (ilustración de la derecha) y que ahora puedes ver en los supermercados cuando colocan las naranjas para que queden bonitas. Suponiendo que el diámetro de cada bala de cañón de la ilustración midiera 254 milímetros, calcula en milímetros redondenado a la unidad la altura total de la figura formada por todas las balas (es decir, no tengas en cuenta el soporte).

⑤ Calcula con tres cifras significativas:

a) El porcentaje del volumen de un hexaedro que representa una esfera inscrita en él.

b) El porcentaje del volumen de una esfera que representa un hexaedro inscrito en ella.

c) El porcentaje del volumen de una esfera que representa un cilindro inscrito en ella cuya altura mide lo mismo que el diámetro de la base.



d) El porcentaje del volumen de un hexaedro que representa el octaedro cuyos vértices son los puntos medios de las caras del hexaedro (ver figura).

Figuras semejantes

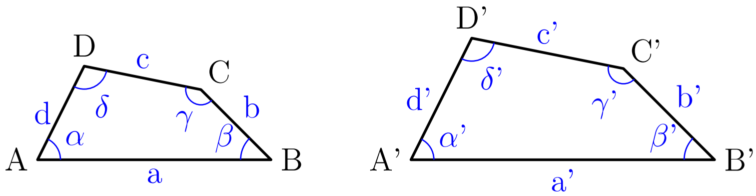
En matemáticas se dice que dos figuras (que pueden ser planas o del espacio) son semejantes cuando cumplen dos propiedades:

* Las longitudes de todos los segmentos que unen dos puntos homólogos de ambas figuras son directamente proporcionales.
* Las amplitudes de todos los ángulos formados por tres puntos homólogos de ambas figuras son iguales.

La expresión «puntos homólogos» significa que siempre hay que comparar en las dos figuras aquellos puntos que están en la misma posición relativa.

Ejemplo 1

Los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D' de la siguiente ilustración son semejantes:



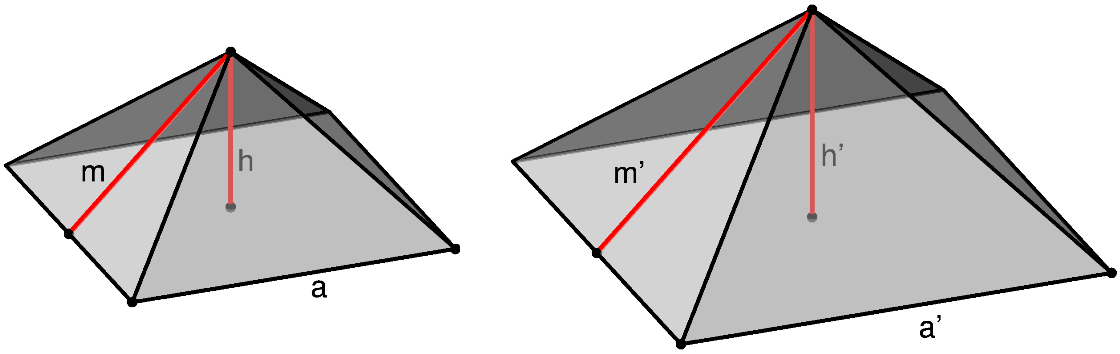
El punto homólogo de A es A', el de B es B', el de C es C' y el de D es D'. Cualquier otro punto se puede considerar según su posición relativa respecto a estos.

Se verifica la proporcionalidad de las longitudes de los lados: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$

Se verifica la igualdad de las amplitudes de los ángulos: $\alpha=\alpha'$; $\beta=\beta'$; $\gamma=\gamma'$ y $\delta=\delta'$

Ejemplo 2

Las dos pirámides siguientes son semejantes:



Los vértices son puntos homólogos, los vértices de las bases son puntos homólogos, los centros de las bases son puntos homólogos, etcétera.

Se verifica la proporcionalidad de las longitudes de los segmentos: $\frac{a}{a'}=\frac{m}{m'}=\frac{h}{h'}$

Los ángulos que forman las aristas tienen la misma amplitud en las dos pirámides.

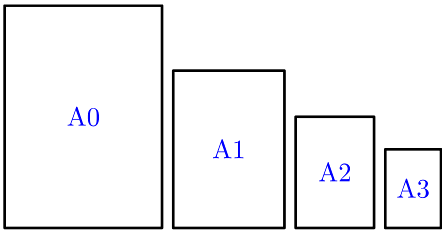
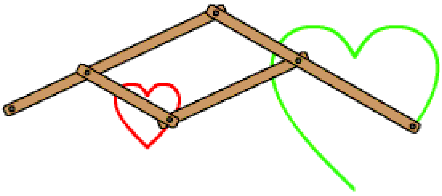
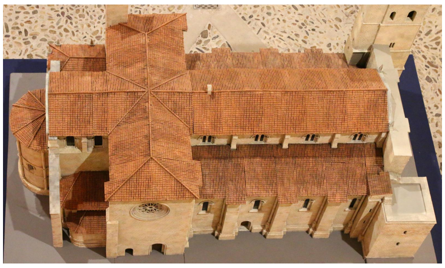
Observaciones

* Cuando se estudia si dos figuras son semejantes, no importa si una está girada respecto a la otra ni si son simétricas.
* Recuerda que las proporciones se pueden escribir de muchas maneras distintas. La elegida para los ejemplos es la que mejor explica la idea de semejanza, pero más adelante podremos usar cualquier otra si nos viene bien.

Figuras semejantes en la vida real

Aunque en la vida real no se lleguen a encontrar figuras que sean exactamente semejantes, en muchos casos sí se aprecia la intención de acercarse todo lo posible.

Ejemplos

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		
Los tamaños de papel ISO - DIN serie A son rectángulos semejantes.	El pantógrafo es un aparato que permite dibujar una figura semejante a otra dada.	Las maquetas y los dioramas se crean de modo que sean semejantes a los originales.

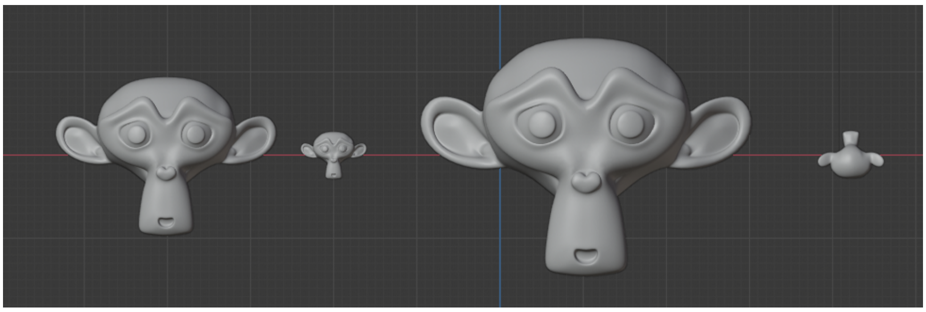
Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6
		
Las muñecas rusas suelen ser semejantes entre sí; de este modo, encajan mejor unas dentro de otras.	Los grandes juegos de utensilios de cocina tienen varios tamaños de modo que sean casi semejantes.	En muchos animales (pero no todos) las crías son versiones más pequeñas de los adultos, pero casi semejantes.

Figuras semejantes en los programas de diseño

Los programas de ordenador dedicados al diseño, tanto 2D como 3D, incorporan una herramienta para crear figuras semejantes a partir de una figura ya creada. La herramienta se suele llamar «escalado».

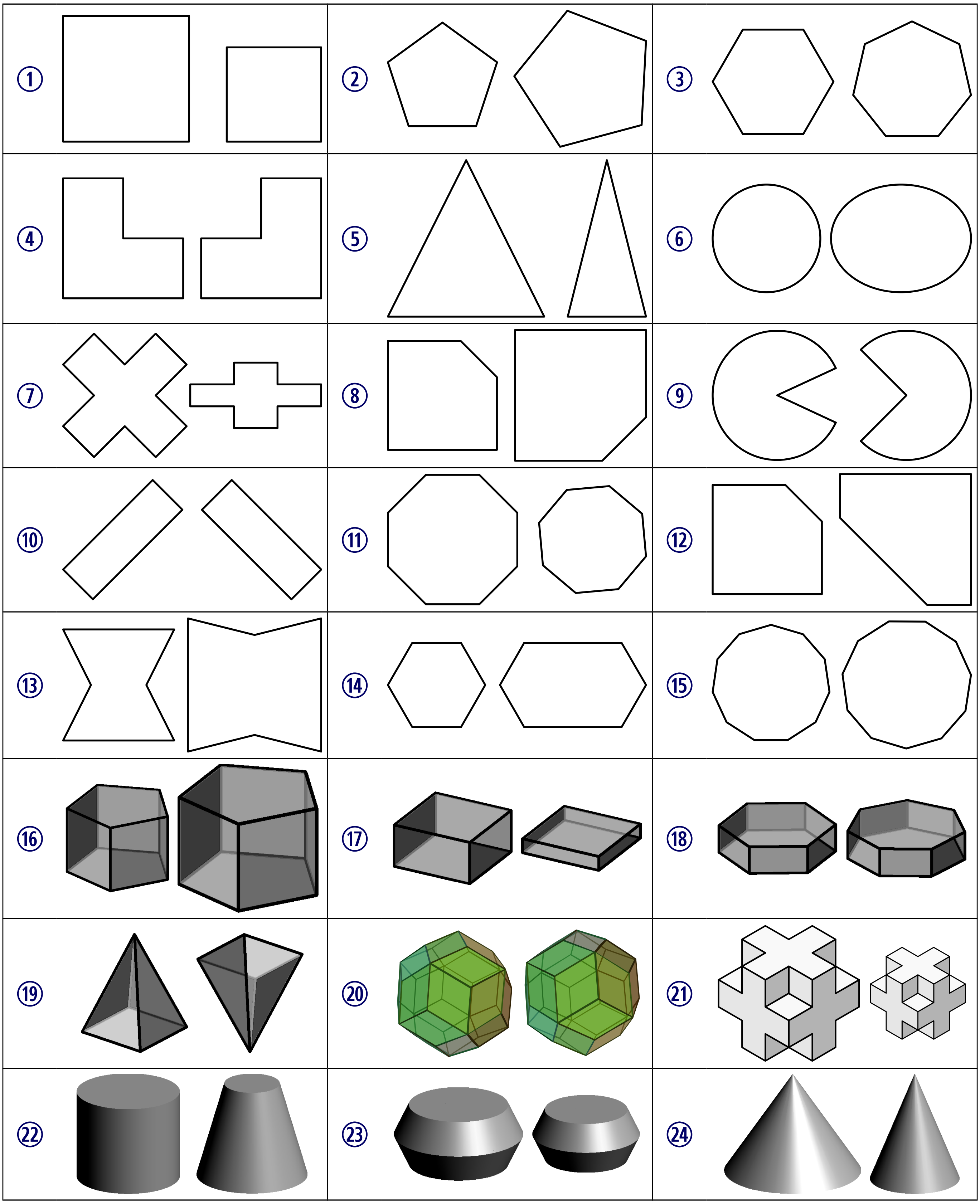
Ejemplo 7

Esta ilustración está tomada de la documentación del programa *Blender*:



Enunciados

Sin tomar medidas, clasifica las siguientes parejas de figuras como que **Sí** son semejantes o **No** lo son.



Razón de semejanza

Por definición de figuras semejantes, el cociente entre las longitudes de dos segmentos que unen puntos homólogos de las dos figuras debe ser siempre el mismo. Este cociente recibe el nombre de **razón de semejanza**. Observa que según se haga el cociente, hay dos razones de semejanza, por lo que orden importa.

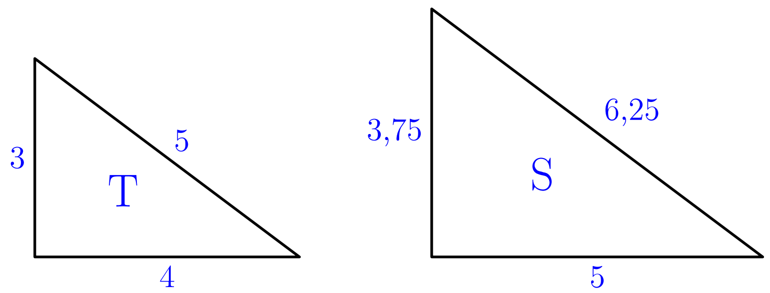
Ejemplo 1

Enunciado

Dados los triángulos T y S de la figura, se pide:

a) Calcula la razón de semejanza entre el triángulo T y el triángulo S.

b) Calcula la razón de semejanza entre el triángulo S y el triángulo T.



Resolución

a) Dividimos la longitud de cualquier segmento que una dos puntos de S entre la longitud del segmento de T que une los puntos homólogos (siempre debe dar el mismo resultado):

$\frac{5}{4}=1{,}25$; $\frac{6{,}25}{5}=1{,}25$; $\frac{3{,}75}{3}=1{,}25$. Solución: 1,25

Observa que los perímetros también verifican esta razón:

$$\frac{\text{Perímetro}(S)}{\text{Perímetro}(T)}=\frac{5+6{,}25+3{,}75}{4+5+3}=\frac{15}{12}=1{,}25$$

b) Dividimos la longitud de cualquier segmento que una dos puntos de T entre la longitud del segmento de S que une los puntos homólogos (siempre debe dar el mismo resultado):

$\frac{4}{5}=0{,}8$; $\frac{5}{6{,}25}=0{,}8$; $\frac{3}{3{,}75}=0{,}8$. Solución: 0,8

Observa que los perímetros también verifican esta razón:

$$\frac{\text{Perímetro}(T)}{\text{Perímetro}(S)}=\frac{4+5+3}{5+6{,}25+3{,}75}=\frac{12}{15}=0{,}8$$

Propiedad

El producto de las dos razones de semejanza siempre es 1.

Ejemplo 2

$1{,}25 \cdot 0{,}8=1$

Observación

Naturalmente, la razón de semejanza no tiene por qué ser un número exacto. Los ejemplos se han preparado para que sí lo sean para mayor facilidad de explicación.

Dificultades en el cálculo de la razón de semejanza

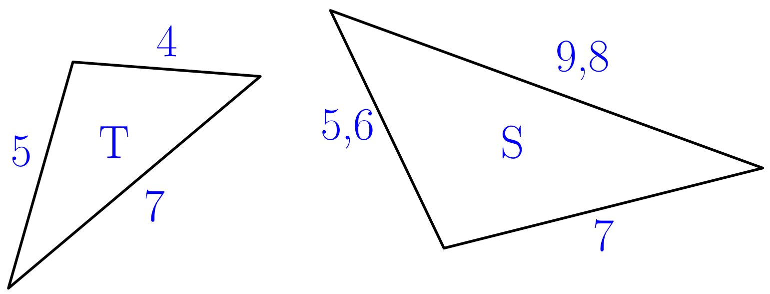
Cuando hay que calcular la razón de semejanza entre dos figuras es imprescindible detectar cuáles son los puntos homógos entre ellas. Esto puede ser difícil en algunos casos, porque las figuras pueden estar giradas respecto a la posición más natural e incluso haber pasado por una simetría respecto a un eje.

Cálculo de la razón de semejanza en triángulos

Cuando las figuras son triángulos, hay un método infalible para averiguar los puntos homólogos: el lado mayor de un triángulo se corresponde con el lado mayor del otro y lo mismo pasa con el lado menor y con el mediano.

Ejemplo 1

Enunciado: calcula la razón de semejanza entre el triángulo T y el triángulo S.



Resolución

Estudiamos cuáles son los lados correspondientes:

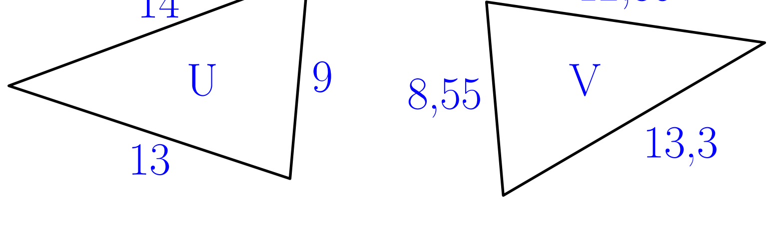
- ✱ El lado de mayor longitud de T mide 7 y el lado de mayor longitud de S mide 9,8, luego son lados correspondientes.
- ✱ El lado de menor longitud de T mide 4 y el lado de mayor longitud de S mide 5,6, luego son lados correspondientes.
- ✱ El lado mediano de T mide 5 y el lado mediano de S mide 7, luego son lados correspondientes.

El enunciado da por sentado que los dos triángulos son semejantes, así que para calcular la razón de semejanza bastará dividir la longitud de un lado de S entre la longitud del lado correspondiente de T; nos dará el mismo resultado con las tres posibilidades que tenemos.

$\frac{9{,}8}{7} = 1{,}4$. Solución: 1,4

Ejemplo 2

Enunciado: calcula la razón de semejanza entre el triángulo U y el triángulo V.

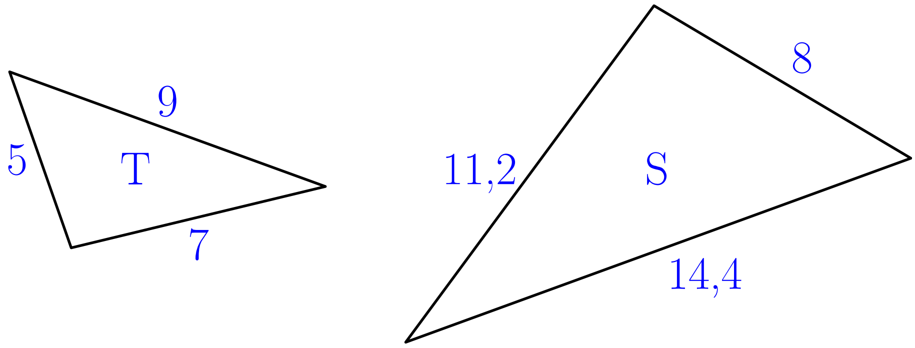


Resolución

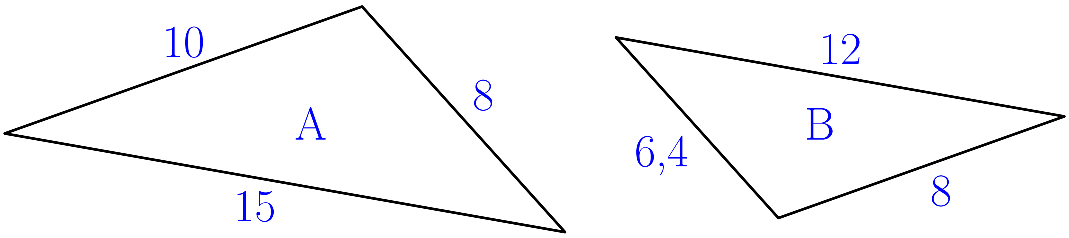
$\frac{8{,}55}{9} = 0{,}95$. Solución: 0,95

Enunciados

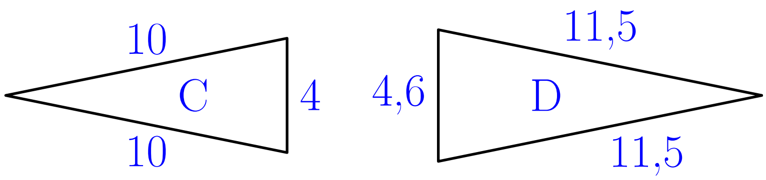
① Calcula la razón de semejanza entre el triángulo T y el triángulo S.



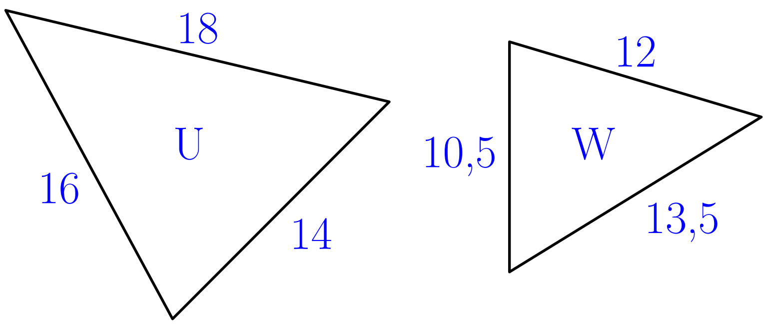
② Calcula la razón de semejanza entre el triángulo A y el triángulo B.



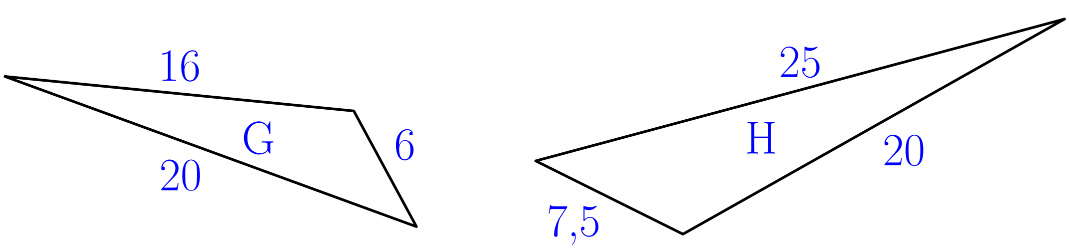
③ Calcula la razón de semejanza entre el triángulo C y el triángulo D.



④ Calcula la razón de semejanza entre el triángulo U y el triángulo W.



⑤ Calcula la razón de semejanza entre el triángulo G y el triángulo H.



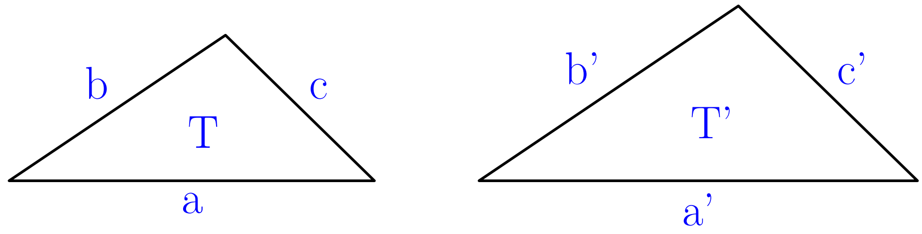
Razón de semejanza y perímetro de figuras planas semejantes

Si la razón de semejanza de dos figuras planas es «r», entonces el cociente de los perímetros de las dos figuras también es «r».

Demostración para triángulos

La demostración para triángulos es muy fácil de entender y es muy parecida a la demostración para cualquier polígono.

Supongamos dos triángulos T y T' como vemos en la figura tales que su razón de semejanza sea «r».



Sabemos que $\frac{a'}{a}=r$, $\frac{b'}{b}=r$ y $\frac{c'}{c}=r$. Por lo tanto, a' = ar, b' = br y c' = cr.

Dividimos los perímetros de los triángulos y, efectivamente, es «r»:

$$\frac{\text{Perímetro de } T'}{\text{Perímetro de } T}=\frac{a'+b'+c'}{a+b+c}=\frac{ar+br+cr}{a+b+c}=\frac{r(a+b+c)}{a+b+c}=r$$

Enunciado

Dos polígonos son semejantes. El lado mayor del primero mide 37 metros y su perímetro mide 322 metros. El lado mayor del segundo mide 44 metros. Calcula con cinco cifras significativas el perímetro del segundo polígono.

Posibilidades de resolución

Podemos resolver este problema pasando por el cálculo explícito de la razón de semejanza, que es una técnica que puede ser útil en otros problemas, o bien planteando directamente una proporción con los tres datos y la incógnita.

Resolución con la razón de semejanza

La razón de semejanza es $r=\frac{44}{37}$. La podemos calcular explícitamente y luego usar una memoria de la calculadora, simplificarla (si se pudiera) o dejarla indicada.

Llamamos P y P' a los perímetros de los polígonos; sabemos que $\frac{P'}{P}=r$, luego

$\frac{P'}{322}=\frac{44}{37}\Rightarrow P'=322\cdot\frac{44}{37}=382{,}92$. Solución: 382,92 m

Resolución sin la razón de semejanza

Si llamamos P y P' a los perímetros y m y m' a las longitudes de los lados mayores, podemos escribir la proporción $\frac{P'}{P}=\frac{m'}{m}$ y de ahí despejar P':

$\frac{P'}{P}=\frac{m'}{m}\Rightarrow\frac{P'}{322}=\frac{44}{37}\Rightarrow P'=322\cdot\frac{44}{37}=382{,}92$. Solución: 382,92 m

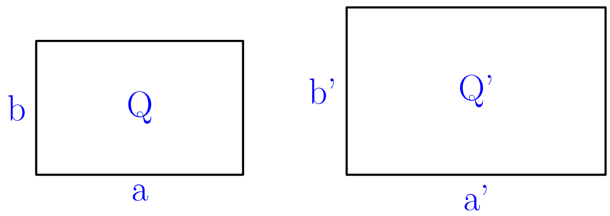
Razón de semejanza y área de figuras semejantes

Si la razón de semejanza de dos figuras planas o del espacio es «r», entonces el cociente de las áreas de las dos figuras es «r²».

Demostración para rectángulos

La demostración para rectángulos es muy fácil de entender y muestra muy bien cuál es la idea principal de esta propiedad.

Supongamos dos rectángulos Q y Q' como vemos en la figura tales que su razón de semejanza sea «r».



Sabemos que $\frac{a'}{a}=r$ y $\frac{b'}{b}=r$. Por lo tanto, $a'=ar$ y $b'=br$.

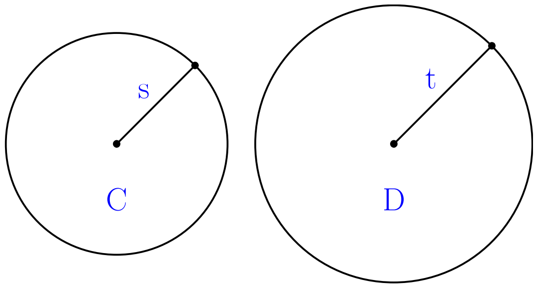
Dividimos las áreas de los rectángulos y, efectivamente, es «r²»:

$$\frac{\text{Área de } Q'}{\text{Área de } Q}=\frac{a'\cdot b'}{a\cdot b}=\frac{ar\cdot br}{a\cdot b}=\frac{r^2\cdot a\cdot b}{a\cdot b}=r^2$$

Demostración para círculos

Las figuras semejantes no tienen por qué ser polígonos, ya que la semejanza es un concepto muy general y hay que mantener una mente abierta. Tiene sentido, por tanto, ver cómo se demuestra esta propiedad para círculos.

Supongamos dos círculos C y D como vemos en la figura tales que su razón de semejanza sea «r».



Sabemos que $\frac{t}{s}=r$, luego $t=sr$.

Dividimos las áreas de los círculos y, efectivamente, es «r²»:

$$\frac{\text{Área de } D}{\text{Área de } C}=\frac{\pi t^2}{\pi s^2}=\frac{t^2}{s^2}=\frac{(sr)^2}{s^2}=\frac{s^2\cdot r^2}{s^2}=r^2$$

Enunciado

Dos polígonos son semejantes. El lado mayor del primero mide 41 metros y su área mide 826 metros cuadrados. El lado mayor del segundo mide 35 metros. Calcula con cinco cifras significativas el área del segundo polígono.

Resolución

La razón de semejanza es $r=\frac{35}{41}$. La podemos calcular explícitamente y luego usar una memoria de la calculadora, simplificarla (si se pudiera) o dejarla indicada.

Llamamos A y A' a las áreas de los polígonos; sabemos que $\frac{A'}{A}=r^2$, luego

$$\frac{A'}{826}=\left(\frac{35}{41}\right)^2 \Rightarrow A'=826\cdot\left(\frac{35}{41}\right)^2=601{,}93.$$ Solución: 601,93 m²

Razón de semejanza y volumen de cuerpos semejantes

Si la razón de semejanza de dos cuerpos es «r», entonces el cociente de los volúmenes de los dos cuerpos es «r^3».

Demostración para ortoedros

La demostración para ortoedros es muy fácil de entender y muestra muy bien cuál es la idea principal de esta propiedad.

Supongamos dos ortoedros semejantes llamados Z y Z' tales que su razón de semejanza sea «r»; llamamos a, b y c a las dimensiones de Z y a', b' y c' a las dimensiones de Z'.

Sabemos que $\frac{a'}{a}=r$, $\frac{b'}{b}=r$ y $\frac{c'}{c}=r$. Por lo tanto, a' = ar, b' = br y c' = cr.

Dividimos las volúmenes de los ortoedros y, efectivamente, es «r^3»:

$$\frac{\text{Volumen de } Z'}{\text{Volumen de } Z} = \frac{a'\cdot b'\cdot c'}{a\cdot b\cdot c} = \frac{ar\cdot br\cdot cr}{a\cdot b\cdot c} = \frac{r^3\cdot a\cdot b\cdot c}{a\cdot b\cdot c} = r^3$$

Demostración para esferas

Los cuerpos semejantes no tienen por qué ser poliedros, ya que la semejanza es un concepto muy general y hay que mantener una mente abierta. Tiene sentido, por tanto, ver cómo se demuestra esta propiedad para esferas.

Supongamos dos esferas E y F tales que su razón de semejanza sea «r»; llamamos s al radio de E y t al radio de F.

Sabemos que $\frac{t}{s}=r$, luego t=sr.

Dividimos los volúmenes de las esferas y, efectivamente, es «r^3»:

$$\frac{\text{Volumen de } F}{\text{Volumen de } E} = \frac{\frac{4}{3}\pi t^3}{\frac{4}{3}\pi s^3} = \frac{t^3}{s^3} = \frac{(sr)^3}{s^3} = \frac{s^3\cdot r^3}{s^3} = r^3$$

Enunciado

Dos poliedros son semejantes. La arista menor del primero mide 93 metros y su volumen mide 3256 metros cúbicos. La arista menor del segundo mide 107 metros. Calcula con cinco cifras significativas el volumen del segundo poliedro.

Resolución

La razón de semejanza es $r=\frac{107}{93}$. La podemos calcular explícitamente y luego usar una memoria de la calculadora, simplificarla (si se pudiera) o dejarla indicada.

Llamamos V y V' a los volúmenes de los poliedros; sabemos que $\frac{V'}{V}=r^3$, luego

$$\frac{V'}{3256} = \left(\frac{107}{93}\right)^3 \Rightarrow V' = 3256\cdot\left(\frac{107}{93}\right)^3 = 4958{,}9.$$ Solución: 4958,9 m^3

Razón de semejanza, área y volumen de cuerpos semejantes

Sabemos que si la razón de semejanza entre dos cuerpos es «r», el cociente de sus áreas es «r^2» y el cociente de sus volúmenes es «r^3». Esto permite resolver algunos ejercicios que veremos ahora y también estudiar el comportamiento de algunas especies animales según cambia su tamaño.

Enunciados

① Dos poliedros son semejantes. El área del primero mide 23,7 metros cuadrados y su volumen mide 173,8 metros cúbicos. El área del segundo mide 42,5 metros cuadrados. Se pide calcular con cuatro cifras significativas:

a) La razón de semejanza. b) El volumen del segundo poliedro.

② Dos poliedros son semejantes. El volumen del primero mide 783,5 metros cúbicos y su área mide 85,4 metros cuadrados. El volumen del segundo mide 742,1 metros cúbicos. Se pide calcular con cuatro cifras significativas:

a) La razón de semejanza. b) El área del segundo poliedro.

Resoluciones

① a) Obtenemos la razón de semejanza, que llamamos «r», dividiendo las áreas:

$$r^2 = \frac{42{,}5}{23{,}7} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{42{,}5}{23{,}7}} = 1{,}339$$

Calculadora: √ (4 2 . 5 ÷ 2 3 . 7) = ⇨ 1.339122453

b) Con la razón de semejanza calculamos el volumen pedido, que llamamos V:

$$\frac{V}{173{,}8} = r^3 \Rightarrow V = 173{,}8 \cdot r^3 = 417{,}4$$

Calculadora: 1 7 3 . 8 × Ans x^3 = ⇨ 417.3598313

Solución: (a) 1,339 (b) 417,4 m^3

② a) Obtenemos la razón de semejanza, «r», dividiendo los volúmenes:

$$r^3 = \frac{742{,}1}{783{,}5} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{742{,}1}{783{,}5}} = 0{,}9821$$

Calculadora: ∛ (7 8 3 . 5 ÷ 7 4 2 . 1) = ⇨ 0.9820671058

b) Con la razón de semejanza calculamos el área pedida, que llamamos A:

$$\frac{A}{85{,}4} = r^2 \Rightarrow A = 85{,}4 \cdot r^2 = 82{,}36$$

Calculadora: 8 5 . 4 × Ans x^2 = ⇨ 82.36451736

Solución: (a) 0,9821 (b) 82,36 m^2

Influencia en el desarrollo animal

Si la longitud de un animal se multiplica por 2, su área se multiplica por 4 pero su volumen (y por tanto su masa) se multiplica por 8. Esto limita el crecimiento del animal, porque llega un momento en que la estructura ósea no puede soportar el peso del cuerpo.

Enunciados

① Dos polígonos son semejantes. El lado mayor del primero mide 53 metros y su perímetro mide 417 metros. El lado mayor del segundo mide 67 metros. Se pide calcular con cuatro cifras significativas:

a) La razón de semejanza. b) El perímetro del segundo poliedro.

② Dos polígonos son semejantes. El lado mayor del primero mide 37 metros y su área mide 559 metros cuadrados. El lado mayor del segundo mide 29 metros. Se pide calcular con cuatro cifras significativas:

a) La razón de semejanza. b) El área del segundo poliedro.

③ Dos poliedros son semejantes. La arista menor del primero mide 103 metros y su volumen mide 2582 metros cúbicos. La arista menor del segundo mide 117 metros. Se pide calcular con cuatro cifras significativas:

a) La razón de semejanza. b) El volumen del segundo poliedro.

④ Dos poliedros son semejantes. El área del primero mide 48 metros cuadrados y su volumen mide 203 metros cúbicos. El área del segundo mide 61 metros cuadrados. Se pide calcular con cuatro cifras significativas:

a) La razón de semejanza. b) El volumen del segundo poliedro.

⑤ Dos poliedros son semejantes. El volumen del primero mide 592 metros cúbicos y su área mide 117 metros cuadrados. El volumen del segundo mide 507 metros cúbicos. Se pide calcular con cuatro cifras significativas:

a) La razón de semejanza. b) El área del segundo poliedro.

⑥ Dos polígonos son semejantes. El lado menor del primero mide 51 metros y su área mide 337 metros cuadrados. El lado menor del segundo mide 62 metros. Se pide calcular con cuatro cifras significativas:

a) La razón de semejanza. b) El área del segundo poliedro.

⑦ Dos poliedros son semejantes. La arista mayor del primero mide 96 metros y su volumen mide 3089 metros cúbicos. La arista mayor del segundo mide 73 metros. Se pide calcular con cuatro cifras significativas:

a) La razón de semejanza. b) El volumen del segundo poliedro.

⑧ Dos poliedros son semejantes. El área del primero mide 75 metros cuadrados y su volumen mide 482 metros cúbicos. El área del segundo mide 64 metros cuadrados. Se pide calcular con cuatro cifras significativas:

a) La razón de semejanza. b) El volumen del segundo poliedro.

⑨ Dos poliedros son semejantes. El volumen del primero mide 603 metros cúbicos y su área mide 431 metros cuadrados. El volumen del segundo mide 667 metros cúbicos. Se pide calcular con cuatro cifras significativas:

a) La razón de semejanza. b) El área del segundo poliedro.

Enunciados

① Para embaldosar el suelo de una habitación cuadrada de 3 metros de lado se han necesitado 144 baldosas. Para otra habitación cuadrada han hecho falta 400 baldosas. Calcula la longitud del lado de la segunda habitación. Da el resultado en metros.

② Un alfarero prepara una figura que tiene 23 centímetros de altura; el material para hacerla le cuesta 127 euros y la pintura para prepararla le cuesta 45 euros. Está pensando en preparar una figura que tenga 30 centímetros de altura, pero quiere saber (redondeando al euro):

a) Cuánto le costaría el material para hacerla.

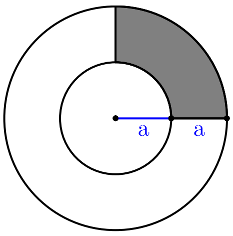
b) Cuánto le costaría la pintura.

③ En un chalet de lujo hay dos piscinas, una para adultos y otra infantil. Los dueños del chalet han pedido construir las piscinas de forma que sean semejantes. La profundidad de la piscina para adultos es 1,8 metros y la de la piscina infantil es 40 centímetros.

a) Cuando construyeron las piscinas el material del revestimiento de la piscina infantil costó 3785 euros. ¿Cuánto les costó el revestimiento de la piscina para adultos? Da el resultado en euros redondeando a la unidad.

b) Si para llenar la piscina de adultos hay que utilizar 235 metros cúbicos de agua, ¿cuánta agua será necesaria para llenar la piscina infantil? Da el resultado en litros redondeando a la unidad.

④ Sabiendo que el área de la parte sombreada de la figura de la derecha mide 75 u², calcula el área del menor de los círculos.

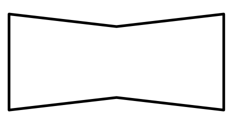
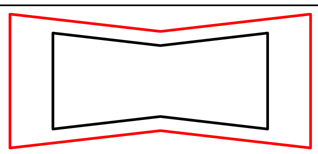
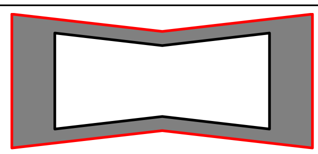


⑤ Se construye un cilindro con las siguientes características: su masa es 2400 kilogramos y la superficie de cada base es 150 centímetros cuadrados. El cilindro estará apoyado sobre una de sus bases para cumplir su función de sustentación.

a) Calcula cuántos kilogramos de masa corresponden por cada centímetro cuadrado de área de la base.

b) Si se construyera un cilindro semejante del mismo material con una razón de semejanza de 1,5, ¿cuántos kilogramos de masa corresponderían con cada centímetro cuadrado de área de la base?

⑥ Dibujamos el polígono de la ilustración 1 y llamamos «A» al valor de su área. A partir de él, dibujamos otro polígono semejante con razón de semejanza 1,4, que vemos en rojo en la ilustración 2. Queremos estudiar el área que queda entre los dos polígonos, que llamamos «B», mostrada en gris en la ilustración 3. ¿Por cuánto hay que multiplicar «A» para obtener «B»?

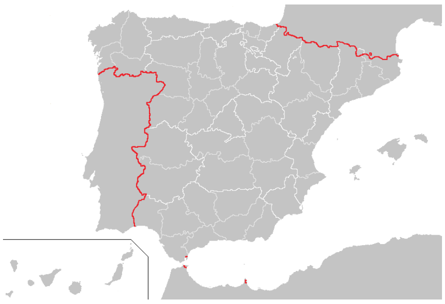
Ilustración 1	Ilustración 2	Ilustración 3
		

Representaciones de la realidad

Los humanos usamos muy a menudo representaciones de la realidad, es una parte importante de nuestras capacidades cognitivas. Cuando es posible, preferimos que la realidad y su representación sean semejantes, en el sentido matemático que estamos estudiando.

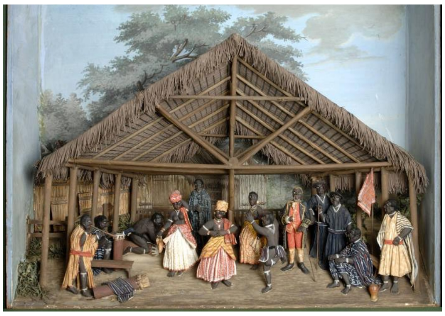
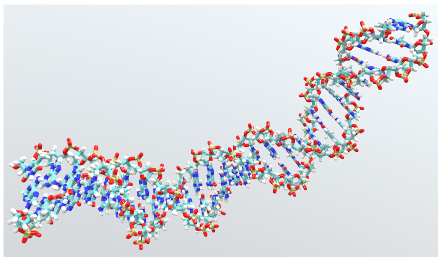
Planos, mapas y croquis

Son representaciones bidimensionales de la realidad.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		
El plano de la planta baja de un chalet	El mapa de las provincias de España	La representación esquemática de una célula

Esculturas, dioramas y modelos

Son representaciones tridimensionales de la realidad.

Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6
		
Una escultura de Oscar Wilde en Dublín (Irlanda)	Un diorama en un museo de Ámsterdam (Países Bajos)	El modelo de una molécula de ADN

Escala

- ✱ Se ulitiza para decir la relación que hay entre las longitudes de la realidad y la representación. Es una manera particular de escribir la razón de semejanza.
- ✱ La escala se escribe como cociente indicado entre la longitud en la representación y la longitud de la realidad, de modo que una de las dos sea un «1».
- ✱ Ejemplo 7: una escala 1:10 000 significa que una unidad de longitud en la representación se corresponde con 10 000 unidades en la realidad.
- ✱ Ejemplo 8: una escala 200:1 significa que una unidad de longitud en la realidad se corresponde con 200 unidades en la representación.

Enunciados

① En un mapa vemos indicado que la distancia entre dos pueblos es 75 kilómetros y medimos que en el mapa la distancia entre sus representaciones es 15 centímetros. Calcula la escala del mapa.

② Compramos un modelo de locomotora en el que el diámetro de las ruedas es 6,25 milímetros. Sabemos que las ruedas de esas locomotoras reales miden un metro de diámetro. Calcula la escala del modelo.

③ El óvulo es la célula de mayor tamaño de los humanos: su diámetro mide 150 micrómetros, así que casi se puede apreciar a simple vista. Para explicarlo mejor a las personas interesadas, una empresa crea un modelo de 30 centímetros de diámetro. Calcula la escala del modelo.

④ En el Monumento Nacional Monte Rushmore se pueden ver los rostros de cuatro presidentes de Estados Unidos con 18 metros de altura. Suponiendo que los rostros de los personajes medían en realidad 24 centímetros, calcula la escala de las esculturas.

Resoluciones

① $\text{Escala} = \dfrac{\text{Longitud en el mapa}}{\text{Longitud en la realidad}} = \dfrac{15\,\text{cm}}{75\,\text{km}} = \dfrac{0{,}15\,\text{m}}{75000\,\text{m}} = \dfrac{0{,}15}{75000} = \dfrac{1}{500000}$

Hay que convertir en «1» el menor de los dos números (el 0,15).

Calculadora: 7 5 0 0 0 ÷ . 1 5 = ⇨ 500000

Solución → 1:500 000

② $\text{Escala} = \dfrac{\text{Longitud en el modelo}}{\text{Longitud en la realidad}} = \dfrac{6{,}25\,\text{mm}}{1\,\text{m}} = \dfrac{6{,}25\,\text{mm}}{1000\,\text{mm}} = \dfrac{6{,}25}{1000} = \dfrac{1}{160}$

Hay que convertir en «1» el menor de los dos números (el 6,25).

Calculadora: 1 0 0 0 ÷ 6 . 2 5 = ⇨ 160

Solución → 1:160

③ $\text{Escala} = \dfrac{\text{Longitud en el modelo}}{\text{Longitud en la realidad}} = \dfrac{30\,\text{cm}}{150\,\mu\text{m}} = \dfrac{300000\,\mu\text{m}}{150\,\mu\text{m}} = \dfrac{300000}{150} = \dfrac{2000}{1}$

Hay que convertir en «1» el menor de los dos números (el 150).

Calculadora: 3 0 0 0 0 0 ÷ 1 5 0 = ⇨ 2000

Solución → 2000:1

④ $\text{Escala} = \dfrac{\text{Longitud en la escultura}}{\text{Longitud en la realidad}} = \dfrac{18\,\text{m}}{24\,\text{cm}} = \dfrac{1800\,\text{cm}}{24\,\text{cm}} = \dfrac{1800}{24} = \dfrac{75}{1}$

Hay que convertir en «1» el menor de los dos números (el 24).

Calculadora: 1 8 0 0 ÷ 2 4 = ⇨ 75

Solución → 75:1

Observación

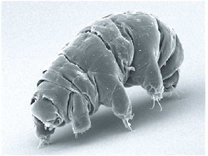
Es fundamental el paso en el que se simplifican las unidades de medida.

Enunciados

① La escala H0 es la una de las más utilizadas en el modelismo ferroviario. Si se construye con ella un modelo de una locomotora que mida 17,4 metros de longitud, el modelo tendrá una longitud de 20 centímetros. Calcula el valor de la escala H0.

② El estudio de arquitectura que diseña un nuevo bloque de viviendas entrega al promotor los planos de las nuevas viviendas en formato de papel DIN-A3. La pared más larga del salón medirá en la realidad 8 metros y en el plano mide 16 centímetros. ¿Qué escala está usando el estudio de arquitectura?

③ Los tardígrados son unos animales muy peculiares que sobreviven en ambientes extremos. Su longitud puede ser de hasta 0,5 milímetros. En una exposición sobre naturaleza misteriosa se puede ver la foto de un ejemplar grande de modo que en la foto tiene 75 centímetros de longitud. Calcula la escala de la foto.



④ La escultura *Carmen despierta*, del pintor y escultor español Antonio López (nacido en 1936), mide 3 metros de altura. Si suponemos que la altura de la cabeza de la modelo (la sobrina del autor) medía 20 centímetros cuando se hizo la escultura. ¿A qué escala está hecha?

⑤ El cohete Saturno V fue el utilizado en el siglo XX para llevar a doce personas hasta la superficie de la Luna. Medía 110,6 metros de altura; durante muchos años, el más alto jamás construido. Si consigues comprar una reproducción que mida 14 centímetros de altura, ¿a qué escala estará hecha?

⑥ En el relato corto del escritor argentino Jorge Luis Borges (1899-1986) *Del rigor en la ciencia* podemos leer: «Colegios de Cartógrafos levantaron un Mapa del Imperio, que tenía el Tamaño del Imperio y coincidía puntualmente con él». ¿Cuál era la escala del mapa que imaginó Borges?

⑦ Uno de los cuadros más famosos del mundo es *La Gioconda*, pintado por el polifacético italiano Leonardo da Vinci (1452-1519). El cuadro tiene una altura de 73 centímetros y ha sido reproducido en multitud de ocasiones (como vemos a la derecha). En 2006 apareció en Oregón (Estados Unidos) una reproducción en el campo que medía 19,71 metros de alto. Calcula la escala a la que se pintó la reproducción.

⑧ Las personas aficionadas a la Fórmula 1 pueden comprar reproducciones a escala de algunos coches. Por ejemplo, hay una reproducción que mide 6 decímetros de longitud de un coche que tenía una longitud de 4,8 metros. ¿A qué escala está fabricada esta reproducción?

⑨ Si estamos viendo una foto en un teléfono móvil y un objeto que tiene un diámetro de 150 píxeles lo ampliamos hasta que tenga 1200 píxeles, ¿a qué escala lo hemos ampliado?

Enunciados

① Estamos preparando una maqueta a escala 1:250 para mostrar un pueblo en una exposición. La torre más alta del pueblo mide 45 metros; queremos saber qué altura tendrá la torre en la maqueta. Da el resultado en centímetros.

② Compramos una reproducción de un coche de Fórmula 1 a escala 1:18 que mide 25 centímetros de longitud. Calcula la longitud del coche real. Da el resultado en metros.

③ El *David* del artista italiano Miguel Ángel (1475-1564) es una impresionante escultura a escala 3:1 de una persona de estatura media. Si la distancia entre los ojos de la escultura es 26,5 centímetros, ¿cuál sería la distancia entre ojos de la persona? Da el resultado en milímetros redondeando a la unidad.

④ Hacemos una microfotografía a escala 1500:1 de un paramecio que mide 0,18 milímetros de longitud. ¿Qué longitud presentará el paramecio en la microfotografía? Da el resultado en centímetros redondeando a la unidad.

Resoluciones

① Llamamos «x» a la altura pedida.

$$\frac{\text{Longitud en la maqueta}}{\text{Longitud en la realidad}} = \text{Escala} \Rightarrow \frac{x}{45} = \frac{1}{250} \Rightarrow x = \frac{45}{250} = 0{,}18\ \text{m} = 18\ \text{cm}$$

Solución: 18 cm

② Llamamos «x» a la longitud pedida.

$$\frac{\text{Longitud en la maqueta}}{\text{Longitud en la realidad}} = \text{Escala} \Rightarrow \frac{25}{x} = \frac{1}{18} \Rightarrow x = 25 \cdot 18 = 450\ \text{cm} = 4{,}50\ \text{m}$$

Solución: 4,50 m

③ Llamamos «x» a la distancia pedida.

$$\frac{\text{Longitud en la maqueta}}{\text{Longitud en la realidad}} = \text{Escala} \Rightarrow \frac{26{,}5}{x} = \frac{3}{1} \Rightarrow x = \frac{26{,}5}{3} = 8{,}8\ \text{cm} = 88\ \text{mm}$$

Solución: 88 mm

④ Llamamos «x» a la longitud pedida.

$$\frac{\text{Longitud en la foto}}{\text{Longitud en la realidad}} = \text{Escala} \Rightarrow \frac{x}{0{,}18} = \frac{1500}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1500 \cdot 0{,}18 = 270\ \text{mm} = 27\ \text{cm}$$

Solución: 27 cm

Enunciados

① En la compañía Airbus, constructora de aviones comerciales, están preparando una maqueta a escala 1:150 de su modelo de mayor tamaño, el Airbus A380, que tiene una envergadura (distancia entre los extremos de las alas) de 79,75 metros. ¿Cuál será la envergadura de la maqueta? Da el resultado en centímetros redondeando a la unidad.

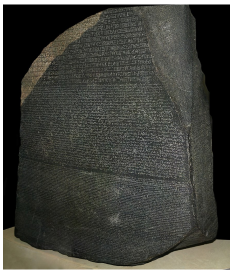
② Compramos una reproducción de la torre Eiffel (París, Francia) a escala 1:300 que mide 108 centímetros de longitud. Calcula la longitud real de la torre. Da el resultado en metros.

③ La estatua de la Libertad de Nueva York (Estados Unidos) es una escultura a escala 20:1 de una mujer de estatura media. La longitud del brazo derecho de la estatua es 12,8 metros. Calcula en centímetros cuál sería la longitud del brazo de la mujer.

④ Hacemos una microfotografía a escala 500:1 de una ameba que mide 0,78 milímetros de diámetro. ¿Qué diámetro presentará la ameba en la microfotografía? Da el resultado en centímetros redondeando a la unidad.

⑤ El edificio de Santa María del Naranco se encuentra muy cerca de Oviedo (Asturias, España). Compramos una maqueta a escala 1:65 y la medimos; la maqueta tiene 36 centímetros de longitud. ¿Cuál es la longitud del edificio? Da el resultado en metros redondeando a la décima.

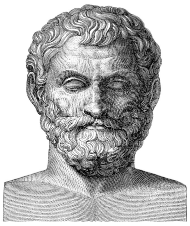
⑥ Para poder estudiar más fácilmente los órganos humanos existen réplicas a escala 2:1. Si la réplica de un corazón mide 11 centímetros de ancho, ¿cuál sería, en centímetros, la anchura del corazón humano?



⑦ La piedra de Rosetta es un importantísimo documento que permitió descifrar los jeroglíficos egipcios, ya que en ella se encuentra el mismo texto en tres idiomas distintos. Se exhibe en el Museo Británico de Londres (Reino Unido) y mide 112,32 centímetros de altura. Si hiciéramos una réplica a escala 1:4, ¿cuál sería su altura? Da el resultado en centímetros.

⑧ Un insecto mide 3,2 centímetros de longitud y lo vemos en nuestra gran televisión del salón con una escala 25:1. ¿Qué longitud tendrá en la televisión la imagen del insecto? Da el resultado en centímetros.

Tales de Mileto



Fue un filósofo, matemático, geómetra, físico y legislador griego que vivió unos 78 años en el siglo I a. e. c. Su nombre incluye el de la ciudad en la que nació, vivió y murió, Mileto, griega durante la vida de Tales y turca actualmente. Aunque no se conserva ningún escrito suyo, se le atribuyen grandes aportaciones en distintas áreas del conocimiento.

Teoremas de Tales

Existen dos teoremas con su nombre:

* Primer teorema de Tales, que trata de las proporciones entre distintos segmentos. Es el que estudiaremos en esta sección.
* Segundo teorema de Tales, que afirma que un triángulo inscrito en una circunferencia que tenga como lado mayor un diámetro es un triángulo rectángulo.

En este libro, cuando nos refiramos al teorema de Tales sin especificar cuál, siempre se entenderá que estamos tratando con el primero.

Primer teorema de Tales

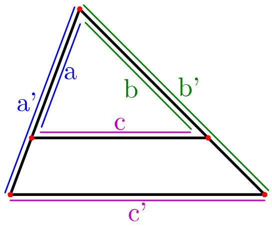
Es un teorema fundamental para tratar la semejanza de triángulos. Es bastante simple de utilizar para resolver ejercicios y para pensar problemas. Pero para explicarlo presenta el pequeño inconveniente de que se puede formular de muchas maneras diferentes.

Como estudiante, te puede resultar confuso ver en distintos textos diferentes enunciados del primer teorema de Tales, pero puedes estar tranquilo porque todas esas expresiones son equivalentes, es decir: si supones cierta cualquiera de ellas, la puedes utilizar para demostrar todas las demás, aunque no se haga en la enseñanza secundaria porque hay otras cosas que se consideran más importantes.

Casi todos los textos con explicaciones matemáticas intentan seguir algún orden lógico, explicar cada concepto nuevo apoyándose en los explicados anteriormente. Y como el primer teorema de Tales admite tantas variantes, cada grupo de autores de textos elige su camino particular.

Cuando domines los distintos modos de expresión del teorema, verás que todo es más sencillo de lo que parece al principio.

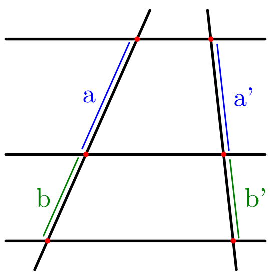
Teorema de Tales para triángulos



Si en un triángulo se traza un segmento paralelo a uno de los lados y que corte a los otros dos, se forma una figura con dos triángulos que tienen los lados correspondientes proporcionales. Se dice que los triángulos están en la posición de Tales.

En la imagen de la derecha se verifica $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

Teorema de Tales para rectas paralelas



Si se cortan tres rectas paralelas mediante dos rectas secantes, los segmentos determinados en las rectas secantes por las rectas paralelas son proporcionales.

En la imagen de la derecha se verifica $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$

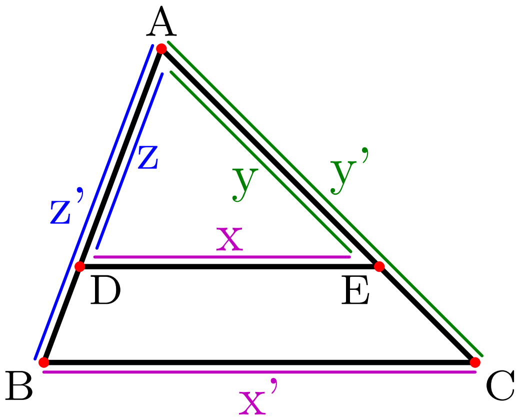
Teorema de Tales para triángulos

El teorema de Tales para triángulos consta de una afirmación directa y su recíproca. En las dos, se dice que los triángulos están en la posición de Tales.

Afirmación directa

Si en el triángulo ABC se traza el segmento DE paralelo al lado BC, entonces los lados correspondientes de los triángulos ABC y ADE son proporcionales.

Usando símbolos: $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$



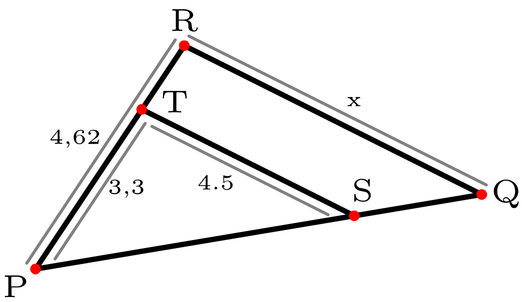
Afirmación recíproca

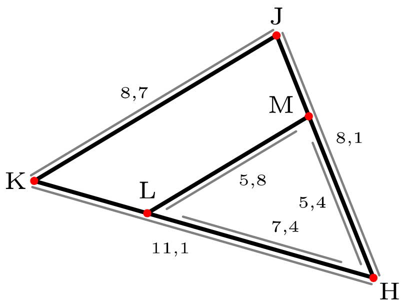
Si en el triángulo ABC se traza el segmento DE y los lados correspondientes de los triángulos ABC y ADE son proporcionales, entonces los segmentos DE y BC son paralelos.

Usando símbolos: $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'} \Rightarrow DE \parallel BC$

Enunciados

① En el triángulo PQR se traza el segmento TS paralelo al segmento QR. Usando los datos de la figura de abajo a la izquierda, calcula la longitud «x».





② En el triángulo HJK se traza el segmento LM. Estudiando las medidas de la figura de arriba a la derecha, demuestra que el segmento KJ y el segmento LM son paralelos.

Resoluciones

① Como los segmentos TS y QR son paralelos, los lados correspondientes de los triángulos PQR y PST son proporcionales. Por tanto:

$$\frac{4{,}62}{3{,}3}=\frac{x}{4{,}5} \Rightarrow x=\frac{4{,}62\cdot 4{,}5}{3{,}3}=6{,}3.\ \text{Solución: } x=6{,}3\,\text{u}$$

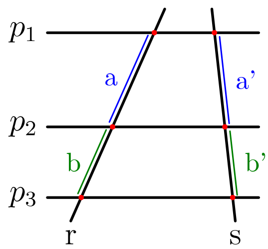
Nota: recuerda que las proporciones se pueden escribir de ocho maneras.

② Estudiamos si los lados correspondientes de los triángulos HJK y HLM son proporcionales:

$$\frac{11{,}1}{7{,}4}=1{,}5;\ \frac{8{,}1}{5{,}4}=1{,}5;\ \frac{8{,}7}{5{,}8}=1{,}5.\ \text{Sí, son proporcionales.}$$

Por tanto, los segmentos KJ y LM son paralelos.

Teorema de Tales para rectas paralelas



Consideramos tres rectas paralelas p_1, p_2 y p_3 cortadas por dos rectas secantes r y s, como se ve en la figura de la derecha.

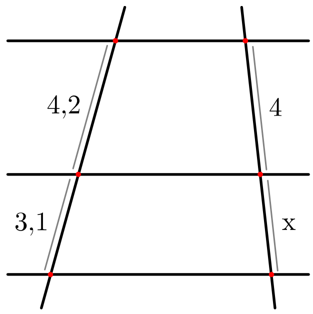
Se verifica $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$

Consecuencias

Usando las propiedades de las proporciones, sabemos que también se verifican estas propiedades:

- $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{a+b}{a'+b'}$
- $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$

Ejemplo



Enunciado. Calcula con tres cifras significativas la longitud denominada «x» en la figura de la derecha.

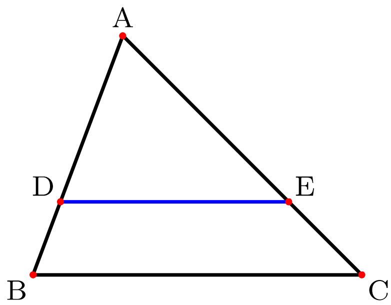
Resolución. Entendemos que las tres líneas horizontales son paralelas, luego se puede establecer una proporción entre los tres datos y la incógnita:

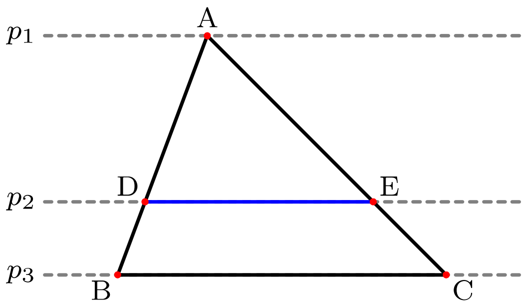
$\frac{4{,}2}{4}=\frac{3{,}1}{x} \Rightarrow x=\frac{4\cdot 3{,}1}{4{,}2}=2{,}95$. Solución: 2,95 u.

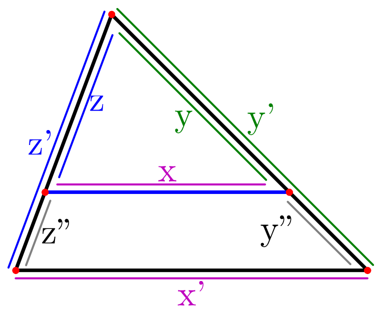
Calculadora: 4 × 3 . 1 ÷ 4 . 2 = ⇨ 2.952380952

Relación entre el teorema de Tales para triángulos y para rectas paralelas

En el triángulo ABC de la figura de abajo a la izquierda se traza el segmento DE paralelo al lado BC. Podremos aplicar el teorema de Tales para triángulos.







Trazamos la recta BC, la recta DE y una paralela a BC que pase por A, como vemos en la figura de arriba en el centro. Podremos aplicar el teorema de Tales para rectas paralelas.

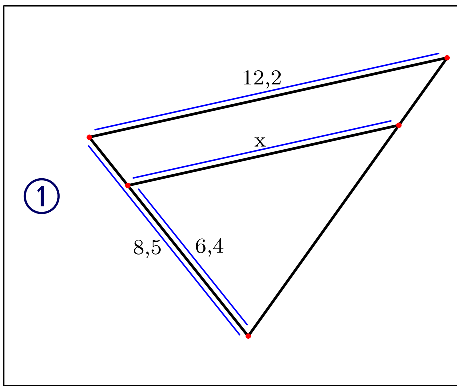
Se pueden considerar en total ocho segmentos, cuyas longitudes vemos nombradas en la figura de arriba a la derecha.

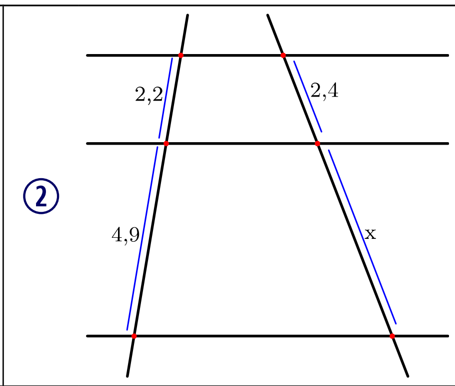
Se verifican dos series de proporciones:

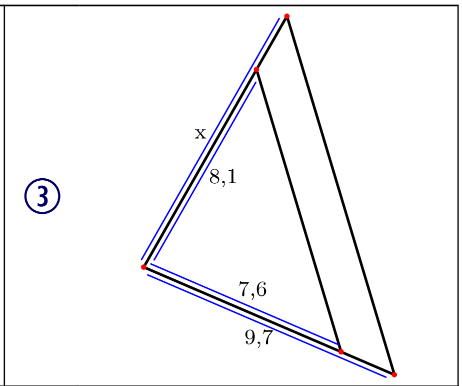
- Por el teorema de Tales para triángulos: $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$
- Por el teorema de Tales para rectas paralelas: $\frac{z}{z''}=\frac{y}{y''}$

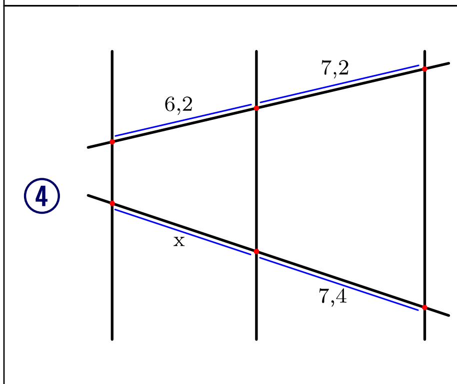
Enunciados

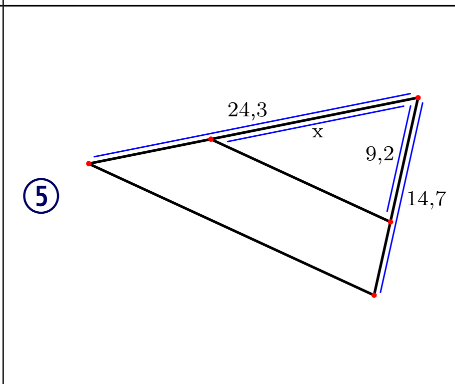
Calcula con tres cifras significativas la longitud denominada «x» en cada una de las siguientes figuras. Cuando haya segmentos que te parezcan paralelos, asume que efectivamente lo son.

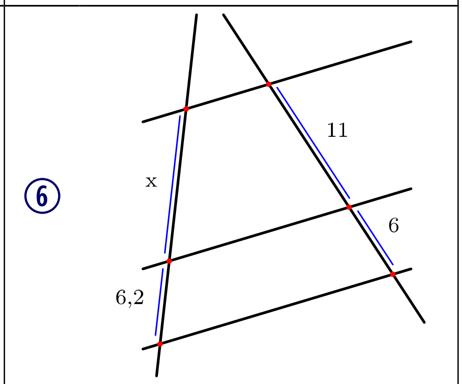


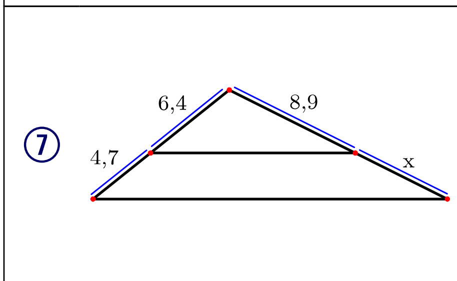


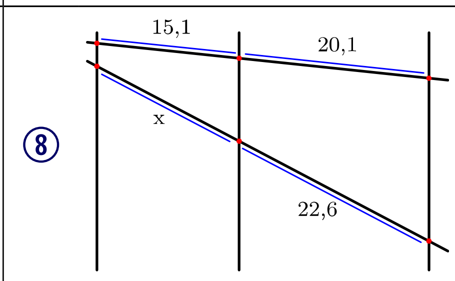


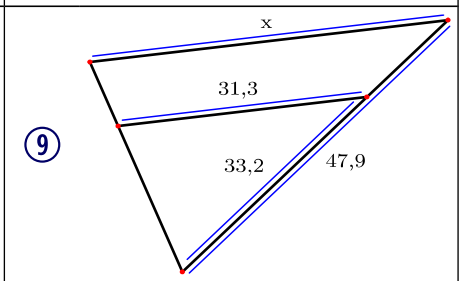


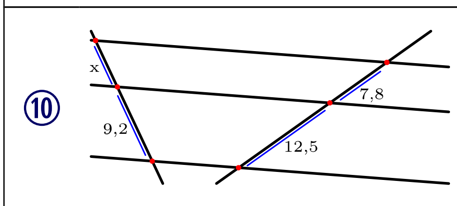


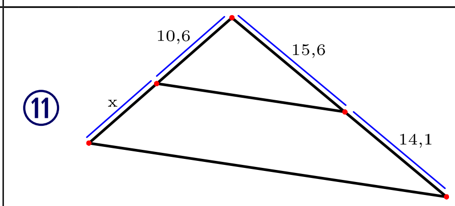


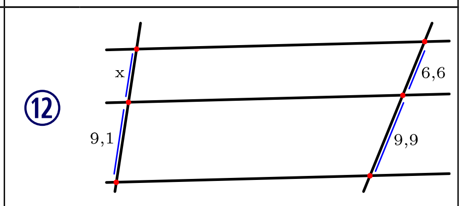


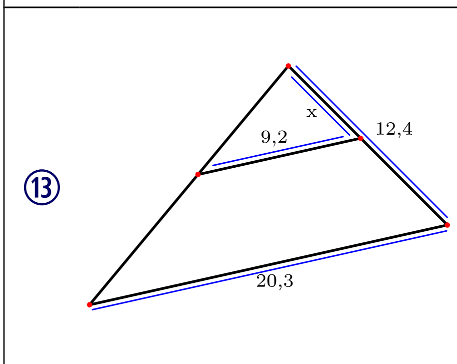


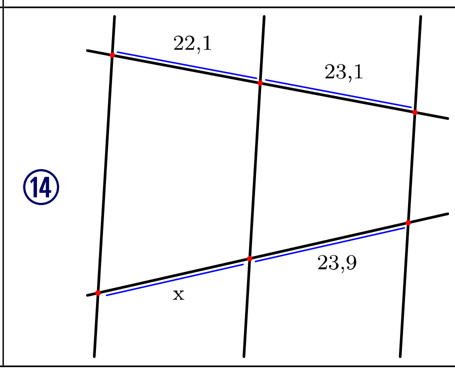


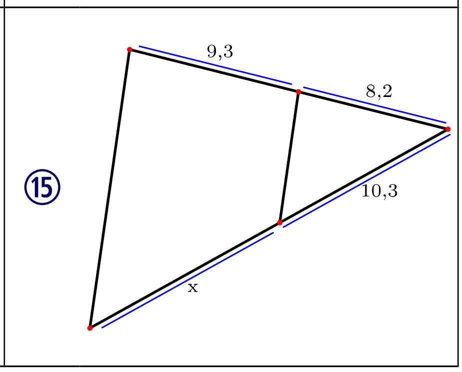








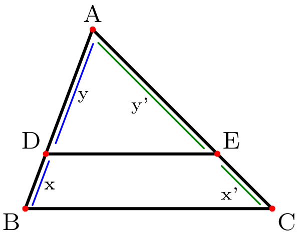




Demostraciones del teorema de Tales

Como es habitual en los teoremas que tienen más de mil años de antiguedad, existen multitud de demostraciones distintas del teorema de Tales. Algunas necesitan mayores conocimientos matemáticos que los de este nivel 3, pero otras son perfectamente asequibles ahora. Te presentamos una parte de la demostración que preparó Euclides en su libro *Elementos*.

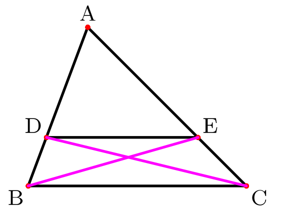
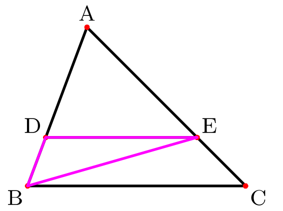
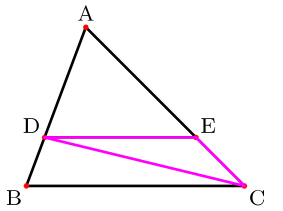
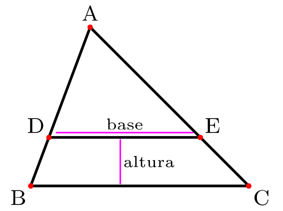
Teorema



Si en el triángulo ABC se traza el segmento DE paralelo al lado BC que corta a los otros dos, se verifica $\frac{x}{y}=\frac{x'}{y'}$

Demostración

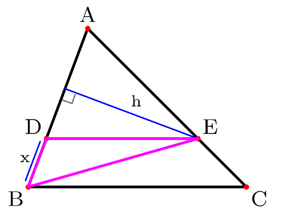
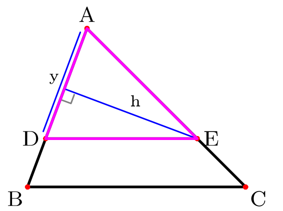
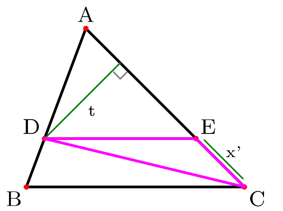
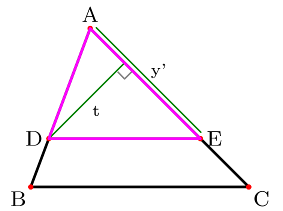
Trazamos los segmentos BE y CD. Consideramos los triángulos BDE y CDE que que se forman:

Segmentos BE y CD	Triángulo BDE	Triángulo CDE	Su base y su altura
			

Los triángulos BDE y CDE tienen la misma área, puesto que la base es la misma (el segmento DE) y la altura es la misma (la distancia entre los segmentos DE y BC).

Por tanto, si dividimos las áreas de los triángulos BDE y CDE entre el área del triángulo ADE obtenemos el mismo resultado: $\frac{\text{Área}(BDE)}{\text{Área}(ADE)}=\frac{\text{Área}(CDE)}{\text{Área}(ADE)}$.

- En el primer miembro de la igualdad:
  - Para calcular el área de BDE usamos como base «x» y como altura «h».
  - Para calcular el área de ADE usamos como base «y» y como altura «h».
- En el segundo miembro de la igualdad:
  - Para calcular el área de CDE usamos como base «x'» y como altura «t».
  - Para calcular el área de ADE usamos como base «y'» y como altura «t».

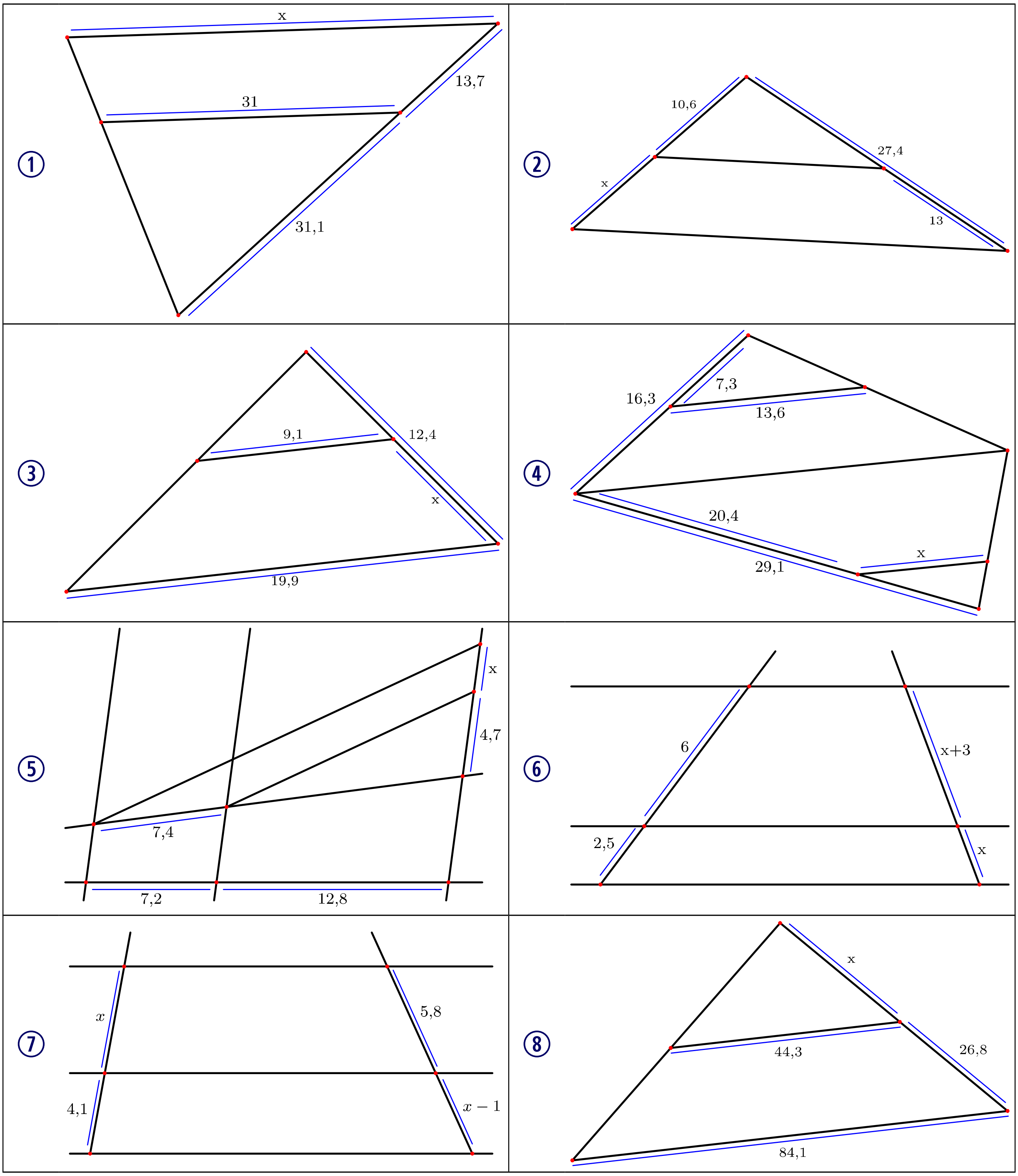
Triángulo BDE	Triángulo ADE	Triángulo CDE	Triángulo ADE
			

Para demostrar el teorema basta desarrollar la expresión y simplificar los factores repetidos en cada división:

$$\frac{\text{Área}(BDE)}{\text{Área}(ADE)}=\frac{\text{Área}(CDE)}{\text{Área}(ADE)} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\cdot x\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot y\cdot h}=\frac{\frac{1}{2}\cdot x'\cdot t}{\frac{1}{2}\cdot y'\cdot t} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{x'}{y'}$$, como queríamos demostrar.

Enunciados

Calcula con tres cifras significativas la longitud denominada «x» en cada una de las siguientes figuras. Cuando haya segmentos que te parezcan paralelos, asume que efectivamente lo son.

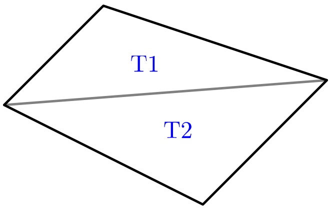
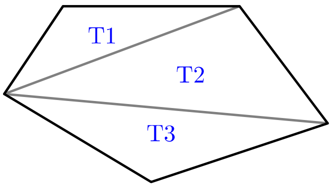
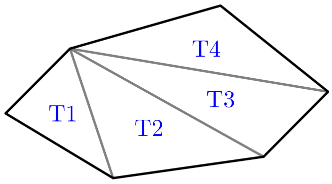
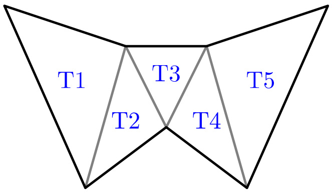


Importancia de los triángulos

Sabemos que los triángulos son los polígonos más sencillos. Por eso, se usan muy a menudo para descomponer figuras más complicadas y estudiarlas.

Descomposición de polígonos

Cualquier polígono se puede descomponer en triángulos usando las diagonales adecuadas. En el nivel 1 usamos esta técnica para calcular la suma de los ángulos de cualquier polígono.

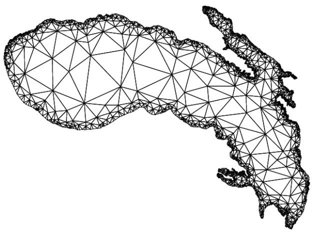
Ejemplo 1	**Ejemplo 2**	**Ejemplo 3**	**Ejemplo 4**
			

Descomposición de otras figuras planas

Se usan los triángulos para aproximarse a figuras reales que no coinciden con figuras matemáticas.

Ejemplo 5

Vemos a la derecha una descomposición de una aproximación del lago Michigan (Estados Unidos) en triángulos mediante una técnica que evita la aparición de ángulos de muy pequeña amplitud (que dan problemas en los cálculos).



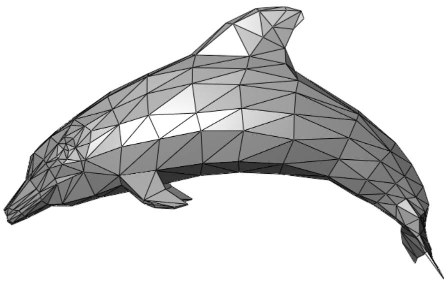
Descomposición de figuras tridimensionales

Una de las aplicaciones más espectaculares de la geometría es el modelado 3D, que permite, por ejemplo, facilitar la creación de películas generadas completamente por ordenador (la primera fue *Toy Story*, en 1995).

El modelado 3D consiste, en esencia, en aproximar la superficie de una figura tridimensional mediante polígonos, formando lo que se conoce como una **malla** (en inglés, *mesh*). La malla suele estar formada por cuadriláteros o por triángulos.

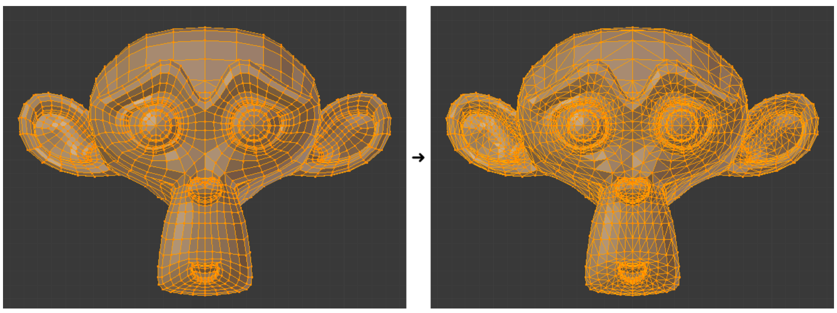
Ejemplo 6

Vemos a la derecha una malla formada por triángulos que permite definir un delfín. Para conseguir efectos realistas el número de triángulos debe ser muy superior al de este ejemplo, lo que también conlleva la necesidad de usar ordenadores de alto rendimiento para el tratamiento del modelado 3D.



Ejemplo 7

El programa de modelado 3D *Blender* permite modificar una malla formada por cuadriláteros en una malla formada por triángulos mediante la herramienta llamada «Modificador Triangular».



Triángulos semejantes

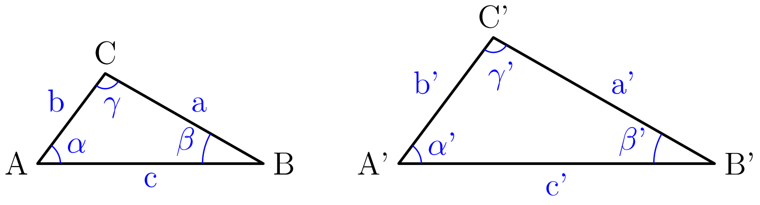
La definición de triángulos semejantes es igual que la de cualquier otra figura, pero es costumbre redactar la definición adaptada a las características de los triángulos.

Definición de triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes cuando tienen los tres ángulos iguales y los tres lados directamente proporcionales. El símbolo de semejanza es «~».

Ejemplo 1

Los triángulos ABC y A'B'C' de esta figura son semejantes (ABC ~ A'B'C'):

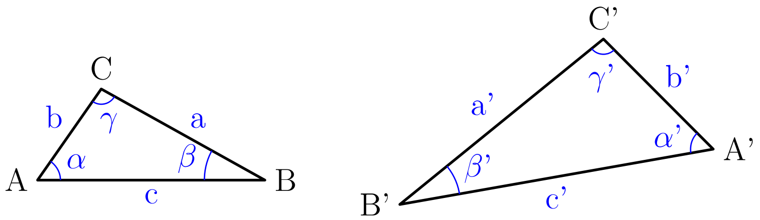


El motivo es que:

- Se verifica la igualdad de las amplitudes de los ángulos α=α'; β=β'; γ=γ'
- Se verifica la proporcionalidad de las longitudes de los lados: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

Ejemplo 2

Los triángulos ABC y A'B'C' de esta figura son semejantes (ABC ~ A'B'C'):



El motivo es que:

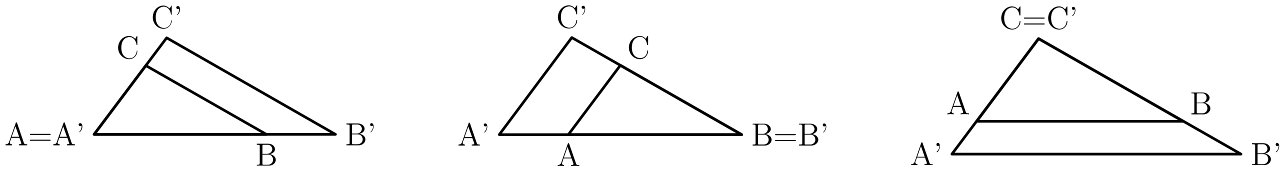
- Se verifica la igualdad de las amplitudes de los ángulos α=α'; β=β'; γ=γ'
- Se verifica la proporcionalidad de las longitudes de los lados: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

Propiedad

Si dos triángulos son semejantes, siempre se pueden colocar en la posición de Tales usando adecuadamente alguna **traslación**, algún **giro** o alguna **simetría**. Además, la posición de Tales se puede elegir de **tres** maneras diferentes, según qué vértices se hagan coincidir.

Ejemplo 3

Los triángulos semejantes del ejemplo (1) se pueden colocar de tres maneras diferentes en la posición de Tales:



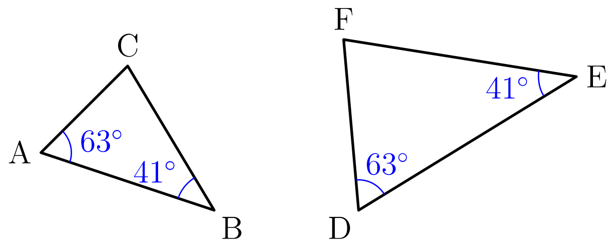
Criterios de semejanza de triángulos

Los triángulos semejantes se usan muy a menudo en geometría como parte de una demostración teórica o resolución de un problema. Siempre que se usan es porque interesa alguna propiedad de los triángulos semejantes; pero no sería útil demostrar **todas** las propiedades que deben cumplir dos triángulos para ser semejantes si lo que se desea es concluir que la verifican **alguna**.

Los criterios de semejanza de triángulos son **condiciones** que deben cumplir dos triángulos para poder deducir que efectivamente los triángulos son semejantes. Omitiremos las demostraciones, pero son sencillas: se basan en el teorema de Tales y propiedades de los ángulos entre rectas paralelas. Hay **tres** criterios.

Criterio de los dos ángulos

Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, entonces los triángulos son semejantes.



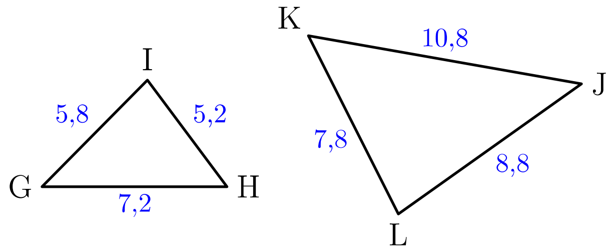
Ejemplo 1

Los triángulos ABC y DEF de la figura de la derecha son semejantes porque tienen dos ángulos iguales.

Simbólicamente: $\widehat{A} = \widehat{D}$ y $\widehat{B} = \widehat{D} \Rightarrow \mathrm{ABC} \sim \mathrm{DEF}$

Criterio de los tres lados

Si las longitudes de los tres lados de dos triángulos son directamente proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.



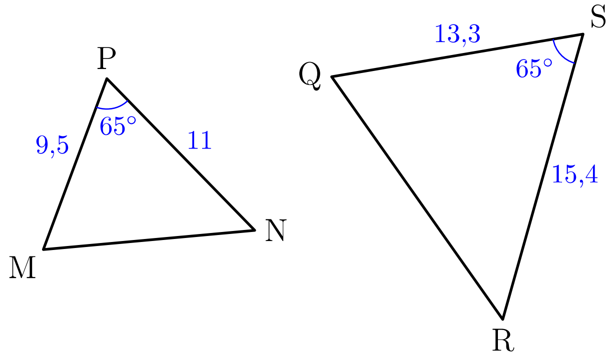
Ejemplo 2

Los triángulos GHI y JKL de la figura de la derecha son semejantes porque las longitudes de sus tres lados son directamente proporcionales.

Simbólicamente: $\dfrac{10{,}8}{7{,}2} = \dfrac{8{,}8}{5{,}8} = \dfrac{7{,}8}{5{,}2} \Rightarrow \mathrm{GHI} \sim \mathrm{JKL}$

Criterio de los dos lados y el ángulo que determinan

Si las longitudes de dos lados de dos triángulos son directamente proporcionales y los ángulos que determinan los dos lados son iguales, entonces los triángulos son semejantes.



Ejemplo 3

Los triángulos MNP y QRS de la figura de la derecha son semejantes porque las longitudes de sus tres lados son directamente proporcionales.

Simbólicamente: $\dfrac{15{,}4}{11} = \dfrac{13{,}3}{9{,}5}$ y $\hat{P} = \hat{S} \Rightarrow \mathrm{MNP} \sim \mathrm{QRS}$

Regla mnemotécnica

Los tres criterios se pueden recordar como «AA», «LLL» y «LAL».

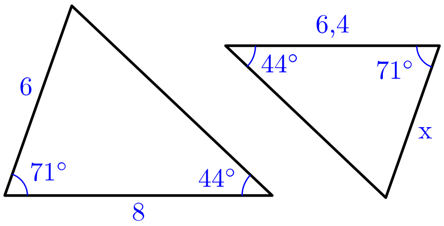
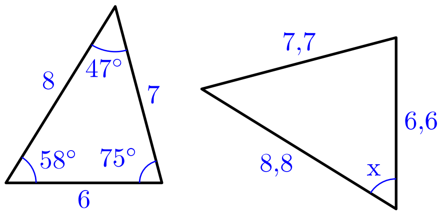
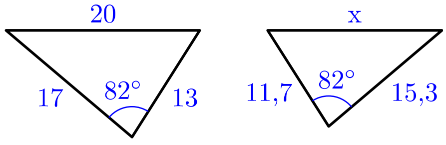
Ejemplos de uso de los criterios de semejanza de triángulos

En los siguientes ejemplos debes prestar atención a dos aspectos:

- ✱ Algunos datos permiten demostrar que los dos triángulos son semejantes.
- ✱ Otros datos sirven para plantear una relación con la incógnita.

Enunciados

Calcula el valor de «x» en las siguientes situaciones.

①	②	③
		

Resoluciones

① Los dos triángulos son semejantes porque tienen dos ángulos iguales. (Criterio de semejanza «AA»).

Por tanto, los lados correspondientes son proporcionales:

$$\frac{8}{6{,}4}=\frac{6}{x} \Rightarrow x=\frac{6{,}4\cdot 6}{8}=4{,}8.$$ Solución: x = 4,8 u.

② Estudiamos si los lados de los triángulos son proporcionales:

$\frac{8{,}8}{8}=1{,}1$; $\frac{7{,}7}{7}=1{,}1$; $\frac{6{,}6}{6}=1{,}1$. (La razón de semejanza podría no ser exacta).

Los tres lados son proporcionales, luego los dos triángulos son semejantes.

(Criterio de semejanza «LLL»).

Por tanto, los ángulos son iguales. El ángulo pedido es el opuesto al lado mediano, luego es igual al ángulo opuesto al lado mediano del otro triángulo.

Solución: $x = 58°$.

③ Los dos triángulos tienen un ángulo igual, así que vamos a comprobar si los dos lados que lo forman son proporcionales (mayor con mayor y menor con menor):

$\frac{15{,}3}{17}=0{,}9$; $\frac{11{,}7}{13}=0{,}9$. (La razón de semejanza podría no ser exacta).

Los dos lados son proporcionales, luego los dos triángulos son semejantes.

(Criterio de semejanza «LAL»).

Por tanto, los terceros lados también siguen la razón de semejanza:

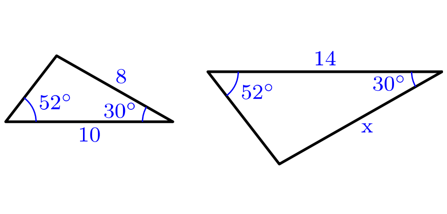
$$\frac{x}{20}=0{,}9 \Rightarrow x=20\cdot 0{,}9=18.$$

Solución: 18 u.

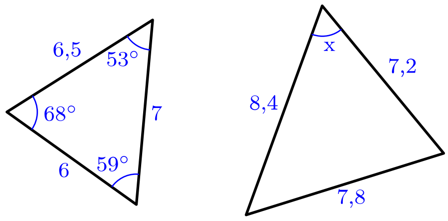
Enunciados

Calcula el valor de «x» en las siguientes situaciones.

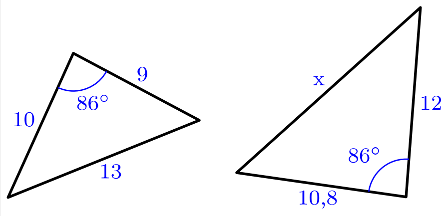
①



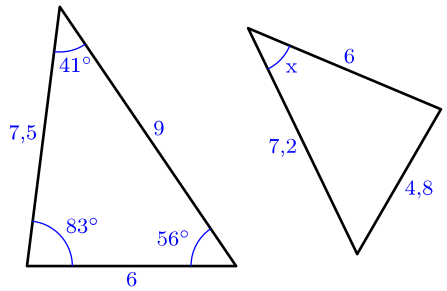
②



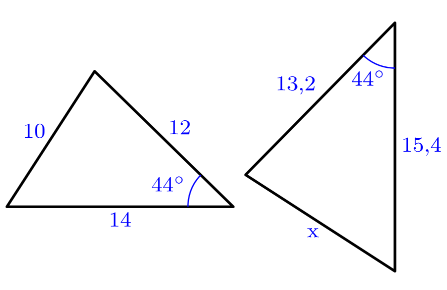
③



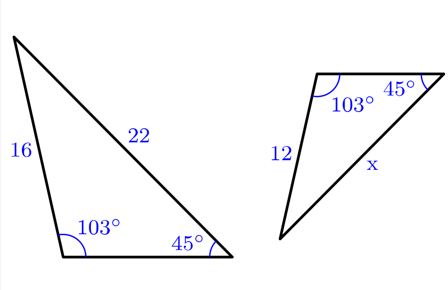
④



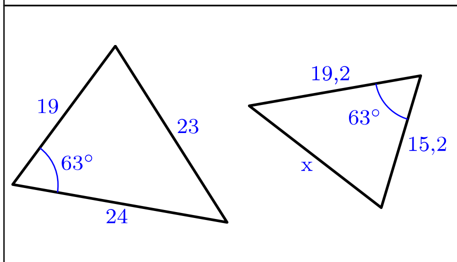
⑤



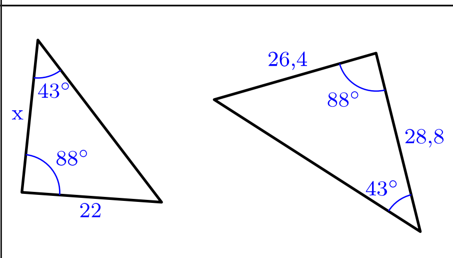
⑥



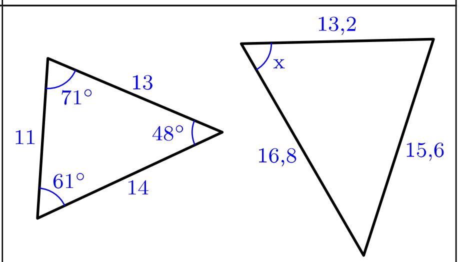
⑦



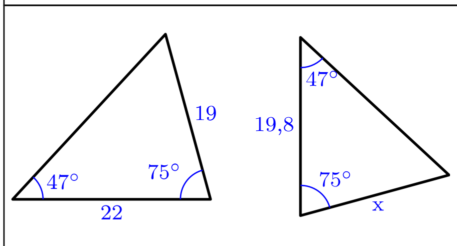
⑧



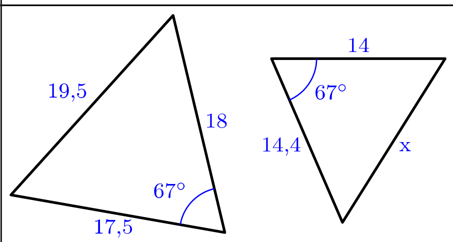
⑨



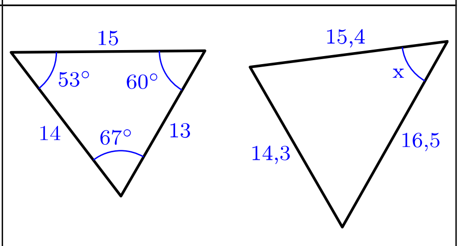
⑩



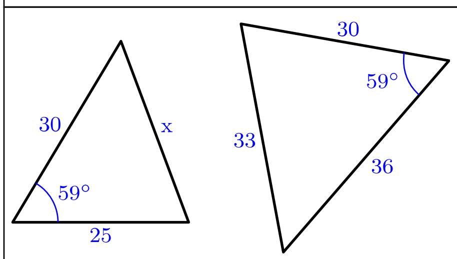
⑪



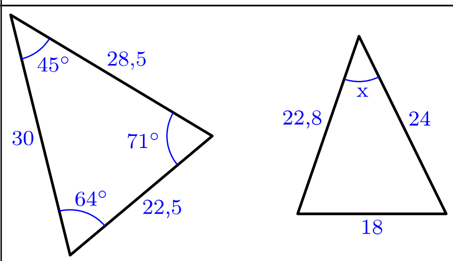
⑫



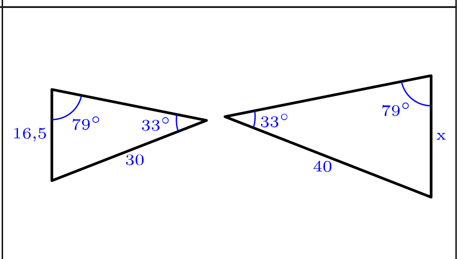
⑬



⑭



⑮

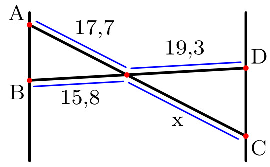


Problemas que se pueden resolver usando triángulos semejantes

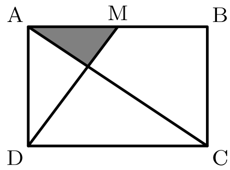
Ideas que te pueden ayudar:

- ✱ Los segmentos proporcionales que uses en el problema no tienen por qué limitarse a lados, cualquier otro puede ser interesante, como alturas o medianas.
- ✱ Puede ser necesario trazar líneas auxiliares, normalmente paralelas o perpendiculares, para que aparezcan triángulos semejantes.

Enunciados

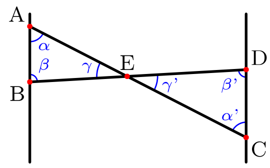


① Sabiendo que los segmentos AB y CD de la figura de la derecha son paralelos, calcula el valor de la longitud «x» con tres cifras significativas.



② Sabiendo que el área del rectángulo ABCD de la figura de la derecha mide 60 u² y que el punto M es el punto medio del segmento AB, calcula el área del triángulo marcado en gris.

Resoluciones



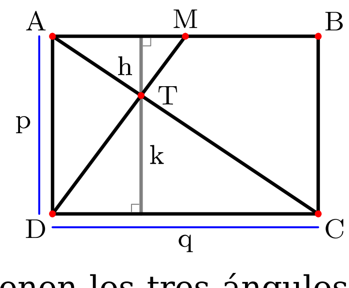
① En la figura observamos dos triángulos semejantes. Para demostrar que lo son, ponemos nombres al punto de corte de AC y BD y a los ángulos, como se ve a la derecha.

Los triángulos ABE y EDC son semejantes porque tienen los tres ángulos iguales (con demostrar que tienen dos iguales sería suficiente, pero es muy sencillo demostrar que lo son los tres): $\alpha=\alpha'$ por alternos internos; $\beta=\beta'$ por alternos internos y $\gamma=\gamma'$ por opuestos por el vértice.

Por tanto, los lados correspondientes son proporcionales. En este problema es crítico distinguir bien cuáles son los lados correspondientes, porque los triángulos no están en la posición de Tales y es fácil confundirse. Por tanto, señalamos explícitamente los lados según el ángulo al que se oponen.

$$\frac{\text{Opuesto a } \alpha}{\text{Opuesto a } \alpha'}=\frac{\text{Opuesto a } \beta}{\text{Opuesto a } \beta'} \Rightarrow \frac{15{,}8}{19{,}3}=\frac{17{,}7}{x} \Rightarrow x=\frac{19{,}3\cdot 17{,}7}{15{,}8}=21{,}6$$

Solución: 21,6 u



② Si llamamos «p» y «q» a las dimensiones del rectángulo, sabemos que pq=60; para calcular el área del triángulo pedido podemos escribir su base y su altura en función de «p» y «q»; escribir la base es muy sencillo: la mitad del lado superior; pero escribir la altura requiere utilizar dos triángulos semejantes y comparar sus alturas. Usamos la notación de la derecha.

Los triángulos AMT y TDC son semejantes porque tienen los tres ángulos iguales (como en el problema anterior), luego deducimos que sus alturas siguen la misma proporción que sus lados; por tanto:

$$\frac{k}{h}=\frac{\overline{DC}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{DC}}{\frac{1}{2}\overline{AB}}=\frac{q}{\frac{1}{2}q}=2 \Rightarrow k=2h;\ h+k=p \Rightarrow h+2h=p \Rightarrow 3h=p \Rightarrow h=\frac{p}{3}$$

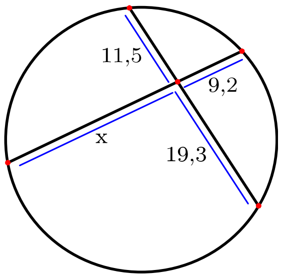
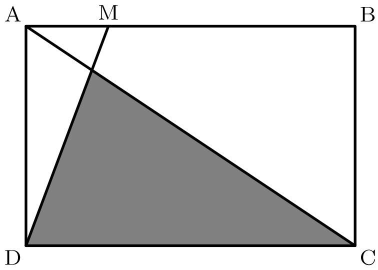
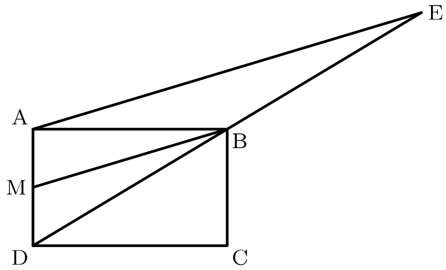
$$\text{Área}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AM}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{2}\cdot\frac{p}{3}=\frac{pq}{12}=\frac{60}{12}=5.\ \text{Solución: } 5\,u^2$$

Enunciados

① Calcula con tres cifras significativas la longitud «x» en la figura **1**.

② En el rectángulo ABCD de la figura **2** determinamos el punto M de modo que $\overline{MB}=3\overline{MA}$. Calcula qué porcentaje del área del rectángulo corresponde al área del triángulo marcado en gris.

③ En el rectángulo ABCD de la figura **3** prolongamos la diagonal DB hasta el punto E de modo que $\overline{AB}=\overline{BE}$ y determinamos el punto M como el punto medio del segmento AD. Sabiendo que $\overline{MB}=17$, calcula $\overline{AE}$.

Figura **1**	Figura **2**	Figura **3**
		

④ Dado un triángulo de lados 50, 69 y 73 se dibuja un cuadrado sobre el lado que mide 69, como se ve en la figura **4**. Se pide:

a) Calcula la altura del triángulo que es perpendicular al lado mediano.

b) Calcula con tres cifras significativas la longitud «x»

⑤ Calcula la longitud «x» en la figura **5**.

⑥ En un triángulo de lados 13, 14 y 15 se dibuja un cuadrado inscrito de modo que uno de sus lados esté apoyado sobre el lado mediano, como se ve en la figura **6**. Se pide:

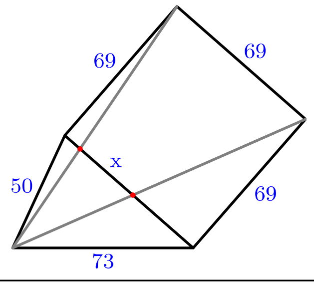
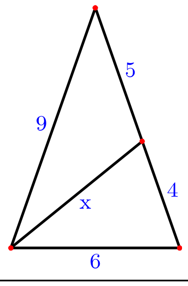
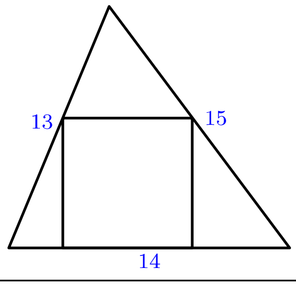
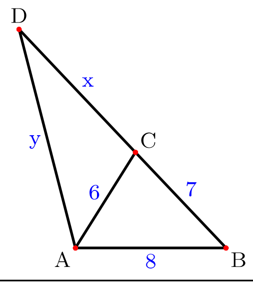
a) Calcula la altura del triángulo que es perpendicular al lado mediano.

b) Calcula con tres cifras significativas la longitud del lado del cuadrado.

⑦ Sabiendo que en la figura **7** se verifica que ∠(DAB)=∠(DCA), se pide:

a) Calcula la longitud «x».

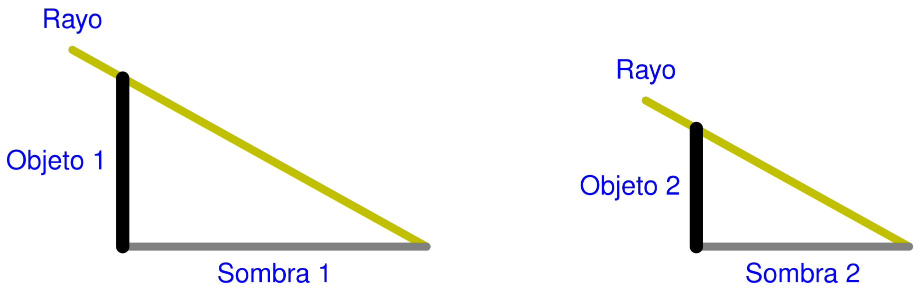
b) Calcula la longitud «y».

Figura **4**	Figura **5**	Figura **6**	Figura **7**
			

Importancia de los triángulos rectángulos

La humanidad lleva usando triángulos rectángulos desde hace milenios. Ya has visto la importancia que tiene el teorema de Pitágoras, que solo se puede aplicar en los triángulos rectángulos; pues bien, la semejanza de triángulos rectángulos también ha sido explotada ampliamente desde hace mucho tiempo.

Un motivo importante es que los humanos andamos sobre dos extremidades, luego en condiciones normales podemos pensar que formamos un ángulo recto con el suelo. Nuestras construcciones también suelen tener las paredes perpendiculares al suelo (aunque hay bellísimas excepciones en la arquitectura). Por otro lado, como el sol está tan lejano a nuestro planeta en términos relativos, consideramos que los rayos del sol llegan paralelos, con lo que dos objetos (personas o construcciones) con sus sombras siempre forman dos triángulos rectángulos semejantes.



Criterios de semejanza de triángulos rectángulos

Los criterios de semejanza de dos triángulos rectángulos son más sencillos que los de triángulos en general por dos motivos:

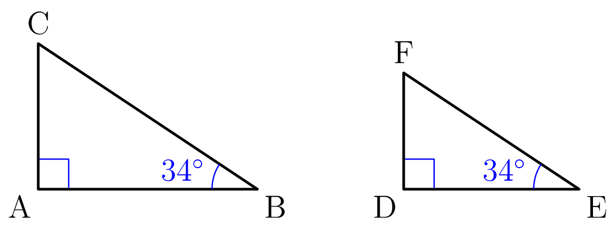
* Dos triángulos rectángulos cualesquiera siempre tienen igual el ángulo recto.
* Los lados de un triángulo rectángulo están relacionados entre sí por el teorema de Pitágoras.

Criterio del ángulo agudo

Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen igual un ángulo agudo.

Ejemplo 1

Los triángulos rectángulos ABC y DEF de la figura de la derecha son semejantes porque tienen un ángulo agudo igual.

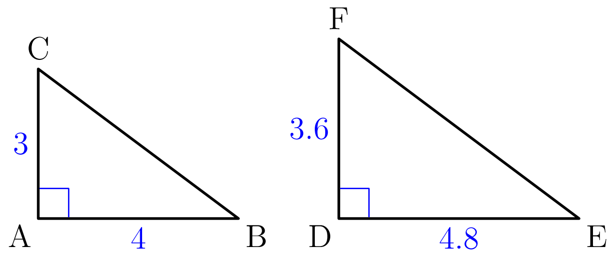


Criterio de los dos lados

Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen proporcionales dos lados correspondientes.

Ejemplo 2

Los triángulos rectángulos ABC y DEF de la figura de la derecha son semejantes porque tienen dos lados correspondientes proporcionales.



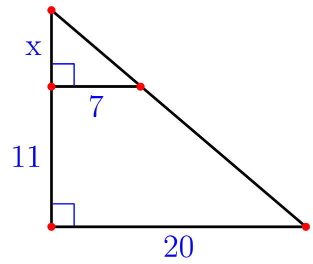
Introducción a la trigonometría

En el nivel 4 verás que hay toda una rama de la geometría, llamada trigonometría, que basa sus primeras definiciones en triángulos rectángulos semejantes.

Problemas resueltos usando triángulos rectángulos semejantes

El método más habitual es demostrar que dos triángulos rectángulos son semejantes porque tienen un ángulo agudo igual y usar la proporcionalidad de los lados.

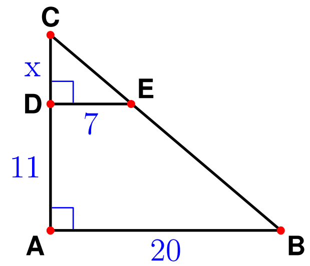
Enunciados



① Calcula con tres cifras significativas el valor de la longitud «x» en la figura de la derecha.

② Sabemos que dos triángulos rectángulos son semejantes. Los catetos del primero miden 7 y 17; el cateto menor del segundo mide 13. Calcula con tres cifras significativas la longitud de la hipotenusa del segundo.

Resoluciones



① En la figura observamos dos triángulos rectángulos semejantes. Para demostrar que lo son, ponemos nombres a los vértices, como se ve a la derecha.

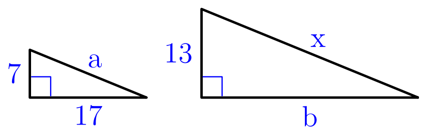
Los triángulos rectángulos ABC y DEC son semejantes porque tienen el mismo ángulo en el vértice C.

Los lados correspondientes son proporcionales:

$$\frac{x}{7}=\frac{x+11}{20} \Rightarrow 20x = 7(x+11) \Rightarrow 20x = 7x+77 \Rightarrow 13x = 77 \Rightarrow x = \frac{77}{13} = 5{,}92$$

Solución: 5,92 u

② Aunque hacer un dibujo en este problema no es imprescindible, siempre ayuda a entender mejor la situación. Como vamos a resolver el problema de dos maneras distintas, ponemos también las letras necesarias para las dos resoluciones. Llamamos «x» a la longitud pedida.



Primera resolución

Calculamos «a» usando el teorema de Pitágoras y luego «x» por la proporcionalidad de los lados:

$$a = \sqrt{17^2+7^2} = 18{,}4;\ \frac{7}{13}=\frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{13\cdot a}{7} = 34{,}1$$

Calculadora: √‾ (1 7 x² + 7 x²) = ▩ 1 3 × Ans ÷ 7 =

Segunda resolución

Calculamos «b» usando la proporcionalidad de los lados y luego «x» con el teorema de Pitágoras.

$$\frac{7}{13}=\frac{17}{b} \Rightarrow b = \frac{13\cdot 17}{7} = 31{,}5;\ x = \sqrt{13^2+b^2} = 34{,}1$$

Calculadora: 1 3 × 1 7 ÷ 7 = ▩ √‾ (1 3 x² + Ans x²) =

Solución: 34,1 u

Enunciados

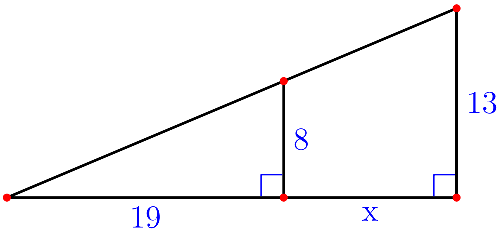
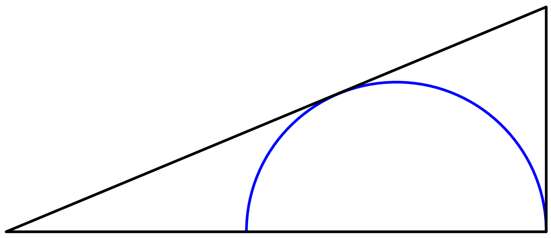
① Queremos calcular la altura de una torre que se encuentra en un terreno muy llano y solo disponemos de una cinta métrica de tres metros de longitud. Medimos a partir de la base de la torre una longitud de treinta metros y en algún punto cercano clavamos en el suelo un palo que mide 2,73 metros. En el momento exacto en que la sombra de la torre llega a la marca de los treinta metros, medimos la sombra del palo, que resulta ser 2,23 metros. Calcula la altura de la torre; da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

② Calcula el valor exacto de la longitud «x» en la figura **2**. Da el resultado como número decimal.

③ Sabemos que dos triángulos rectángulos son semejantes. La hipotenusa del primero mide 32 y uno de sus catetos mide 29; la hipotenusa del segundo mide 53. Calcula con cuatro cifras significativas la longitud del menor de los catetos del segundo.

④ Calcula el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo cuyos lados miden 50, 50 y 60. Da el resultado como número decimal.

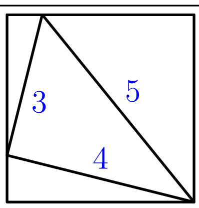
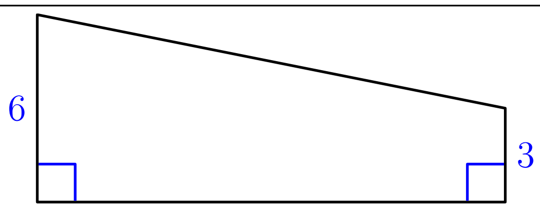
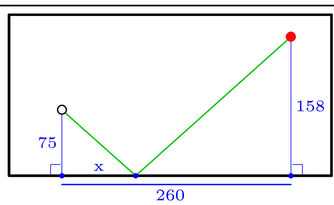
⑤ Los catetos del triángulo rectángulo de la figura **5** miden 5 y 12. Calcula el radio de la semicircunferencia dibujada en color azul. Da el resultado como fracción irreducible.

<table>
<tr><th>Figura 2</th><th>Figura 5</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

⑥ Los lados del triángulo de la figura **6** miden 3, 4 y 5. Calcula con cuatro cifras significativas la longitud del lado del cuadrado.

⑦ Observa el cuadrilátero de la figura **7**. Calcula a qué distancia del lado horizontal se cortan sus diagonales.

⑧ Un jugador de *snooker* (una modalidad de billar de origen británico) desea golpear una bola roja con su bola blanca tocando antes en la banda de abajo, en la situación que se ve en la figura **8** (las medidas están en centímetros). Sabiendo que va jugar sin efecto, calcula la longitud denominada «x»; da el resultado en centímetros redondeando a la unidad.

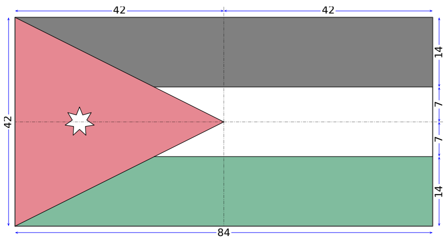
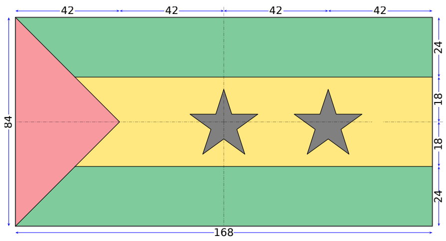
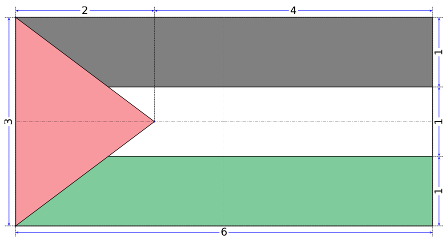
<table>
<tr><th>Figura 6</th><th>Figura 7</th><th>Figura 8</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

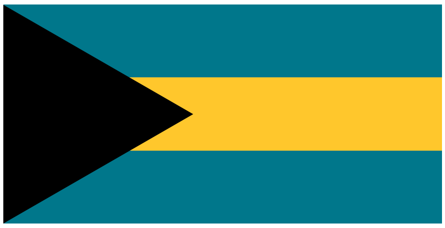
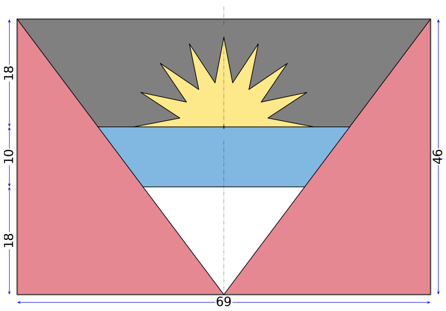
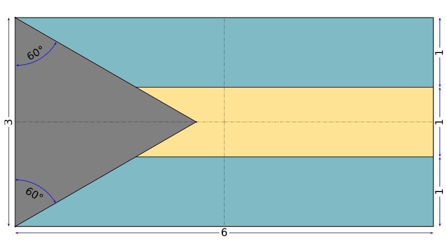
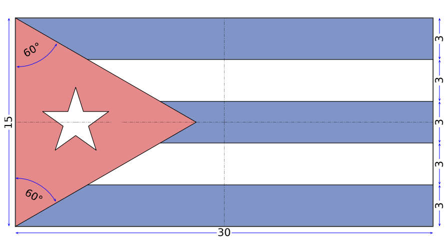
Vexilología

Es el estudio de las banderas. En la descripción de cada bandera aparecen definiciones de colores y el modo de determinar las dimensiones de cada parte. En los siguientes enunciados verás la bandera de un país y un esquema de sus dimensiones relativas (las banderas se pueden reproducir a cualquier tamaño).

Enunciados

Calcula con cuatro cifras significativas el porcentaje del color especificado respecto al área total de la bandera.

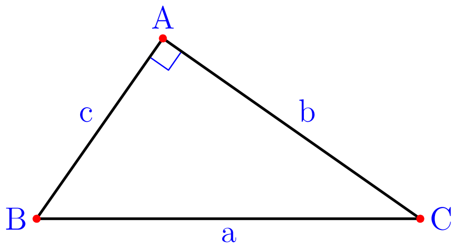
<table>
<tr><td>① Jordania</td><td>② Santo Tomé y Príncipe</td><td>③ Palestina</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Color verde</td><td>Color verde</td><td>Color blanco</td></tr>
</table>

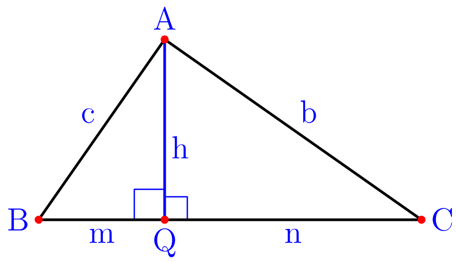
<table>
<tr><td>④ Antigua y Barbuda</td><td>⑤ Bahamas</td><td>⑥ Cuba</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Color azul</td><td>Color aguamarina</td><td>Color azul</td></tr>
</table>

Semejanzas en un triángulo rectángulo

Cuando se traza la altura correspondiente al ángulo recto y a la hipotenusa en un triángulo rectángulo, aparecen dos triángulos rectángulos que son semejantes al triángulo original, lo que permite establecer relaciones numéricas interesantes.

Consideramos el triángulo rectángulo ABC, en el que el ángulo recto está en el vértice A, como se ve en la figura de abajo a la izquierda.





Trazamos la altura correspondiente a la hipotenusa; la altura y la hipotenusa se cortan en un punto que llamamos Q, como se ve en la figura de arriba a la derecha.

- ✱ Los triángulos rectángulos ABC y ABQ son semejantes porque tienen igual el ángulo en el vértice B.
- ✱ Los triángulos rectángulos ABC y AQC son semejantes porque tienen igual el ángulo en el vértice C.
- ✱ Los triángulos ABQ y AQC son semejantes porque ambos son semejantes al triángulo ABC.

Proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa

Usando la notación de las figuras de esta hoja, se dice:

- ✱ El segmento BQ es la proyección del cateto AB sobre la hipotenusa BC.
- ✱ El segmento QC es la proyección del cateto AC sobre la hipotenusa BC.

Teorema de la altura

El cuadrado de la longitud de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. Simbólicamente: $\mathbf{h^2 = m \cdot n}$.

Demostración

Como los triángulos ABQ y AQC son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales, luego $\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$

Teorema del cateto

El cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud de la proyección del cateto sobre la hipotenusa. Simbólicamente: $\mathbf{b^2 = a \cdot n}$ y $\mathbf{c^2 = a \cdot m}$.

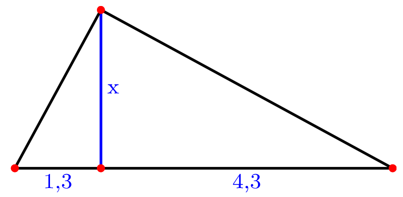
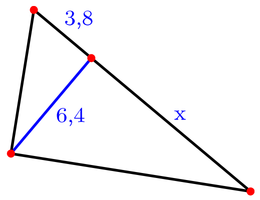
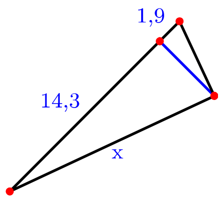
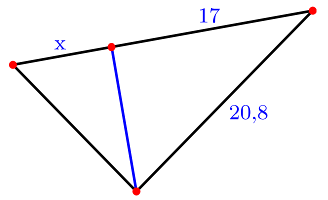
Demostración

Como los triángulos ABC y AQC son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales, luego $\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n$

Observación: solo hay que demostrar una de las dos igualdades, ya que el enunciado no distingue entre los dos catetos.

Enunciados

En todas las siguientes figuras aparece un triángulo rectángulo en el que se ha trazado la altura correspondiente a la hipotenusa. Calcula en cada una de ellas con cuatro cifras significativas la longitud denominada «x».

①	②	③	④
			

Resoluciones

① Utilizamos el teorema de la altura.

$x^2 = 1{,}3 \cdot 4{,}3 \Rightarrow x = \sqrt{1{,}3 \cdot 4{,}3} = 2{,}364.$

Calculadora: √‾ (1 . 3 × 4 . 3) = ⇨ 2.364318084

Solución: x = 2,364 u

② Utilizamos el teorema de la altura.

$$6{,}4^2 = 3{,}8 \cdot x \Rightarrow x = \frac{6{,}4^2}{3{,}8} = 10{,}78.$$

Calculadora: 6 . 4 x² ÷ 3 . 8 = ⇨ 10.77894737

Solución: x = 10,78 u

③ Utilizamos el teorema del cateto.

Sumando las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa calculamos la longitud de la hipotenusa: a = 14,3 + 1,9 = 16,2

$x^2 = 16{,}2 \cdot 14{,}3 \Rightarrow x = \sqrt{16{,}2 \cdot 14{,}3} = 15{,}22.$

Calculadora: √‾ (1 6 . 2 × 1 4 . 3) = ⇨ 15.22038107

Solución: x = 15,22 u

④ Utilizamos el teorema del cateto.

Llamamos «a» a la longitud de la hipotenusa.

$$20{,}8^2 = a \cdot 17 \Rightarrow a = \frac{20{,}8^2}{17} = 25{,}45.$$

Calculadora: 2 0 . 8 x² ÷ 1 7 = ⇨ 25.44941177

Sabiendo la longitud de la hipotenusa y la longitud de la proyección de uno de los catetos, calculamos la longitud de la proyección del otro:

x = a − 17 = 8,449

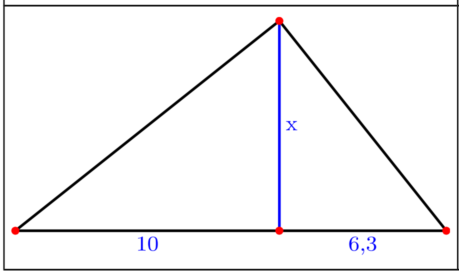
Calculadora: Ans − 1 7 = ⇨ 8.44941765

Solución: x = 8,449 u

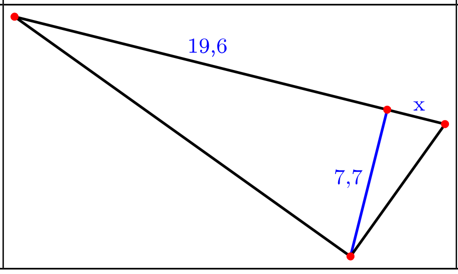
Enunciados

En todas las siguientes figuras aparece un triángulo rectángulo en el que se ha trazado la altura correspondiente a la hipotenusa. Calcula en cada una de ellas con cuatro cifras significativas la longitud denominada «x».

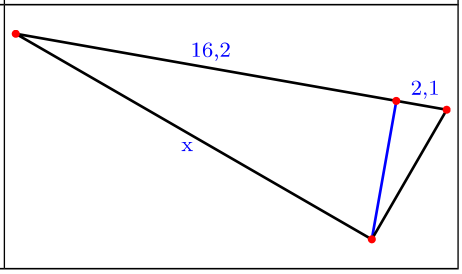
①



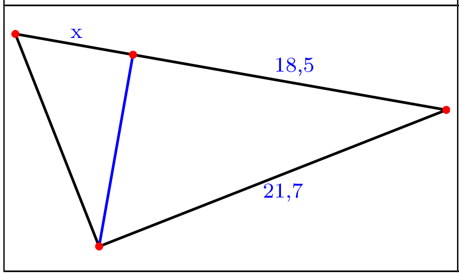
②



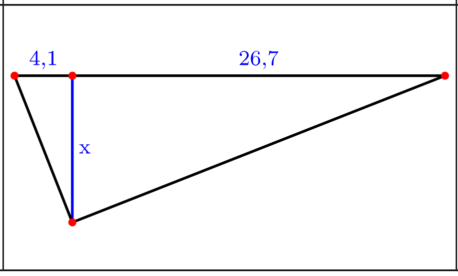
③



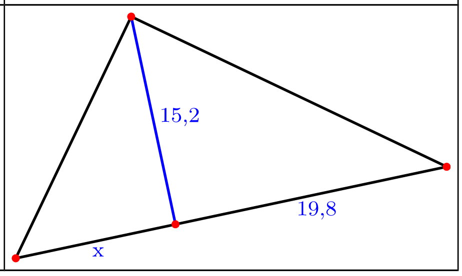
④



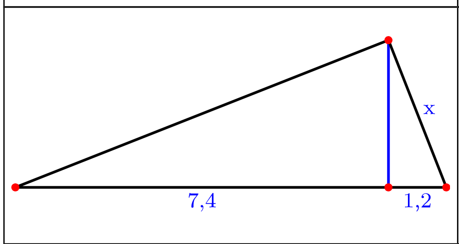
⑤



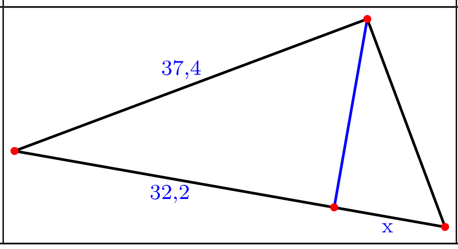
⑥



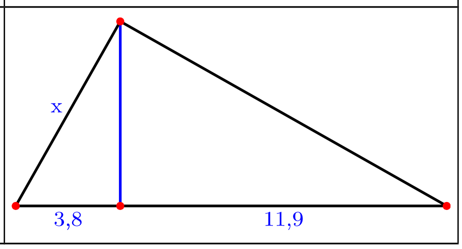
⑦



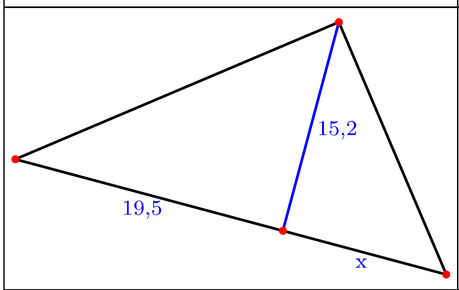
⑧



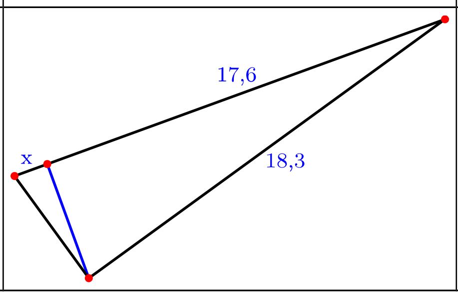
⑨



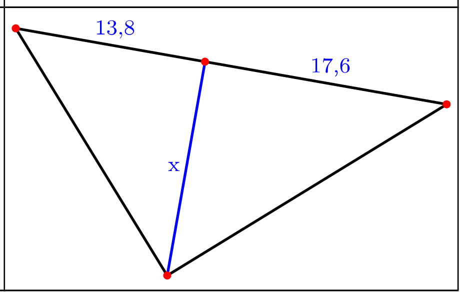
⑩



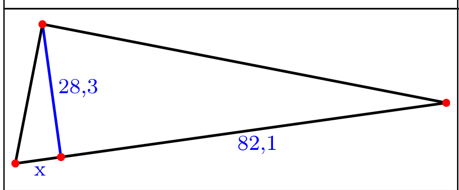
⑪



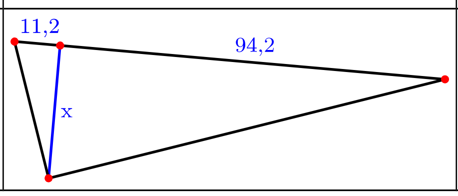
⑫



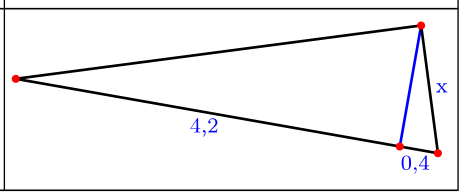
⑬



⑭



⑮



Resolución de problemas en un triángulo rectángulo

Si la altura correspondiente a la hipotenusa está involucrada en la posible resolución del problema, recuerda que tendremos disponibles para buscarla todo esto:

- El teorema de Pitágoras en cualquiera de los tres triángulos dibujados.
- El teorema de la altura.
- El teorema del cateto para cualquiera de los dos catetos.

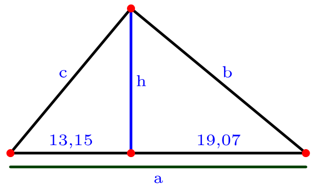
Enunciado

Calcula con cuatro cifras significativas el perímetro y el área de un triángulo rectángulo sabiendo que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 13,15 metros y 19,07 metros.

Resolución

La altura correspondiente a la hipotenusa no está explícitamente nombrada en el enunciado, pero es necesario tenerla en cuenta porque sí aparecen las proyecciones de los catetos.

Aunque se puede resolver el problema sin hacer el dibujo, te recomendamos que lo hagas, y lo más aproximado que puedas, porque te puede servir de guía en la resolución. Vemos a la derecha el dibujo, con las letras que vamos a usar.



El cálculo de la longitud de la hipotenusa es inmediato y además se hace sin errores de redondeo: $a = 13{,}15 + 19{,}07 = 32{,}22$.

Para calcular el perímetro necesitamos las longitudes de los dos catetos.

Calculamos la longitud de cada cateto usando el teorema del cateto; como los resultados no son exactos, necesitamos almacenarlos en memorias de la calculadora para evitar errores de redondeo:

$c^2 = a \cdot 13{,}15 \Rightarrow c = \sqrt{32{,}22 \cdot 13{,}15} = 20{,}58$

Calculadora: √ (3 2 . 2 2 × 1 3 . 1 5) STO C = ⇰ 20.5838043 1

$b^2 = a \cdot 19{,}07 \Rightarrow b = \sqrt{32{,}22 \cdot 19{,}07} = 24{,}79$

Calculadora: √ (3 2 . 2 2 × 1 9 . 0 7) STO B = ⇰ 24.78780749

Ya podemos calcular el perímetro:

Perímetro $= a + b + c = 77{,}59$

Calculadora: 3 2 . 2 2 + RCL B + RCL C = ⇰ 77.5916118

Hay varios métodos para calcular el área a partir de los datos que tenemos hasta el momento.

Primer método; usando las longitudes de los catetos:

Área $= \dfrac{b \cdot c}{2} = 255{,}1$. Calculadora: RCL B × RCL C ÷ 2 = ⇰ 255.1136893

Segundo método; calculando la altura correspondiente a la hipotenusa usando el teorema de la altura:

$h^2 = 13{,}15 \cdot 19{,}07 \Rightarrow h = \sqrt{13{,}15 \cdot 19{,}07}$; Área $= \dfrac{a \cdot h}{2} = 255{,}1$

Solución: perímetro = 77,59 m; área = 255,1 m²

Enunciados

① Calcula con cuatro cifras significativas las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que los catetos miden 35 metros y 62 metros.

② Calcula en metros con cuatro cifras significativas la longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa en un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 38 metros y uno de los catetos mide 29 metros.

③ Calcula con cinco cifras significativas el perímetro y el área de un triángulo rectángulo sabiendo que la altura correspondiente a la hipotenusa mide 43 y la proyección de uno de los catetos sobre la hipotenusa mide 29.

④ Calcula con cinco cifras significativas el perímetro y el área de un triángulo rectángulo sabiendo que la altura correspondiente a la hipotenusa mide 27 y uno de los catetos mide 41.

⑤ Calcula con cinco cifras significativas el perímetro y el área de un triángulo rectángulo sabiendo que uno de los catetos mide 31 y su proyección sobre la hipotenusa mide 26.

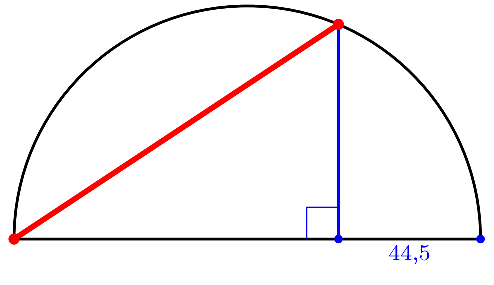
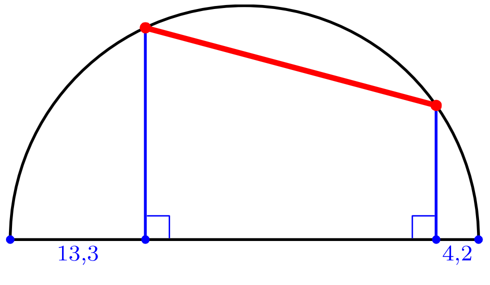
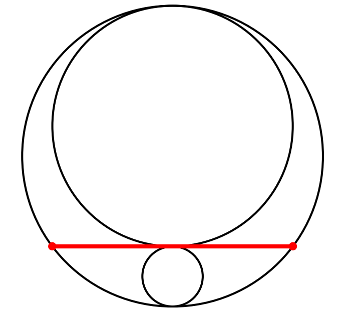
⑥ En un triángulo rectángulo, el cateto mayor mide 97 y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa mide 31. Calcula con cuatro cifras significativas la longitud de la proyección del cateto mayor sobre la hipotenusa.

⑦ En una esfera de 31 metros de radio se ha inscrito un cono cuya altura mide 47 metros. Calcula la longitud del radio de la base del cono; da el resultado en metros con cuatro cifras significativas.

⑧ Calcula con cuatro cifras significativas la longitud de la cuerda señalada en color rojo en la figura 8 sabiendo que el radio de la semicircunferencia dibujada mide 73.

⑨ Calcula con cuatro cifras significativas la longitud de la cuerda señalada en color rojo en la figura 9 sabiendo que el radio de la semicircunferencia dibujada mide 23.

⑩ Tres circunferencias son tangentes entre sí, como aparece la figura 10. La región del círculo exterior que no está cubierta por los dos círculos interiores tiene un área igual a 2π u². Calcula la longitud del segmento rojo.

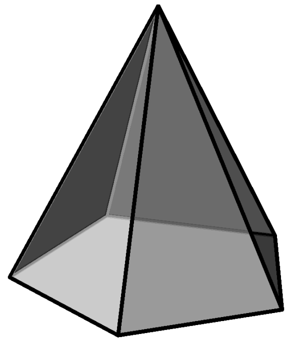
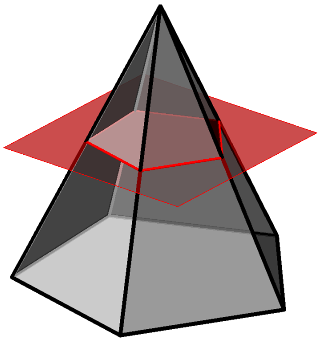
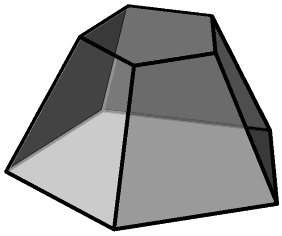
Figura 8	Figura 9	Figura 10
		

Definición de tronco de pirámide

Un tronco de pirámide es un poliedro que se puede obtener a partir de una pirámide cortándola por un plano paralelo al plano de la base y considerando la parte comprendida entre los dos planos.

Ejemplo

Partimos de la pirámide de la figura 1. Consideramos un plano paralelo a la base de la pirámide ilustrado en la figura 2. El tronco de pirámide queda como se ve en la figura 3.

Figura 1	Figura 2	Figura 3
		

Troncos de pirámide rectos u oblícuos

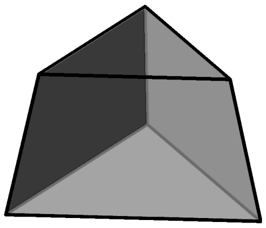
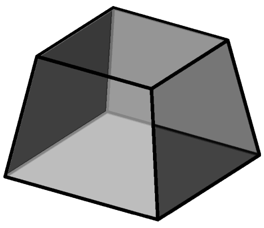
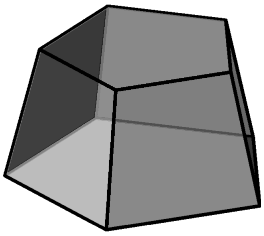
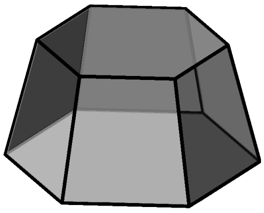
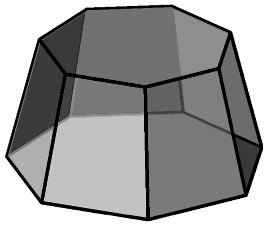
Así como las pirámides pueden ser rectas u oblícuas, los troncos obtenidos a partir de ellas también pueden ser rectos u oblícuos.

Nombres de los troncos de pirámide

La mayor parte de los tronco de pirámide que se utilizan tienen como bases polígonos sencillos, como triángulos, cuadriláteros o polígonos regulares. Por esta razón, se suelen denominar los troncos de pirámide a partir del tipo de polígono que tengan como bases: tronco de pirámide triangular, tronco de pirámide cuadrangular, tronco de pirámide pentagonal, etc.

Troncos de pirámide más utilizados

Con mucha diferencia, los troncos de pirámide más utilizados son los rectos con base un polígono regular.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4	Ejemplo 5
				
Tronco de pirámide recto de base triangular.	Tronco de pirámide recto de base cuadrada.	Tronco de pirámide recto de base pentagonal.	Tronco de pirámide recto de base hexagonal.	Tronco de pirámide recto de base heptagonal.

Por lo tanto, si no hay más indicaciones, cuando leamos sobre un tronco de pirámide, entenderemos que es recto y su base es un polígono regular.

Elementos de un tronco de pirámide

Los troncos de pirámide tienen varios elementos importantes.

En un tronco de pirámide recto con bases polígonos regulares como el de la figura 1 podemos apreciar:

- ✱ La base mayor. Solemos representarla en la parte más baja porque es como nos parece más «estable». Si construimos un tronco de pirámide para usarlo como taburete, sin duda pondríamos la base mayor en contacto con el suelo. Está señalada en la figura 2.
- ✱ La base menor. Normalmente la representamos en la parte más alta. La vemos marcada en la figura 3.
- ✱ Las caras laterales. Son trapecios isósceles; hay tantas como lados tengan cada una de las bases. Una de las caras laterales está marcada en la figura 4.
- ✱ Aristas de las bases. Son de distinta longitud los de cada base. Hay dos marcadas en la figura 5, una en cada base.
- ✱ Aristas laterales. Son las aristas que unen vértices de distintas bases. Hay una marcada en la figura 6.
- ✱ Radio de las bases. Es cualquiera de los radios de los polígonos regulares que forman las bases. Hay dos marcados en la figura 7, uno de cada base.
- ✱ Apotema de las bases. Es cualquiera de las apotemas de los polígonos regulares que forman las bases. Dos de ellas están marcada en la figura 8.
- ✱ Apotema del tronco de pirámide. Es la altura de cualquiera de las caras laterales. Una de ellas está marcada en la figura 9.
- ✱ Altura del tronco de pirámide. Es cualquier segmento que una perpendicularmente las dos bases. Una de ellas, la que une los centros de las bases, está marcada en la figura 10.

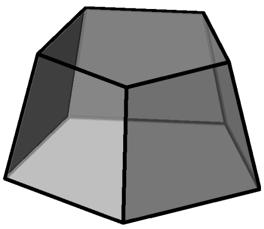
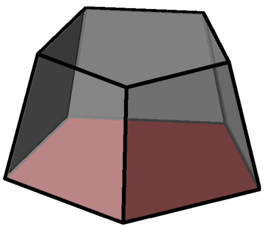
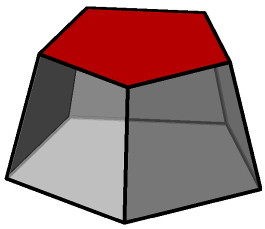
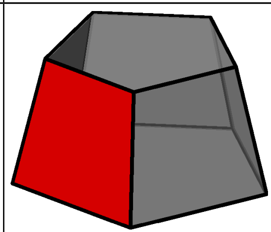
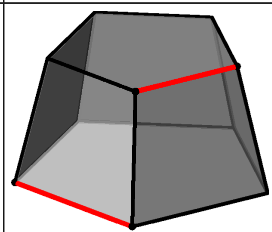
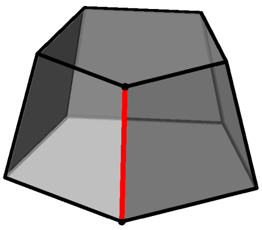
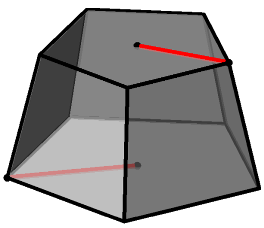
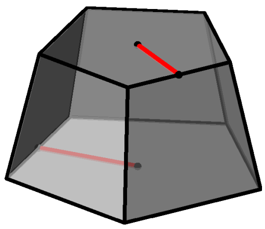
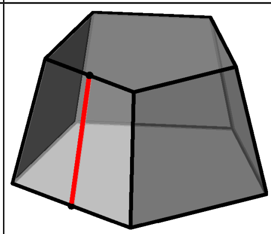
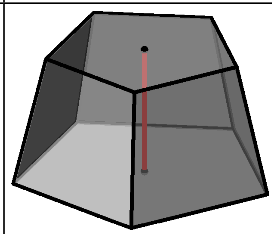
Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
				
Tronco de pirámide	Base mayor	Base menor	Una cara lateral	Aristas de las bases

Figura 6	Figura 7	Figura 8	Figura 9	Figura 10
				
Una arista lateral	Unos radios de las bases	Unas apotemas de las bases	Una apotema del tronco de pirámide	Una altura del tronco de pirámide

Relaciones entre elementos de un tronco de pirámide

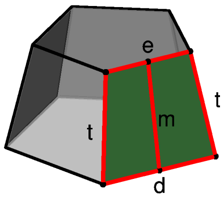
Los elementos de los troncos de pirámide tienen varias relaciones. Algunas provienen de la geometría plana y ya las conoces, pero otras son novedosas para ti.

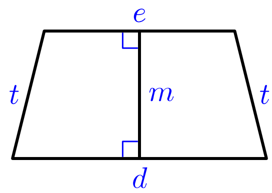
Relación en cada cara lateral

Las caras laterales de un tronco de pirámide recto son trapecios isósceles, luego las longitudes de sus lados y su altura están relacionadas mediante el teorema de Pitágoras.

Utilizamos esta notación para las longitudes de los segmentos:

* Arista de la base mayor: d.
* Arista de la base menor: e.
* Arista lateral: t.
* Apotema del tronco: m.





Por tanto, se verifica

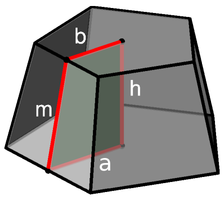
$$\boxed{t^2=m^2+\left(\frac{d-e}{2}\right)^2}$$

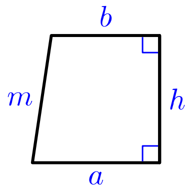
Relación entre la altura y las tres apotemas

La altura que une los centros de las bases junto con las tres apotemas de un tronco de pirámide recto forman un trapecio rectángulo, luego sus longitudes están relacionadas mediante el teorema de Pitágoras.

Utilizamos esta notación para las longitudes de los segmentos:

* Apotema de la base mayor: a.
* Apotema de la base menor: b.
* Altura del tronco: h.
* Apotema del tronco: m.





Por tanto, se verifica

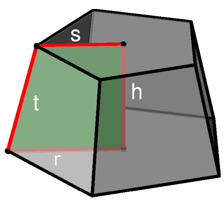
$$\boxed{m^2=h^2+(a-b)^2}$$

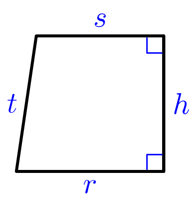
Relación entre la altura, los radios y la arista lateral

La altura que une los centros de las bases junto con los radios de las bases y la arista lateral de un tronco de pirámide recto forman un trapecio rectángulo, luego sus longitudes están relacionadas mediante el teorema de Pitágoras.

Utilizamos esta notación para las longitudes de los segmentos:

* Radio de la base mayor: r.
* Radio de la base menor: s.
* Altura del tronco: h.
* Arista lateral: t.





Por tanto, se verifica

$$\boxed{t^2=h^2+(r-s)^2}$$

Área y volumen de un tronco de pirámide

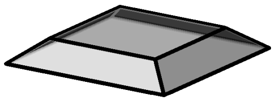
Existen varias fórmulas para calcular el área y el volumen de un tronco de pirámide en algunos casos concretos. Sin embargo, es más útil en la enseñanza secundaria aprender los métodos generales de cálculo, que precisamente son los que se utilizan para demostrar las fórmulas.

Ejemplo sencillo

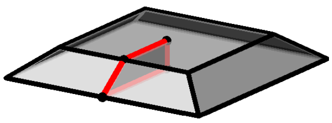
Enunciado. Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 3 metros de altura sabiendo que sus bases son cuadrados de 24 metros de lado y 16 metros de lado.

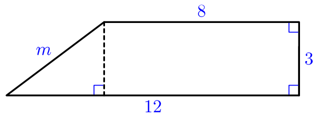
Resolución

Aunque no sea estrictamente necesario, suele ser útil hacer un dibujo de la situación; no es necesario que sea exacto ni perfecto, se usa para ayudarnos a pensar.



Para calcular el área de un tronco de pirámide hay que sumar las áreas de cada base y el área de todas las caras laterales. Como las bases son diferentes, cada área es un cálculo diferente; para calcular el área de cada cara lateral, que es un trapecio, hay que conocer la longitud de la apotema del tronco porque es la altura del trapecio.



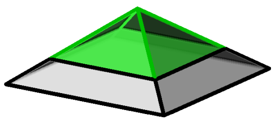


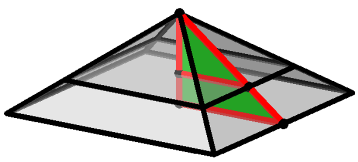
En este caso, como las bases son cuadrados, las apotemas de las bases miden la mitad que la arista de la base. Si llamamos m a la longitud de la apotema del tronco, tenemos:

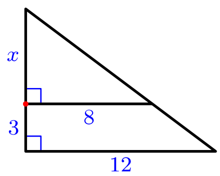
$$m^2 = 3^2 + (12-8)^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow m = \sqrt{25} = 5$$

Por tanto, $\text{Área} = 24^2+16^2+4\cdot 5\cdot \dfrac{24+16}{2} = 576+256+20\cdot 20 = 1232$

Para calcular el volumen del tronco de pirámide hay que imaginar la pirámide de la que proviene y restar los volúmenes de las dos pirámides que aparecen en el proceso (grande y pequeña).







La clave es calcular las alturas de las dos pirámides, puesto que las áreas de las bases son sencillas de calcular. Nos basamos en los dos triángulos rectángulos semejantes que se forman con las alturas, las apotemas de las bases y las apotemas de las pirámides.

Usando la proporcionalidad de los lados de los triángulos, tenemos:

$$\frac{x}{8}=\frac{x+3}{12} \Rightarrow 12x=8(x+3) \Rightarrow 3x=2(x+3) \Rightarrow 3x=2x+6 \Rightarrow x=6$$

La altura de la pirámide menor es 6 y la de la mayor $x+3 = 6+3 = 9$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\cdot 24^2\cdot 9 - \frac{1}{3}\cdot 16^2\cdot 6 = 576\cdot 3 - 256\cdot 2 = 1728 - 512 = 1216$$

Solución → área: 1232 m², volumen: 1216 m³

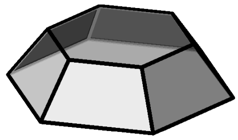
Área y volumen de un tronco de pirámide con calculadora

En la mayor parte de las ocasiones los cálculos son inexactos, por lo que hay que utilizar memorias intermedias de la calculadora para minimizar el error.

Ejemplo

Enunciado. Calcula con cinco cifras significativas el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 8 metros de altura sabiendo que sus bases son hexágonos regulares de 17 metros de lado y de 11 metros de lado.

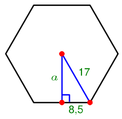
Resolución



Aunque no sea estrictamente necesario, suele ser útil hacer un dibujo de la situación; no es necesario que sea exacto ni perfecto, se usa para ayudarnos a pensar.

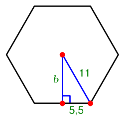
Usaremos esta notación para las longitudes: apotema de la base mayor: a, apotema de la base menor: b, apotema de la pirámide: m.

Las bases son hexágonos regulares, luego es necesario calcular las longitudes de sus apotemas. Las caras laterales son trapecios, luego hay que calcular la longitud de su altura, que es la apotema del tronco.



$a^2+(17:2)^2 = 17^2 \Rightarrow a = \sqrt{17^2-8{,}5^2} = 14{,}7$

Calc.: [√] [(] [1] [7] [x²] [–] [8] [.] [5] [x²] [)] [STO] [A] [=] ⇨ 14.72243186



$b^2+(11:2)^2 = 11^2 \Rightarrow b = \sqrt{11^2-5{,}5^2} = 9{,}53$

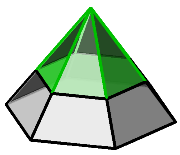
Calc.: [√] [(] [1] [1] [x²] [–] [5] [.] [5] [x²] [)] [STO] [B] [=] ⇨ 9.526279442

$m^2 = 8^2 + (a-b)^2 \Rightarrow m = \sqrt{64+(a-b)^2} = 9{,}54$

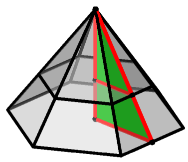
Calc.: [√] [(] [6] [4] [+] [(] [RCL] [A] [–] [RCL] [B] [)] [x²] [)] [STO] [M] [=] ⇨ 9.539392014

$\text{Área} = \frac{6\cdot 17\cdot a}{2} + \frac{6\cdot 11\cdot b}{2} + 6\cdot m\cdot \frac{17+11}{2} = 51a + 33b + 84m = 1866{,}5$

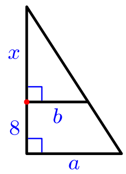
Calc.: [5] [1] [×] [RCL] [A] [+] [3] [3] [×] [RCL] [B] [+] [8] [4] [×] [RCL] [M] [=] ⇨ 1866.520176



Para calcular el volumen del tronco de pirámide hay que imaginar la pirámide de la que proviene y restar los volúmenes de las dos pirámides que aparecen en el proceso (grande y pequeña).



La clave es calcular las alturas de las dos pirámides. Nos basamos en los dos triángulos rectángulos semejantes que se forman con las alturas, las apotemas de las bases y las apotemas de las pirámides.



Usando la proporcionalidad de los lados de los triángulos, tenemos:

$\frac{x}{b}=\frac{x+8}{a} \Rightarrow ax = b(x+8) \Rightarrow ax = bx+8b \Rightarrow (a-b)x = 8b \Rightarrow x = \frac{8b}{a-b} = 14{,}7$

Calculadora: [8] [×] [RCL] [B] [÷] [(] [RCL] [A] [–] [RCL] [B] [)] [STO] [C] [=] ⇨ 14.66666667

$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\cdot\frac{6\cdot 17\cdot a}{2}\cdot(x+8) - \frac{1}{3}\cdot\frac{6\cdot 11\cdot b}{2}{}^{2}\cdot x = 17a(x+8)-11bx = 4136{,}1$

[1] [7] [×] [RCL] [A] [×] [(] [RCL] [C] [+] [8] [)] [–] [1] [1] [×] [RCL] [B] [×] [RCL] [C] [=] ⇨ 4136.137328

Solución → área: 1866,5 m², volumen: 4136,1 m³

Enunciados

Da los resultados en metros cuadrados o metros cúbicos, según corresponda.

① Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 12 metros de altura sabiendo que sus bases son cuadrados de 20 metros de lado y 10 metros de lado.

② Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 24 metros de altura sabiendo que sus bases son cuadrados de 42 metros de lado y 28 metros de lado.

③ Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 21 metros de altura sabiendo que sus bases son cuadrados de 120 metros de lado y 80 metros de lado.

④ Calcula con cinco cifras significativas el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 7 metros de altura sabiendo que sus bases son hexágonos regulares de 13 metros de lado y de 9 metros de lado.

⑤ Calcula con cinco cifras significativas el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 2 metros de altura sabiendo que sus bases son hexágonos regulares de 5 metros de lado y de 3 metros de lado.

⑥ Calcula con cinco cifras significativas el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 10 metros de altura sabiendo que sus bases son hexágonos regulares de 25 metros de lado y de 18 metros de lado.

⑦ Calcula con cuatro cifras significativas el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 1 metro de altura sabiendo que sus bases son cuadrados de 3 metros de lado y 2 metros de lado.

⑧ Calcula con cuatro cifras significativas el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 10 metros de altura sabiendo que sus bases son cuadrados de 13 metros de lado y 10 metros de lado.

⑨ Calcula con cuatro cifras significativas el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 11 metros de altura sabiendo que sus bases son cuadrados de 12 metros de lado y 8 metros de lado.

⑩ Calcula con seis cifras significativas el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 23 metros de altura sabiendo que sus bases son hexágonos regulares de 27 metros de lado y de 19 metros de lado.

⑪ Calcula con cuatro cifras significativas el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 8 metros de altura sabiendo que sus bases son hexágonos regulares de 4 metros de lado y de 3 metros de lado.

⑫ Calcula con cuatro cifras significativas el área y el volumen de un tronco de pirámide recto de 0,5 metros de altura sabiendo que sus bases son hexágonos regulares de 1,2 metros de lado y de 1,4 metros de lado.

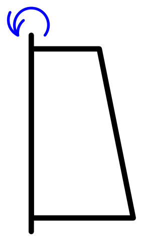
Definiciones de tronco de cono

Como ocurre muchas veces en matemáticas, los troncos de cono admiten dos definiciones diferentes que son equivalentes.

El tronco de cono es un cuerpo de revolución

El tronco de cono es un cuerpo geométrico de revolución obtenido al hacer girar un trapecio rectángulo alrededor del lado que mide igual que la altura.

Ejemplo

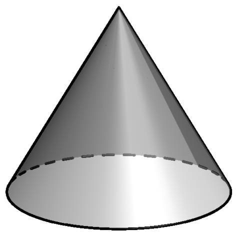
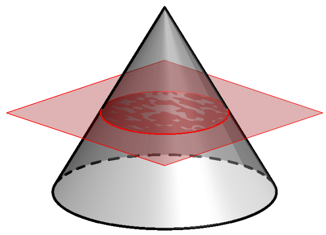
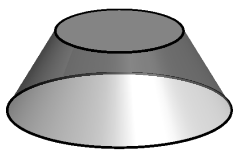
Figura 1	Figura 2
	
Un trapecio rectángulo	El tronco de cono generado

El tronco de cono como la parte inferior de un cono

Un tronco de cono es el cuerpo geométrico obtenenido a partir de un cono cortándolo por un plano paralelo al plano de la base y considerando la parte comprendida entre los dos planos.

Ejemplo

Partimos del cono de la figura 3. Consideramos un plano paralelo a la base del cono, ilustrado en la figura 4. El tronco de cono queda como se ve en la figura 5.

Figura 3	Figura 4	Figura 5
		

Relaciones entre las dos definiciones

- La base mayor del trapecio rectángulo genera un círculo llamado base mayor del tronco de cono.
- La base menor del trapecio rectángulo genera un círculo llamado base menor del tronco de cono.
- El lado del trapecio que no forma parte de ningún ángulo recto genera la parte llamada superficie lateral del tronco de cono. Cualquier segmento de la superficie lateral que corresponda con una posición de este lado del trapecio se llama **generatriz** del tronco de cono. El desarrollo plano de la superficie lateral es un sector de corona circular, también llamado trapecio circular.
- Se llama altura del tronco de cono a cualquier segmento que una perpendicularmente las dos bases. Su longitud es igual a la longitud de la altura del trapecio rectángulo.

Elementos de un tronco de cono

Los troncos de cono tienen varios elementos importantes.

En un tronco de cono recto como el de la figura 1 podemos apreciar:

* La base mayor. Solemos representarla en la parte más baja porque es como nos parece más «estable». Si construimos un tronco de cono para usarlo como taburete, sin duda pondríamos la base mayor en contacto con el suelo. Está señalada en la figura 2.
* La base menor. Normalmente la representamos en la parte más alta. La vemos marcada en la figura 3.
* La superficie lateral. Está marcada en la figura 4.
* Radio de las bases. Es cualquiera de los radios de los círculos que forman las bases. Hay dos marcados en la figura 5, uno de cada base.
* Generatriz. Está marcada en la figura 6.
* Altura del tronco de cono. Es cualquier segmento que una perpendicularmente las dos bases. Una de ellas, la que une los centros de las bases, está marcada en la figura 7.

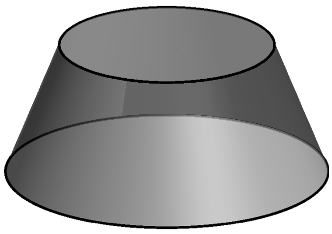
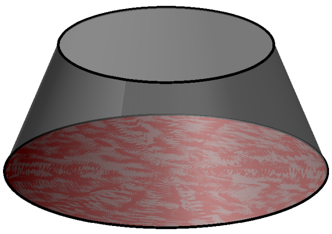
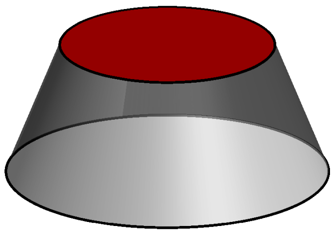
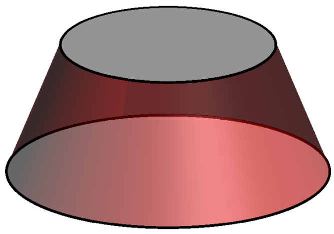
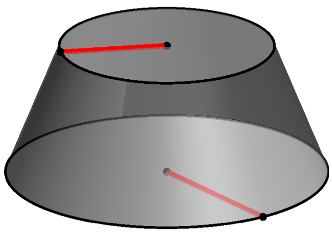
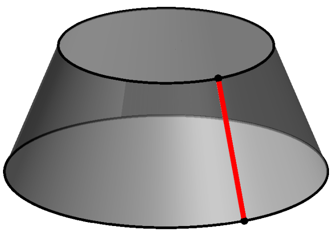
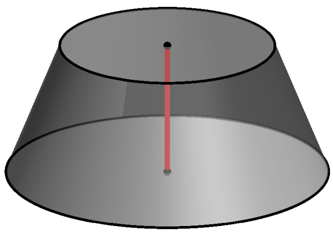
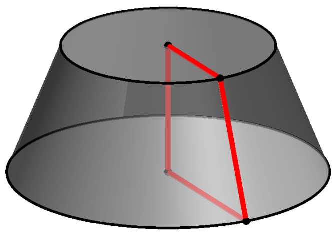
Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
			
Tronco de cono	Base mayor	Base menor	Superficie lateral

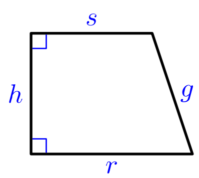
Figura 5	Figura 6	Figura 7	Figura 8
			
Unos radios de las bases	Una generatriz	Una altura	Relación

Relación entre radios, generatriz y altura

Un radio de cada base, una generatriz y la altura que pasa por los centros de las bases forman un trapecio rectángulo, como se ve en la figura 8.

Utilizamos esta notación para las longitudes de los segmentos:

* Radio de la base mayor: r.
* Radio de la base menor: s.
* Generatriz: g.
* Altura: h.

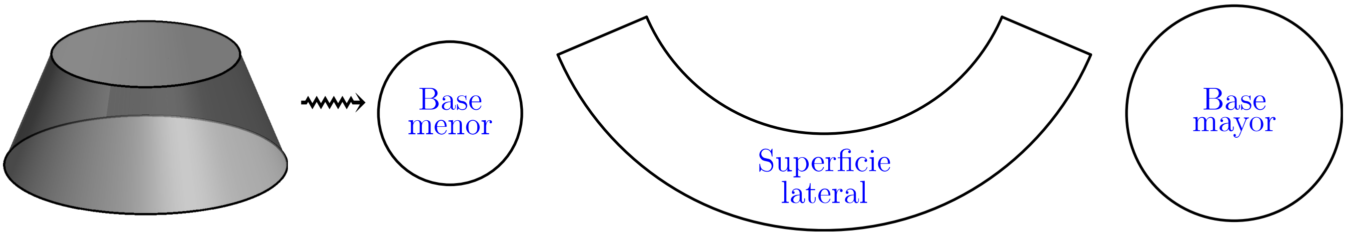


Por tanto, se verifica: $\mathbf{g^2=h^2+(r-s)^2}$

Desarrollo plano de un tronco de cono

El desarrollo plano de un tronco de cono se compone de tres figuras planas:

- Dos círculos, que provienen de las dos bases del tronco de cono.
- Un sector de corona circular (también llamado trapecio circular), que proviene de la superficie lateral del tronco de cono.



Área de un tronco de cono

Conocidos los radios de las bases, el cálculo del área de las bases no presenta ninguna dificultad, puesto que son círculos. Sin embargo, el cálculo del área de la superficie lateral es más complicado.

Utilizando esta notación para las longitudes de los segmentos:

- Radio de la base mayor: r.
- Radio de la base menor: s.
- Generatriz: g.

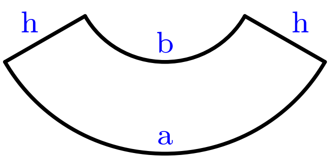
Sabemos que:

- Área de la base mayor: $\pi \cdot r^2$
- Área de la base menor: $\pi \cdot s^2$
- Área de la superficie lateral: $\pi \cdot (r+s) \cdot g$
- Área del tronco de cono: $\pi \cdot r^2 + \pi \cdot s^2 + \pi \cdot (r+s) \cdot g = \pi \cdot (r^2+s^2+(r+s) \cdot g)$

Demostración de la fórmula del área lateral del tronco de cono

Hay varias demostraciones de la fórmula. Vamos a basarnos en la fórmula para calcular el área de cualquier trapecio circular conocidas las longitudes de sus lados; es una fórmula que no hemos demostrado en este curso, pero se podría hacer perfectamente usando solo conocimientos de este nivel 3.

Si los arcos del trapecio circular miden a y b y los otros dos lados miden h, se verifica: Área $= \dfrac{a+b}{2} \cdot h$. Es interesante observar lo mucho que se parece esta fórmula a la fórmula para calcular el área de un trapecio.



En nuestro caso,

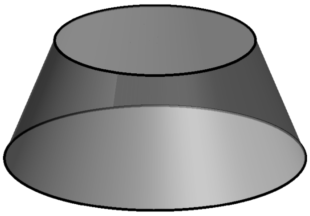
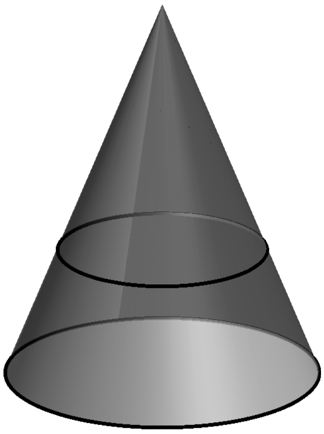
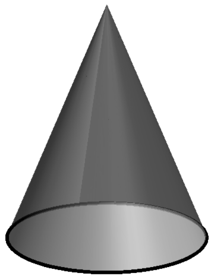
- El arco mayor es la longitud de la circunferencia de la base mayor: $2 \cdot \pi \cdot r$
- El arco menor es la longitud de la circunferencia de la base menor: $2 \cdot \pi \cdot s$
- La longitud de los otros dos lados es la generatriz: g

Por lo tanto:

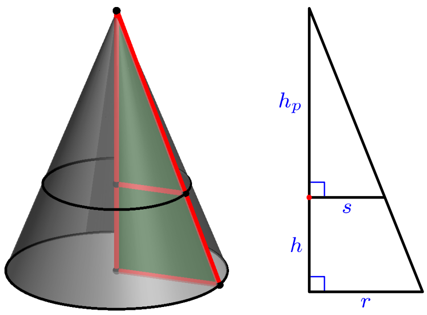
$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{2 \cdot \pi r + 2 \cdot \pi s}{2} \cdot g = \frac{2 \cdot \pi (r+s)}{2} \cdot g = \pi \cdot (r+s) \cdot g$$

Volumen de un tronco de cono

Para calcular el volumen de un tronco de cono hay que imaginar el cono del que proviene y restar los volúmenes de los dos conos que aparecen en el proceso (el *grande* y el *pequeño*).

El tronco de cono del que deseamos calcular el volumen.	El cono del que proviene el tronco de cono (es el cono *grande*).	El cono de la parte superior (es el cono *pequeño*).
		

Usaremos la siguiente notación:



- ✱ Volumen del tronco de cono: V
- ✱ Volumen del cono grande: V_g
- ✱ Volumen del cono pequeño: V_p
- ✱ Longitud del radio de la base mayor del cono: r
- ✱ Longitud del radio de la base menor del cono: s
- ✱ Longitud de la altura del tronco de cono: h
- ✱ Longitud de la altura del cono mayor: h_g
- ✱ Longitud de la altura del cono menor: h_p

La clave es calcular las alturas de los dos conos. Nos basamos en los dos triángulos rectángulos semejantes que se forman con las alturas, las generatrices de los conos y los radios de las bases.

Usando la proporcionalidad de los lados de los triángulos, tenemos: $\frac{h_p}{s}=\frac{h_p+h}{r}$.

De ahí podremos despejar el valor $h_p = \frac{sh}{r-s}$ y luego calcular $h_g = h+h_p$.

Con las alturas de los dos conos, podemos terminar así:

$$V = V_g - V_p = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h_g - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot s^2\cdot h_p = \frac{\pi}{3}\cdot(r^2\cdot h_g - s^2\cdot h_p)$$

Pero también podemos continuar desarrollando la expresión (no lo haremos aquí) y llegar hasta una fórmula muy cómoda de aplicar:

$$\boxed{V = \frac{\pi}{3}h(r^2+s^2+rs)}$$

Ejemplos de cálculo del área y el volumen de un tronco de cono

Si los datos están elegidos a propósito, las operaciones serán sencillas; pero normalmente es necesario usar una memoria de la calculadora.

Enunciados

① Calcula de manera exacta el área y el volumen de un tronco de cono de 3 metros de altura sabiendo que los radios de las bases miden 4 metros y 8 metros.

② Calcula con seis cifras significativas el área y el volumen de un tronco de cono de 37 m de altura sabiendo que los radios de las bases miden 40 m y 53 m.

Resoluciones

Es estas resoluciones no hemos usado dibujos auxiliares ni desarrollos, simplemente hemos aplicado las fórmulas. Lo hemos hecho para concentrarnos en las operaciones con o sin la calculadora. En tus resoluciones sería conveniente que añadieras dibujos y alguna explicación más.

① Generatriz: $g = \sqrt{3^2+(8-4)^2} = \sqrt{9+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Área = $\pi\cdot(8^2+4^2+(8+4)\cdot 5) = \pi\cdot(64+16+60) = 140\cdot\pi$

Altura del cono pequeño: $h_p = \dfrac{4\cdot 3}{8-4} = \dfrac{4\cdot 3}{4} = 3$

Altura del cono grande: $h_g = h_p+3 = 3+3 = 6$

Volumen$=\dfrac{\pi}{3}\cdot(8^2\cdot 6-4^2\cdot 3)=\pi\cdot(64\cdot 2-16)=\pi\cdot(128-16)=112\cdot\pi$

Solución → área: $140\cdot\pi$ m², volumen: $112\cdot\pi$ m³

Nota: no multiplicamos porque el enunciado pide el resultado exacto.

② Generatriz: $g = \sqrt{37^2+(53-40)^2} = \sqrt{37^2+13^2} = 39{,}2$

Calculadora: √ (3 7 x² − 1 3 x²) = ⇨ 39.2173431

Área = $\pi\cdot(53^2+40^2+(53+40)\cdot g) = 25309{,}3$

Calculadora: π × (5 3 x² + 4 0 x² + 9 3 × Ans) = ⇨ 25309.33929

Altura del cono pequeño: $h_p = \dfrac{40\cdot 37}{53-40} = 113{,}8$

Calculadora: 4 0 × 3 7 ÷ 1 3 = ⇨ 113.8461538

Volumen = $\dfrac{\pi}{3}\cdot(53^2\cdot(h_p+37)-40^2\cdot h_p) = 252975$

Calc.: π ÷ 3 × (5 3 x² × (Ans + 3 7) − 4 0 x² × Ans) = ⇨

⇨ 252974.654

Con la aplicación directa de la fórmula final del volumen, se calcula así:

$V = \dfrac{\pi}{3}\cdot 37\cdot(53^2+40^2+53\cdot 40) = 252975$

Solución → área: 25 309,3 m², volumen: 252 975 m³

Enunciados

Da los resultados en metros cuadrados o metros cúbicos, según corresponda.

① Calcula de manera exacta el área y el volumen de un tronco de cono de 12 m de altura sabiendo que los radios de las bases miden 15 m y 10 m.

② Calcula de manera exacta el área y el volumen de un tronco de cono de 15 m de altura sabiendo que los radios de las bases miden 24 m y 16 m.

③ Calcula de manera exacta el área y el volumen de un tronco de cono de 63 m de altura sabiendo que los radios de las bases miden 32 m y 16 m.

④ Calcula de manera exacta el área y el volumen de un tronco de cono de 45 m de altura sabiendo que los radios de las bases miden 56 m y 28 m.

⑤ Calcula de manera exacta el área y el volumen de un tronco de cono de 48 m de altura sabiendo que los radios de las bases miden 165 m y 55 m.

Enunciados

Da los resultados en metros cuadrados o metros cúbicos, según corresponda. Utiliza proporcionalidad de triángulos para calcular los volúmenes.

⑥ Calcula con cuatro cifras significativas el área y el volumen de un tronco de cono de 3 m de altura sabiendo que los radios de las bases miden 4 m y 2 m.

⑦ Calcula con tres cifras significativas el área y el volumen de un tronco de cono de 5 m de altura sabiendo que los radios de las bases miden 7 m y 3 m.

⑧ Calcula con cuatro cifras significativas el área y el volumen de un tronco de cono de 1,3 m de altura sabiendo que los radios de las bases miden 2,5 m y 0,9 m.

⑨ Calcula con seis cifras significativas el área y el volumen de un tronco de cono de 9 m de altura sabiendo que los radios de las bases miden 13 m y 11 m.

⑩ Calcula con seis cifras significativas el área y el volumen de un tronco de cono de 4 m de altura sabiendo que los radios de las bases miden 15 m y 14 m.

Enunciados

Da los resultados en metros cúbicos con cinco cifras significativas. Aplica la fórmula final para resolver el ejercicio.

⑪ Calcula el volumen de un tronco de cono de 2,3 metros de altura sabiendo que los radios de las bases miden 1,2 metros y 1,8 metros.

⑫ Calcula el volumen de un tronco de cono de 7,1 metros de altura sabiendo que los radios de las bases miden 4,3 metros y 6,2 metros.

⑬ Calcula el volumen de un tronco de cono de 9 metros de altura sabiendo que los radios de las bases miden 6 metros y 7 metros.

⑭ Calcula el volumen de un tronco de cono de 172 centímetros de altura sabiendo que los radios de las bases miden 41 centímetros y 93 centímetros.

Cortes de una esfera con uno o dos planos

Podemos considerar los cuerpos de revolución obtenidos al cortar una esfera con un plano o con una esfera con dos planos paralelos. Aunque estos cuerpos no reciben el nombre de troncos, su definición es tan parecida a la de los troncos de pirámide y de cono que tiene sentido estudiarlos juntos.

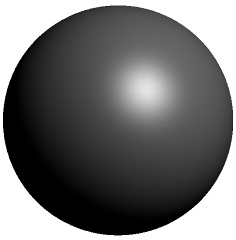
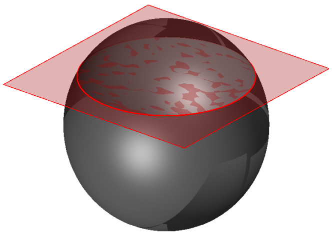
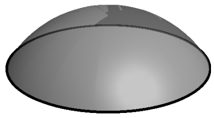
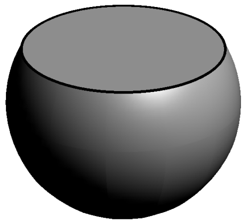
Definición de casquete esférico

Un casquete esférico es el cuerpo de revolución obtenido al cortar una esfera con un plano y considerar cualquiera de los dos cuerpos obtenidos.

- ✱ Si el plano pasa por el centro de la esfera, los dos casquetes esféricos obtenidos son iguales y son semiesferas.
- ✱ Si el plano no pasa por el centro de la esfera, los dos casquetes esféricos son diferentes y casi siempre nos referimos al menor de los dos.

Ejemplo

Partimos de la esfera de la figura 1. Consideramos un plano que la corta, ilustrado en la figura 2. Quedan definidos los casquetes esféricos que se ilustran en las figuras 3 (el menor) y 4 (el mayor).

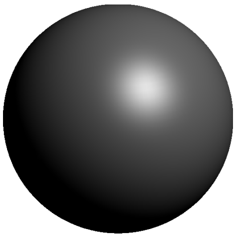
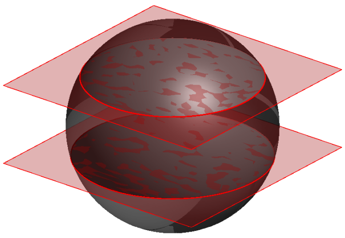
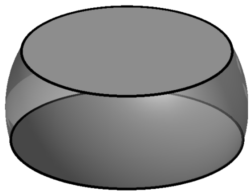
Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
			

Definición de segmento esférico

Un segmento esférico es el cuerpo de revolución obtenido al cortar una esfera con dos planos paralelos y considerar la parte que queda entre ellos.

Ejemplo

Partimos de la esfera de la figura 5. Consideramos dos planos paralelos que la corta, ilustrados en la figura 6. Queda definido el segmento esférico que se ilustra en la figura 7.

Figura 5	Figura 6	Figura 7
		

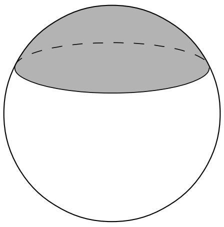
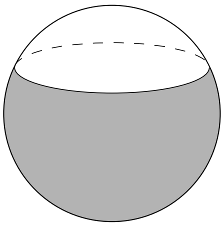
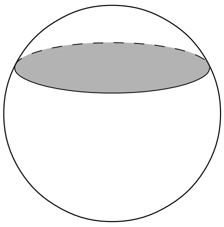
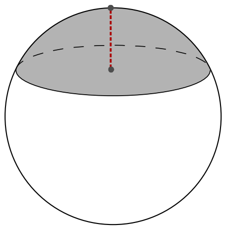
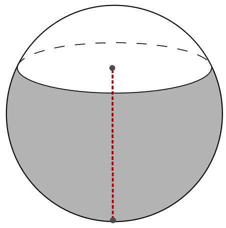
Las definiciones como cuerpos de revolución

Hemos establecido en la definición que los casquetes esféricos y los segmentos esféricos son cuerpos de revolución, pero no su definición. Te será fácil pensar por ti mismo en los arcos de circunferencia que se necesitan para describir estos cuerpos geométricos como cuerpos de revolución, así que lo dejamos a tu consideración.

Elementos de un casquete esférico

- ✱ Un casquete esférico está limitado por un círculo, llamado base, y por una parte de la superficie de una esfera.
- ✱ La altura de un casquete esférico es el segmento que une el centro de la base con el punto de la parte esférica más alejado de ese centro.
- ✱ Si denominamos r a la longitud del radio de la esfera y h a la longitud de la altura del casquete esférico, pueden ocurrir tres casos:
  - ■ $h = r$. Entonces el casquete esférico es una semiesfera.
  - ■ $h < r$. Entonces el casquete esférico es menor que una semiesfera.
  - ■ $h > r$. Entonces el casquete esférico es mayor que una semiesfera.

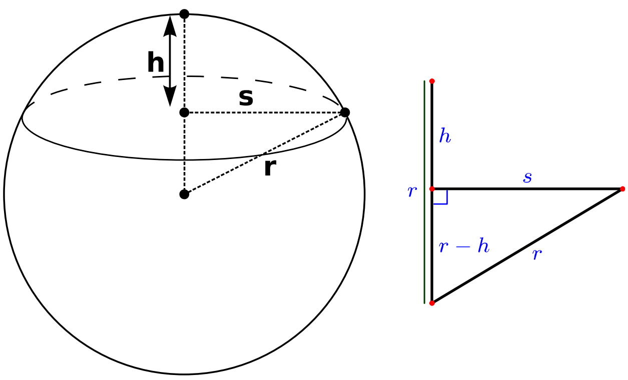
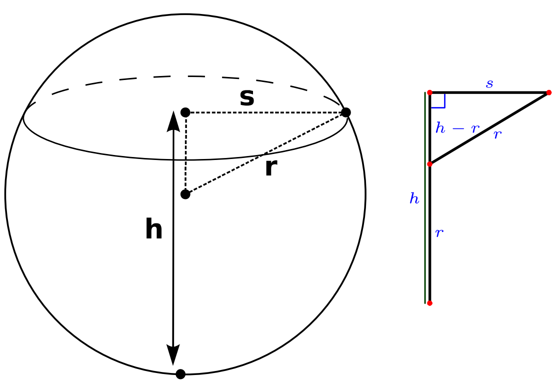
Ejemplos

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4	Ejemplo 5
				
La parte esférica de un casquete esférico en el que $h < r$	La parte esférica de un casquete esférico en el que $h > r$	La base de los dos casquetes esféricos anteriores	La altura de un casquete esférico en el que $h < r$	La altura de un casquete esférico en el que $h > r$

Relación entre los elementos de un casquete esférico

Si denominamos r a la longitud del radio de la esfera, s a la longitud del radio de la base del casquete esférico y h a la longitud de la altura del casquete esférico, pueden ocurrir tres casos:

- ✱ $h = r$. Entonces $r = s$ y estamos ante el caso trivial $h = r = s$.
- ✱ $h < r$. Entonces $r^2 = s^2 + (r–h)^2$, como se ve en la figura 6.
- ✱ $h > r$. Entonces $r^2 = s^2 + (h–r)^2$, como se ve en la figura 7.

Figura 6	Figura 7
	

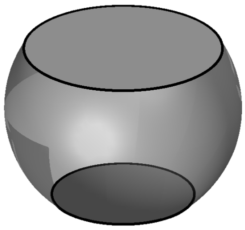
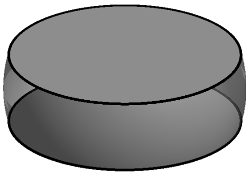
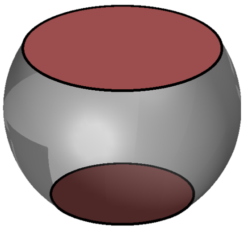
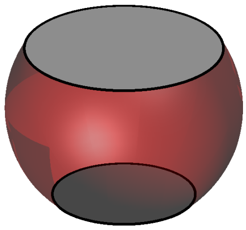
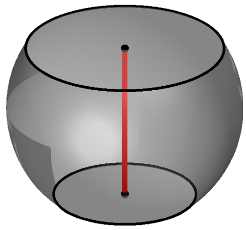
Observa que $(r–h)^2 = (h–r)^2$, de modo que la siguiente expresión es válida en los tres casos:

$$\boxed{r^2 = s^2 + (r–h)^2}$$

Elementos de un segmento esférico

- Un segmento esférico está limitado por dos círculos, llamados bases, y por una parte de la superficie de una esfera, llamada **zona esférica**.
- Las bases pueden ser iguales o no.
- La altura de un segmento esférico es cualquier segmento que una perpendicularmente las bases. (No confundas las dos utilizaciones diferentes de la palabra «segmento» en la frase anterior).

Ejemplos

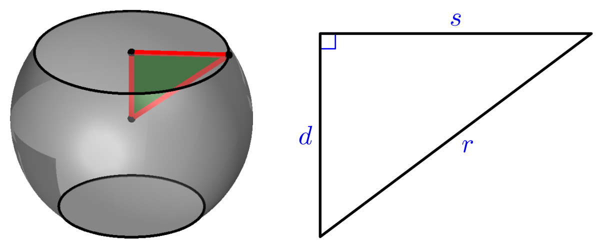
Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4	Ejemplo 5
				
Un segmento esférico que tiene las dos bases distintas	Un segmento esférico que tiene las dos bases iguales	Las dos bases (resaltadas) de un segmento esférico	La **zona esférica** (resaltada) de un segmento esférico	La altura (resaltada) de un segmento esférico

Primera relación entre los elementos de un segmento esférico

Si denominamos r a la longitud del radio de la esfera, s a la longitud del radio de una de las bases del casquete esférico y d a la distancia entre el centro de la esfera y el centro de esa base, se verifica

$$\boxed{r^2 = s^2 + d^2}$$

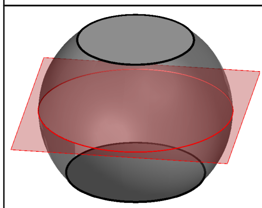
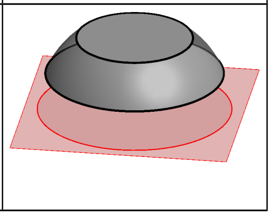
El motivo es que los tres segmentos forman un triángulo rectángulo, como observamos en estas ilustraciones:



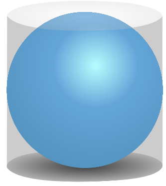
Segunda relación entre los elementos de un segmento esférico

Si denominamos h a la longitud de la altura del segmento esférico, d a la distancia entre el centro de la esfera y el centro de una base y e a la distancia entre el centro de la esfera y el centro de la otra base, se verifica una de estas igualdades:

- $h = d + e$, cuando las dos bases están a distinto lado del círculo máximo de la esfera paralelo a las bases (ejemplo 6).
- $h = |d - e|$, cuando las dos bases están al mismo lado del círculo máximo de la esfera paralelo a las bases (ejemplo 7).

Ejemplo 6	Ejemplo 7
	

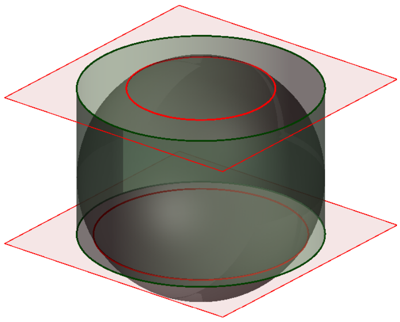
Área de una zona esférica



En el nivel 2 vimos que el área de una esfera es igual al área lateral del menor cilindro que la contiene (ilustrado en la figura de la derecha), según demostró el matemático griego Arquímedes de Siracusa en el siglo III a.e.c.

Pues bien, esta propiedad se puede extender a cualquier sección de la esfera que se encuentre entre dos planos paralelos; es decir: **el área de la sección de la esfera comprendida entre dos planos paralelos es igual al área lateral del menor cilindro que contiene a esa sección**.

Ejemplo



Vemos una ilustración a la derecha. Observa una esfera (en color gris) que está cortada por dos planos paralelos (en rojo suave). Entre las dos circunferencias (en rojo intenso) de corte de la esfera y los planos queda la zona esférica de la que queremos calcular el área. Vemos el menor cilindro que incluye a la zona esférica (en verde suave). Observa las circunferencias de corte del cilindro con los planos (en verde intenso). El área de la zona esférica es igual al área lateral del cilindro.

Fórmula del área de una zona esférica

Si denominamos A al área de la zona esférica, r a la longitud del radio de la esfera y h a la longitud de la altura del segmento esférico, entonces se verifica

$$\boxed{A = 2\pi rh}$$

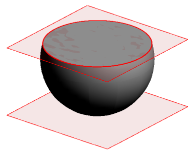
ya que esa es el área lateral del cilindro. Recuerda que el área lateral del cilindro es igual al área del rectángulo obtenido al considerar el desarrollo plano; en este caso las dimensiones del rectángulo son $2\pi r$ y h.

Área de un segmento esférico

Si denominamos A al área de un casquete esférico, r a la longitud del radio de la esfera, s y t a las longitudes de los radios de las bases y h a la longitud de la altura del segmento esférico, entonces se verifica

$$\boxed{A = \pi s^2 + \pi t^2 + 2\pi rh}$$

Fórmula del área de la parte esférica de un casquete esférico



La fórmula del área de una zona esférica es aplicable también al cálculo del área de la parte esférica de un casquete esférico porque basta considerar como uno de los dos planos al plano tangente a la esfera en el punto más alejado del centro de la base. Desde este punto de vista un casquete esférico es un caso particular de segmento esférico.

Área de un casquete esférico

Si denominamos A al área de un casquete esférico, r a la longitud del radio de la esfera, s a la longitud del radio de la base y h a la longitud de la altura del segmento esférico, entonces se verifica:

$$\boxed{A = \pi s^2 + 2\pi rh}$$

Enunciados

① Calcula con cinco cifras significativas el área de una zona esférica de 11 metros de altura obtenida a partir de una esfera de 19 metros de radio.

② Calcula con tres cifras significativas el porcentaje del área de una esfera de 13 metros de radio que corresponde a una zona esférica de 17 metros de altura.

③ Calcula las alturas de las dos zonas esféricas que se pueden obtener en una esfera de 65 metros de radio de modo que tengan las mismas bases, de 56 metros y 63 metros de longitud de sus radios.

④ Calcula con cinco cifras significativas el área de un casquete esférico de 3 metros de altura obtenido a partir de una esfera de 7 metros de radio.

⑤ Calcula con cinco cifras significativas el área de un casquete esférico de 9 metros de altura obtenido a partir de una esfera de 7 metros de radio.

Resoluciones

① Área = $2\cdot\pi\cdot19\cdot11 = 1313{,}2$

Calculadora: 2 × π × 1 9 × 1 1 = ⇒ 1313.185729

Solución: 1313,2 m²

② $\text{Porcentaje} = \dfrac{\text{Área de la zona}}{\text{Área de la esfera}} = \dfrac{2\cdot\pi\cdot13\cdot17}{4\cdot\pi\cdot13^2} = \dfrac{17}{2\cdot13} = 0{,}654 = 65{,}4\,\%$

Calculadora: 1 7 ÷ 2 6 = ⇒ 0.653846153

Solución: 65,4 %

③ Llamamos d a la distancia del centro de la esfera al centro de la base cuyo radio mide 63 metros y e a la distancia del centro de la esfera al centro de la base cuyo radio mide 56 metros.

$d^2+63^2=65^2 \Rightarrow d = \sqrt{65^2-63^2} = 16$; $e^2+56^2=65^2 \Rightarrow e = \sqrt{65^2-56^2} = 33$

Una altura mide $d+e=16+33=49$ y la otra mide $e-d=33-16=7$

Solución: 49 m y 7 m

④ Llamamos s a la longitud del radio de la base.

$s^2+(7-3)^2 = 7^2 \Rightarrow s^2 = 7^2-4^2 = 49-16 = 33$

Área = $\pi\cdot33+2\cdot\pi\cdot7\cdot3 = \pi\cdot(33+42) = 75\cdot\pi = 235{,}62$

Calculadora: 7 5 × π = ⇒ 235.619449

Solución: 235,62 m²

⑤ Llamamos s a la longitud del radio de la base.

$s^2+(9-7)^2 = 7^2 \Rightarrow s^2 = 7^2-2^2 = 49-4 = 45$

Área = $\pi\cdot45+2\cdot\pi\cdot7\cdot9 = \pi\cdot(45+126) = 171\cdot\pi = 537{,}21$

Calculadora: 1 7 1 × π = ⇒ 537.2123438

Solución: 537,21 m²

Enunciados

① Calcula el área de una zona esférica de 7 metros de altura obtenida a partir de una esfera de 11 metros de radio. Da el resultado en metros cuadrados con cuatro cifras significativas.

② Calcula el área de una zona esférica de 19 metros de altura obtenida a partir de una esfera de 12 metros de radio. Da el resultado en metros cuadrados con cinco cifras significativas.

③ Calcula el área de una zona esférica de 2,5 metros de altura obtenida a partir de una esfera de 1,3 metros de radio. Da el resultado en metros cuadrados con tres cifras significativas.

④ Calcula con tres cifras significativas el porcentaje del área de una esfera de 9 metros de radio que corresponde a una zona esférica de 6 metros de altura.

⑤ Calcula con tres cifras significativas el porcentaje del área de una esfera de 8 metros de radio que corresponde a una zona esférica de 7,5 metros de altura.

⑥ Calcula en metros las alturas de las dos zonas esféricas que se pueden obtener en una esfera de 125 metros de radio de modo que tengan las mismas bases, de 44 metros y 35 metros de longitud de sus radios.

⑦ Calcula en metros las alturas de las dos zonas esféricas que se pueden obtener en una esfera de 169 metros de radio de modo que tengan las mismas bases, de 119 metros y 65 metros de longitud de sus radios.

⑧ Calcula en metros las alturas de las dos zonas esféricas que se pueden obtener en una esfera de 185 metros de radio de modo que tengan las mismas bases, de 176 metros y 153 metros de longitud de sus radios.

⑨ Calcula en metros las alturas de las dos zonas esféricas que se pueden obtener en una esfera de 325 metros de radio de modo que tengan las mismas bases, de 36 metros y 204 metros de longitud de sus radios.

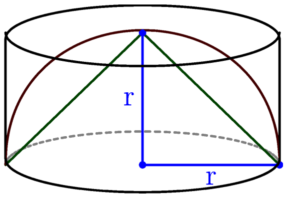
⑩ Calcula en metros las alturas de las dos zonas esféricas que se pueden obtener en una esfera de 445 metros de radio de modo que tengan las mismas bases, de 84 metros y 396 metros de longitud de sus radios.

⑪ Calcula el área de un casquete esférico de 13 metros de altura obtenido a partir de una esfera de 17 metros de radio. Da el resultado en metros cuadrados con seis cifras significativas.

⑫ Calcula el área de un casquete esférico de 2,5 metros de altura obtenido a partir de una esfera de 3,8 metros de radio. Da el resultado en metros cuadrados con cuatro cifras significativas.

⑬ Calcula el área de un casquete esférico de 62 metros de altura obtenido a partir de una esfera de 71 metros de radio. Da el resultado en metros cuadrados con cinco cifras significativas.

Volumen de un segmento esférico



En el nivel 2 vimos que los volúmenes de una semiesfera, el menor cilindro que la contiene y el mayor cono contenido en ella (representados a la derecha) están relacionados de una manera muy simple:

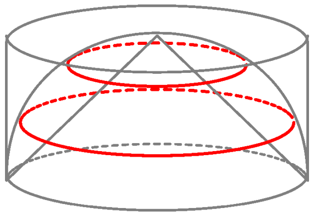
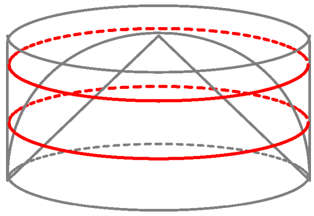
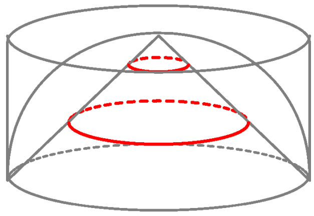
$V_{\text{Cono}} + V_{\text{Semiesfera}} = V_{\text{Cilindro}}$

Pues bien, esta propiedad también se verifica con los cuerpos geométricos obtenidos dando cortes con dos planos paralelos a la base común.

Consideramos los tres cuerpos geométricos de la ilustración de arriba:

- ✱ Una semiesfera cuyo radio mide r.
- ✱ Un cilindro cuya altura mida r y cuyo radio de la base mida r.
- ✱ Un cono cuya altura mida r y cuyo radio de la base mida r.

Consideramos dos planos paralelos a la base común de los tres y que los corten, con lo que obtenemos otros tres cuerpos geométricos. Vemos en rojo sus cortes con los dos planos paralelos:

Segmento esférico	Cilindro menor	Tronco de cono
		

- ✱ Un segmento esférico, obtenido a partir de la semiesfera.
- ✱ Un cilindro menor, obtenido a partir del cilindro.
- ✱ Un tronco de cono, obtenido a partir del cono.

Se verifica: $V_{\text{Tronco de cono}} + V_{\text{Segmento esférico}} = V_{\text{Cilindro menor}}$

Fórmula del volumen de un segmento esférico

A partir de la relación anterior es posible obtener una fórmula para calcular el volumen de un segmento esférico. Si denominamos V al volumen de un segmento esférico, h a la longitud de su altura y s y t a las longitudes de los radios de las bases:

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{6}(3s^2 + 3t^2 + h^2)}$$

Fórmula del volumen de un casquete esférico

La fórmula del volumen de un segmento esférico se adapta fácilmente al cálculo del volumen de un casquete esférico porque podemos considerar el casquete esférico como un caso particular de segmento esférico en el que una de las bases es un punto y su radio mide 0. Si denominamos V al volumen de un casquete esférico, h a la longitud de su altura y r a la longitud del radio de la base:

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)}$$

Enunciados

Calcula los siguientes volúmenes dando el resultado en metros cúbicos con cuatro cifras significativas.

① Calcula el volumen de un segmento esférico de 7 metros de altura cuyos radios de las bases miden 4 y 5 metros.

② Calcula el volumen de un segmento esférico de 2 metros de altura cuyos radios de las bases miden 1 y 7 metros.

③ Calcula el volumen de un casquete esférico de 11 metros de altura cuyo radio de la base mide 9 metros.

④ Calcula el volumen de un casquete esférico de 6 metros de altura cuyo radio de la base mide 1 metro.

⑤ Calcula el volumen de un casquete esférico de 5 metros de altura obtenido a partir de una esfera de 8 metros de radio.

Resoluciones

① Volumen $= \frac{\pi \cdot 7}{6} \cdot (3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 + 7^2) = 630{,}4$

Calculadora:

π × 7 ÷ 6 × (3 × 4 x^2 + 3 × 5 x^2 + 7 x^2) = ⇨ 630.4129258

Solución: 630,4 m³

② Volumen $= \frac{\pi \cdot 2}{6} \cdot (3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 7^2 + 2^2) = 161{,}3$

Calculadora: π × 2 ÷ 6 × (3 + 3 × 4 9 + 4) = ⇨ 161.2684229

Solución: 161,3 m³

③ Volumen $= \frac{\pi \cdot 11}{6} \cdot (3 \cdot 9^2 + 11^2) = 2096$

Calculadora: π × 1 1 ÷ 6 × (3 × 9 x^2 + 1 1 x^2) = ⇨ 2096.489497

Solución: 2096 m³

④ Volumen $= \frac{\pi \cdot 6}{6} \cdot (3 \cdot 1^2 + 6^2) = 122{,}5$

Calculadora: π × 3 9 ⇨ 122.5221135

Solución: 122,5 m³

⑤ Llamamos s a la longitud del radio de la base.

$s^2 + (8-5)^2 = 8^2 \Rightarrow s^2 = 64 - 3^2 = 64 - 9 = 55$

Volumen $= \frac{\pi \cdot 5}{6} \cdot (3 \cdot 55 + 5^2) = 497{,}4$

Calculadora: π × 5 ÷ 6 × (3 × 5 5 + 5 x^2) = ⇨ 497.4188368

Solución: 497,4 m³

Enunciados

Calcula los siguientes volúmenes dando el resultado en metros cúbicos con seis cifras significativas.

① Calcula el volumen de un segmento esférico de 10 metros de altura cuyos radios de las bases miden 7 y 5 metros.

② Calcula el volumen de un segmento esférico de 13 metros de altura cuyos radios de las bases miden 11 y 9 metros.

③ Calcula el volumen de un segmento esférico de 9 metros de altura cuyos radios de las bases miden 3 y 5 metros.

④ Calcula el volumen de un segmento esférico de 3 metros de altura cuyos radios de las bases miden 2 y 3,5 metros.

⑤ Calcula el volumen de un segmento esférico de 33 metros de altura cuyos radios de las bases miden 21 y 10 metros.

⑥ Calcula el volumen de un casquete esférico de 9 metros de altura cuyo radio de la base mide 7 metros.

⑦ Calcula el volumen de un casquete esférico de 4 metros de altura cuyo radio de la base mide 2 metros.

⑧ Calcula el volumen de un casquete esférico de 11 metros de altura cuyo radio de la base mide 13 metros.

⑨ Calcula el volumen de un casquete esférico de 13 metros de altura cuyo radio de la base mide 11 metros.

⑩ Calcula el volumen de un casquete esférico de 51 metros de altura cuyo radio de la base mide 43 metros.

⑪ Calcula el volumen de un casquete esférico de 13 metros de altura obtenido a partir de una esfera de 17 metros de radio.

⑫ Calcula el volumen de un casquete esférico de 19 metros de altura obtenido a partir de una esfera de 23 metros de radio.

⑬ Calcula el volumen de un casquete esférico de 5,9 metros de altura obtenido a partir de una esfera de 8,4 metros de radio.

⑭ Calcula el volumen de un casquete esférico de 21 metros de altura obtenido a partir de una esfera de 11 metros de radio.

⑮ Calcula el volumen de un casquete esférico de 1,5 metros de altura obtenido a partir de una esfera de 1,9 metros de radio.

Parte de una esfera vista desde el exterior

Cuando miramos un objeto esférico opaco, como puede ser una pelota, un planeta, o una estrella, solo vemos una parte de su superficie. Si miramos desde muy cerca, veremos una parte muy pequeña, que es lo que nos pasa cuando miramos la Tierra desde el suelo; imagínate que en un barco en alta mar se pones de pie y miras hasta el horizonte: verás una parte muy pequeña de la Tierra. Sin embargo, si miramos desde una distancia significativamente mayor veremos casi la mitad; es lo que nos ocurre cuando miramos la luna llena desde la Tierra.

Por tanto, tiene perfecto sentido preguntarnos por el porcentaje de superficie de una esfera que vemos cuando miramos desde cierta distancia. En el siguiente problema te damos las claves para averiguarlo.

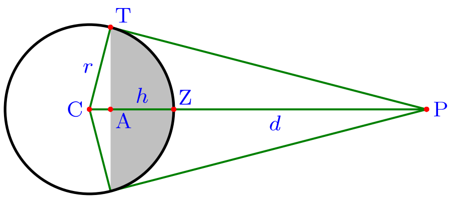
Problema

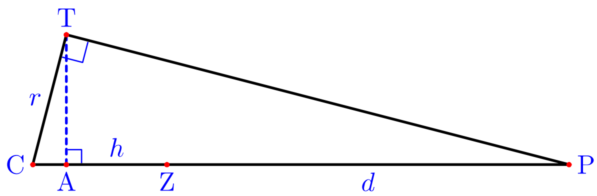
Calcula el porcentaje de superficie de una esfera que vemos si la observamos desde una distancia que sea el triple de la longitud del radio.

Resolución

La parte que vemos de la esfera es un casquete esférico. Para calcular su área (y poder compararla con la de la esfera) es necesario calcular su altura, pero como el enunciado no dice cuánto mide el radio, habrá que calcular la altura del casquete en función del radio de la esfera.

Llamamos h a la longitud de la altura del casquete esférico y r a la longitud del radio de la esfera; la distancia entre el punto en que miramos y la superficie de la esfera será $d=3r$. La siguiente imagen nos muestra la situación vista en dos dimensiones (para mayor claridad): P es el punto desde el que miramos la esfera, Z es el punto de la esfera más cercano a nosotros, la parte en gris representa el casquete esférico que realmente vemos, C es el centro de la esfera, T es uno de los puntos de tangencia entre la esfera y nuestra mirada y A es el centro de la base del casquete esférico. Observa que $\overline{CZ} = r$.





El triángulo CTP es un triángulo rectángulo por ser T un punto de tangencia.

- ✱ El cateto CT mide $\overline{CT} = r$
- ✱ La hipotenusa mide $\overline{CP} = \overline{CZ}+\overline{ZP} = r+d = r+3r = 4r$
- ✱ La proyección del cateto CT sobre la hipotenusa mide $\overline{CA} = \overline{CZ}-\overline{AZ} = r-h$

Aplicamos en el triángulo CTP el teorema del cateto para CT:

$$\overline{CT}^2 = \overline{CP}\cdot\overline{CA} \Rightarrow r^2=4r\cdot(r-h) \Rightarrow r=4(r-h) \Rightarrow r = 4r-4h \Rightarrow 4h = 3r \Rightarrow h = \frac{3}{4}\cdot r$$

$$\text{Porcentaje} = \frac{\text{Área del casquete}}{\text{Área de la esfera}} = \frac{2\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{3}{4}\cdot r}{4\cdot\pi\cdot r^2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$$

Solución: 37,5 %

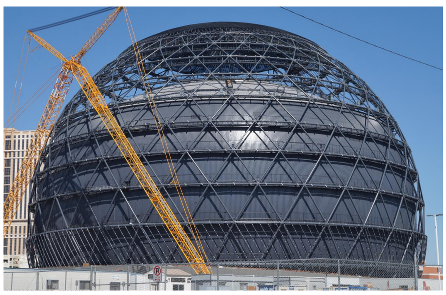
Troncos y secciones de una esfera en la vida real

Aunque en la vida real los troncos y las secciones de la esfera se utilizan menos que otros cuerpos geométricos, es posible encontrarlos; basta estar atentos.

Ejemplos

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		
Una parte de una lámpara de exterior puede ser un tronco de pirámide	Algunos monumentos se realizan con forma de tronco de pirámide	Algunas esculturas se realizan con forma de tronco de pirámide

Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6
		
Una parte de una lámpara de interior puede ser un tronco de cono	Las macetas más sencillas pueden tener forma de tronco de cono	Algunos bombones se fabrican con forma de tronco de cono

Ejemplo 7	Ejemplo 8	Ejemplo 9
		
Algunos postres se presentan en vasos con forma de tronco de cono	A veces las naranjas se cortan en forma de segmentos esféricos	El edificio Sphere de Las Vegas (EEUU) en realidad es un casquete esférico

Enunciados

① Calcula en metros con cuatro cifras significativas la longitud de la altura de un tronco de pirámide recto sabiendo que su apotema mide 13 metros y sus bases son cuadrados de 17 metros de lado y 23 metros de lado.

② ¿Cuántas diagonales tiene un tronco de pirámide de bases triangulares?

③ Calcula en metros con seis cifras significativas la longitud de la mayor de las diagonales de un tronco de pirámide recto sabiendo que su altura mide 37 metros y sus bases son hexágonos de 41 metros de lado y 33 metros de lado.

④ Calcula en metros con tres cifras significativas las longitudes de la apotema y de la altura de un tronco de pirámide recto sabiendo que sus bases son hexágonos de 7 metros de lado y 5 metros de lado y que las aristas laterales miden 4 metros.

⑤ Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide recto sabiendo que sus bases son cuadrados de 6 metros de lado y 4 metros de lado y que las aristas laterales miden 5 metros. Da los resultados con cinco cifras significativas, en metros cuadrados o metros cúbicos según corresponda.

⑥ Un cono tiene 10 m de altura y el radio de la base mide lo mismo. Se corta con un plano perpendicular a la altura en dos piezas, un tronco de cono y un cono pequeño, que resultan ser del mismo volumen. Calcula con tres cifras significativas la altura en metros del cono pequeño.

⑦ La altura de un segmento esférico mide 49 metros; los radios de las bases miden 84 metros y 77 metros. Calcula en metros:

(a) La distancia del centro de la esfera al centro de la base mayor.

(b) El radio de la esfera.

⑧ Calcula en metros cuadrados con seis cifras significativas el área de un segmento esférico obtenido de una esfera cuyo radio mide 32 metros sabiendo los radios de sus dos bases miden 13 metros.

⑨ Calcula en metros con cuatro cifras significativas la longitud de la altura de un casquete esférico obtenido de una esfera cuyo radio mide 8 metros sabiendo que el radio de la base del casquete esférico mide 5 metros y el volumen del casquete esférico es mayor de 1100 metros cúbicos.

⑩ Calcula con tres cifras significativas qué porcentaje del volumen de una esfera corresponde al casquete esférico cuya altura mide 9 metros y su radio mide 15 metros.

⑪ Calcula con tres cifras significativas qué porcentaje de la superficie de una esfera opaca cuyo radio mide 7 metros se ve cuando se mira desde un punto que dista 2 metros de la superficie.

⑫ Calcula con dos cifras significativas qué porcentaje del volumen de una esfera corresponde al casquete esférico cuya altura mide la mitad que el radio de la esfera.

Significado original de «estadística»

La palabra «estadística» comenzó su andadura significando «estudio de los datos del estado», ya que esta disciplina surgió de la necesidad de estudiar un conjunto de datos de un estado, especialmente en la elaboración de censos.

Idea fundamental de la estadística

Se desea estudiar una característica cuyo valor es diferente en cada individuo, pero no se puede obtener mediante una fórmula. Y, aún así, se desea hacer comparaciones y predicciones numéricas.

Vocabulario básico de estadística

La estadística utiliza varias palabras de uso común en el lenguaje, pero con un significado muy específico, que hay que conocer. Las iremos presentado desde ahora.

Hay que atender a dos aspectos:

- Nombrar a quienes son los **sujetos** del estudio. Para ello estudiaremos las palabras población, muestra e individuo.
- Cuál será la **característica** que estudiaremos. Para ello estudiaremos qué es una variable estadística y cuáles son sus diferentes tipos.

Los sujetos del estudio

- **Población** es el conjunto de todos los elementos que son objeto de nuestro estudio.
- **Muestra** es la parte de la población de la que obtendremos datos.
- **Individuo** es cada uno de los elementos de la población.

Ejemplo 1

Deseamos estudiar la estatura de las personas que cumplen 18 años a lo largo de un año concreto de una ciudad concreta; para ello, se eligen al azar cien personas que cumplen esas condiciones y se las mide.

- **Población** es el conjunto de todas las personas que cumplen las condiciones.
- **Muestra** es el conjunto de las cien personas seleccionadas.
- **Individuo** es cada persona que cumpla las condiciones.

La característica que se estudia

Se llama **variable estadística** a una característica de un individuo que solo se puede conocer examinándolo.

Ejemplo 2

Deseamos estudiar la estatura de las personas que cumplen 18 años a lo largo de un año concreto de una ciudad concreta.

- La **variable estadística** en este caso es la estatura.

Ejemplo 3

Vamos a estudiar el número de mascotas que tienen las familias de un barrio residencial. Para ello, preguntaremos a dos familias de cada calle del barrio.

- **Población** es el conjunto de todas las familias del barrio.
- **Muestra** es el conjunto de las familias seleccionadas.
- **Individuo** es cada familia del barrio.
- La **variable estadística** es el número de mascotas.

Tipos de variable estadística

Es muy importante distinguir los distintos tipos de variable estadística que existen, porque su tratamiento posterior depende mucho del tipo que sea.

Una variable estadística puede ser:

- **Cuantitativa**. Todos los valores que toma son números. Dentro de las variables estadísticas cuantitativas, se distinguen dos tipos:
  - **Discreta**. Dados dos valores consecutivos de la variable estadística, esta no puede, bajo ninguna circunstancia, tomar ningún valor intermedio.
  - **Continua**. Dados dos valores cualesquiera de la variable estadística, esta podría (al menos teóricamente) tomar cualquier otro valor intermedio.
- **Cualitativa**. Todos los valores que toma son palabras.

Ejemplos

① El número de mascotas de una familia es una variable **cuantitativa discreta**. Una familia podría tener, por ejemplo, dos o tres mascotas, pero no puede tener ningún número de mascotas entre dos y tres.

② La estatura de una persona es una variable **cuantitativa continua**. En centímetros, una persona podría medir 178 o 179, pero nada impide medirla con mayor precisión y determinar que mide 178,3 centímetros.

③ El voto otorgado por una persona en unas elecciones es una variable **cualitativa**, porque los valores que puede tomar son los nombres de los partidos políticos que se presentan a las elecciones, además de «en blanco» o «nulo».

④ El número de hijos de una mujer es una variable **cuantitativa discreta**. Una mujer podría tener, por ejemplo, ninguno o un hijo, pero no puede tener ningún número de hijos entre cero y uno.

⑤ La masa de una persona es una variable **cuantitativa continua**. En kilogramos, una persona podría tener una masa de 67 o 68, pero nada impide medirla con mayor precisión y determinar que tiene una masa de 67,4 kilogramos.

⑥ El equipo de baloncesto favorito de una persona en una liga es una variable **cualitativa**, porque los valores que puede tomar son los nombres de los equipos que participan en esa liga.

⑦ El número de puntos obtenidos por un jugador de baloncesto en un partido es una variable **cuantitativa discreta**. Un jugador podría obtener, por ejemplo, 21 o 22 puntos, pero no puede tener ningún número de puntos entre 21 y 22.

⑧ La velocidad de un barco es una variable **cuantitativa continua**. En nudos, un barco podría navegar a 13 o 14, pero se podría medir con mayor precisión y determinar que navega a 13,7 nudos.

⑨ El país de nacimiento de una persona es una variable **cualitativa**, porque los valores que puede tomar son los nombres de los diferentes países.

Enunciados

En los siguientes estudios, identifica la población, la muestra, los individuos, la variable estadística y el tipo de variable estadística.

① En un país se realizan elecciones presidenciales y cada elector vota a uno de los seis candidatos y candidatas.

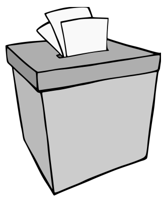
② Una empresa que fabrica juguetes para niños necesita estudiar si sus juguetes aguantan caídas desde un metro. Para ello, escoge un juguete de cada mil y lo deja caer, anotando si aguanta o no.

③ Vamos a estudiar cuántos goles se consiguen en cada partido de una liga de fútbol en una temporada. Para ello, llevamos un registo completo de todos los resultados de los partidos.

④ Una empresa que fabrica baterías estudia cuánto tiempo tardan en cargarse. Para ello, toma una batería de cada mil y mide cuánto tiempo necesita en completar la carga completa.

Resoluciones

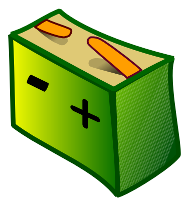
① Población: todos los posibles votantes del país.
Muestra: no hay, es necesario contabilizar todos los votos.
Individuo: cada uno de los posibles votantes.
Variable estadística: qué candidatura se vota.
Tipo de variable estadística: cualitativa.



② Población: todos los juguetes que fabrica la empresa.
Muestra: los juguetes que escoge la empresa para probar.
Individuo: cada uno de los juguetes fabricados.
Variable estadística: si aguanta o no la caída.
Tipo de variable estadística: cualitativa.

③ Población: todos los partidos disputados en la temporada.
Muestra: no hay, se cuentan todos los partidos.
Individuo: cada uno de los partidos disputados.
Variable estadística: número de goles conseguidos.
Tipo de variable estadística: cuantitativa discreta.

④ Población: todas las baterías que fabrica la empresa.
Muestra: las baterías que escoge la empresa para probar.
Individuo: cada una de las baterías fabricadas.
Variable estadística: tiempo de carga.
Tipo de variable estadística: cuantitativa continua.

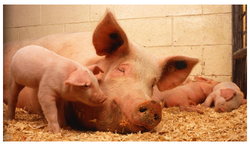


Enunciados

En los siguientes estudios, identifica la población, la muestra, los individuos, la variable estadística y el tipo de variable estadística.

① En la final del campeonato del mundo de fútbol por selecciones nacionales, el equipo de realización para la televisión utiliza un sistema para medir en tiempo real la distancia recorrida por cada jugador que salta al terreno de juego, para poder ofrecer la información durante la trasmisión y en el resumen.

② Una granja de cría de cerdos dispone de un gran número de hembras reproductoras. A lo largo de cinco años, se hace un estudio del número de lechones que nacen vivos en cada parto que ocurra en la granja.



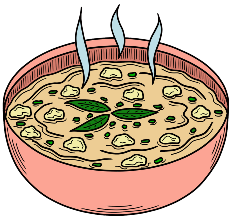
③ Un estudio sociológico se preocupa de conocer las inquietudes políticas de las personas de entre 16 y 30 años de un país democrático. Para ello, se habilita una web en la que cada persona que tiene esa nacionalidad y la edad solicitada puede apuntar a qué partido político votaría en las próximas elecciones. De un total de casi tres millones de posibles participantes, contestan a la encuesta aproximadamente el diez por ciento.

④ Un fabricante de globos para fiestas produce una gama de globos que admiten cinco litros de aire. El fabricante quiere comprobar que efectivamente los globos que fabrican aguantan sin explotar los cinco litros de aire; para ello, elige cada día al azar 50 de los 50 000 globos que fabrica, comprobando si estallan o no al hincharlos con cinco litros de aire.

⑤ Un equipo de investigación sobre el comportamiento de hormigas centra su atención en una colonia en particular, que cuenta con miles de ejemplares. El equipo captura cien hormigas y les instala un sistema de seguimiento para saber, entre otras cosas, cuánta distancia recorren en el mes de investigación.

⑥ Un diseñador web prepara una página para un vendedor de cierta gama de productos. Por cada artículo vendido, se solicita a quien lo compra que lo valore con estrellas, con un mínimo de una y un máximo de cinco (por ejemplo: ★★★☆☆, tres estrellas). Del más de un millón de ventas realizadas en un año, se reciben 30 000 valoraciones.

⑦ Una revista gastronómica se interesa por los precios de los llamados menús del día en una determinada ciudad. Su investigación consiste en envíar varios observadores a distintas zonas de la ciudad y anotar el precio del menú del día de los restaurantes que se van encontrado en su recorrido.



⑧ Un profesor desea conocer cómo ha calificado globalmente a sus estudiantes a lo largo de un curso y anota cuidadosamente todos los resultados de todos los exámenes de ese curso. El profesor utilizó un método de calificación en el que todos los exámenes se calificaban con un mínimo de 0 puntos y un máximo de 10 puntos, variando de medio punto en medio punto.

Proceso estadístico

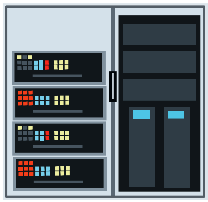
Cuando se afronta el estudio de una situación de la realidad, es fundamental comenzar por considerar si tiene sentido hacerlo usando herramientas matemáticas; en el caso del estudio de conjuntos de datos, las herramientas posiblemente pertenecerán al campo de la estadística.

Etapas del proceso estadístico

Si se decide utilizar un enfoque estadístico para el estudio, estas serán, en general, las etapas:

1. **Determinar el objetivo del estudio**. De esta etapa se encargan los máximos responsables, normalmente políticos o directores de empresas, atendiendo a los consejos de los técnicos de alto nivel, como sociólogos o ingenieros.
2. **Selección de población o muestra y variables estadísticas**. Se trata de determinar si será necesario obtener los datos de toda la población (como en unas elecciones políticas) o solamente de una muestra seleccionada (como en algunos controles de calidad de productos). Caso de usar una muestra, su tamaño y el modo de obtenerla son objeto de cuidadosa reflexión y cálculo; es una área de la que se ocupa la llamada inferencia estadística, que veremos en el nivel 6. También habrá que decidir qué variables estadísticas se van a obtener: normalmente se aprovecha para recoger varias a la vez.
3. **Recolección de datos**. Suele ser la parte que más tiempo necesita, puesto que hay que dirigirse donde estén los datos. Al comienzo de la estadística se hacían encuestas casa por casa, llamando a la puerta; más tarde, comenzaron las encuestas telefónicas, que aún se usan. Desde que se popularizó el acceso a internet, este suele ser el medio favorito de hacerlo.

4. **Organización de los datos obtenidos**. Los avances en las tecnologías de la información han facilitado tanto esta etapa que prácticamente no se concibe hacerla de ninguna otra forma. Para que te sea más fácil concentrarte en la base teórica, en la enseñanza secundaria se siguen usando tablas impresas en papel o presentadas en pantalla para organizar los datos.



5. **Elaboración de gráficas**. En el nivel 2 comenzaste a estudiar cómo se confeccionan las gráficas y en este nivel y siguientes seguirás estudiando más variantes de las gráficas.
6. **Cálculo de parámetros estadísticos**. En este nivel 3 vamos a comenzar el cálculo de los parámetros estadísticos más sencillos; son números que se calculan a partir de los datos y expresan algunas de sus características.

Parámetros estadísticos

Son números que se calculan a partir de un conjunto de datos e intentan dar una buena representación de sus características. La idea directora que nos lleva a la consideración de parámetros estadísticos es que es más sencillo manejar unos pocos números que representan a un conjunto de datos que manejar el conjunto de datos globalmente.

Parámetros estadísticos de centralización

Cada uno de ellos intenta representar con un solo número al conjunto de todos los datos. Se suelen utilizar tres y cada uno tiene una aplicación distinta.

* **Media**. Es el cociente entre la suma de todos los valores de una variable estadística en una población o muestra y el número de valores. La estudiaste en el nivel 1, pero en este nivel veremos otras formas de calcularla y expresarla. No tiene sentido calcularla cuando la variable estadística es cualitativa. Es el parámetro de centralización más importante y más usado.
* **Mediana**. Es el valor de la variable estadística de una población o muestra que ocupa el lugar intermedio cuando se ordenan de menor a mayor (o de mayor a menor, es indiferente). No tiene sentido calcularla cuando la variable estadística es cualitativa. También es un parámetro de posición, como veremos más adelante.
* **Moda**. Es el valor de la variable estadística de una población o muestra que tiene una mayor frecuencia absoluta. Puede haber más de una moda.

Parámetros estadísticos de dispersión

Cada uno de ellos intenta medir la separación entre sí de los datos del conjunto de datos. No tienen sentido cuando la variable estadística es cualitativa. Veremos cuatro; tres de ellos dependen del concepto de desviación de un dato, que también explicamos.

* **Recorrido** o **rango**. Es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor.
* **Desviación** de un dato. Es la diferencia entre el dato y la media de todos los datos.
* **Desviación media**. Es la media de todos los valores absolutos de las desviaciones de los datos.
* **Varianza**. Es la media de todos los cuadrados de las desviaciones de los datos.
* **Desviación típica**. Es la raíz cuadrada de la varianza.

Parámetros estadísticos de posición

Son valores de la variable estadística que dividirían el conjunto de datos en partes con el mismo número de datos si se ordenaran de menor a mayor. También reciben el nombre de **cuantiles**. Pueden coincidir con algún valor del conjunto de datos o no. No tienen sentido cuando la variable estadística no se puede ordenar.

* **Mediana**. Es el valor que se encontraría en el centro de todos los valores.
* **Cuartiles**. Son valores que dividirían el conjunto de datos en cuatro partes con el mismo número de datos. Hay tres; el segundo coincide con la mediana.
* **Deciles**. Son valores que dividirían el conjunto de datos en diez partes con el mismo número de datos.
* **Percentiles**. Son valores que dividirían el conjunto de datos en cien partes con el mismo número de datos.

Enunciados

Calcula la media, la mediana y la moda de los siguientes conjuntos de datos:

①	6	7	1	1	5	6	8	1	2	6	1

②	5	8	1	3	2	3	6	1	5	4

Resoluciones

① Para calcular la media necesitamos saber cuántos datos hay y cuánto suman.

Hay 11 datos. Los sumamos todos: $1+1+1+1+2+5+6+6+6+7+8=44$

$$\text{Media} = \frac{44}{11} = 4$$

Para calcular la mediana colocamos todos los datos de menor a mayor:

1	1	1	1	2	5	6	6	6	7	8
Cinco datos					⬆	Cinco datos				

La mediana es el valor que ocupa el sexto lugar, ya que deja cinco valores a su izquierda (son menores que él) y cinco valores a su derecha (son mayores que él). Por tanto, mediana = 5.

La moda es el valor 1, porque tiene una frecuencia absoluta de 4, la mayor de todas las frecuencias absolutas.

Solución: Media = 4; mediana = 5; moda = 1

② Para calcular la media necesitamos saber cuántos datos hay y cuánto suman.

Hay 10 datos. Los sumamos todos: $1+1+2+3+3+4+5+5+6+8=38$

$$\text{Media} = \frac{38}{10} = 3{,}8$$

Para calcular la mediana colocamos todos los datos de menor a mayor:

1	1	2	3	3	4	5	5	6	8
Cinco datos					⬆	Cinco datos			

La mediana debería ser el valor que ocupara el lugar 5,5, ya que dejaría cinco valores a su izquierda y cinco valores a su derecha. Pero como, obviamente, no existe el dato de lugar 5,5, en estos casos se calcula la media de los datos anterior y posterior; en nuestro ejercicio es la media de 3 (el dato de lugar 5) y 4 (el dato de lugar 6). Por tanto, mediana = $(3+4):2 = 3{,}5$.

La modas son los valores 1, 3 y 5, porque tienen una frecuencia absoluta de 2, la mayor de todas las frecuencias absolutas. Como este conjunto de datos tiene tres modas, se dice que es trimodal.

Solución: Media = 3,8; mediana = 3,5; modas = 1, 3 y 5

Enunciados

Calcula la media, la mediana y la moda de los siguientes conjuntos de datos:

①	9	8	1	8	3	5	1	9	7	6	9

②	13	12	9	7	5	11	12	15	6	5

③	8	8	6	3	12	11	6	10	8

④	9	10	3	14	5	8	13	3	11	9	13	7

⑤	15	20	12	14	24	17	13	17	11	21	12

Espacio para la resolución

① Número de datos: ; suma de los datos: ; media:

Datos ordenados de menor a mayor:

Mediana: ; moda:

② Número de datos: ; suma de los datos: ; media:

Datos ordenados de menor a mayor:

Mediana: ; moda:

③ Número de datos: ; suma de los datos: ; media:

Datos ordenados de menor a mayor:

Mediana: ; moda:

④ Número de datos: ; suma de los datos: ; media:

Datos ordenados de menor a mayor:

Mediana: ; moda:

⑤ Número de datos: ; suma de los datos: ; media:

Datos ordenados de menor a mayor:

Mediana: ; moda:

Cálculo de la media a partir de la tabla de frecuencias absolutas

En el nivel 2 aprendiste cómo, a partir de un conjunto de datos, se puede realizar el recuento y con él preparar una tabla con las frecuencias absolutas. Ahora es el momento de utilizar esa tabla para calcular de una manera eficiente la media. También verás una manera de escribir una suma que es novedosa para ti, pero que se utiliza mucho en la ciencia.

Ejemplo

En una granja de cerdos anotan durante cierto periodo de tiempo cuántos lechones nacen en cada parto; obtienen el siguiente resultado:

Número de lechones	9	10	11	12	13
Frecuencia absoluta	22	41	43	38	29

Notación general

Estamos estudiando la variable estadística «número de lechones en cada parto» y vemos que en este ejemplo puede tomar cinco valores. Designamos la variable estadística con una letra (por ejemplo, x) y los distintos valores que toma añadiendo un subíndice correlativo a la letra; en nuestro caso lo escribimos así:

$$x_1 = 9,\ x_2 = 10,\ x_3 = 11,\ x_4 = 12,\ x_5 = 13$$

También se usa otra letra con los mismos subíndices para representar las frecuencias absolutas; por ejemplo, la f. Así que en nuestro caso escribimos:

$$f_1 = 22,\ f_2 = 41,\ f_3 = 43,\ f_4 = 38,\ f_5 = 29$$

Los valores de la variable son x_i y sus frecuencias son f_i cuando el subíndice «i» varía entre 1 y 5. Incluso podemos reescribir la tabla de un modo más general así:

x_i	9	10	11	12	13
f_i	22	41	43	38	29

Para calcular cuántos datos hay, se suman todas las frecuencias: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5$

Pero esta suma se escribe usando la letra griega Σ (sigma mayúscula), así:

$\sum_{i=1}^{i=5} f_i$ (se lee: «sumatorio desde i igual a uno hasta i igual a cinco de los efe sub i»)

Como casi siempre se sabe cuáles son los valores de «i», basta escribir Σf_i

Análogamente, para calcular el número total de lechones hay que sumar los productos de cada valor por su frecuencia absoluta:

$x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5$, que se escribe $\sum_{i=1}^{i=5} x_i \cdot f_i$ o simplemente $\Sigma x_i \cdot f_i$

La media de todos los valores de la variable estadística x se escribe «$\bar{x}$» (se lee «media de las equis»).

Fórmula de la media

Usando la notación explicada, llegamos a la fórmula para calcular la media:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}}$$

Cálculo de la media a partir de la tabla de frecuencias absolutas

Nuestro objetivo es calcular de forma eficiente la media de un conjunto de datos del que conocemos la tabla de frecuencias absolutas. Desde el punto de vista matemático, no importa cuál sea el significado de los datos.

Enunciado

Conocemos los valores y las frecuencias absolutas de una variable estadística:

x_i	9	10	11	12	13
f_i	17	37	44	41	31

Calcula la media con cuatro cifras significativas.

Resolución

Reescribimos la tabla añadiendo una fila más para los productos de los valores por las frecuencias absolutas y una columna más para las dos sumas:

x_i	9	10	11	12	13	⬇ Sumas ⬇
f_i	17	37	44	41	31	170
$x_i \cdot f_i$	153	370	484	492	403	1902

Operaciones:

- Los productos: $9 \cdot 17 = 153$, $10 \cdot 37 = 370$, $11 \cdot 44 = 484$, $12 \cdot 41 = 492$, $13 \cdot 31 = 403$
- Las sumas: $17+37+44+41+31 = 171$, $153+370+484+492+403 = 1902$

Obtenemos dos datos de la tabla:

- La suma de las frecuencias absolutas es el número de datos: $\Sigma f_i = 170$
- La suma de los productos es la suma de todos los valores: $\Sigma x_i \cdot f_i = 1902$

Calculamos la media:

$\bar{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \dfrac{1902}{170} = 11{,}19$. Calculadora: 1 9 0 2 ÷ 1 7 0 = ⇨ 11.18823529

Solución: 11,19

Comentario

Puedes pensar, con mucha razón, que lo que acabamos de hacer ya lo sabías llevar a cabo desde el nivel 1; al fin y al cabo, ha sido sencillamente esto:

$$\text{Media} = \frac{9 \cdot 17 + 10 \cdot 37 + 11 \cdot 44 + 12 \cdot 41 + 13 \cdot 31}{17+37+44+41+31} = \frac{1902}{170} = 11{,}19$$

Pero que ahora hemos usado una notación más complicada que no era necesaria. Parece cierto, pero el método usado ahora nos abre el camino para resolver el cálculo de muchos otros parámetros estadísticos y manejar cantidades de datos mucho mayores, cosas que serían mucho más difíciles sin usar el nuevo método.

Métodos de cálculo

Podemos hacer las operaciones de varias maneras:

- A mano o calculadora simple, cuando las operaciones son sencillas.
- Con el modo estadístico de una calculadora científica.
- Con un ordenador, mediante un programa de hoja de cálculo.

Enunciados

Para cada tabla de valores y frecuencias absolutas dadas a continuación de una variable estadística x, se pide: **(a) Σf_i (b) $\Sigma x_i \cdot f_i$ (c) $\overline{x}$**, calculada con cuatro cifras significativas. Puedes usar el espacio adicional si lo necesitas.

①	x_i	15	16	17	18	19	⬇ Sumas ⬇
	f_i	23	29	32	43	39	
	$x_i \cdot f_i$						

Tu solución: (a) Σf_i = (b) $\Sigma x_i \cdot f_i$ = (c) $\overline{x}$ =

②	x_i	23	24	25	26	27	⬇ Sumas ⬇
	f_i	11	18	21	12	7	
	$x_i \cdot f_i$						

Tu solución: (a) Σf_i = (b) $\Sigma x_i \cdot f_i$ = (c) $\overline{x}$ =

③	x_i	31	32	33	34	35	⬇ Sumas ⬇
	f_i	56	40	29	18	12	
	$x_i \cdot f_i$						

Tu solución: (a) Σf_i = (b) $\Sigma x_i \cdot f_i$ = (c) $\overline{x}$ =

④	x_i	15	16	17	18	19	⬇ Sumas ⬇
	f_i	14	20	33	51	57	
	$x_i \cdot f_i$						

Tu solución: (a) Σf_i = (b) $\Sigma x_i \cdot f_i$ = (c) $\overline{x}$ =

⑤	x_i	1	2	3	4	5	⬇ Sumas ⬇
	f_i	92	103	134	189	204	
	$x_i \cdot f_i$						

Tu solución: (a) Σf_i = (b) $\Sigma x_i \cdot f_i$ = (c) $\overline{x}$ =

⑥	x_i	115	120	125	130	135	⬇ Sumas ⬇
	f_i	22	18	13	8	4	
	$x_i \cdot f_i$						

Tu solución: (a) Σf_i = (b) $\Sigma x_i \cdot f_i$ = (c) $\overline{x}$ =

⑦	x_i	26	28	30	32	34	⬇ Sumas ⬇
	f_i	17	21	23	29	42	
	$x_i \cdot f_i$						

Tu solución: (a) Σf_i = (b) $\Sigma x_i \cdot f_i$ = (c) $\overline{x}$ =

Uso estadístico de una calculadora científica

Ya dijimos que cada calculadora puede tener su propio sistema de trabajo y que siempre debes consultar el manual y hacer pruebas con tu modelo de calculadora; pues bien, en el caso de usar la calculadora científica para trabajar en estadística, esto es aún más importante, puesto que en este manejo los distintos modelos presentan más diferencias entre sí que en otras tareas.

Primer paso: seleccionar el modo estadístico

Para realizar cálculos estadísticos, el primer paso es seleccionar en la calculadora el modo estadístico de una sola variable. Puede ser necesario seleccionarlo en alguna opción del menú de la tecla **MODE**.

En muchas calculadoras hay dos modos estadísticos:

* El de una variable, que se puede denominar **SD**, **1-VAR** o similar. Es el que usaremos en este nivel.
* El de dos variables, que se puede denominar **LR**, **REG** o similar Lo usaremos en el nivel 4.

En muchas calculadoras, al usar el modo estadístico se desactivan otras funciones de la calculadora, ya que esta necesita utilizar algunas memorias internas para almacenar los datos. Por ejemplo, puede que no estén disponibles las memorias de acceso manual.

Una vez se haya seleccionado el modo estadístico, puede ser necesario borrar los datos almacenados, ya que hay calculadoras que los conservan.

Segundo paso: introducción de los datos

Algunas calculadoras disponen de grandes pantallas que permiten escribir los datos como si se tratara de una tabla. En otras, hay que ir introduciendo los valores junto con las frecuencias de pareja en pareja usando la tecla **DT** o **DATA**; en ese caso, consulta qué tecla hay que usar como separador entre el valor y la frecuencia absoluta.

Casi siempre será posible entrar en algún modo de comprobación y edición de los datos, que te permita comprobar que los has escrito bien y modificarlos si es necesario.

Tercer paso: obtención de resultados

Una vez introducidos los datos, podemos obtener varios tipos de resultados. En algunas calculadoras hay teclas dedicadas a obtener la media y otros parámetros, mientras que las sumas se almacenan en las memorias. En otras calculadoras hay dos teclas para obtener resultados:

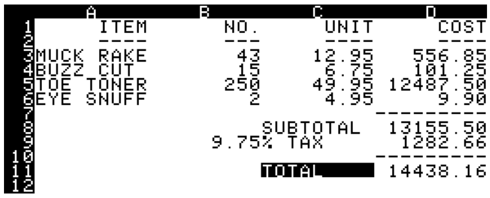
* La tecla **S-SUM**, o similar, permite consultar algunas sumas:
  - La suma de todas las frecuencias, que se puede denominar **n** o similar.
  - La suma de todos los valores se puede denominar **Σx** o similar.
* La tecla **S-VAR**, o similar, permite consultar la media $\bar{x}$ y otros parámetros.

Puedes volver al segundo paso para modificar algún dato y luego seguir consultando resultados.

Cuarto paso: volver al modo habitual

Cuando termines de hacer cálculos estadísticos, casi seguro que querrás volver al modo de cálculo habitual, que se suele denominar **COMP** en el menú **MODE**.

Las hojas de cálculo



Un tipo de programa de ordenador que ha demostrado históricamente su gran importancia es el de las hojas de cálculo. El primer programa de este tipo es VisiCalc, que impulsó alrededor de 1980 las ventas del ordenador personal Apple II. A la derecha vemos una captura de pantalla.

Hoy en día, existen muchos programas de hoja de cálculo que puedes utilizar. Para los cálculos estadísticos que hacemos en la enseñanza secundaria, te vale cualquiera y, además, todos se comportan casi exactamente igual. Como ejemplos, señalamos LibreOffice Calc, Microsoft Excel y Google Sheets.

Celdas, filas y columnas

El concepto esencial de una hoja de cálculo es el concepto de celda, que es una porción rectangular de pantalla en la que se puede introducir texto, números o fórmulas. Las celdas se agrupan en filas (normalmente numeradas desde el 1 hacia delante) y en columnas (normalmente nombradas desde A hacia delante). Cada celda se referencia uniendo el nombre de su columna y el de su fila. Ejemplo: B3.

Cálculo de la media con una hoja de cálculo

Podemos escribir los valores del conjunto de datos y sus frecuencias absolutas por filas, como haremos en este ejemplo, o por columnas, según nos parezca.

Como ejemplo, vamos a calcular la media del conjunto de valores que vemos más abajo en las celdas C1, D1, E1 y F1, que tienen las frecuencias absolutas que vemos, respectivamente, en las celdas C2, D2, E2 y F2. Hemos marcado todos los datos del ejercicio en azul.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Valores	x_i	**45**	**46**	**47**	**48**	⬇ Sumas ⬇
2	Frecuencias	f_i	**19**	**23**	**37**	**13**	**92**
3	Productos	$x_i \cdot f_i$	**855**	**1058**	**1739**	**624**	**4276**
4	Media	$\overline{x}$	**46,48**				

Para ayudarnos a entender mejor lo que estamos haciendo, podemos escribir algunos textos, que hemos escrito en negro en la tabla de más arriba. A continuación, escribimos las fórmulas:

* En la celda C3 escribimos la fórmula **=C1*C2** (el signo igual indica que es una fórmula y el asterisco es como se indica el producto). Copiamos la fórmula de la celda C3 a las celdas D3, E3 y F3 (se puede hacer arrastrando el ratón adecuadamente).
* En la celda G2 escribimos la fórmula **=SUMA(C2:F2)**, que significa sumar todos los números que hay en el rango de celdas desde C2 hasta F2 y la copiamos a la celda G3.
* En la celda C4 escribimos la fórmula **=G3/G2**. La precisión con la que se calcula la media se puede ajustar en el mismo programa.

El programa aplica todas las fórmulas y calcula los resultados (que hemos escrito en verde). Si cambiamos alguno de los datos, el programa recalcula inmediatamente todos los resultados.

Enunciados

Para cada tabla de valores y frecuencias absolutas dadas a continuación de una variable estadística x, se pide: **(a)** $\boldsymbol{\Sigma f_i}$ **(b)** $\boldsymbol{\Sigma x_i \cdot f_i}$ **(c)** $\boldsymbol{\overline{x}}$, calculada con cuatro cifras significativas. Se sugiere usar las funciones estadísticas de una calculadora científica o bien una hoja de cálculo.

①	x_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	f_i	31	33	37	25	24	31	33	31	29	31

②	x_i	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
	f_i	3	5	9	12	11	8	3	5	4	1

③	x_i	5	7	9	11	17	21	24	33	45	52
	f_i	102	45	93	76	88	48	39	103	47	33

④	x_i	89	93	104	107	109	115	118	125	129	131
	f_i	1	4	6	8	7	6	9	3	4	2

⑤	x_i	72	77	83	89	91	93	99	102	107	111
	f_i	12	15	11	9	12	13	8	10	6	4

⑥	x_i	129	136	147	152	167	174	183	191	204	215
	f_i	21	24	27	33	31	29	26	23	19	17

⑦	x_i	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
	f_i	3	3	4	5	7	7	3	6	4	2

⑧	x_i	115	127	132	147	152	168	171	186	193	199
	f_i	31	41	58	67	53	44	29	21	19	17

⑨	x_i	312	337	352	378	391	403	423	444	461	480
	f_i	11	14	15	15	17	19	21	23	28	32

⑩	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	f_i	8	10	12	13	19	8	4	2	6	1

Agrupación de datos por intervalos

Cuando la variable estadística es cuantitativa continua o bien cuantitativa discreta pero con muchos valores cercanos, es una buena simplificación dejar de considerar cada dato individualmente y agrupar los datos que estén entre dos valores.

Ejemplo 1a. La estatura de las personas es una variable estadística cuantitativa continua, pero realmente hay poca diferencia entre medir 183 y 184 centímetros, así que, si tenemos que manejar muchas estaturas, podemos agruparlas de cinco en cinco centímetros, con lo que las estaturas 183 y 184 quedarían englobadas en el intervalo de 180 a 185 centímetros.

Ejemplo 2a. El número de puntos anotados por un jugador o jugadora de baloncesto en una temporada es una variable estadística cuantitativa discreta, pero realmente hay poca diferencia entre anotar 2593 y 2596 puntos, así que si tenemos que manejar muchos jugadores o jugadoras, podemos agrupar sus anotaciones de cien en cien puntos, con lo que los puntajes 2593 y 2596 quedarían englobados en el intervalo de 2500 a 2599 puntos.

Definición del intervalo

Para definir cada intervalo se utiliza una notación que estudiaremos con detalle en el nivel 4. Consiste en escribir los valores extremos de menor a mayor, con un carácter separador, entre paréntesis o corchetes.

Ejemplo 1b. El intervalo de números entre 180 y 185, incluyendo el 180 y excluyendo el 185 se escribe [180,185). Explicación:

- El corchete indica que el 180 sí está incluido.
- El paréntesis indica que el 185 no está incluido.
- La coma es el separador entre los dos números.

Podemos usar intervalos así formados para agrupar los datos del ejemplo (1a).

Ejemplo 2b. El intervalo de números entre 2500 y 2599, incluyendo ambos, se escribe [2500,2599]. Podemos usar intervalos así formados para agrupar los datos del ejemplo (2a).

Clase y marca de clase

- Cada intervalo que usemos para agrupar datos se llama una **clase**.
- La **marca de clase** es un número que representa a todos los valores de una clase. Siempre se calcula como la media de los dos extremos del intervalo que define la clase.

Ejemplo 1c. El intervalo [180,185) representa una clase. Su marca de clase es:
$(180+185):2 = 182{,}5$.

Ejemplo 2c. El intervalo [2500,2599] representa una clase. Su marca de clase es:
$(2500+2599):2 = 2549{,}5$.

Separación de los intervalos

Cuando se utilizan intervalos para agrupar los datos, los intervalos ni se solapan ni dejan huecos entre ellos, sino que distribuyen los datos de una manera continua.

Ejemplo 1d. Para agrupar estaturas podemos utilizar intervalos de esta forma:
... [160,165), [165,170), [170,175), [175,180), [180,185), [186,190), [190,195)...

Ejemplo 2d. Para agrupar puntos podemos utilizar intervalos de esta forma:
... [2300,2399], [2400,2499], [2500,2599], [2600,2699], [2700,2799],...

Enunciado

Se miden en centímetros con cuatro cifras significativas las estaturas de un grupo de personas, obteniéndose estos datos:

164,6	170,6	163,1	173,7	171,2	164,1	162,3	168,0	168,3	167,5	174,3	161,6	154,9
170,7	174,0	159,6	151,1	160,9	159,5	155,8	159,6	174,1	173,6	165,6	166,6	151,9
161,3	162,5	162,6	160,8	154,4	161,6	173,1	169,8	163,3	162,0	169,3	152,8	152,5

a) Realiza el recuento agrupando los datos usando estos intervalos:

[150,154), [154,158), [158,162), [162,166), [166,170), [170,174), [174,178)

b) Completa una tabla con los intervalos, las marcas de clase y sus frecuencias absolutas.

c) Calcula con cuatro cifras significativas la media de los datos usando la tabla de frecuencias absolutas con datos agrupados.

Recordatorio

✱ El corchete indica que el número sí está incluido.

✱ El paréntesis indica que el número no está incluido.

Resolución

a)

Intervalo	[150,154)	[154,158)	[158,162)	[162,166)	[166,170)	[170,174)	[174,178)
Recuento	𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍷𝍷𝍷	𝍸 𝍷𝍷𝍷	𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸 𝍷	𝍸 𝍷	𝍷𝍷𝍷

b)

Intervalo	[150,154)	[154,158)	[158,162)	[162,166)	[166,170)	[170,174)	[174,178)
Marca de clase	152	156	160	164	168	172	176
Frecuencia absoluta	4	3	8	9	6	6	3

c)

x_i	152	156	160	164	168	172	176	⬇ Sumas ⬇
f_i	4	3	8	9	6	6	3	39
$x_i \cdot f_i$	608	468	1280	1476	1008	1032	528	6400

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{6400}{39} = 164{,}1$$

Calculadora: 6 4 0 0 ÷ 3 9 = ⇨ 164.1025641

Solución: la media es 164,1 cm

Diferencia en el cálculo de la media

La media real, calculada directamente sin agrupar los datos y redondeada con cuatro cifras significativas, es 163,9 cm. Conforme los conjuntos de datos van teniendo más elementos, la media real y la media calculada agrupando los datos por intervalos van estando cada vez más cercanas; por eso el método de agrupación por intervalos es útil en la vida real.

Enunciados

① Se miden en centímetros con cuatro cifras significativas las estaturas de un grupo de personas, obteniéndose estos datos:

168,0	162,0	172,7	153,4	151,4	164,6	151,7	170,7	164,9	165,0	165,9	157,6	156,3
169,4	176,0	167,3	169,9	175,4	159,4	157,4	163,7	162,9	160,6	168,2	154,6	151,9

a) Realiza el recuento agrupando los datos usando estos intervalos:

[147,153), [153,159), [159,165), [165,171), [171,177)

b) Completa una tabla con los intervalos, las marcas de clase y sus frecuencias absolutas.

c) Calcula con cuatro cifras significativas la media de los datos usando la tabla de frecuencias absolutas con datos agrupados.

Espacio para tu trabajo

	Intervalo		[147,153)	[153,159)	[159,165)	[165,171)	[171,177)	
a)	Recuento							
b)	Marca de clase	x_i						⬇ Sumas ⬇
	Frec. abs.	f_i						
c)		$x_i \cdot f_i$						

$\Sigma f_i =$ $\Sigma x_i \cdot f_i =$ $\overline{x} =$

② Se miden en kilogramos con tres cifras significativas las masas de un grupo de terneros recién nacidos, obteniéndose estos datos:

41,0	36,7	39,9	38,6	42,9	35,1	37,9	26,8	31,3	34,8	39,6	35,6	44,7	45,6	36,9	29,7	41,1
31,1	38,7	41,9	30,5	30,2	35,2	34,3	30,4	32,1	32,0	39,1	33,4	32,5	36,5	36,1	40,9	44,0

a) Realiza el recuento agrupando los datos usando estos intervalos:

[26,30), [30,34), [34,38), [38,42), [42,46)

b) Completa una tabla con los intervalos, las marcas de clase y sus frecuencias absolutas.

c) Calcula con tres cifras significativas la media de los datos usando la tabla de frecuencias absolutas con datos agrupados.

Espacio para tu trabajo

	Intervalo		[26,30)	[30,34)	[34,38)	[38,42)	[42,46)	
a)	Recuento							
b)	Marca de clase	x_i						⬇ Sumas ⬇
	Frec. abs.	f_i						
c)		$x_i \cdot f_i$						

$\Sigma f_i =$ $\Sigma x_i \cdot f_i =$ $\overline{x} =$

Enunciado

En una competición de baloncesto participan diez equipos, que se enfrentan entre sí a partido único. Al terminar el campeonato, se recopila el total de puntos anotados en cada partido, con este resultado:

161	172	174	169	193	180	163	166	176	163	192	175	161	168	156
160	166	159	172	189	170	175	168	156	165	168	163	169	188	164
158	176	173	192	170	171	176	180	169	180	168	164	156	156	171

a) Realiza el recuento agrupando los datos usando estos intervalos:

[155,160], [161,166], [167,172], [173,178], [179,184], [185,190], [191,196]

Nota: como la variable aleatoria es cuantitativa discreta, hemos usado exclusivamente corchetes en todas las definiciones de los intervalos.

b) Completa una tabla con los intervalos, las marcas de clase y sus frecuencias absolutas.

c) Calcula con cuatro cifras significativas la media de los datos usando la tabla de frecuencias absolutas con datos agrupados.

Resolución

a)

Intervalo	[155,160]	[161,166]	[167,172]	[173,178]	[179,184]	[185,190]	[191,196]
Recuento	𝍸 ||	𝍸 𝍸	𝍸 𝍸 |||	𝍸 ||	|||	||	|||

b)

Intervalo	[155,160]	[161,166]	[167,172]	[173,178]	[179,184]	[185,190]	[191,196]
Marca de clase	157,5	163,5	169,5	175,5	181,5	187,5	193,5
Frecuencia absoluta	7	10	13	7	3	2	3

c)

x_i	157,5	163,5	169,5	175,5	181,5	187,5	193,5	⬇ Sumas ⬇
f_i	7	10	13	7	3	2	3	45
$x_i \cdot f_i$	1102,5	1635	2203,5	1228,5	544,5	375	580,5	7669,5

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{7669{,}5}{45} = 170{,}4$$

Calculadora: 7 6 6 9 . 5 ÷ 4 5 = ⇨ 170.4333333

Solución: la media es 170,4 puntos

Diferencia en el cálculo de la media

La media real, calculada directamente sin agrupar los datos y redondeada con cuatro cifras significativas, es 170,2 puntos. Conforme los conjuntos de datos van teniendo más elementos, la media real y la media calculada agrupando los datos por intervalos van estando cada vez más cercanas; por eso el método de agrupación por intervalos es útil en la vida real.

Enunciados

① En una investigación botánica se necesita saber cuántos árboles vivos hay en cada hectárea de cierto bosque; tras un concienzudo estudio, se obtienen estos resultados:

482	582	390	329	249	540	605	386	437	577	311	268	549
332	387	559	446	627	453	640	404	460	511	537	532	426

a) Realiza el recuento agrupando los datos usando estos intervalos:

[201,300], [301,400], [401,500], [501,600], [601,700]

b) Completa una tabla con los intervalos, las marcas de clase y sus frecuencias absolutas.

c) Calcula con cuatro cifras significativas la media de los datos usando la tabla de frecuencias absolutas con datos agrupados.

Espacio para tu trabajo

	Intervalo		[201,300]	[301,400]	[401,500]	[501,600]	[601,700]	
a)	Recuento							
b)	Marca de clase	x_i						⬇ Sumas ⬇
	Frec. abs.	f_i						
c)		$x_i \cdot f_i$						

$\Sigma f_i =$ $\Sigma x_i \cdot f_i =$ $\overline{x} =$

② Para entrenar, un jugador de baloncesto practica diariamente el lanzamiento de cien tiros libres, anotando cuántos convierte; recopila estos resultados:

63	75	81	56	64	93	51	89	74	81	63	81	67	77	77	79	68
72	69	60	62	80	58	78	73	97	92	54	80	64	72	58	83	85

a) Realiza el recuento agrupando los datos usando estos intervalos:

[51,60], [61,70], [71,80], [81,90], [91,100]

b) Completa una tabla con los intervalos, las marcas de clase y sus frecuencias absolutas.

c) Calcula con tres cifras significativas la media de los datos usando la tabla de frecuencias absolutas con datos agrupados.

Espacio para tu trabajo

	Intervalo		[51,60]	[61,70]	[71,80]	[81,90]	[91,100]	
a)	Recuento							
b)	Marca de clase	x_i						⬇ Sumas ⬇
	Frec. abs.	f_i						
c)		$x_i \cdot f_i$						

$\Sigma f_i =$ $\Sigma x_i \cdot f_i =$ $\overline{x} =$

Histograma

Uno de los mejores gráficos para representar un conjunto de datos agrupados por intervalos es el histograma; es muy similar a un diagrama de barras: la principal diferencia es que las barras del histograma están unidas entre sí y las barras de un diagrama de barras deben estar separadas.

Pasos de la creación del histograma

Como en casi todos los gráficos, nos adaptaremos al espacio asignado.

Paso 1. Dibujamos dos segmentos perpendiculares: uno horizontal por la parte de abajo del espacio asignado y otro vertical por la parte izquierda.

Paso 2. Representamos los valores de menor a mayor. En el eje horizontal hacemos dos pequeñas señales, unos segmentos pequeñitos, para el menor valor del primer intervalo y el mayor valor del último intervalo. Dividimos el espacio entre esas marcas con las señales para los cambios de intervalo. Escribimos los valores de los extremos de todos los intervalos. Es importante notar que si la variable es cuantitativa continua, el final de un intervalo coincidirá con el comienzo del siguiente, sin que se sepa a qué intevalo concreto pertenece cada extremo (es algo que carece de importancia).

Paso 3. Hacemos una pequeña señal en el eje vertical muy cerca del extremo superior y le asignamos el valor de la mayor frecuencia que aparezca en la tabla o un poco más si nos viene bien porque los valores de las frecuencias tienen muchos dígitos. Esa marca nos dirige para dividir el eje vertical en una escala en la que podremos señalar y escribir todas las frecuencias o bien solo unas cuantas (dependiendo de sus valores).

Paso 4. Para cada intervalo, dibujamos una barra que se apoye en el eje horizontal con la anchura del intervalo y que tenga como altura la que corresponda a su frecuencia, tomada en el eje vertical. Las barras deben quedar unidas; si la variable es cuantitativa discreta, podemos ampliar un poco la anchura de las barras para conseguirlo.

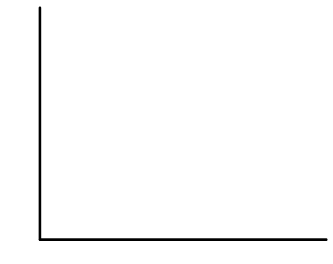
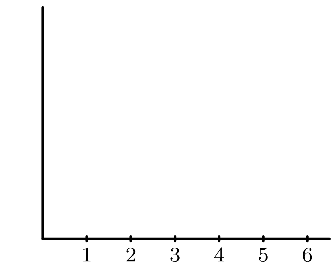
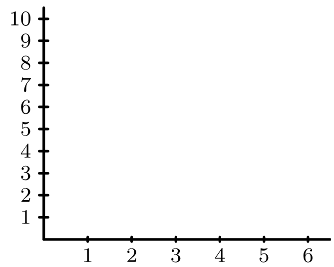
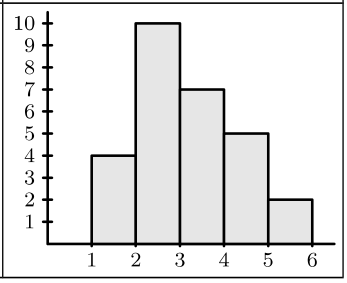
Ejemplo

Enunciado

Representa con un histograma la siguiente tabla de frecuencias absolutas.

Intervalo	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5,6)
Frecuencia	4	10	7	5	2

Resolución

Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
			

Licencias con las representaciones gráficas

Como el objetivo de las representaciones gráficas en estadística es tener una visión clara y rápida de un conjunto de datos, es sumamente habitual que se lleven a cabo las gráficas tomando algunas licencias, como utilizar distintas escalas en los dos ejes y suprimir alguna parte del eje horizontal.

Enunciados

Representa el histograma de cada uno de los siguientes conjuntos de datos:

① Se miden en centímetros las estaturas de un grupo de personas, obteniéndose estos datos agrupados por intervalos:

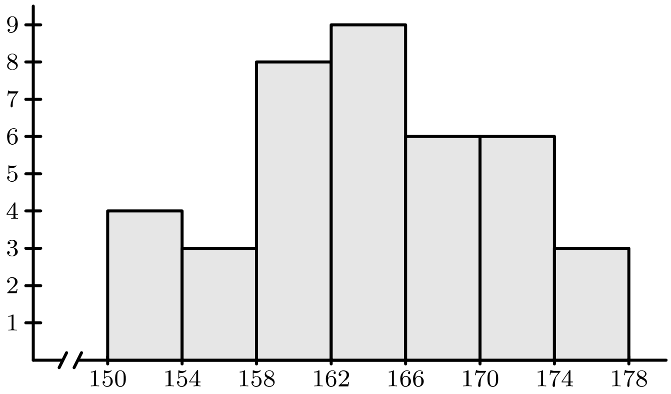
Intervalo	[150,154)	[154,158)	[158,162)	[162,166)	[166,170)	[170,174)	[174,178)
Frecuencia	4	3	8	9	6	6	3

② En una competición de baloncesto participan diez equipos, que se enfrentan entre sí a partido único. Al terminar el campeonato, se recopila el total de puntos anotados en cada partido, con este resultado:

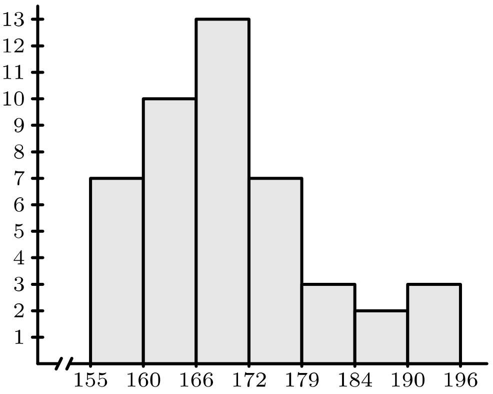
Intervalo	[155,160]	[161,166]	[167,172]	[173,178]	[179,184]	[185,190]	[191,196]
Frecuencia	7	10	13	7	3	2	3

Resoluciones

①



②



Comentarios

✱ Usamos el signo «//» para indicar que hemos suprimido una parte del eje.

✱ Hemos usado distintas escalas en los dos ejes; así aprovechamos perfectamente el espacio asignado a la representación gráfica.

✱ Observa que hay cierta indefinición en los extremos de los intervalos. En las resoluciones no se sabe a qué intervalo pertenece el valor 166, por ejemplo.

✱ Esta indefinición es típica de los histogramas, ya que representan conjuntos de datos en los que no tiene importancia a qué intervalo se atribuyan los valores que coinciden exactamente en los extremos de los intervalos. Esto te puede parecer raro, pero en el nivel 5 lo verás con más detalle (será una explicación mucho más avanzada de lo que ves aquí).

Enunciados

Representa el histograma de cada uno de los siguientes conjuntos de datos usando exclusivamente el espacio reservado para ello:

① Se miden en centímetros las estaturas de un grupo de personas, obteniéndose estos datos agrupados por intervalos:

Intervalo	[140,150)	[150,160)	[160,170)	[170,180)	[180,190)	[190,200)	[200,210)
Frecuencia	3	5	16	20	13	8	4

② Se miden en kilogramos las masas de un grupo de terneros recién nacidos, obteniéndose estos datos:

Intervalo	[26,29)	[29,32)	[32,35)	[35,38)	[38,41)	[41,44)	[44,47)
Frecuencia	11	13	18	15	12	9	7

③ Se mide en minutos el tiempo empleado por cada persona trabajadora en una empresa en realizar una determinada tarea, obteniéndose estos datos:

Intervalo	[40,45)	[45,50)	[50,55)	[55,60)	[60,65)	[65,70)	[70,75)
Frecuencia	3	8	20	23	25	17	9

Tus resoluciones

①	②

③

Fotografía digital

Una fotografía digital está formada por una gran cantidad de elementos básicos de información llamados píxeles, del inglés *picture element* (elemento de imagen). En los casos más sencillos, cada píxel contiene información sobre la luminosidad de la imagen en un punto, con valores desde 0 (negro puro) hasta 255 (blanco puro). En los casos más avanzados, cada píxel informa de varios parámetros con un rango de valores mayor.

Visión estadística de una fotografía digital

Podemos, por tanto, considerar una fotografía digital como un conjunto de datos que admite un tratamiento estadístico.

- La población es el conjunto de píxeles de la fotografía (varios millones).
- La variable estadística es la luminosidad de cada píxel, medida de 0 a 255.
- La variable estadística es cuantitativa discreta.
- La frecuencia absoluta de cada valor de la variable estadística es el número de píxeles de la imagen que tienen esa determinada luminosidad.

Histogramas en fotografía

Una de las herramientas más útiles para estudiar una fotografía es estudiar su histograma. Permite saber, entre otras cosas, si la fotografía está subexpuesta (muy oscura) o sobreexpuesta (muy clara).

Histogramas en la cámara digital

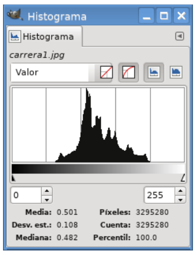
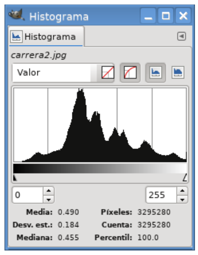
Las cámaras digitales permiten consultar el histograma de una fotografía inmediatamente después de hacerla, e incluso observarlo en vivo mientras se está encuadrando. A la derecha vemos la pantalla trasera de una cámara digital mostrando una fotografía almacenada en su tarjeta de memoria, junto con su información, que incluye el histograma (arriba a la derecha).

Histogramas en programas de ordenador

Los programas de ordenador dedicados al tratamiento de imágenes digitales permiten consultar su histograma. Así, se puede estudiar cómo mejorar el aspecto de algunas imágenes con fallos.

Ejemplo

Más abajo se puede ver cómo la fotografía original no tiene puntos ni muy oscuros ni muy claros, con lo que resulta muy plana y por tanto poco atractiva; tras el retoque hecho con la herramienta adecuada del programa, vemos que el histograma ha cambiado y la fotografía ha mejorado, siendo más natural.

<table>
<tr><th>Fotografía original</th><th>Fotografía retocada</th></tr>
<tr><td>

</td><td>

</td></tr>
</table>

Relación entre parámetros de centralización y de dispersión

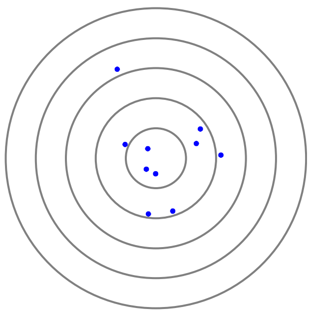
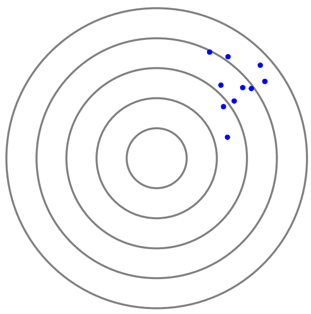
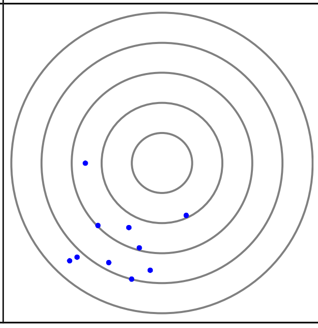
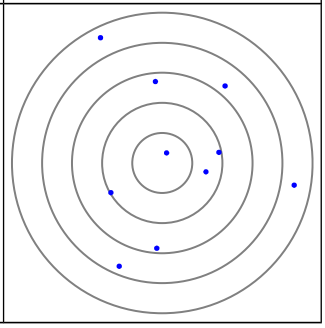
Una vez estudiados los parámetros de centralización, pasamos a estudiar los parámetros de dispersión. Estos describen la separación entre los datos. Es muy interesante (y lo más habitual en matemáticas) relacionar una medida de centralización (casi siempre, la media), con alguna medida de dispersión (casi siempre, la desviación típica).

Diferencia gráfica entre centralización y dispersión

Antes de pasar a las definiciones matemáticas de los parámetros de dispersión, es buena idea mostrar un ejemplo clásico que ilustra de manera muy intuitiva la diferencia entre centralización y dispersión.

Ejemplo

Cuatro personas realizan prácticas de tiro con pistola. Cada una de ellas realiza diez disparos, con este resultado:

Alberto	Blanca	Cristina	Diego
			

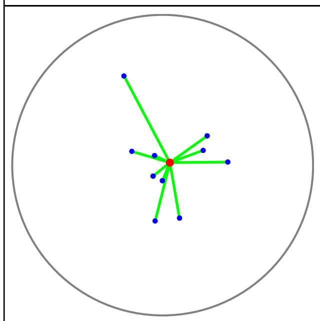
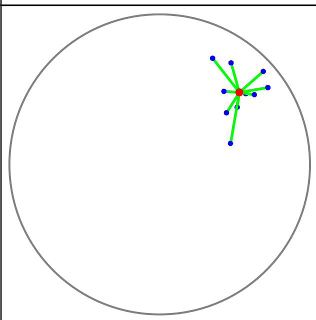
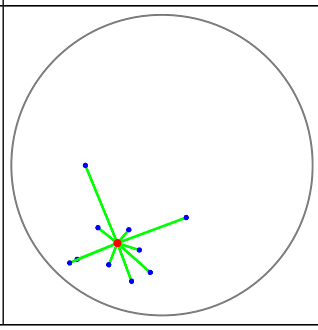
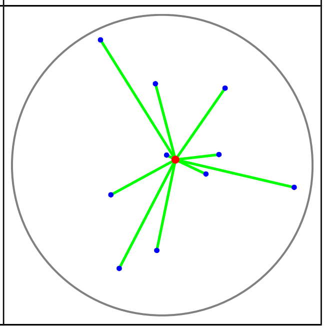
✱ Alberto es un tirador aceptable, sus disparos están próximos al centro y bastante cerca unos de otros. Disparos centrados con dispersión pequeña.

✱ Blanca es muy buena tiradora, porque sus disparos están muy juntos entre sí, pero la mira de su pistola está desviada y por eso sus disparos se van hacia arriba y hacia la derecha. Disparos descentrados con dispersión muy pequeña.

✱ Cristina es casi igual de buena que Alberto, pero la mira está un poco desviada hacia abajo y a la izquierda. Disparos descentrados, dispersión pequeña.

✱ Diego es el peor tirador, sus disparos están muy alejados entre sí, aunque la mira funciona correctamente. Disparos centrados, dispersión grande.

Mostramos en rojo el punto medio de los diez disparos de cada persona y en verde las distancias desde cada disparo hasta el punto medio. El punto rojo representa la centralización y las líneas verdes la dispersión.

Alberto	Blanca	Cristina	Diego
			

Definición de rango

El rango de un conjunto de datos es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor del conjunto.

Ejemplo 1

Enunciado: una profesora corrige una tanda de exámenes de sus veinte alumnos usando una escala de entre 0 y 10 puntos, con este resultado:

7,1	7,9	6,9	6,8	4,3	5,7	5,2	9,5	5,6	7,3	6,4	6,1	5,3	3,6	2,1	4,0	7,2	2,3	6,3	5,7

Calcula el rango de los valores.

Resolución

El mayor valor es 9,5 y el menor valor es 2,1. Rango = 9,5−2,1 = 7,4. Solución: 7,4

Nota. No es necesario colocar todos los datos por orden, ya que solo es necesario buscar dos valores.

Puntos a favor del rango

* Es muy fácil de calcular.
* Se mide en la misma unidad que los datos.

Puntos en contra del rango

* Valores excepcionalmente altos o bajos en el conjunto dan un resultado para el rango que es engañoso.
* Si los datos toman valores pequeños, el rango también lo toma; si los datos toman valores grandes, el rango tanbién. Por tanto, el rango no permite diferenciar la dispersión de dos grupos de datos que no sean comparables en la magnitud de sus valores.

Ejemplo 2

Enunciado: en un curso universitario se imparten dos asignaturas, denominadas A y B. Las calificaciones se dan usando una escala de entre 0 y 10 puntos. Estos son los resultados finales:

A	1,2	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	9,8
B	2,2	2,6	3,0	3,4	3,8	4,2	4,6	5,0	5,4	5,8	6,2	6,6	7,0	7,4

Calcula el rango de los valores de cada una de las asignaturas.

Resolución

Rango en la asignatura A: 9,8 − 1,2 = 8,6

Rango en la asignatura B: 7,4 − 2,2 = 5,2

Comentario

Casi todas las notas de la asignatura A son iguales, lo que significa muy poca dispersión, pero el rango es muy grande; sin embargo, las notas de la asignatura B están mucho más dispersas pero el rango es menor.

Definición de desviación de un valor

La desviación de un dato de una colección de datos es la diferencia entre el dato y la media de todos los datos.

Expresión simbólica de la desviación

Si consideramos el conjunto de datos x_1, x_2,..., x_n y llamamos $\overline{x}$ a la media de todos los datos, la desviación del dato x_i se define como

$$\boxed{\text{Desviación de } x_i = x_i - \overline{x}}$$

Ejemplo

Enunciado. Dados los datos 3, 5, 8 y 11, calcula la desviación de cada dato.

Resolución

Calculamos la media de todos los datos: $(3+5+8+11) : 4 = 27 : 4 = 6{,}75$

Desviación del dato «3»: $3 - 6{,}75 = -3{,}75$

Desviación del dato «5»: $5 - 6{,}75 = -1{,}75$

Desviación del dato «8»: $8 - 6{,}75 = 1{,}25$

Desviación del dato «11»: $11 - 6{,}75 = 5{,}25$

Propiedad

La suma de todas las desviaciones de los datos es 0.

Comprobación

Usando los datos del ejemplo anterior: $-3{,}75 - 1{,}75 + 1{,}25 + 5{,}25 = 0$

Demostración

Aunque la demostración de esta propiedad no es especialmente importante, te puede venir bien trabajarla para avanzar en tu manejo de la notación para las sumas, los sumatorios. Para que te sea más fácil entender la demostración general, usamos un método muy útil en matemáticas: comenzar por la demostración en un caso más sencillo y usarla de guía para la generalización.

Demostración para tres datos

Consideramos los datos a, b y c. Llamamos m a su media: $m = (a+b+c) : 3$.

Sumamos las tres desviaciones:

$$(a-m) + (b-m) + (c-m) = (a+b+c) - (m+m+m) = (a+b+c) - 3\cdot m =$$
$$= (a+b+c) - 3\cdot(a+b+c):3 = (a+b+c) - (a+b+c) = 0$$

Demostración general

Llamamos $\overline{x}$ a la media de los valores x_1, x_2,..., x_n. Sabemos que $\overline{x} = (\Sigma x_i) : \text{n}$

Calculamos la suma de todas las desviaciones:

$$\Sigma(x_i - \overline{x}) = \Sigma x_i - \Sigma\overline{x} = \Sigma x_i - \text{n}\cdot\overline{x} = \Sigma x_i - \text{n}\cdot(\Sigma x_i):\text{n} = \Sigma x_i - \Sigma x_i = 0$$

Observación

Uno de los pasos más difíciles de la demostración es $\Sigma\overline{x} = \text{n}\cdot\overline{x}$. Lo puedes entender mejor si se escribe así: $\sum_{\text{i}=1}^{\text{i}=\text{n}} \text{m} = \text{n}\cdot\text{m}$; por ejemplo: $\sum_{\text{i}=1}^{\text{i}=20} 3 = 20\cdot 3$ (sumar veinte treses es lo mismo que multiplicar 20 por 3).

Definición de desviación media

Ya que el conjunto de todas la desviaciones de un conjunto de datos parece una buena medida de la dispersión de los datos, hay que encontrar la manera de resumirlas todas en un solo número. No tendría ninguna utilidad calcular la media de todas las desviaciones, porque siempre saldría cero. Para solventar el problema, podemos calcular la media de los valores absolutos de las desviaciones; así se obtiene un número que casi siempre es positivo (solo podría salir cero si todos los datos fueran iguales). Ese número se llama desviación media:

> **La desviación media de un conjunto de datos es la media de los valores absolutos de las desviaciones.**

Expresión simbólica de la desviación media

Si consideramos el conjunto de datos x_1, x_2,..., x_n y llamamos $\bar{x}$ a la media de todos los datos, la desviación media se define como

$$\text{Desviación media} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Ejemplo

Enunciado. Calcula la desviación media del siguiente conjunto de datos:

4	5	5	8	11

Resolución

Aunque por ser un ejemplo muy sencillo no es necesario presentar todas las operaciones en forma de tabla, lo hacemos así por claridad.

							⬇ Sumas ⬇
Dato	x_i	4	5	5	8	11	33
Desviación	$x_i - \bar{x}$	–2,6	–1,6	–1,6	1,4	4,4	0
Valor absoluto de la desviación	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	2,6	1,6	1,6	1,4	4,4	11,6

Operaciones

Número de datos: $n = 5$

Suma de los datos: $\Sigma x_i = 4+5+5+8+11 = 33$

Media de los datos: $\bar{x} = \Sigma x_i : n = 33 : 5 = 6,6$

Desviaciones de los datos: $4–6,6 = –2,6$; $5–6,6 = –1,6$; $8–6,6 = 1,4$; $11–6,6 = 4,4$

Valores absolutos de las desviaciones de los datos:

$|–2,6| = 2,6$; $|–1,6| = 1,6$; $|1,4| = 1,4$; $|4,4| = 4,4$

Suma de los valores absolutos de las desviaciones de los datos:

$\Sigma|x_i - \bar{x}| = 2,6+1,6+1,6+1,4+4,4 = 11,6$

Desviación media: $\Sigma|x_i - \bar{x}| : n = 11,6 : 5 = 2,32$

Solución: 2,32

Enunciados

Calcula el rango y la desviación media de los siguientes conjuntos de datos:

①

5	9	13	17	20

②

11	17	22	23	29

③

2,3	2,7	2,8	3,1	3,7

④

9	15	15	21	21

⑤

2	5	6	7	7	11	12	14

⑥

21	35	42	50	59	63	71	88

⑦

4,2	4,5	4,8	5,0	5,3	5,8	6,1	6,1

⑧

3	3	4	4	4	5	5	8

⑨

112	231	342	451	500

⑩

12,5	12,6	21,3	21,5	30,2

⑪

21	22	22	22	23

⑫

15	21	33	41	42

⑬

2	3	4	5	5	6	8	11

⑭

4	4	4	4	7	12	23	26

⑮

–3	–3	–2	–1	0	0	1	2

⑯

27	29	31	33	37	44	59	66

⑰

11	16	20	21	21	29	29	31	31	31

Definición de varianza y desviación típica

A partir del conjunto de todas la desviaciones de un conjunto de datos es posible obtener, además de la desviación media, otros dos parámetros de dispersión más, que aportan otros métodos y significados, como veremos.

- ✱ La **varianza** de un conjunto de datos es la media de los cuadrados de las desviaciones.
- ✱ La **desviación típica** de un conjunto de datos es la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones.

Expresión simbólica de la varianza y la desviación típica

Consideramos el conjunto de datos x_1, x_2,..., x_n y llamamos $\overline{x}$ a la media de todos los datos. Utilizamos la letra griega sigma minúscula («σ») para representar la desviación típica, por ser la antecesora de la letra «s», inicial en inglés de la palabra «típica» (*standard*).

$\text{Varianza} = \sigma^2 = \dfrac{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n}$	$\text{Desviación típica} = \sigma = \sqrt{\dfrac{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n}}$

Ejemplo

Enunciado. Calcula con tres cifras significativas la varianza y la desviación típica del siguiente conjunto de datos:

4	5	5	8	11

Resolución

Aunque por ser un ejemplo muy sencillo no es necesario presentar todas las operaciones en forma de tabla, lo hacemos así por claridad.

							⬇ Sumas ⬇
Dato	x_i	4	5	5	8	11	33
Desviación	$x_i-\overline{x}$	–2,6	–1,6	–1,6	1,4	4,4	0
Cuadrado de la desviación	$(x_i-\overline{x})^2$	6,76	2,56	2,56	1,96	19,36	33,2

Operaciones

Número de datos: $n = 5$

Suma de los datos: $\Sigma x_i = 4+5+5+8+11 = 33$

Media de los datos: $\overline{x} = \Sigma x_i : n = 33 : 5 = 6{,}6$

Desviaciones de los datos: $4–6{,}6 = –2{,}6$; $5–6{,}6 = –1{,}6$; $8–6{,}6 = 1{,}4$; $11–6{,}6 = 4{,}4$

Cuadrados de las desviaciones de los datos:

$(–2{,}6)^2 = 6{,}76$; $(–1{,}6)^2 = 2{,}56$; $1{,}4^2 = 1{,}96$; $4{,}4^2 = 19{,}36$

Suma de los cuadrados de las desviaciones de los datos:

$\Sigma(x_i-\overline{x})^2 = 6{,}76+2{,}56+2{,}56+1{,}96+19{,}36 = 33{,}2$

Varianza: $\sigma^2 = \Sigma(x_i-\overline{x})^2 : n = 33{,}2 : 5 = 6{,}64$

Desviación típica: $\sigma^2 = \sqrt{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2 : n} = \sqrt{6{,}64} = 2{,}58$

Solución → Varianza: 6,64; desviación típica: 2,58

Cálculo práctico de la varianza y la desviación típica

Para calcular la variación media, la varianza o la desviación típica usando la definición es necesario utilizar todas las desviaciones de los datos, que se basan en el cálculo previo de la media. Esto presenta algunos problemas prácticos:

- ✱ La media fácilmente puede ser un número con muchas cifras decimales; en ese caso, las operaciones se complican y, ademas, se van acumulando errores.
- ✱ Si cambia alguno de los datos, cambia la media, y por tanto hay que recalcular todas las desviaciones.

Por estos motivos, se utiliza para calcular la varianza y la desviación típica otro método más sencillo desde el punto de vista práctico, que se basa en una propiedad de la varianza.

Propiedad de la varianza

La varianza de un conjunto de datos es igual a la media de los cuadrados de los datos menos el cuadrado de la media.

Expresión simbólica

Consideramos los valores x_1, x_2,..., x_n; llamamos $\bar{x}$ a su media y σ^2 a su varianza. Entonces, se verifica:

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Demostración

Para facilitarte la comprensión de la demostración general, comenzamos por la demostración en un caso más sencillo y la usamos de guía para la generalización.

Demostración para tres datos

Consideramos los datos a, b y c. Llamamos m a su media: $m = (a+b+c):3$.

Calculamos la varianza como la media de los cuadrados de las tres desviaciones:

$$\frac{(a-m)^2+(b-m)^2+(c-m)^2}{3} = \frac{a^2-2am+m^2+b^2-2bm+m^2+c^2-2cm+m^2}{3} =$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2-2m(a+b+c)+3m^2}{3} = \frac{a^2+b^2+c^2-2m\cdot 3m+3m^2}{3} =$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2-6m^2+3m^2}{3} = \frac{a^2+b^2+c^2-3m^2}{3} = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} - m^2$$

Vemos que hemos obtenido la media de los cuadrados de los datos menos el cuadrado de la media.

Demostración general

Llamamos $\bar{x}$ a la media de los valores x_1, x_2,..., x_n. Sabemos que $\bar{x} = (\Sigma x_i) : n$

Calculamos la varianza como la media de los cuadrados de todas las desviaciones:

$$\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + \sum \bar{x}^2}{n} = \frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x}n\bar{x} + n\cdot\bar{x}^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Vemos que hemos obtenido la media de los cuadrados de los datos menos el cuadrado de la media.

Enunciado 1

Calcula la varianza del siguiente conjunto de datos:

6	8	9	9	10	10	11	12	12	13

Resolución usando la definición

										⬇ Sumas ⬇
x_i	6	8	9	9	10	10	11	12	12	13	100
$x_i - \overline{x}$	−4	−2	−1	−1	0	0	1	2	2	3	0
$(x_i - \overline{x})^2$	16	4	1	1	0	0	1	4	4	9	40

Número de datos: $n = 10$

Media de los datos: $\overline{x} = \Sigma x_i : n = 100 : 10 = 10$

Varianza: $\sigma^2 = \Sigma(x_i - \overline{x})^2 : n = 40 : 10 = 4$

Solución: 4

Resolución usando la propiedad

										⬇ Sumas ⬇
x_i	6	8	9	9	10	10	11	12	12	13	100
x_i^2	36	64	81	81	100	100	121	144	144	169	1040

Número de datos: $n = 10$

Media de los datos: $\overline{x} = \Sigma x_i : n = 100 : 10 = 10$

Varianza: $\sigma^2 = \Sigma x_i^2 : n - \overline{x}^2 = 1040 : 10 - 10^2 = 104 - 100 = 4$

Solución: 4

Enunciado 2

Calcula con tres cifras significativas la varianza y la desviación típica del siguiente conjunto de datos:

17	22	23	29	31	33	35

Resolución usando la propiedad

							⬇ Sumas ⬇
x_i	17	22	23	29	31	33	35	190
x_i^2	289	484	529	841	961	1089	1225	5418

Número de datos: $n = 7$

Media de los datos: $\overline{x} = \Sigma x_i : n = 190 : 7$. Nota: es un número decimal periódico.

Varianza: $\sigma^2 = \Sigma x_i^2 : n - \overline{x}^2 = 5418 : 7 - (190 : 7)^2 = 37{,}3$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{37{,}3} = 6{,}10$

Calculadora: 5 4 1 8 ÷ 7 − (1 9 0 ÷ 7) x² = ▩ √‾ Ans =

Solución → varianza: 37,3 ; desviación típica: 6,10

Enunciados

Calcula con tres cifras significativas la desviación típica de los siguientes conjuntos de datos:

①

5	7	9	11	11	13	16

②

21	21	23	22	22	24	27

③

15	15	19	20	20	21	22

④

1	1	1	2	2	4	5

⑤

4	7	9	9	10	10	11

⑥

4	4	5	6	6	6	7

⑦

27	29	30	30	30	31	37

⑧

0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	1	1,4

⑨

–5	–2	0	0	7	9	12

⑩

–98	–32	–11	1	33	95	104

⑪

3	3	6	7	9	9	11	11	19	20	20

⑫

1	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6

⑬

–3	–3	–3	–2	–2	1	1	1	2	2	3

⑭

–10	–9	0	5	10	10	20	20	30	30	50

⑮

–2,5	–2	–1,5	–1	–1	0	0	1	4	10	15

⑯

7	8	9	9	10	10	10	11	11	15	16

⑰

2	2	4	4	5	6	10	20	30	40	100

Comparación entre la desviación media y la desviación típica

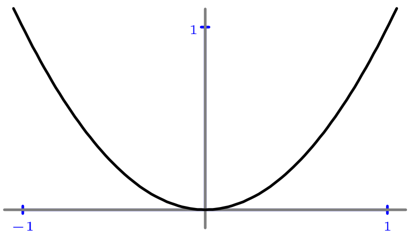
Como has visto, a partir de las desviaciones de los datos de un conjunto de datos se definen dos parámetros de dispersión distintos, pero muy similares: la desviación media y la desviación típica:

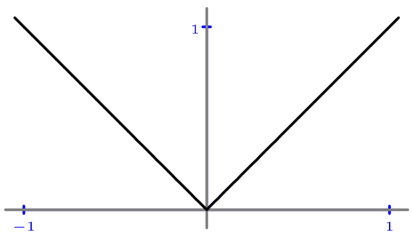
- La desviación media es la media de los valores absolutos de las desviaciones.
- La desviación típica es la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones.

Al ser tan parecidas las definiciones, tiene sentido compararlas.

- Las dos desviaciones se dan con la misma unidad que la variable estadística que estudian, ya que aunque en la desviación típica se elevan al cuadrado las desviaciones, luego se calcula la raíz cuadrada.
- La desviación media es más fácil de entender (es más natural, por así decir) y es útil en multitud de casos.
- La desviación típica es más fácil de calcular porque hay una fórmula alternativa para hacerlo. Pero si las operaciones se van a hacer con ordenador, que ahora es lo más habitual, esta mayor facilidad ya no es importante.
- La desviación típica es más fácil de manejar en matemáticas por dos motivos:
    - Existe una fórmula para desarrollar el cuadrado de la diferencia, pero no hay una fórmula para desarrollar el valor absoluto de la diferencia. Esto ha servido precisamente para demostrar la propiedad para calcular la varianza de un modo más sencillo que con la definición.

      $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $|a-b|$ = ¿☹?
    - La función «elevar al cuadrado» tiene mejores propiedades que la función «valor absoluto». Aquí puedes ver las representaciones gráficas de las dos para valores de la variable independiente entre 0 y 1. Puedes apreciar que en el valor 0 la función «elevar al cuadrado» (izquierda) es suave pero la función «valor absoluto» (derecha) presenta un ángulo abrupto. Verás en el nivel 5 la gran diferencia que eso implica.





- En la mayor parte de los casos, la desviación típica es mayor que la desviación media porque al elevar al cuadrado las desviaciones con valor absoluto mayor que 1, su valor aumenta. Por tanto, la desviación típica es más sensible a la presencia de valores alejados o muy alejados de la media.
    - Si todos los valores absolutos de las desviaciones son mayores que 1, la desviación típica es mayor que la desviación media.
    - Si todos los valores absolutos de las desviaciones son menores que 1, la desviación típica es menor que la desviación media.
    - En algunos casos muy particulares, la desviación media y la desviación típica son iguales.

Cálculo de la desviación típica a partir de la tabla de frecuencias absolutas

Nuestro objetivo es calcular de forma eficiente la media y la desviación típica de un conjunto de datos del que conocemos la tabla de frecuencias absolutas. Desde el punto de vista matemático, no importa cuál sea el significado de los datos.

Enunciado

Conocemos los valores y las frecuencias absolutas de una variable estadística:

x_i	23	24	25	26	27
f_i	7	11	13	9	4

Calcula la media y la desviación típica con cuatro cifras significativas.

Resolución

Reescribimos la tabla añadiendo una fila para los productos de los valores por las frecuencias absolutas, otra para los productos de los cuadrados de los valores por las frecuencias absolutas y una columna más para las tres sumas:

x_i	23	24	25	26	27	⬇ Sumas ⬇
f_i	7	11	13	9	4	44
$x_i \cdot f_i$	161	264	325	234	108	1092
$x_i^2 \cdot f_i$	3703	6336	8125	6084	2916	27164

Operaciones:

- ✱ $x_i \cdot f_i \rightarrow 23{\cdot}7 = 161,\ 24{\cdot}11 = 264,\ 25{\cdot}13 = 325,\ 26{\cdot}9 = 234,\ 27{\cdot}4 = 108$
- ✱ $x_i^2 \cdot f_i \rightarrow 23{\cdot}161 = 3703,\ 24{\cdot}264 = 6336,\ 25{\cdot}325 = 8125,\ 26{\cdot}234 = 6084, \ldots$
- ✱ $\Sigma f_i = 7+11+13+9+4 = 44$
- ✱ $\Sigma x_i{\cdot}f_i = 161+264+325+234+108 = 1092$
- ✱ $\Sigma x_i^2{\cdot}f_i = 3703+6336+8125+6084+2916 = 27\,164$

Obtenemos tres datos de la tabla: $\Sigma f_i = 44$, $\Sigma x_i{\cdot}f_i = 1902$, $\Sigma x_i^2{\cdot}f_i = 27\,164$

Calculamos la media:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{1902}{44} = 24{,}82.$$ Calculadora: 1 0 9 2 ÷ 4 4 = ⇨ 24.81818182

Calculamos la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{27164}{44} - 24{,}82^2} = 1{,}192$$

Calculadora: √ (2 7 1 6 4 ÷ 4 4 − Ans x²) = ⇨ 1.19226155

Solución → Media: 24,82, desviación típica: 1,192

Métodos de cálculo

Podemos hacer las operaciones de varias maneras:

- ✱ A mano o calculadora simple, cuando las operaciones son sencillas.
- ✱ Con el modo estadístico de una calculadora científica.
- ✱ Con un ordenador, mediante un programa de hoja de cálculo.

Enunciados

Para cada tabla de valores y frecuencias absolutas dadas a continuación de una variable estadística x, se pide: (a) Σf_i (b) $\Sigma x_i \cdot f_i$ (c) $\Sigma x_i^2 \cdot f_i$. Además, calcula con cuatro cifras significativas: (d) la media, $\overline{x}$ y (e) la desviación típica, σ. Puedes usar el espacio adicional si lo necesitas.

①	x_i	9	10	11	12	13	⬇ Sumas ⬇
	f_i	4	7	12	9	6	
	$x_i \cdot f_i$						
	$x_i^2 \cdot f_i$						

Tu solución: (a) $\Sigma f_i =$ (b) $\Sigma x_i \cdot f_i =$ (c) $\Sigma x_i^2 \cdot f_i =$
(d) $\overline{x} =$ (e) σ =

②	x_i	31	32	33	34	35	⬇ Sumas ⬇
	f_i	5	7	9	5	3	
	$x_i \cdot f_i$						
	$x_i^2 \cdot f_i$						

Tu solución: (a) $\Sigma f_i =$ (b) $\Sigma x_i \cdot f_i =$ (c) $\Sigma x_i^2 \cdot f_i =$
(d) $\overline{x} =$ (e) σ =

③	x_i	48	49	50	51	52	⬇ Sumas ⬇
	f_i	2	4	7	8	10	
	$x_i \cdot f_i$						
	$x_i^2 \cdot f_i$						

Tu solución: (a) $\Sigma f_i =$ (b) $\Sigma x_i \cdot f_i =$ (c) $\Sigma x_i^2 \cdot f_i =$
(d) $\overline{x} =$ (e) σ =

④	x_i	74	75	76	77	78	⬇ Sumas ⬇
	f_i	2	3	5	3	4	
	$x_i \cdot f_i$						
	$x_i^2 \cdot f_i$						

Tu solución: (a) $\Sigma f_i =$ (b) $\Sigma x_i \cdot f_i =$ (c) $\Sigma x_i^2 \cdot f_i =$
(d) $\overline{x} =$ (e) σ =

Cálculo de la desviación típica con el modo estadístico de una calculadora

Una vez introducidos los datos como se explicó, se puede acceder tanto a la suma de los cuadrados de todos los datos como al cálculo directo de la desviación típica:

- La suma de los cuadrados de todos los valores se encontrará cerca de la suma de todos los valores; puede denominarse **Σx²** o similar.
- La desviación típica se encontrará cerca del cálculo de la media; puede denominarse **$x\sigma_n$**; es importante que no confundas esta tecla con la tecla **$x\sigma_{n-1}$**, que calcula un parámetro diferente, que no estudiamos en este curso.

Cálculo de la desviación típica con una hoja de cálculo

Podemos escribir los valores del conjunto de datos y sus frecuencias absolutas por filas, como haremos ahora, o por columnas, según nos parezca.

Como ejemplo, vamos a calcular la media y la desviación típica del conjunto de valores que vemos más abajo en las celdas C1, D1, E1 y F1, que tienen las frecuencias absolutas que vemos, respectivamente, en las celdas C2, D2, E2 y F2. Hemos marcado todos los datos del ejercicio en azul.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Valores	x_i	**28**	**29**	**30**	**31**	⬇ Sumas ⬇
2	Frecuencias	f_i	**7**	**9**	**11**	**12**	**92**
3	Productos	$x_i \cdot f_i$	**855**	**1058**	**1739**	**624**	**4276**
4	Cuadrados	$x_i^2 \cdot f_i$	**5488**	**7569**	**9900**	**11532**	**34489**
5	Media	$\overline{x}$	**29,72**				
6	Desv. típica	σ	**1,085**				

Para ayudarnos a entender mejor lo que estamos haciendo, podemos escribir algunos textos, que hemos escrito en negro en la tabla de más arriba. A continuación, escribimos las fórmulas:

- En la celda C3 escribimos la fórmula **=C1*C2** (el signo igual indica que es una fórmula y el asterisco es como se indica el producto). Copiamos la fórmula de la celda C3 a las celdas D3, E3 y F3 (se puede hacer arrastrando el ratón adecuadamente).
- En la celda C4 escribimos la fórmula **=C1*C3**. Copiamos la fórmula de la celda C4 a las celdas D4, E4 y F4.
- En la celda G2 escribimos la fórmula **=SUMA(C2:F2)**, que significa sumar todos los números que hay en el rango de celdas desde C2 hasta F2 y la copiamos a las celdas G3 y G4.
- En la celda C5 escribimos la fórmula **=G3/G2**. La precisión con la que se calcula la media se puede ajustar en el mismo programa.
- En la celda C6 escribimos la fórmula **=RAIZ(G4/G2−C5^2)**. La precisión con la que se calcula la desviación típica se puede ajustar en el mismo programa. La función RAIZ podría llamarse de otra manera según el programa. El símbolo «^» sirve para elevar a una potencia.

El programa aplica todas las fórmulas y calcula los resultados (que hemos escrito en verde). Si cambiamos alguno de los datos, el programa recalcula inmediatamente todos los resultados.

Enunciados

Para cada tabla de valores y frecuencias absolutas dadas a continuación de una variable estadística x, se pide: (a) Σf_i (b) $\Sigma x_i \cdot f_i$ (c) $\Sigma x_i^2 \cdot f_i$. Además, calcula con cuatro cifras significativas: (d) la media, $\bar{x}$ y (e) la desviación típica, σ. Se sugiere usar las funciones estadísticas de una calculadora científica o bien una hoja de cálculo.

1	x_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	f_i	4	5	4	7	6	5	2	4	3	6

2	x_i	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
	f_i	5	3	2	7	8	11	4	8	4	3

3	x_i	5	7	9	11	17	21	24	33	45	52
	f_i	87	33	46	71	82	51	41	99	48	33

4	x_i	89	93	104	107	109	115	118	125	129	131
	f_i	3	5	7	9	6	5	8	5	2	3

5	x_i	72	77	83	89	91	93	99	102	107	111
	f_i	9	13	12	8	13	15	7	9	7	5

6	x_i	129	136	147	152	167	174	183	191	204	215
	f_i	19	21	29	35	33	28	23	22	17	13

7	x_i	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
	f_i	2	4	3	4	6	8	4	5	3	2

8	x_i	115	127	132	147	152	168	171	186	193	199
	f_i	33	42	57	69	54	42	31	25	15	12

9	x_i	312	337	352	378	391	403	423	444	461	480
	f_i	12	17	21	23	27	31	33	37	41	43

10	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	f_i	7	6	11	9	13	7	3	4	2	3

Cálculo de la desviación típica con datos agrupados por intervalos

No presenta mayor dificultad que el cálculo con datos individuales, puesto que usaremos las marcas de clase en el lugar que ocupan los datos individuales. Sabemos que el resultado no será exactamente el mismo, pero que el error cometido va siendo menor cuando el conjunto de datos va siendo mayor.

Enunciado

Se miden en centímetros con cuatro cifras significativas las estaturas de un grupo de personas, agrupando los datos por intervalos, con este resultado:

Intervalo	[150,154)	[154,158)	[158,162)	[162,166)	[166,170)	[170,174)	[174,178)
Frec. absoluta	2	4	7	9	5	3	1

Calcula con cuatro cifras significativas la media, la varianza y la desviación típica.

Resolución

Reescribimos la tabla añadiendo una fila para las marcas de clase, una fila para los productos de las marcas de clase por las frecuencias absolutas, otra para los productos de los cuadrados de las marcas de clase por las frecuencias absolutas, una columna para los símbolos y otra para las tres sumas:

Intervalo		[150,154)	[154,158)	[158,162)	[162,166)	[166,170)	[170,174)	[174,178)	⬇ Sumas ⬇
Marca de clase	x_i	152	156	160	164	168	172	176	
Frec. absoluta	f_i	2	4	7	9	5	3	1	31
Productos	$x_i \cdot f_i$	304	624	1120	1476	840	516	176	5056
Cuadrados	$x_i^2 \cdot f_i$	46208	97344	179200	242064	141120	88752	30976	825664

Obtenemos tres datos de la tabla: $\Sigma f_i = 31$, $\Sigma x_i \cdot f_i = 5056$, $\Sigma x_i^2 \cdot f_i = 825\,664$

Calculamos la media:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{5056}{31} = 163{,}1$$

Calculadora: 5 0 5 6 ÷ 3 1 = ⇨ 163.0967742

Calculamos la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{825664}{31} - 163{,}1^2 = 33{,}76$$

Calculadora: 8 2 5 6 6 4 ÷ 3 1 − Ans x² = ⇨ 33.7648283

Calculamos la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{33{,}76} = 5{,}811$$

Calculadora: √ Ans = ⇨ 5.810751096

Solución → media: 163,1 cm; varianza: 33,76 cm²; desviación típica: 5,811 cm

Enunciados

Para cada uno de los estudios explicados a continuación, calcula con cuatro cifras significativas la media, la varianza y la desviación típica.

① A lo largo de varios años un equipo de biólogos averigua la masa en kilogramos de crías de elefante recién nacidas en un parque natural y agrupa los datos por intervalos, con este resultado:

Intervalo	[83,85)	[85,87)	[87,89)	[89,91)	[91,93)	[93,95)	[95,97)
Frec. absoluta	7	9	12	15	10	6	3

② Un club de atletismo aficionado está interesado en conocer los tiempos de sus socios y socias en carreras populares de 10 kilómetros y recopila sus marcas a lo largo de varias competiciones medidas en minutos. El club ofrece los datos por intervalos, con este resultado:

Intervalo	[31,33)	[33,35)	[35,37)	[37,39)	[39,41)	[41,43)	[43,45)
Frec. absoluta	12	17	24	27	32	19	15

③ En una maternidad se anota cuidadosamente la masa en kilogramos de los niños y las niñas nacidas en ella a lo largo de un año y agrupan los datos por intervalos, con este resultado:

Intervalo	[2;2,4)	[2,4;2,8)	[2,8;3,2)	[3,2;3,6)	[3,6;4)	[4;4,4)	[4,4;4,8)
Frec. absoluta	11	23	45	51	46	32	19

④ La federación internacional de atletismo hace un estudio a nivel mundial de las marcas obtenidas por atletas femeninas de categoría *junior* (U20, hasta 20 años de edad) en la prueba de lanzamiento de disco, medidas en metros, a lo largo de un año y agrupa los datos por intervalos, con este resultado:

Intervalo	[47,51)	[51,55)	[55,59)	[59,63)	[63,67)	[67,71)	[71,75)
Frec. absoluta	11	13	22	34	15	9	2

⑤ La federación internacional de atletismo hace un estudio a nivel mundial de las marcas obtenidas por atletas masculinos de categoría *junior* (U20, hasta 20 años de edad) en la prueba de 50 m, medidas en segundos, a lo largo de un año y agrupa los datos por intervalos, con este resultado:

Intervalo	[5,6;5,8)	[5,8;6)	[6;6,2)	[6,2;6,4)	[6,4;6,6)	[6,6;6,8)	[6,8;7)
Frec. absoluta	3	5	11	27	17	18	9

⑥ Los ministerios de Asuntos Sociales y de Vivienda de un país encargan un estudio para conocer la superficie, en metros cuadrados, de las viviendas familiares de un barrio humilde de un pueblo. Obiene los los datos agrupados por intervalos, con este resultado:

Intervalo	[36,40)	[40,44)	[44,48)	[48,52)	[52,56)	[56,60)	[60,64)
Frec. absoluta	19	33	68	73	51	29	15

Coeficiente de variación

Sabemos que la desviación media y la desviación típica miden la dispersión de los datos con respecto a la media. Pero ninguna de las dos consigue comparar correctamente la dispersión de conjuntos de datos diferentes entre sí.

Por ejemplo, comparamos los lanzamientos de peso, disco y jabalina en una competición de atletismo: las marcas siempre son más cortas en lanzamiento de peso y más largas en lanzamiento de jabalina, con las de lanzamiento de disco entre ambas; por tanto, las desviaciones en peso serán, normalmente, menores que las de disco y estas menores que las de jabalina, aunque las marcas puedan estar más o menos dispersas en cualquiera de las tres pruebas.

Por tanto, cuando queremos comparar la dispersión de conjuntos de datos de diferente naturaleza, recurrimos a otro parámetro de dispersión, el coeficiente de variación, que tiene en cuenta el tamaño relativo de las desviaciones respecto a la media, no solo el tamaño absoluto.

Definición de coeficiente de variación

El coeficiente de variación de un conjunto de datos se define como el cociente entre la desviación típica y la media. Es muy habitual darlo en porcentaje.

Expresión simbólica del coeficiente de variación

Si llamamos CV al coeficiente de variación de un conjunto de datos, $\overline{x}$ la media y σ a la desviación típica,

$$\boxed{\mathrm{CV} = \frac{\sigma}{\overline{x}}}$$

Ejemplo

Enunciado.

Calcula en porcentaje con dos cifras significativas el coeficiente de variación de un conjunto de datos de alturas de personas sabiendo que su media es 163,7 centímetros y su desviación típica es 8,4 centímetros.

Resolución

$$\mathrm{CV} = \frac{8{,}4\ \text{cm}}{163{,}7\ \text{cm}} = 0{,}051 = 5{,}1\,\%$$

Calculadora: 8 . 4 ÷ 1 6 3 . 7 = ⇨ 0.05131378

Solución: 5,1 %

Propiedades del coeficiente de variación

- ✱ El coeficiente de variación no tiene unidades, ya que la media y la desviación típica tienen la misma unidad (la de los datos) y por tanto se simplifican.
- ✱ El coeficiente de variación no tiene utilidad práctica cuando la media es un valor cercano a cero, porque da resultados muy altos que no reflejan la dispersión real de los datos.
- ✱ Se suele considerar que valores menores al 30 % en el coeficiente de variación reflejan bastante poca dispersión de los datos.

Explicaciones previas

- ✱ En 2020 hubo una pandemia de Covid-19 que impidió la celebración de los Juegos Olímpicos de Tokio 2020. Estos se celebraron en 2021; pero, a pesar del cambio de fechas, no cambió su denominación oficial.
- ✱ La prueba atlética de decatlón solo se celebró, según la costumbre del momento, en categoría masculina. Tuvo lugar los días 4 y 5 de agosto de 2021.
- ✱ En el decatlón se compite por puntos en diez pruebas atléticas diferentes (de ahí el nombre), entre las que se encuentran los lanzamientos de peso, disco y jabalina.

Enunciado

En los Juegos Olimpicos de Tokio 2020 completaron la prueba de decatlón veintiún atletas, con estas marcas en lanzamiento de peso, disco y jabalina, medidas todas en metros:

Peso	16,23	15,59	15,39	15,31	15,25	15,07	14,99	14,99	14,95	14,90	14,80
	14,63	14,60	14,49	14,46	14,40	14,13	13,98	13,97	13,95	13,35	
Disco	49,90	49,75	48,67	48,37	48,27	48,08	47,14	47,02	47,01	46,38	45,72
	45,46	45,40	44,87	44,38	43,70	43,31	42,70	41,31	40,77	39,91	
Jabalina	73,36	73,09	71,56	69,10	63,76	63,73	63,44	62,28	61,54	60,95	60,44
	59,49	58,52	58,41	58,21	57,24	57,12	55,82	54,56	51,60	50,64	

Averigua en qué prueba hubo una mayor dispersión de las marcas y en qué prueba hubo una menor dispersión de las marcas.

Resolución

Hemos calculado con buena precisión mediante un programa de ordenador la media y la desviación típica de los datos en cada prueba:

Prueba	**Media**	**Desviación típica**
Lanzamiento de peso	14,7347619048 m	0,641565192082 m
Lanzamiento de disco	45,6247619048 m	2,81602323287 m
Lanzamiento de jabalina	61,1838095238 m	6,22870580167 m

Con estos datos, calculamos los coeficientes de variación en cada prueba:

Lanzamiento de peso: $\dfrac{0{,}641565192082 \text{ m}}{14{,}7347619048 \text{ m}} = 0{,}0435409269745$

Lanzamiento de disco: $\dfrac{2{,}81602323287 \text{ m}}{45{,}6247619048 \text{ m}} = 0{,}0617213792534$

Lanzamiento de jabalina: $\dfrac{6{,}22870580167 \text{ m}}{61{,}1838095238 \text{ m}} = 0{,}101803170645$

Comparamos los coeficientes de variación: $0{,}04 < 0{,}06 < 0{,}10$.

Solución: ha habido mayor dispersión en el lanzamiento de jabalina y menor dispersión en el lanzamiento de peso.

Explicaciones previas

- En 2020 hubo una pandemia de Covid-19 que impidió la celebración de los Juegos Olímpicos de Tokio 2020. Estos se celebraron en 2021; pero, a pesar del cambio de fechas, no cambió su denominación oficial.
- La prueba atlética de heptatlón solo se celebró, según la costumbre del momento, en categoría femenina. Tuvo lugar los días 4 y 5 de agosto de 2021.
- En el heptatlón se compite por puntos en siete pruebas atléticas diferentes (de ahí el nombre), entre las que se encuentran los 100 m vallas y los 200 m.

Enunciado

En los Juegos Olimpicos de Tokio 2020 completaron la prueba de heptatlón veinte atletas, con estas marcas en 100 m vallas y 200 m, todas medidas en segundos:

100 mv	13,54	13,09	13,36	13,17	12,97	13,49	13,29	13,61	13,14	13,27
	13,65	14,19	13,58	13,89	13,31	13,58	13,20	13,44	13,88	13,47
200 m	24,90	23,81	24,25	23,70	24,00	24,12	24,33	24,33	24,08	24,56
	24,55	24,67	24,96	24,05	23,85	24,16	24,50	23,50	25,03	24,51

Averigua en qué prueba hubo una mayor dispersión de las marcas y en qué prueba hubo una menor dispersión de las marcas.

Resolución

Hemos calculado con buena precisión mediante un programa de ordenador la media y la desviación típica de los datos en cada prueba:

Prueba	**Media**	**Desviación típica**
100 metros vallas	13,456 s	0,293059720876 s
200 metros	24,293 s	0,411 s

Con estos datos, calculamos los coeficientes de variación en cada prueba:

100 metros vallas: $\dfrac{0{,}293059720876 \text{ s}}{13{,}456 \text{ s}} = 0{,}0217791112423$

200 metros: $\dfrac{0{,}411 \text{ s}}{24{,}293 \text{ s}} = 0{,}0169184538756$

Comparamos los coeficientes de variación: $0{,}0169184538756 < 0{,}0217791112423$

Solución: ha habido mayor dispersión en 100 m vallas y menor en 200 m.

El podio de la prueba

Nafissatou Thiam (oro)	Anouk Vetter (plata)	Emma Oosterwegel (bronce)
		

Enunciados

① Una empresa fabrica instrumentos musicales de varios tipos y calidades. Se realiza un estudio estadístico de los precios de venta al público de tres tipos de instrumento y se determinan estos parámetros, todos medidos en euros:

Tipo de instrumento	Media	Desviación típica
Flautas	500	50
Percusión	2000	400
Pianos	10 000	500

a) ¿Para qué tipo de instrumento es mayor la dispersión de los precios?

b) ¿Para qué tipo de instrumento es menor la dispersión de los precios?

② Una empresa fabrica material deportivo de varios tipos y calidades. Se realiza un estudio estadístico de los precios de venta al público por unidad de tres tipos de material y se determinan estos parámetros, todos medidos en euros:

Material deportivo	Media	Desviación típica
Pelotas de tenis	3	0,15
Balones de fútbol	40	1,8
Balones de rugby	50	2,75

a) ¿Para qué tipo de material es mayor la dispersión de los precios?

b) ¿Para qué tipo de material es menor la dispersión de los precios?

③ Se encarga un estudio de mercado sobre los precios de los menús del día en distintos barrios de una gran ciudad y se obtienen estos resultados, todos medidos en euros:

Barrio	Media	Desviación típica
Centro	20	1,6
Residencial	50	6
Extrarradio	12	1,2

a) ¿En qué barrio es mayor la dispersión de los precios?

b) ¿En qué barrio es menor la dispersión de los precios?

④ Cinco amigas se reunen junto con sus hijas y cada amiga tiene una sola hija. Tenemos esta información sobre las edades de las madres y las hijas, en años:

Madres					Hijas				
25	26	30	33	36	6	6	8	9	11

Calcula: (a) La media de las edades de las madres (b) La varianza de las edades de las madres (c) La media de las edades de las hijas (d) La varianza de las edades de las hijas (e) ¿Dónde se da mayor dispersión, en las edades de las madres o en las edades de las hijas?

Definición de mediana de un conjunto de datos

La mediana de un conjunto de datos es un valor de la variable estadística que tiene la propiedad de que divide al conjunto de datos en **dos** partes con el mismo número de elementos: los que son menores que ella y los que son mayores que ella.

Fórmula de la mediana de un conjunto de datos

Para calcular el valor de la mediana hay que comenzar por calcular el lugar que le corresponde en el conjunto de datos cuando estos están ordenados.

Llamamos n al número de datos que tiene el conjunto y suponemos que ordenamos todos los datos; de menor a mayor o de mayor a menor, es indiferente.

El conjunto de datos ordenado será x_1, x_2, ... , x_n. Llamamos M al valor de la mediana y L al subíndice que le corresponde. Queremos averiguar primero el subíndice que corresponde a la mediana para luego calcularla.

Examinamos dos ejemplos sencillos para averiguar la fórmula general:

Si $n = 5$, los datos son x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. El valor central es x_3, luego $L = 3$.

Si $n = 6$, los datos son x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. El valor central es $x_{3,5}$, luego $L = 3{,}5$.

Resolvemos que la fórmula general es $L = \frac{n+1}{2}$

Ahora, para calcular M tenemos que considerar dos casos:

- Si L es un número natural, la mediana será el valor del elemento de lugar L:
  - $M = x_L$
- Si L no es un número natural, la mediana será (por convenio) la media de los elementos anterior y posterior a L. Si llamamos k al natural anterior a L:
  - $M = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$

Ejemplos

Calcula la mediana de estos conjuntos de datos. (Los damos ya ordenados por facilidad en la explicación; en la realidad, habría que ordenarlos como primer paso).

①

15	18	23	26	31	34	39	41	43	51	52	55	60

②

4	5	9	11	13	19	23	27	31	32	32	35	37	39	41	45

Resolución 1

Para entender mejor la explicación, escribimos los datos con sus denominaciones:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}
15	18	23	26	31	34	39	41	43	51	52	55	60

$n = 13 \Rightarrow L = \frac{13+1}{2} = 7 \Rightarrow M = x_7 = 39$; solución: 39

Resolución 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
4	5	9	11	13	19	23	27	31	32	32	35	37	39	41	45

$n = 16 \Rightarrow L = \frac{16+1}{2} = 8{,}5 \Rightarrow k = 8 \Rightarrow M = \frac{x_8 + x_9}{2} = \frac{27+31}{2} = 29$; solución: 29

Definición de cuartiles de un conjunto de datos

Los cuartiles de un conjunto de datos son tres valores de la variable estadística que dividen el conjunto de datos en **cuatro** partes con el mismo número de datos cuando estos se ordenan de menor a mayor.

- El primer cuartil o cuartil inferior es el menor de los tres cuartiles. Se suele denominar Q_1.
- El segundo cuartil es el mediano de los tres cuartiles. Se suele denominar Q_2. Su valor coincide con la mediana del conjunto de datos.
- El tercer cuartil o cuartil superior es el mayor de los tres cuartiles. Se suele denominar Q_3.

Se verifica: $Q_1 < Q_2 = \text{Mediana} < Q_3$

Cálculo de los cuartiles de un conjunto de datos

El método de cálculo de los cuartiles depende del tipo de variable estadística:

- Si la variable estadística es cuantitativa discreta y los datos no están agrupados por intervalos, no hay consenso sobre cómo calcularlos, por lo que distintos textos de matemáticas, calculadoras y programas de ordenador pueden dar distintos resultados.
- Si la variable estadística es cuantitativa continua o bien los datos están agrupados por intervalos, los cuartiles se calculan igual que los percentiles.

Método de Moore y McCabe

En este curso hemos elegido para calcular los cuartiles de un conjunto de datos en el que la variable estadística sea cuantitativa discreta y los datos no estén agrupados por intervalos el método propuesto por Moore y McCabe. Lo explicamos:

- **Paso 1**. Llamamos n al número de datos que tiene el conjunto y suponemos que están ordenados de menor a mayor.
- **Paso 2**. Calculamos la mediana del conjunto de datos. Ese será el valor de Q_2.
- **Paso 3a**. Si n es un número par,
  - Q_1 es la mediana de los n:2 primeros datos.
  - Q_3 es la mediana de los n:2 últimos datos.
- **Paso 3b**. Si n es un número impar,
  - Q_1 es la mediana de los $(n-1)$:2 primeros datos.
  - Q_3 es la mediana de los $(n-1)$:2 últimos datos.

El proceso anterior es muy simple de aplicar cuando el conjunto tiene pocos datos, pero se puede complicar si el número de datos es elevado. En ese caso, es posible aplicar el método de Moore y McCabe calculando primero el lugar que ocupa cada cuartil, según este método:

Llamamos L_1 al lugar que ocupa el primer cuartil, L_2 al lugar que ocupa el segundo y L_3 al que ocupa el tercer cuartil. Se calculan según estas fórmulas:

n par	$L_1 = \frac{n+2}{4}$	$L_2 = \frac{n+1}{2}$	$L_3 = \frac{3n+2}{4}$
n impar	$L_1 = \frac{n+1}{4}$	$L_2 = \frac{n+1}{2}$	$L_3 = \frac{3n+3}{4}$

Si el número obtenido es natural, el cuartil será el elemento que ocupe ese lugar; si no lo es, será la media del anterior y el posterior.

Enunciados

Utiliza el método de Moore y McCabe para calcular los cuartiles de los siguientes conjuntos de datos. (Los damos ya ordenados por facilidad en la explicación; en la realidad, habría que ordenarlos como primer paso).

①

49	50	52	54	57	60	68	75

②

17	18	20	25	28	29	31	32	32

③

34	35	38	40	41	42	42	44	48	48

④

5	6	8	9	9	10	14	14	15	16	17

Resolución 1

Para entender mejor la explicación, escribimos los datos con sus denominaciones:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
49	50	52	54	57	60	68	75

$n = 8$ (par) $\Rightarrow n{:}2 = \mathbf{4}$. Q_2 es la mediana: $Q_2 = (x_4+x_5){:}2 = (54+57){:}2 = 55{,}5$

Q_1 es la mediana de los primeros **4** datos: $Q_1 = (x_2+x_3){:}2 = (50+52){:}2 = 51$

Q_3 es la mediana de los últimos **4** datos: $Q_3 = (x_6+x_7){:}2 = (60+68){:}2 = 64$

Resolución 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
17	18	20	25	28	29	31	32	32

$n = 9$ (impar) $\Rightarrow (n-1){:}2 = \mathbf{4}$. Q_2 es la mediana: $Q_2 = x_5 = 28$

Q_1 es la mediana de los primeros **4** datos: $Q_1 = (x_2+x_3){:}2 = (18+20){:}2 = 19$

Q_3 es la mediana de los últimos **4** datos: $Q_3 = (x_7+x_8){:}2 = (31+32){:}2 = 31{,}5$

Resolución 3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
34	35	38	40	41	42	42	44	48	48

$n = 10$ (par) $\Rightarrow n{:}2 = \mathbf{5}$. Q_2 es la mediana: $Q_2 = (x_5+x_6){:}2 = (41+42){:}2 = 41{,}5$

Q_1 es la mediana de los primeros **5** datos: $Q_1 = x_3 = 38$

Q_3 es la mediana de los últimos **5** datos: $Q_3 = x_8 = 44$

Resolución 4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
5	6	8	9	9	10	14	14	15	16	17

$n = 11$ (impar) $\Rightarrow (n-1){:}2 = \mathbf{5}$. Q_2 es la mediana: $Q_2 = x_6 = 10$

Q_1 es la mediana de los primeros **5** datos: $Q_1 = x_3 = 8$

Q_3 es la mediana de los últimos **5** datos: $Q_3 = x_9 = 15$

Enunciados

Utiliza el método de Moore y McCabe para calcular los cuartiles de los siguientes conjuntos de datos. (Observa que los datos ya están ordenados de menor a mayor).

①	21	27	29	31	34	42	44	45									
②	57	59	59	61	63	82	83	83									
③	53	60	63	70	72	75	77	79	81								
④	10	14	15	17	19	21	23	23	24								
⑤	26	29	29	31	33	38	41	42	52	53							
⑥	70	71	73	80	82	82	87	89	91	94							
⑦	17	19	20	20	21	23	24	24	31	31	33						
⑧	35	38	38	39	40	44	44	51	51	53	58						
⑨	17	19	23	24	30	39	41	44	56	56	59	62					
⑩	72	73	79	80	85	88	88	92	93	95	96	99					
⑪	3	3	4	5	7	10	17	18	20	21	21	23	25				
⑫	1	2	4	4	8	12	17	19	19	21	22	23	25				
⑬	19	21	22	24	33	38	40	50	55	61	66	68	69	73			
⑭	10	12	15	15	20	25	33	33	37	40	44	44	46	49			
⑮	19	23	28	29	30	40	50	51	53	55	67	72	74	80	91		
⑯	5	8	10	11	24	33	49	49	49	50	52	55	56	61	64		
⑰	38	43	46	48	49	55	67	71	72	89	91	93	94	95	95	97	
⑱	30	31	32	33	33	34	56	57	57	58	85	88	88	89	91	99	
⑲	8	9	10	11	12	21	25	26	29	41	47	50	51	52	54	60	61
⑳	4	4	7	9	9	18	29	32	35	47	51	56	57	59	60	65	70

Enunciados

Utiliza el método de Moore y McCabe para calcular los cuartiles de los siguientes conjuntos de datos. (Los damos ya ordenados por facilidad en la explicación; en la realidad, habría que ordenarlos como primer paso).

①

129	132	135	142	146	153	160	170	182	195	200	208	212	220	221
229	241	261	266	267	275	300	304	311	312	319	330	357	363	375
379	387	387	397	404	407	415	427	432	432	433	440	454	456	479

②

512	517	522	526	531	533	533	540	571	576	588	598	600	622	629	636	641	646
658	675	676	682	696	696	708	719	719	724	726	730	749	780	782	793	818	826

③

11	13	15	24	40	42	48	56	67	68	68	83	91	95	98

Resolución 1

Comenzamos por averiguar el número de datos: $n = 3 \cdot 15 = 45$ (impar)

$$L_1 = \frac{n+1}{4} = \frac{45+1}{4} = 11{,}5 \Rightarrow Q_1 = \frac{x_{11}+x_{12}}{2} = \frac{200+208}{2} = 204$$

$$L_2 = \frac{n+1}{2} = \frac{45+1}{2} = 23 \Rightarrow Q_2 = x_{23} = 304$$

$$L_3 = \frac{3n+3}{4} = \frac{3 \cdot 45+3}{4} = 34{,}5 \Rightarrow Q_3 = \frac{x_{34}+x_{35}}{2} = \frac{397+404}{2} = 400{,}5$$

Solución → primer cuartil: 204 ; segundo cuartil: 304 ; tercer cuartil: 400,5

Resolución 2

Comenzamos por averiguar el número de datos: $n = 2 \cdot 18 = 36$ (par)

$$L_1 = \frac{n+2}{4} = \frac{36+2}{4} = 9{,}5 \Rightarrow Q_1 = \frac{x_9+x_{10}}{2} = \frac{571+576}{2} = 573{,}5$$

$$L_2 = \frac{n+1}{2} = \frac{36+1}{2} = 18{,}5 \Rightarrow Q_2 = \frac{x_{18}+x_{19}}{2} = \frac{646+658}{2} = 652$$

$$L_3 = \frac{3n+2}{4} = \frac{3 \cdot 36+2}{4} = 27{,}5 \Rightarrow Q_3 = \frac{x_{27}+x_{28}}{2} = \frac{719+724}{2} = 721{,}5$$

Solución → primer cuartil: 573,5 ; segundo cuartil: 652 ; tercer cuartil: 721,5

Resolución 3

Comenzamos por averiguar el número de datos: $n = 15$ (impar)

$$L_1 = \frac{n+1}{4} = \frac{15+1}{4} = 4 \Rightarrow Q_1 = x_4 = 24$$

$$L_2 = \frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8 \Rightarrow Q_2 = x_8 = 56$$

$$L_3 = \frac{3n+3}{4} = \frac{3 \cdot 15+3}{4} = 12 \Rightarrow Q_3 = x_{12} = 83$$

Solución → primer cuartil: 24 ; segundo cuartil: 56 ; tercer cuartil: 83

Enunciados

Utiliza el método de Moore y McCabe para calcular los cuartiles de los siguientes conjuntos de datos. (Observa que los datos ya están ordenados de menor a mayor).

①

12	14	19	23	24	26	35	37	43	47	69	77	82	84	89

②

132	137	145	150	155	174	182	191	191	200	202	208	210	212	216	232	237	253
260	264	265	276	277	291	293	300	304	307	309	311	311	315	321	336	337	337

③

506	506	513	516	519	521	528	536	543	552	558	562	577	587	594
598	604	613	636	673	718	719	720	729	734	751	761	769	770	772
777	792	794	804	819	821	822	826	829	840	861	868	868	875	880

④

130	131	132	137	141	144	148	152	154	161	162	174	187	187	189	191	194
196	199	205	207	207	210	211	224	226	227	230	232	234	243	246	246	248

⑤

120	121	121	122	127	129	130	131	132	133	133	133	134	134	136	137	138
138	139	141	141	141	142	142	147	147	149	149	149	150	151	152	154	155
157	157	159	161	163	165	165	165	166	166	167	171	173	175	176	177	179

⑥

299	321	337	351	351	356	360	365	375	382	390	394	409	414	420	422
426	445	451	470	471	473	476	493	507	518	519	529	542	543	546	584
608	611	616	619	640	642	649	678	681	684	687	690	700	710	711	733
747	749	749	797	804	805	810	831	837	844	856	856	862	872	873	908

⑦

14	18	20	23	30	31	43	47	56	57	62	73	79	86	87	92	95

⑧

821	824	825	826	828	829	832	834	838	840	842	845	846	849	849
851	851	853	857	857	858	861	864	867	867	869	871	875	876	877
879	880	882	883	884	885	887	888	892	896	896	902	903	904	904

⑨

1	2	2	3	4	4	7	8	10	12	13	13	15	17	18	19	19
20	26	27	29	29	31	32	36	36	36	37	41	42	44	49	50	50

⑩

120	121	122	123	123	124	128	129	129	130	133	134	135	136	136	137	139	142	143
144	145	145	148	149	150	152	155	155	156	156	156	157	158	158	158	158	159	160
162	162	163	165	169	169	170	173	175	175	176	176	176	177	178	179	179	180	180

⑪

102	102	109	112	115	119	120	125	129	132	135	140	141	144	144	145	147	149	154	160
164	167	169	172	176	178	178	183	184	188	188	197	201	202	202	213	216	218	219	220
221	223	225	227	229	229	230	231	236	237	238	240	241	245	248	249	253	257	260	261
261	268	270	270	272	273	276	277	279	282	287	289	290	292	292	295	295	296	296	297

Cálculo de cuartiles a partir de la tabla de frecuencias absolutas

Para poder calcular los cuartiles es imprescindible averiguar primero sus lugares en el conjunto ordenado de datos. Si estos vienen dados con una tabla de frecuencias absolutas, un método sencillo para averiguar los lugares es calcular las frecuencias absolutas acumuladas.

Enunciado

Se hace una encuesta en una urbanización residencial para saber cuántas personas habitan en cada domicilio, obteniéndose estos datos:

Número de personas	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de domicilios	55	171	225	187	121	81	46	18	1

Utiliza el método de Moore y McCabe para calcular los cuartiles.

Resolución

* La variable estadística es el número de personas que vive en un domicilio; la denominamos x_i.
* La frecuencia absoluta es en cuántos domicilios vive cada número determinado de personas; la denominamos f_i.
* Calculamos las frecuencias absolutas acumuladas de cada dato, que denominamos F_i.

Reescribimos la tabla para usar esta notación y calcular las frecuencias absolutas acumuladas y el número de datos:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	⬇ Suma ⬇
f_i	55	171	225	187	121	81	46	18	1	905
F_i	55	226	451	638	759	840	886	904	905	⬆ Suma ⬆

Las frecuencias absolutas acumuladas nos permiten calcular el valor de cualquier elemento conociendo su posición, con este razonamiento, que usaremos inmediatamente (lo escribimos para ayudarte a entender el proceso, no porque sea necesario escribirlo en los ejercicios):

$x_1 = 2$, …, $x_{55} = 2$, $x_{56} = 3$, …, $x_{226} = 3$, $x_{227} = 4$, …, $x_{451} = 4$, $x_{452} = 5$, …, $x_{638} = 5$, $x_{639} = 6$, …, $x_{759} = 6$, $x_{760} = 7$, …, $x_{840} = 7$, $x_{841} = 8$, …, $x_{886} = 8$, $x_{887} = 9$, …, $x_{904} = 9$, $x_{905} = 10$

Calculamos el número de datos: $\Sigma f_i = 905$ (impar)

$$L_1 = \frac{n+1}{4} = \frac{905+1}{4} = 226{,}5 \Rightarrow Q_1 = \frac{x_{226}+x_{227}}{2} = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$$

$$L_2 = \frac{n+1}{2} = \frac{905+1}{2} = 453 \Rightarrow Q_2 = x_{453} = 5$$

$$L_3 = \frac{3n+3}{4} = \frac{3\cdot 905+3}{4} = 679{,}5 \Rightarrow Q_3 = \frac{x_{679}+x_{680}}{2} = \frac{8+8}{2} = 8$$

Solución → primer cuartil: 3,5 ; segundo cuartil: 5 ; tercer cuartil: 8

Enunciados

Utiliza el método de Moore y McCabe para calcular los cuartiles de los siguientes conjuntos de datos dados con sus frecuencias absolutas.

①	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	7	9	12	15	18	21	33	32	21	15	13
②	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	12	14	21	21	33	29	17	22	17	19	20
③	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	45	40	42	38	29	30	18	16	15	9	7
④	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	29	28	30	8	2	7	5	5	33	30	31
⑤	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	2	2	3	5	10	41	43	45	44	42	2
⑥	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	20	25	30	3	4	3	3	2	2	6	28
⑦	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	11	12	13	14	15	16	15	14	12	12	11
⑧	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	2	2	2	1	1	2	3	35	25	20	19
⑨	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	23	25	28	34	28	23	19	5	4	2	2
⑩	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	2	41	3	1	3	4	2	1	36	3	4
⑪	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	4	5	5	7	15	29	34	43	20	15	12
⑫	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	28	22	25	3	3	2	2	1	1	30	33
⑬	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	12	13	11	9	1	1	2	2	35	36	40
⑭	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	f_i	34	45	56	67	45	43	42	51	22	18	17

Recorrido intercuartílico

Dado un conjunto de datos, llamamos recorrido (o rango) intercuartílico (o intercuartil) a la diferencia entre el tercer cuartil y el primer cuartil.

Es un parámetro de dispersión que tiene la cualidad de estar poco afectado por los valores excepcionalmente pequeños o grandes del conjunto de datos.

Expresión simbólica

Si llamamos Q_1 al primer cuartil, Q_3 al tercer cuartil y RIC al recorrido intercuartílico, tenemos:

$$\boxed{RIC = Q_3 - Q_1}$$

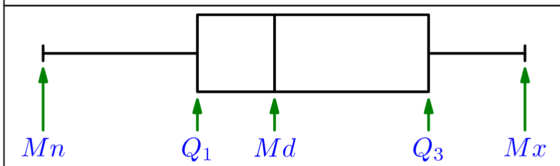
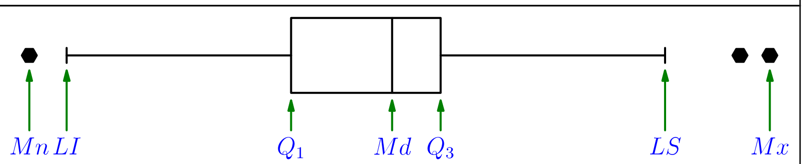
Diagrama de caja y bigotes

Es una gráfica obtenida a partir de un conjunto de datos que permite hacerse rápidamente una buena idea de la distribución de los datos, ya que en ella están representados los valores menor y mayor, la mediana, los cuartiles primero y tercero y los elementos con valores más extremos.

- Los diagramas de caja y bigotes se suelen representar en horizontal o en vertical, según convenga en la práctica. En este curso lo haremos en horizontal.
- La **caja** es un rectángulo; una de sus dimensiones es el recorrido intercuartílico y la otra se decide por estética, según convenga; el extremo izquierdo (o inferior) representa el primer cuartil y el extremo derecho (o superior) representa el tercer cuartil. La caja está dividida en dos partes por un segmento que representa a la mediana.
- Los valores mayores que el tercer cuartil más una vez y media el rango intercuartílico o bien menores que el primer cuartil menos una vez y media el rango intercuartílico se denominan **valores atípicos**.
- Los **bigotes** son dos segmentos situados a la izquierda (o abajo) y la derecha (o arriba) de la caja. Acaban, respectivamente, en el valor mínimo y máximo del conjunto de datos.
  - Su longitud no puede ser mayor que una vez y media el rango intercuartílico, por lo que los valores atípicos se representan con una marca adicional fuera de los bigotes.
  - La palabra «bigote» no se refiere a los bigotes humanos (que son de una pieza), sino a los de los felinos y roedores, que los tienen a ambos lados del hocico.

Ejemplos

Llamamos Mn al valor mínimo del conjunto, Mx al valor máximo, Md a la mediana, Q_1 al primer cuartil y Q_3 al tercer cuartil. Calculamos los límites inferior (LI) y superior (LS) de los bigotes: $LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot RIC$, $LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot RIC$.

Ejemplo 1 (sin valores atípicos)	Ejemplo 2 (con tres valores atípicos)
	

Enunciado

Representa un diagrama de caja y bigotes de este conjunto de datos que ya está ordenado de menor a mayor:

9	9	10	10	11	12	12	13	14	14	18	19	20	20	22	24	24	28	31	32
34	37	37	39	39	40	40	41	43	44	46	49	51	53	59	73	78	82	85	91

Resolución

Averiguamos el número de datos: $n = 2 \cdot 20 = 40$

Calculamos la mediana:

$$L = \frac{n+1}{2} = \frac{40+1}{2} = 20{,}5 \Rightarrow Md = \frac{x_{20}+x_{21}}{2} = \frac{32+34}{2} = 33$$

Usamos el método de Moore y McCabe para calcular los cuartiles:

$$n \text{ par} \Rightarrow L_1 = \frac{n+2}{4} = \frac{40+2}{4} = 10{,}5 \Rightarrow Q_1 = \frac{x_{10}+x_{11}}{2} = \frac{14+18}{2} = 16$$

$$n \text{ par} \Rightarrow L_3 = \frac{3n+2}{4} = \frac{3 \cdot 40+2}{4} = 30{,}5 \Rightarrow Q_3 = \frac{x_{30}+x_{31}}{2} = \frac{44+46}{2} = 45$$

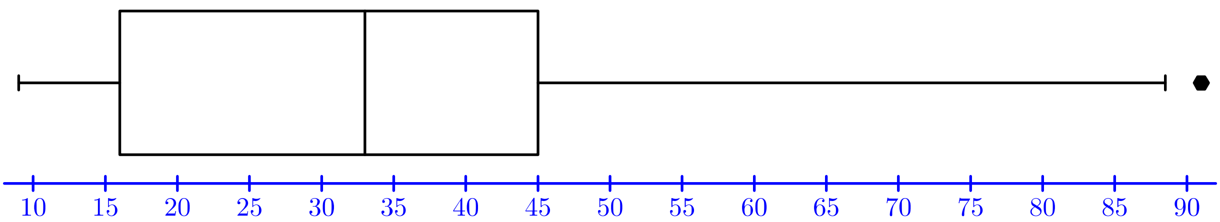
Calculamos el rango intercuartílico: $RIC = Q_3 - Q_1 = 45 - 16 = 29$

Calculamos los límites inferior y superior de los bigotes:
$LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot RIC = 16 - 1{,}5 \cdot 29 = -27{,}5$
$LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot RIC = 45 + 1{,}5 \cdot 29 = 88{,}5$

Los valores menor y mayor del conjunto de datos son $Mn = 9$ y $Mx = 91$

Buscamos valores atípicos:
Como $LI < Mn$, no hay ningún valor atípico por la izquierda.
Como $LS < Mx$, hay valores atípicos por la derecha. Hay uno: $x_{40} = 91$

Por tanto, para representar el diagrama de caja y bigotes hay que dibujar:
$Mn = 9$; $Q_1 = 16$; $Md = 33$; $Q_3 = 45$; $LS = 88{,}5$; $x_{40} = 91$



Hemos dibujado en azul una escala como referencia; se podría colocar encima del diagrama, según convenga. Si el diagrama se hubiera dibujado en vertical, la escala iría a la izquierda o a la derecha.

Enunciados

① Superficie en kilómetros cuadrados de cada comunidad autónoma española:

Comunidad autónoma	Superficie
Islas Baleares	4992
La Rioja	5045
Cantabria	5321
País Vasco	7234
Canarias	7447
Comunidad de Madrid	8028
Comun. Foral de Navarra	10 391
Principado de Asturias	10 604
Región de Murcia	11 314

Comunidad autónoma	Superficie
Comunidad Valenciana	23 255
Galicia	29 575
Cataluña	32 113
Extremadura	41 634
Aragón	47 720
Castilla-La Mancha	79 461
Andalucía	87 599
Castilla y León	94 224

Usando el método de Moore y McCabe para averiguar los cuartiles, calcula en kilómetros cuadrados el rango intercuartílico.

② En el Abierto Británico de Golf de 2022 en categoría masculina acabaron las cuatro rondas de la competición 83 participantes, con este resultado (en golf gana el que menos golpes da):

268	269	270	274	274	275	275	276	276	276	277	277	277	277	278	278	278	278	278	278	279
279	279	279	279	279	279	280	280	280	280	280	280	281	281	281	281	281	281	281	281	282
282	282	282	282	283	283	283	283	283	283	284	284	284	284	284	284	284	284	284	285	285
285	285	285	285	286	286	286	286	287	287	288	288	289	289	289	290	290	292	292	296	

Usando el método de Moore y McCabe para averiguar los cuartiles, dibuja un diagrama de caja y bigotes del conjunto de resultados. Utiliza una escala de referencia desde 268 golpes hasta 296 golpes, de dos golpes en dos golpes.

③ En los Juegos Olímpicos de Barcelona 1992 participó el considerado mejor equipo de baloncesto de la historia, el llamado *Dream Team* (equipo de ensueño). Estas son las medias de puntos conseguidos por partido por cada jugador:

2,8	4,8	8,0	8,4	9,0	9,0	9,5	10,5	12,9	13,0	14,9	18,0

Usando el método de Moore y McCabe para averiguar los cuartiles, dibuja un diagrama de caja y bigotes del conjunto de medias. Utiliza una escala de referencia desde 3 puntos hasta 18 puntos.

④ La final de salto de longitud en categoría masculina en los Juegos Olímpicos de México finalizó con estos resultados, medidos en metros (el atleta estadounidense Bob Beamon batió el record del mundo):

7,44	7,51	7,66	7,71	7,89	7,90	7,93	7,94	7,94	7,97	8,02	8,09	8,12	8,16	8,19	8,90

Usando el método de Moore y McCabe para averiguar los cuartiles, dibuja un diagrama de caja y bigotes del conjunto de resultados. Utiliza una escala de referencia desde 7,4 metros hasta 8,9 metros, de decímetro en decímetro.

Enunciados

① A comienzos del año 2023, estas eran las poblaciones de todos los países de la Unión Europea, escritas en millones de habitantes y redondeando a la unidad:

Malta	1	Croacia	4	Hungría	10	Rumanía	19
Luxemburgo	1	Irlanda	5	Portugal	10	Polonia	38
Chipre	1	Eslovaquia	5	Suecia	10	España	47
Estonia	1	Finlandia	6	Grecia	11	Italia	59
Letonia	2	Dinamarca	6	Rep. Checa	11	Francia	67
Eslovenia	2	Bulgaria	7	Bélgica	12	Alemania	84
Lituania	3	Austria	9	Países Bajos	17		

Usando el método de Moore y McCabe para averiguar los cuartiles, se pide:

a) Calcular en millones de habitantes el rango intercuartílico.

b) Averiguar qué países presentan valores atípicos.

② En la fase final de la Copa Mundial de Baloncesto de 2022 en categoría femenina, que se celebró en Australia, participaron doce equipos. Calculamos el total de puntos obtenidos en cada partido y ordenamos los resultados:

104	120	120	123	125	126	126	127	127	130	133	133	133	136	139	140	140	140	143
144	145	145	147	148	149	149	151	153	155	155	156	159	160	165	165	176	180	214

Usando el método de Moore y McCabe para averiguar los cuartiles, dibuja un diagrama de caja y bigotes del conjunto de resultados. Utiliza una escala de referencia desde 100 puntos hasta 215 puntos, de cinco en cinco puntos.

③ En la final de la prueba de atletismo de los 100 metros, categoría masculina, de los Juegos Olímpicos de 2008, que se celebraron en Pekín (China), se obtuvieron estas marcas, medidas en segundos (el atleta jamaicano Usain Bolt batió el record del mundo):

9,69	9,89	9,91	9,93	9,95	9,97	10,01	10,03

Usando el método de Moore y McCabe para averiguar los cuartiles, dibuja un diagrama de caja y bigotes del conjunto de tiempos. Utiliza una escala de referencia desde 9,6 segundos hasta 10,1 segundos, de décima en décima.

④ El disco *The River* fue publicado en 1980 por el músico estadounidense Bruce Springsteen. Damos las duraciones de sus canciones con la notación habitual minutos:segundos, ordenadas de menor a mayor:

2:40	2:46	3:04	3:05	3:12	3:20	3:31	3:35	3:37	3:54
3:55	4:04	4:06	4:20	4:47	4:51	5:02	5:30	6:07	8:34

Usando el método de Moore y McCabe para averiguar los cuartiles, dibuja un diagrama de caja y bigotes del conjunto de duraciones. Utiliza una escala de referencia desde 2:40 hasta 8:40, de veinte en veinte segundos.

Definición de los deciles y los percentiles de un conjunto de datos

- **Deciles**. Son valores de la variable estadística que dividirían el conjunto de datos en diez partes con el mismo número de datos.
- **Percentiles**. Son valores de la variable estadística que dividirían el conjunto de datos en cien partes con el mismo número de datos. También reciben el nombre de **centiles**.

Es importante observar que los deciles y los percentiles no tienen por qué coincidir con ninguno de los valores del conjunto de datos que se esté estudiando.

Cálculo de deciles y percentiles de un conjunto de datos

El método de cálculo de los deciles y percentiles depende del tipo de variable estadística:

- Si la variable estadística es cuantitativa discreta y los datos no están agrupados por intervalos, no hay consenso sobre cómo calcularlos, por lo que distintos textos de matemáticas, calculadoras y programas de ordenador pueden dar distintos resultados. Cuando el conjunto de datos es muy grande, las diferencias entre los distintos métodos de cálculo pierde importancia, porque todos dan resultados muy parecidos, incluso iguales.
- Si la variable estadística es cuantitativa continua o bien los datos están agrupados por intervalos, los deciles se calculan exactamente igual que los percentiles, según el método que se explicará a continuación.

Notación

- Denotaremos al decil que ocupa el lugar k como d_k.
- Denotaremos al percentil que ocupa el lugar k como p_k.

Definición de percentiles para variables cuantitativas continuas

Se define el percentil de orden k de un conjunto de datos como el menor valor de la variable estadística tal que el k % de los datos sea menor que él.

Esta es una definición sobre la que sí hay consenso, ya que los problemas técnicos provocados por las variables cuantitativas discretas no tienen efecto en las variables cuantitativas continuas. Por ejemplo, se podría haber dado esta definición alternativa y la definición sería equivalente:

Se define el percentil de orden k de un conjunto de datos como el menor valor de la variable estadística tal que el k % de los datos sea menor **o igual** que él.

Esta definición, junto con las propiedades señaladas, es la que permite calcular mediana, cuartiles y deciles usando solamente la definición de los percentiles cuando la variable estadística es cuantitativa continua.

Propiedades

La mediana, los cuartiles, los deciles y los percentiles para variables cuantitativas continuas están relacionados entre sí; si llamamos a los cuartiles Q_1, Q_2 y Q_3 y a la mediana Md, se verifica:

- $d_1 = p_{10}$, $d_2 = p_{20}$, $d_3 = p_{30}$, $d_4 = p_{40}$, $d_5 = p_{50}$, $d_6 = p_{60}$, $d_7 = p_{70}$, $d_8 = p_{80}$, $d_9 = p_{90}$
- $Q_1 = p_{25}$, $Md = Q_2 = p_{50}$, $Q_3 = p_{75}$

Tratamiento en este curso

En este curso usaremos esta definición para presentar ejemplos del método de cálculo de percentiles y proponer ejercicios sobre él.

Cálculo de percentiles de datos agrupados por intervalos

Cuando hemos agrupado los datos por intervalos, ya no tenemos acceso a los datos individuales. Para calcular los percentiles, supondremos que todos los datos de un intervalo se reparten uniformemente en él, lo que es una suposición perfectamente lógica y razonable.

Enunciado

Se miden las estaturas de todos los alumnos y alumnas de un instituto de enseñanza media y se obtienen estos resultados, presentados en centímetros:

Estatura	[130,140)	[140,150)	[150,160)	[160,170)	[170,180)	[180,190)
Fr. absoluta	48	84	171	143	129	85

Calcula con cuatro cifras significativas el percentil 35 (p_{35}).

Resolución

Necesitamos calcular la tabla de frecuencias absolutas para determinar a qué intervalo corresponde el percentil solicitado:

Estatura	[130,140)	[140,150)	[150,160)	[160,170)	[170,180)	[180,190)
Fr. absoluta	48	84	171	143	129	85
Fr. abs. acumulada	48	132	303	446	575	660

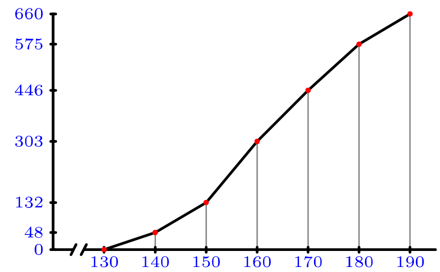
El número de datos corresponde a la frecuencia absoluta acumulada del último intervalo, lo que nos da un número de datos de 660.

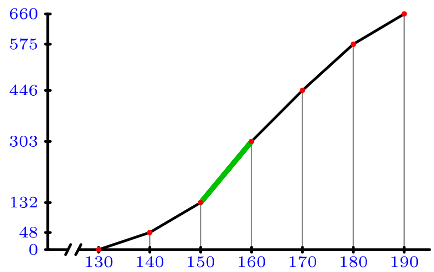
Calculamos la frecuencia absoluta acumulada que corresponde con el percentil 35:

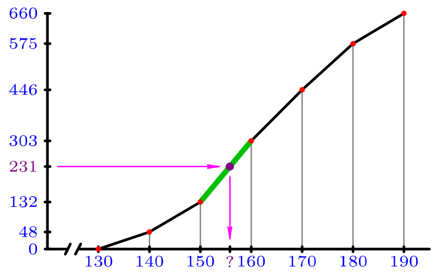
$FAA_{35} = 35\,\% \cdot 660 = 0{,}35 \cdot 660 = 231$

Buscando en la tabla de frecuencias absolutas acumuladas, vemos que el valor correspondiente de la estatura se encuentra entre 150 cm y 160 cm.

Para calcular concretamente dónde, usamos el polígono de frecuencias absolutas acumuladas que mostramos abajo a la izquierda:







Averiguamos cuál es la función lineal «f» que verifica f(150) = 132 y f(160) = 303, (señalada en verde arriba en el centro):

f(x) = mx+q; m = 171:(160–150) = 17,1. (Observa la procedencia del valor «171».)

f(150) = 132 ⇒ 17,1·150+q = 132 ⇒ q = 132–17,1·150 = –2433; f(x) = 17,1x–2433

Buscamos el valor que corresponde a nuestro percentil (arriba a la derecha):

f(x) = 231 ⇒ 17,1·x–2433 = 231 ⇒ x = (231+2433):17,1 = 155,8.

Calculadora: (2 3 1 + 2 4 3 3) ÷ 1 7 . 1 = ⇨ 155.7894737

Solución: p_{35} = 155,8 cm

Enunciado

Se miden las masas de todos los alumnos y alumnas de un instituto de enseñanza media y se obtienen estos resultados, presentados en kilogramos:

Masa	[45,50)	[50,55)	[55,60)	[60,65)	[65,70)	[70,75)	[75,80)
Fr. absoluta	75	89	93	122	193	122	56

a) Calcula con tres cifras significativas el percentil 84 (p_{84}).

b) Calcula el percentil de una persona con una masa de 58 kg.

Resolución

Antes de comenzar con los cálculos de cada apartado, calculamos la tabla de frecuencias absolutas y dibujamos el polígono de frecuencias (figura 1).

Masa	[45,50)	[50,55)	[55,60)	[60,65)	[65,70)	[70,75)	[75,80)
Fr. absoluta	75	89	**93**	120	193	**122**	58
Fr. abs. acumulada	75	164	257	377	570	692	750

El número de datos corresponde a la frecuencia absoluta acumulada del último intervalo, lo que nos da un número de datos de 750.

a) Consulta la figura 2.

Calculamos la frecuencia absoluta acumulada que corresponde con el percentil 82:

FAA_{84} = 84 % · 750 = 0,84 · 750 = 630, masa entre 70 kg y 75 kg.

Averiguamos cuál es la función lineal «f» que verifica f(70) = 570 y f(75) = 692:

f(x) = mx+q; m = **122**:(75–70) = 24,4.

f(70) = 570 ⇒ 24,4·70+q = 570 ⇒ q = 570–24,4·70 = –1138; f(x) = 24,4x–1138

Buscamos el valor que corresponde a nuestro percentil:

f(x) = 630 ⇒ 24,4 x–1138 = 630 ⇒ x = (630+1138):24,4 = 72,5.

Calculadora: (6 3 0 + 1 1 3 8) ÷ 2 4 . 4 = ⇨ 72.45901639

b) Consulta la figura 3.

58 kg está entre entre 55 kg y 60 kg.

Averiguamos cuál es la función lineal «g» que verifica g(55) = 164 y f(60) = 257:

g(x) = rx+s; r = **93**:(75–70) = 18,6.

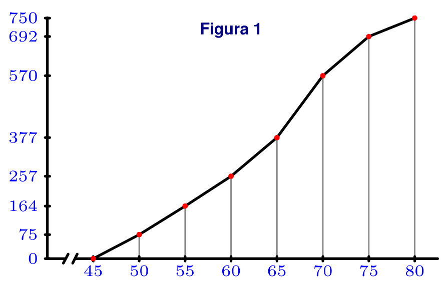
g(55) = 164 ⇒ 18,6·55+s = 164 ⇒ s = 164–18,6·55 = –859; g(x) = 18,6x–859

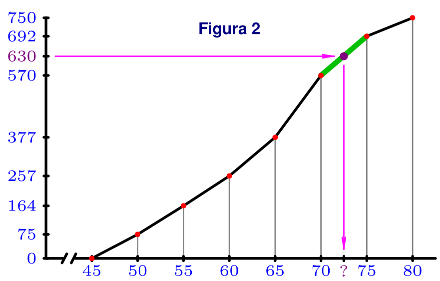
Buscamos la frecuencia absoluta acumulada que corresponde a nuestro valor:

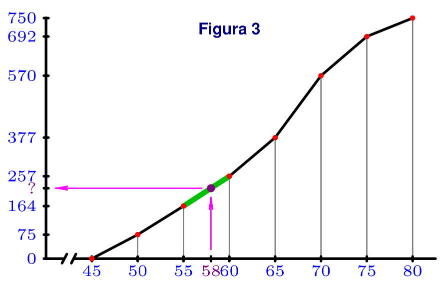
f(58) = 18,6·58–859 = 219,8; en porcentaje: 219,8:750 = 0,29 = 29 %

Calculadora: 2 1 9 . 8 ÷ 7 5 0 = ⇨ 0.293066666

Solución: (a) p_{84} = 72,5 kg (b) 29







Casos particulares en los cálculos de percentiles

Cuando se calculan percentiles a partir de datos de una variable estadística cuantitativa continua agrupados por intervalos pueden aparecer casos muy sencillos de calcular porque no precisen averiguar la expresión analítica de ninguna de las funciones lineales que aparecen en el polígono de frecuencias, debido a que el valor coincida con el extremo de algún intervalo.

Enunciado

Se pregunta a todos los alumnos y alumnas de un instituto de enseñanza media cuanto tiempo dedican, aproximadamente, al estudio en casa cada mes y se obtienen estos resultados, presentados en horas:

Tiempo	[8,12)	[12,16)	[16,20)	[20,24)	[24,28)	[28,32)	[32,36)
Fr. absoluta	102	119	155	147	277	302	148

a) Calcula el percentil 64 (p_{64}).

b) Calcula el percentil de una persona que estudia 20 horas al mes.

Resolución

Antes de comenzar con los cálculos de cada apartado, calculamos la tabla de frecuencias absolutas y dibujamos el polígono de frecuencias (figura auxiliar).

Tiempo	[8,12)	[12,16)	[16,20)	[20,24)	[24,28)	[28,32)	[32,36)
Fr. absoluta	102	119	155	147	277	302	148
Fr. abs. acumulada	102	221	376	523	800	1102	1250

El número de datos corresponde a la frecuencia absoluta acumulada del último intervalo, lo que nos da un número de datos de 1250.

a) Consulta la figura auxiliar.

Calculamos la frecuencia absoluta acumulada que corresponde con el percentil 64:

$FAA_{64} = 64\,\% \cdot 1250 = 0{,}64 \cdot 1250 = 800$, que corresponde exactamente con 28 h.

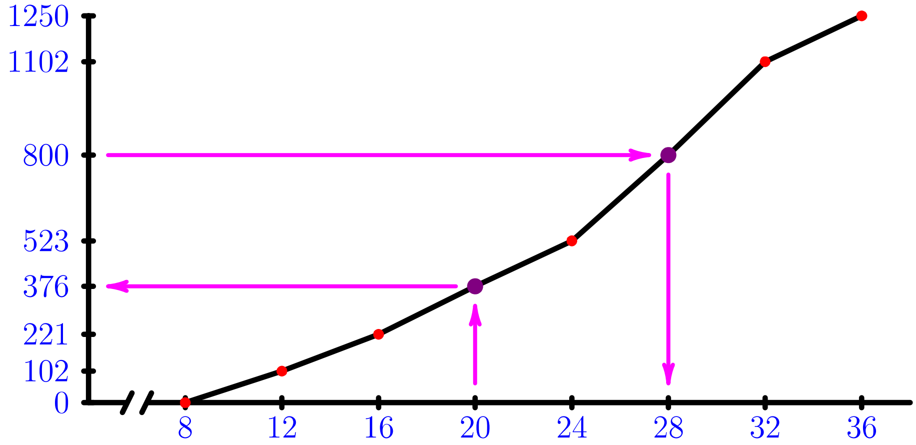
b) Consulta la figura auxiliar.

A 20 horas le corresponde una frecuencia absoluta acumulada de 376.

En porcentaje: $376{:}1250 = 0{,}30 = 30\,\%$.

Calculadora: 3 7 6 ÷ 1 2 5 0 = ⇨ 0.3008

Solución: (a) $p_{64} = 28$ h (b) 30



Enunciados

① Se miden las estaturas de todos los alumnos y alumnas de un instituto de enseñanza media y se obtienen estos resultados, presentados en centímetros:

Estatura	[130,140)	[140,150)	[150,160)	[160,170)	[170,180)	[180,190)
Fr. absoluta	121	162	193	145	124	105

a) Calcula con cuatro cifras significativas el percentil 82.

b) Calcula el percentil 56.

c) Calcula el percentil de una persona con una estatura de 164 cm.

d) Calcula el percentil de una persona con una estatura de 150 cm.

② Se miden las masas de todos los alumnos y alumnas de un instituto de enseñanza media y se obtienen estos resultados, presentados en kilogramos:

Masa	[45,50)	[50,55)	[55,60)	[60,65)	[65,70)	[70,75)	[75,80)
Fr. absoluta	91	106	127	156	276	142	102

a) Calcula con tres cifras significativas el percentil 17.

b) Calcula el percentil 48.

c) Calcula el percentil de una persona con una masa de 68 kg.

d) Calcula el percentil de una persona con una masa de 55 kg.

③ Se pregunta a todos los alumnos y alumnas de un instituto de enseñanza media cuanto tiempo dedican, aproximadamente, al estudio en casa cada mes y se obtienen estos resultados, presentados en horas:

Tiempo	[8,12)	[12,16)	[16,20)	[20,24)	[24,28)	[28,32)	[32,36)
Fr. absoluta	82	94	102	113	169	98	42

a) Calcula con tres cifras significativas el percentil 44.

b) Calcula el percentil 94.

c) Calcula el percentil de una persona que estudia 30 horas al mes.

d) Calcula el percentil de una persona que estudia 16 horas al mes.

④ Una empresa ganadera tiene varios rebaños de alpacas; decide medir la masa de todos sus ejemplares y llega a este resultado, medido en kilogramos:

Masa	[46,52)	[52,58)	[58,64)	[64,70)	[70,76)	[72,82)	[82,86)
Fr. absoluta	125	208	342	277	208	153	137

a) Calcula con tres cifras significativas el percentil 28.

b) Calcula el percentil 80.

c) Calcula el percentil de una alpaca con una masa de 66 kg.

d) Calcula el percentil de una alpaca con una masa de 82 kg.

Cálculo de cuartiles en datos agrupados por intervalos

Para calcular los cuartiles (Q_1, Q_2 y Q_3) de un conjunto de datos de una variable estadística cuantitativa continua agrupados por intervalos basta calcular los percentiles equivalentes: $Q_1 = p_{25}$, $Q_2 = p_{50}$ y $Q_3 = p_{75}$.

Enunciado

En un gran refugio para perros abandonados averiguan la masa de todos sus ejemplares adultos, con este resultado, ofrecido en kilogramos:

Masa	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)
Fr. absoluta	33	185	43	219	35	195	30

Calcula con tres cifras significativas los tres cuartiles (Q_1, Q_2 y Q_3).

Resolución

Calculamos la tabla de frecuencias absolutas y dibujamos el polígono de frecuencias acumuladas, en el que marcaremos los datos necesarios (figura auxiliar).

Masa	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)
Fr. absoluta	33	185	43	219	35	195	30
Fr. abs. acumulada	33	218	261	480	515	710	740

El número de datos corresponde a la frecuencia absoluta acumulada del último intervalo, lo que nos da un número de datos de 740.

Las frecuencias absolutas acumuladas de los tres cuartiles:

$FAA_{25} = 25\,\% \cdot 740 = 185$; $FAA_{50} = 50\,\% \cdot 740 = 370$; $FAA_{75} = 75\,\% \cdot 740 = 555$

Las funciones lineales correspondientes a cada intervalo (no ofrecemos el cálculo):

$f_1(x) = 18{,}5x - 337$, $f_2(x) = 21{,}9x - 615$, $f_3(x) = 19{,}5x - 655$

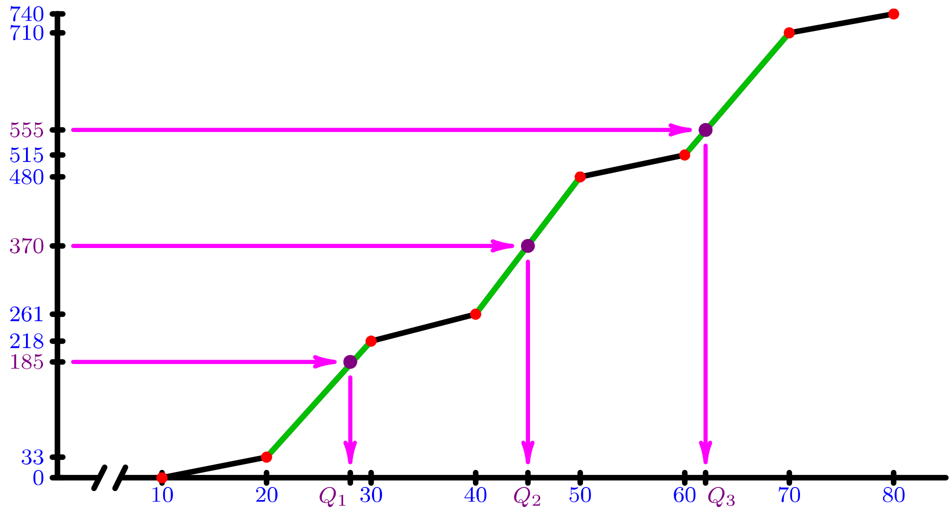
Las ecuaciones para calcular los cuartiles:

$f_1(Q_1) = 185 \Rightarrow 18{,}5 \cdot Q_1 - 337 = 185 \Rightarrow Q_1 = 28{,}2$

$f_2(Q_2) = = 370 \Rightarrow 21{,}9 \cdot Q_2 - 615 = 370 \Rightarrow Q_2 = 45{,}0$

$f_3(Q_3) = 555 \Rightarrow 19{,}5 \cdot Q_3 - 655 = 555 \Rightarrow Q_3 = 62{,}1$

Solución: $Q_1 = 28{,}2$ kg; $Q_2 = 45{,}0$ kg; $Q_3 = 62{,}1$ kg



Cálculo de deciles en datos agrupados por intervalos

Para calcular los deciles de un conjunto de datos de una variable estadística cuantitativa continua agrupados por intervalos basta calcular los percentiles equivalentes: $d_i = p_{10 \cdot i}$. Ejemplo: $d_4 = p_{40}$.

Enunciado

La federación internacional de atletismo publica la lista de marcas obtenidas en lanzamiento de jabalina en competiciones internacionales oficiales un cierto año en categoría femenina senior, con estos resultados en metros:

Longitud	[38,42)	[42,46)	[46,50)	[50,54)	[54,58)	[58,62)	[62,66)
Fr. absoluta	115	146	231	103	90	81	54

Calcula con tres cifras significativas los deciles 2, 6 y 8 (d_2, d_6 y d_8).

Resolución

Calculamos la tabla de frecuencias absolutas y dibujamos el polígono de frecuencias acumuladas, en el que marcaremos los datos necesarios (figura auxiliar).

Longitud	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)
Fr. absoluta	115	146	231	103	90	81	54
Fr. abs. acumulada	115	261	492	595	685	766	820

El número de datos corresponde a la frecuencia absoluta acumulada del último intervalo, lo que nos da un número de datos de 820.

Las frecuencias absolutas acumuladas de los tres deciles pedidos:

$FAA_{20} = 20\,\% \cdot 820 = 164$; $FAA_{60} = 60\,\% \cdot 820 = 492$; $FAA_{80} = 80\,\% \cdot 820 = 656$

Las funciones lineales correspondientes a cada intervalo (no ofrecemos el cálculo):

$f_{20}(x) = 36{,}5x–1418$, $f_{60}(x)$ no es necesario, $f_{80}(x) = 22{,}5x–620$

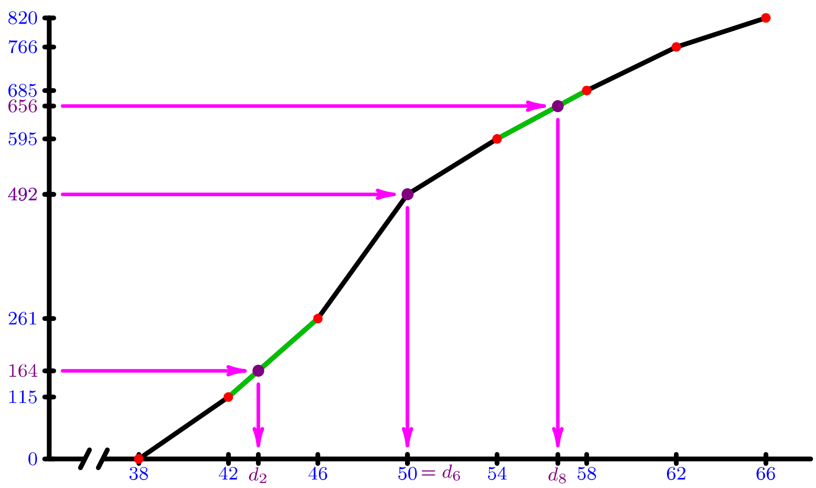
Las ecuaciones para calcular los deciles pedidos:

$f_{20}(d_2) = 185 \Rightarrow 36{,}5 \cdot d_{20} – 1418 = 185 \Rightarrow d_{20} = 43{,}3$

$FAA_{60} = 492 \Rightarrow d_6 = 50$

$f_{80}(d_8) = 656 \Rightarrow 22{,}5 \cdot d_8 – 620 = 656 \Rightarrow d_8 = 56{,}7$

Solución: $d_2 = 43{,}3$ m; $d_6 = 50{,}0$ m; $d_8 = 56{,}7$ m



Enunciados

① Una empresa ganadera tiene varios rebaños de ovejas; mide la masa de sus ejemplares adultos y llega a este resultado, medido en kilogramos:

Masa	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)
Fr. absoluta	238	247	290	226	194	187	168

a) Calcula con tres cifras significativas los tres cuartiles (Q_1, Q_2 y Q_3).

b) Calcula con tres cifras significativas los deciles 2, 3 y 7 (d_2, d_3 y d_7).

② La federación internacional de atletismo publica la lista de marcas obtenidas en lanzamiento de jabalina en competiciones internacionales oficiales un cierto año en categoría masculina senior, con estos resultados en metros:

Longitud	[55,60)	[60,65)	[66,70)	[70,75)	[75,80)	[80,85)	[85,90)
Fr. absoluta	21	28	43	33	25	21	19

a) Calcula con tres cifras significativas los tres cuartiles (Q_1, Q_2 y Q_3).

b) Calcula con tres cifras significativas los deciles 2, 6 y 7 (d_2, d_6 y d_7).

③ Una gran ciudad realiza un estudio estadístico entre los niños y niñas de cero a tres años, midiendo su estatura, con este resultado, dado en centímetros:

Estatura	[30,38)	[38,46)	[46,54)	[54,62)	[62,70)	[70,78)	[78,86)
Fr. absoluta	251	278	322	242	237	201	189

a) Calcula con tres cifras significativas los tres cuartiles (Q_1, Q_2 y Q_3).

b) Calcula con tres cifras significativas los deciles 3, 6 y 7 (d_3, d_6 y d_7).

④ Se hace una encuesta por internet dirigida a personas amantes de la lectura en español y les pregunta cuántos libros compraron durante el año anterior; se obtiene este resultado:

Núm. libros	[10,14)	[14,18)	[18,22)	[22,26)	[26,30)	[30,34)	[34,38)
Fr. absoluta	357	303	102	118	87	82	51

a) Calcula con tres cifras significativas los tres cuartiles (Q_1, Q_2 y Q_3).

b) Calcula con tres cifras significativas los deciles 1, 6 y 8 (d_1, d_6 y d_8).

⑤ Los organizadores de una carrera popular de diez kilómetros publican en su web la estadística del tiempo invertido por cada participante que ha terminado el recorrido, medido en minutos, con este resultado:

Tiempo	[30,35)	[35,40)	[40,45)	[45,50)	[50,55)	[55,60)	[60,65)
Fr. absoluta	36	124	240	126	82	34	18

a) Calcula con tres cifras significativas los tres cuartiles (Q_1, Q_2 y Q_3).

b) Calcula con tres cifras significativas los deciles 3, 6 y 7 (d_3, d_6 y d_7).

El azar

En términos del lenguaje común, llamamos azar al responsable del resultado de algunas actividades sobre las que los humanos no tenemos suficiente control o conocimiento para precedir ese resultado.

Algunos acontecimientos que hace milenios se consideraban resultado del azar ahora son perfectamente predecibles, como la aparición de eclipses de sol y de luna. Pero lanzar una moneda al aire y ver por qué lado cae se sigue considerando impredecible y se usa en muchos deportes al comienzo de la competición para decidir algunos aspectos del juego.

Experiencias aleatorias

- Una **experiencia aleatoria** es un experimento cuyo resultado depende del azar. Es fundamental para poder estudiarla explicar de una manera clara y perfectamente determinada en qué consiste exactamente la experiencia.
- **Caso elemental** o **suceso elemental** o **suceso individual** es cada uno de los resultados que se pueden obtener al realizar una experiencia aleatoria.
- **Espacio muestral** es el conjunto de todos los sucesos elementales.
- **Suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral.
- Se dice que un suceso se ha **verificado** cuando el resultado de la experiencia aleatoria es uno de los sucesos elementales que forman el suceso.
- **Suceso seguro** es el que siempre se verifica. Coincide con el espacio muestral.
- **Suceso imposible** es el que nunca se verifica. Coincide con el conjunto vacío.

Instrumentos habituales para realizar experiencias aleatorias

Los humanos usamos una serie de instrumentos para ayudarnos a realizar experiencias aleatorias; algunos son muy populares en todo el mundo y otros son particulares de ciertas culturas. Muchos de ellos se utilizan para desarrollar juegos de azar; de hecho, el estudio matemático de la probabilidad fue impulsado en sus comienzos por el estudio de los juegos de azar.

- **Monedas**. Como cada moneda puede caer a una superficie mostrando dos dibujos distintos, llamamos a cada uno de ellos de una manera diferente. En español se designan «cara» y «cruz»; en inglés se llaman *head* («cabeza») y *tail* («cola»).

- **Dados**. Son objetos con la forma de algún poliedro. El más habitual es el dado seis caras, pero también los hay de cuatro, ocho, diez, veinte y más.

- **Barajas**. Una baraja en un conjunto de cartulinas llamadas naipes o cartas. Hay muchos tipos de barajas, pero las más habituales son la española de cuarenta naipes y la francesa de cincuenta y dos.
- **Urnas** y **bombos**. En ellos se introducen bolas u otros objetos, todos idénticos, y se elige uno de ellos por un procedimiento que garantice su aleatoriedad. Por ejemplo, los sorteos de la lotería de muchos países se llevan a cabo extrayendo bolas de uno o dos bombos.

Ejemplo

Enunciado

Se toman tres monedas iguales e indistinguibles; se lanzan sobre una mesa y se dice cuántas monedas han caído con la cara hacia arriba. Se pide:

a) Describir el espacio muestral.

b) Describir seis de los posibles sucesos.

Resolución

Elegir una notación para representar los sucesos elementales de una experiencia aleatoria es una tarea importante que, bien realizada, ayuda mucho a resolver los problemas de probabilidad que se te presentarán más adelante.

En este ejemplo elegimos esta notación:

- ✱ Denotamos «0» al suceso elemental «no ha salido ninguna cara».
- ✱ Denotamos «1» al suceso elemental «ha salido exactamente una cara».
- ✱ Denotamos «2» al suceso elemental «han salido exactamente dos caras».
- ✱ Denotamos «3» al suceso elemental «han salido tres caras».

a) Es habitual nombrar «E» al espacio muestral de una experiencia aleatoria. Así lo haremos en este curso.

E={0,1,2,3}

b) Normalmente se nombran los sucesos con letra mayúsculas o con algún signo que ayude a reconocerlo fácilmente. En este ejemplo hay muchos más de cuatro sucesos posibles; elegimos dos que siempre son posibles y otros cuatro que son representativos.

Primer suceso: el suceso seguro. E={0,1,2,3}; descrito con palabras, sería: «se han obtenido entre 0 y 3 caras, ambos valores incluidos».

Segundo suceso: el suceso imposible. Como se asocia con el conjunto vacío, se puede designar con el signo «∅» o bien como «{}». Descrito con palabras sería bastante raro: «no se ha obtenido ninguno de los sucesos elementales». Realmente, este suceso hay que considerarlo para que luego nos «encaje» bien la teoría de la probabilidad; en la práctica, claro, no se da nunca, así que parece que no tiene sentido.

Tercer suceso. Aquí ya empezamos a inventarnos algo que nos parezca bien. Suceso C: «se ha obtenido un número impar de caras». Para poder manejarlo bien, lo más útil es ser capaz de describir el suceso A como el conjunto de sucesos elementales que lo forman: C={1,3}.

Cuarto suceso. Seguimos inventando. Suceso D: «se han obtenido dos o más caras». Descrito como el conjunto de sucesos elementales que lo forman: D={2,3}.

Quinto suceso. Suceso F: «se han obtenido menos de tres caras»; es decir: F={0,1,2}.

Sexto suceso. Suceso G: «no se ha obtenido ninguna cara»; G={0}.

Ejemplo

Enunciado

Una urna contiene tres bolas verdes (numeradas del 1 al 3), cuatro bolas azules (numeradas del 1 al 4) y cinco bolas rojas (numeradas del 1 al 5), todas del mismo tamaño y material. Es decir: ➊➋➌➊➋➌➍➊➋➌➍➎. Se elige una bola al azar y se dice su color y su número. Se pide:

a) Describir el espacio muestral (E) usando una notación simple.

b) Usando la notación del apartado anterior, describir los siguientes sucesos:

C: «Se ha obtenido una bola verde»

D: «Se ha obtenido una bola con el número 4»

F: «Se ha obtenido una bola de color amarillo»

G: «Se ha obtenido una bola de color azul o con el número 5»

H: «Se ha obtenido una bola con un número menor de 6»

J: «Se ha obtenido una bola con un número menor de 3»

K: «Se ha obtenido una bola con un número menor o igual que 3»

P: «Se ha obtenido una bola con un número primo»

Q: «Se ha obtenido una bola con un número compuesto»

Resolución

Elegir una notación para representar los sucesos elementales de una experiencia aleatoria es una tarea importante que, bien realizada, ayuda mucho a resolver los problemas de probabilidad que se te presentarán más adelante.

En este ejemplo elegimos esta notación: cada suceso elemental lleva una letra mayúscula que indica el color de la bola (V para verde, A para azul y R para rojo) y un número que indica el número de la bola. Por ejemplo, la bola verde con el número 3 se representa «V3». V3=➌

a) E={V1,V2,V3,A1,A2,A3,A4,R1,R2,R3,R4,R5}

b) Hay que examinar cuidadosamente qué sucesos elementales forman parte de cada uno de los sucesos.

C={V1,V2,V3}

D={A4,R4}

F={}. Nota: es el suceso imposible.

G={A1,A2,A3,A4,R5}

H={V1,V2,V3,A1,A2,A3,A4,R1,R2,R3,R4,R5}. Nota: es el suceso seguro.

J={V1,V2,A1,A2,R1,R2}

K={V1,V2,V3,A1,A2,A3,R1,R2,R3}

P={V2,V3,A2,A3,R2,R3,R5}

Q={A4,R4}. Nota: observa que Q=D

Ejemplo

Enunciado

Se lanzan a una superficie plana un dado de doce caras (dodecaedro) numeradas de 1 a 12 y un dado de veinte caras (icosaedro) numeradas de 1 a 20. Se suman los valores de las caras que quedan más arriba y se dice el resultado. Se pide:

a) Describir el espacio muestral (E) usando una notación simple.

b) Usando la notación del apartado anterior, describir los siguientes sucesos:

C: «Se ha obtenido un número par»

D: «Se ha obtenido un número menor de 8»

F: «Se ha obtenido un número mayor de 40»

P: «Se ha obtenido un número primo»

Q: «Se ha obtenido un número compuesto»

R: «Se ha obtenido un número que es potencia de dos»

Resolución

Elegir una notación para representar los sucesos elementales de una experiencia aleatoria es una tarea importante que, bien realizada, ayuda mucho a resolver los problemas de probabilidad que se te presentarán más adelante.

En este ejemplo elegimos una notación muy obvia: nombramos cada suceso elemental con un número igual la suma obtenida; por ejemplo, el suceso elemental «7» significa «se ha obtenido una suma igual a 7».

a) Hay que comenzar por averiguar cuáles son los valores menor y mayor que se pueden obtener en esta experiencia aleatoria.

El menor valor es «2», que corresponde a obtener un «1» con cada dado.

El mayor valor es «32», que corresponde a obtener un «12» con el dado de doce caras y un «20» con el dado de veinte caras.

Como hay bastantes sucesos elementales, tiene perfecto sentido utilizar puntos suspensivos escribir el espacio muestral, no es necesario escribir exhaustivamente todos los sucesos elementales.

E={2,3,...,31,32}

b) Hay que examinar cuidadosamente qué sucesos elementales forman parte de cada uno de los sucesos. En algunos casos que están muy claros, también es posible utilizar puntos suspensivos; lo importante es que no haya dudas en la interpretación de lo que significan los puntos suspensivos.

C={2,4,...,30,32}

D={2,3,4,5,6,7}

F={}. Nota: es el suceso imposible.

P={2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31}

Q={4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22,24,25,26,27,28,30,32}

R={2,4,8,16,32}

Enunciados

① Se toman cuatro monedas iguales e indistinguibles; se lanzan sobre una mesa y se dice cuántas monedas han caído con la cara hacia arriba. Se pide:

a) Describir el espacio muestral (E) usando una notación simple.

b) Usando la notación del apartado anterior, describir los siguientes sucesos:

C: «Se ha obtenido exactamente una cara»

D: «Se ha obtenido exactamente una cruz»

F: «Se ha obtenido al menos una cara»

G: «En todas las monedas ha salido cruz»

H: «Se han obtenido cuatro caras y cuatro cruces»

K: «Se han obtenido menos de dos cruces»

② Una urna contiene cuatro bolas verdes (numeradas del 1 al 4), cinco bolas azules (numeradas del 1 al 5) y seis bolas rojas (numeradas del 1 al 6), todas del mismo tamaño y material. Es decir: ❶❷❸❹❶❷❸❹❺❶❷❸❹❺❻. Se elige una bola al azar y se dice su color y su número. Se pide:

a) Describir el espacio muestral (E) usando una notación simple.

b) Usando la notación del apartado anterior, describir los siguientes sucesos:

C: «Se ha obtenido una bola verde»

D: «Se ha obtenido una bola con el número cinco»

F: «Se ha obtenido una bola con un número menor que tres»

G: «Se ha obtenido una bola roja con número mayor que cuatro»

H: «Se ha obtenido una bola negra»

P: «Se ha obtenido una bola con un número primo»

③ Se lanzan a una superficie plana un dado de ocho caras (octaedro) numeradas de 1 a 8 y un dado de seis caras (hexaedro) numeradas de 1 a 6. Se suman los valores de las caras que quedan más arriba y se dice el resultado. Se pide:

a) Describir el espacio muestral (E) usando una notación simple.

b) Usando la notación del apartado anterior, describir los siguientes sucesos:

C: «Se ha obtenido una suma menor que siete»

D: «Se ha obtenido una suma menor o igual que nueve»

F: «Se ha obtenido una suma que es múltiplo de cuatro»

G: «Se ha obtenido una suma que no es múltiplo de tres»

H: «Se ha obtenido una suma mayor o igual que quince»

P: «Se ha obtenido una suma que es un número primo»

Q: «Se ha obtenido una suma que es un número compuesto»

Enunciados

① Se toman cinco monedas iguales e indistinguibles; se lanzan sobre una mesa y se dice cuántas monedas han caído con la cara hacia arriba. Se pide:

a) Describir el espacio muestral (E) usando una notación simple.

b) Usando la notación del apartado anterior, describir los siguientes sucesos:

C: «Se han obtenido exactamente tres caras»

D: «Se han obtenido exactamente cuatro cruces»

F: «Se han obtenido al menos dos caras»

G: «En al menos una moneda ha salido cruz»

H: «Se han obtenido seis caras»

K: «Se han obtenido menos de tres caras»

② Una urna contiene siete bolas verdes (numeradas del 1 al 7), cinco bolas azules (numeradas del 1 al 5) y cuatro bolas rojas (numeradas del 1 al 4), todas del mismo tamaño y material. Es decir: ❶❷❸❹❺❻❼❶❷❸❹❺❶❷❸❹. Se elige una bola al azar y se dice su color y su número. Se pide:

a) Describir el espacio muestral (E) usando una notación simple.

b) Usando la notación del apartado anterior, describir los siguientes sucesos:

C: «Se ha obtenido una bola roja o azul»

D: «Se ha obtenido una bola con el número cinco o el número siete»

F: «Se ha obtenido una bola con un número menor que dos»

G: «Se ha obtenido una bola roja con número mayor que cinco»

H: «Se ha obtenido una bola amarilla»

P: «Se ha obtenido una bola con un número primo»

③ Se lanzan a una superficie plana tres dados indistinguibles de veinte caras (icosaedros) numeradas de 1 a 20. Se suman los valores de las caras que quedan más arriba y se dice el resultado. Se pide:

a) Describir el espacio muestral (E) usando una notación simple.

b) Usando la notación del apartado anterior, describir los siguientes sucesos:

C: «Se ha obtenido una suma menor que tres»

D: «Se ha obtenido una suma mayor o igual que cincuenta»

F: «Se ha obtenido una suma que es múltiplo de quince»

G: «Se ha obtenido una suma que es múltiplo de veinte»

H: «Se ha obtenido una suma que es un número par o impar»

P: «Se ha obtenido una suma que es un número primo menor que once»

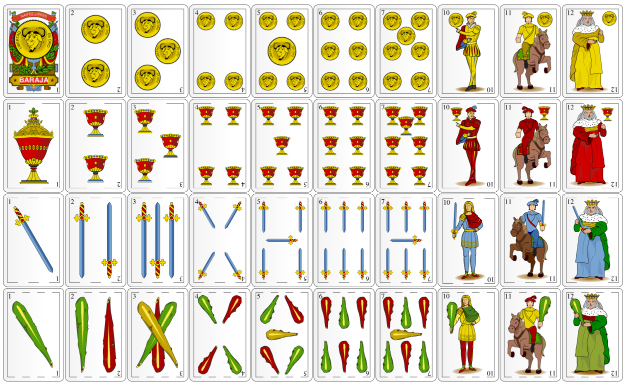
Q: «Se ha obtenido una suma que es un número de una cifra»

La baraja española

La baraja española más habitual, que tomaremos como estándar en este curso, tiene cuarenta naipes (o cartas) distribuidas de la siguiente manera:

- ✱ Hay diez naipes de cada una de cuatro categorías, llamadas **palos**: oros, copas, espadas y bastos.
- ✱ En cada palo los diez naipes están numerados del 1 al 7 y del 10 al 12, con estos nombres adicionales:
  - ■ El número 1 se llama «as».
  - ■ El número 10 se llama «sota».
  - ■ El número 11 se llama «caballo».
  - ■ El número 12 se llama «rey».

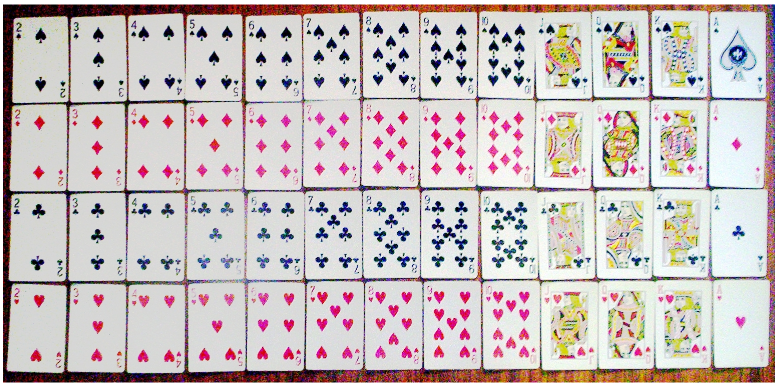
La sota, el caballo y el rey reciben el nombre de «figuras».



La baraja francesa

La baraja francesa más habitual, que tomaremos como estándar en este curso, tiene cincuenta y dos naipes (o cartas) distribuidas de la siguiente manera:

- ✱ Hay trece naipes de cada una de cuatro categorías, llamadas **palos**: picas (♠), diamantes (♦), tréboles (♣) y corazones (♥). Las picas y los tréboles son negros; los diamantes y los corazones son rojos.
- ✱ En cada palo hay nueve naipes numerados del 2 al 10 y otras cuatro con nombres específicos:
  - ■ La carta «A» se llama «as».
  - ■ La carta «J» se llama «sota».
  - ■ La carta «Q» se llama «reina».
  - ■ La carta «K» se llama «rey».



Ejemplo

Enunciado

De una baraja española de cuarenta naipes se elige al azar una carta. Se pide:

a) Describir el espacio muestral (E) usando una notación simple.

b) Usando la notación del apartado anterior, describir los siguientes sucesos:

A: «Se ha obtenido una copa o una espada»

D: «Se ha obtenido un basto o un as»

F: «Se ha obtenido una figura»

G: «Se ha obtenido un cuatro»

H: «Se ha obtenido un oro, pero no es el rey»

J: «Se ha obtenido un as, pero no es el de oros»

K: «Se ha obtenido una pica»

Resolución

Preparamos esta notación para describir los sucesos elementales: una letra para el palo de la carta (O: oro, C: copa, E: espada, B: basto), un guion y el número de la carta (de 1 a 7 y de 10 a 12); por ejemplo, el suceso elemental «C-10» significa «se ha obtenido la sota de copas».

a) Es posible escribir los cuarenta sucesos elementales, pero pensamos que usar puntos suspensivos es perfectamente explicativo.

E={O-1,...O-12,C-1,...,C-12,E-1,...,E-12,B-1,...,B-12}

b) Hay que examinar cuidadosamente qué sucesos elementales forman parte de cada uno de los sucesos. En algunos casos que están muy claros, también es posible utilizar puntos suspensivos; lo importante es que no haya dudas en la interpretación de lo que significan los puntos suspensivos.

A={C-1,...,C-12,E-1,...,E-12}

D={B-1,B-2,B-3,B-4,B-5,B-6,B-7,B-8,B-9,B-10,B-11,B-12,O-1,C-1,E-1}

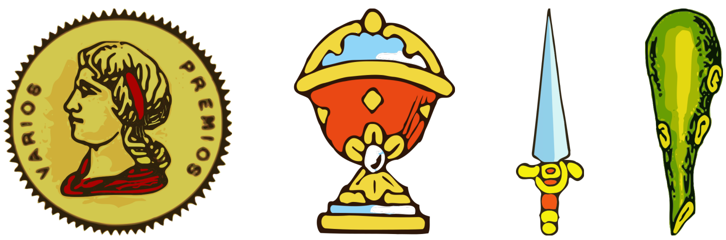
F={O-10,O-11,O-12,C-10,C-11,C-12,E-10,E-11,E-12,B-10,B-11,B-12}

G={O-4,C-4,E-4,B-4}

H={O-1,O-2,O-3,O-4,O-5,O-6,O-7,O-8,O-9,O-10,O-11}

J={C-1,E-1,B-1}

K=∅. Nota: es el suceso imposible.



Ejemplo

Enunciado

De una baraja francesa de cincuenta y dos naipes se elige al azar una carta. Se pide:

a) Describir el espacio muestral (E) usando una notación simple.

b) Usando la notación del apartado anterior, describir los siguientes sucesos:

A: «Se ha obtenido una pica o un trébol»

D: «Se ha obtenido un corazón o un as»

F: «Se ha obtenido un número menor que 4»

G: «Se ha obtenido un número menor o igual que 4»

H: «Se ha obtenido un diamante, pero no es la reina»

J: «Se ha obtenido un as, pero no es el de corazones»

K: «Se ha obtenido una copa»

Resolución

Preparamos esta notación para describir los sucesos elementales: una letra para el palo de la carta (P: pica, D: diamante, T: trébol, C: corazón), un guion y el número o símbolo de la carta (de 2 a 10 y A, J, Q o K); ejemplo: el suceso elemental «C-K» significa «se ha obtenido el rey de corazones».

a) Es posible escribir los cincuenta y dos sucesos elementales, pero pensamos que usar puntos suspensivos es perfectamente explicativo.

E={P-2,...P-10,P-A,P-J,P-Q,P-K,D-2,...D-10,D-A,D-J,D-Q,D-K,
T-2,...T-10,T-A,T-J,T-Q,T-K,C-2,...C-10,C-A,C-J,C-Q,C-K}

b) Hay que examinar cuidadosamente qué sucesos elementales forman parte de cada uno de los sucesos. En algunos casos que están muy claros, también es posible utilizar puntos suspensivos; lo importante es que no haya dudas en la interpretación de lo que significan los puntos suspensivos.

A={P-2,...P-10,P-A,P-J,P-Q,P-K,T-2,...T-10,T-A,T-J,T-Q,T-K}

D={C-2,...C-10,C-A,C-J,C-Q,C-K,P-A,D-A,T-A}

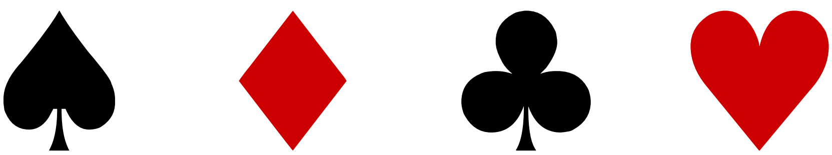
F={P-2,P-3,D-2,D-3,T-2,T-3,C-2,C-3}

G={P-2,P-3,P-4,D-2,D-3,D-4,T-2,T-3,T-4,C-2,C-3,C-4}

H={D-2,D-3,D-4,D-5,D-6,D-7,D-8,D-9,D-10,D-A,D-J,D-K}

J={P-A,D-A,T-A}

K=∅. Nota: es el suceso imposible.



Enunciados

① De una baraja española de cuarenta naipes se extrae al azar una carta y se dice cuál es. Se pide:

a) Describir el espacio muestral (E) usando una notación simple.

b) Usando la notación del apartado anterior, describir los siguientes sucesos:

C: «Se ha obtenido un caballo o una copa»

D: «Se ha obtenido un rey y una espada»

F: «No se ha obtenido ninguna figura»

G: «Se ha obtenido una carta con el número trece»

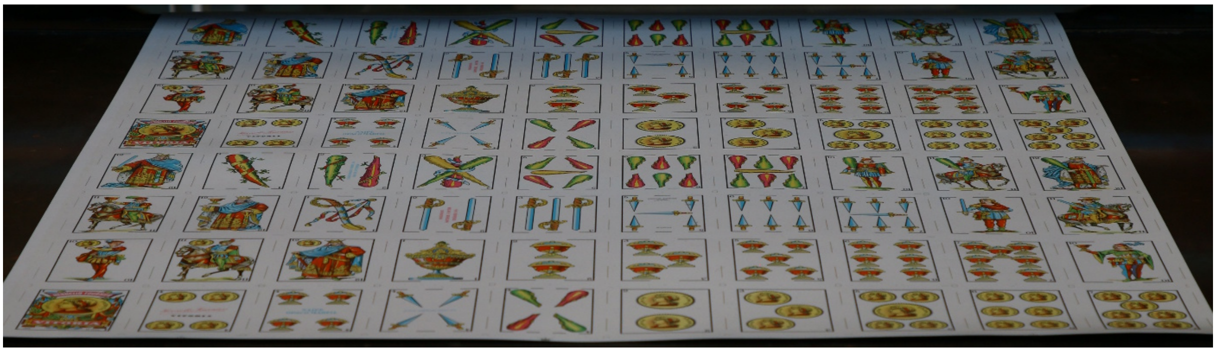
H: «Se obtenido un as o una sota»

K: «Se ha obtenido un rey»

L: «Se ha obtenido una figura de oros»

M: «No se ha obtenido ni un oro, ni una copa, ni un as ni una figura»

N: «Se ha obtenido un número natural»



② De una baraja francesa de cincuenta y dos naipes se extrae al azar una carta y se dice cuál es. Se pide:

a) Describir el espacio muestral (E) usando una notación simple.

b) Usando la notación del apartado anterior, describir los siguientes sucesos:

C: «Se ha obtenido un diamante con el número tres o el cuatro»

D: «Se ha obtenido un corazón con el número cinco y el seis»

F: «Se ha obtenido un as o una sota»

G: «Se ha obtenido el rey de tréboles o la reina de corazones»

H: «Se ha obtenido una pica o un as»

K: «Se ha obtenido un rey»

L: «Se ha obtenido una reina o el as de tréboles»

M: «Se ha obtenido un rey o una reina, pero ningún trébol»

N: «Se ha obtenido un as, un dos o un tres o un diamante»

Repetición de una experiencia aleatoria

Dada una experiencia aleatoria, podemos repetirla un número determinado de veces y contar cuántas veces se verifica algún suceso. Este proceso nos acercará a la idea intuitiva de probabilidad de un suceso.

Ejemplos

Comenzamos repitiendo algunas experiencias aleatorias y mostrando los resultados obtenidos en cada repetición, que son, tal como hemos definido, sucesos elementales del experimento aleatorio:

Ejemplo 1

Se lanza una moneda al aire y se dice si ha salido cara (expresado con «C») o cruz (expresado con «X»). Repetimos el experimento aleatorio cuarenta veces, con este resultado:

C	C	C	X	X	C	X	C	C	X	C	X	X	C	C	X	C	C	X	C	X	C	X	C	X	C	X	C	C	C	X	C	X	X	C	X	X	C	C	C

Ejemplo 2

Se lanza un dado de seis caras (hexaedro) numeradas del 1 al 6 sobre una superficie plana y se dice el número que ha salido. Repetimos el experimento aleatorio sesenta veces, con este resultado:

4	2	4	2	4	5	2	2	4	3	5	2	4	6	4	4	6	1	5	3	5	6	3	3	4	3	3	4	3	2
5	4	6	2	6	3	4	1	5	2	6	4	2	3	2	6	3	3	6	4	3	6	4	1	2	1	4	2	1	1

Ejemplo 3

Se lanzan dos monedas al aire y se dice el número de caras que han salido. Repetimos el experimento aleatorio cuarenta veces, con este resultado:

0	0	1	1	1	0	1	1	2	2	2	1	1	0	1	1	0	2	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	2	1	1	0	0	1	1

Ejemplo 4

Desde 1951 hasta 2000 se llevaron a cabo en España cincuenta sorteos extraordinarios de Navidad de la lotería nacional, con este resultado para el primer premio:

02704	25766	03270	53584	50580	15640	53414	33704	36600	02365
24964	00675	19936	20426	49873	48677	43758	57150	59536	19381
23238	42435	34739	12176	47107	49764	34571	15640	40286	60076
23786	21515	53288	50076	63369	03772	20064	21583	61714	32522
47996	31466	47884	49595	45495	56169	43728	21856	65379	49740

Preguntas para que pienses

① Si repitieras la experiencia aleatoria del ejemplo (1) mil veces, ¿cuántas veces, aproximadamente, esperarías obtener cara?

② Si repitieras la experiencia aleatoria del ejemplo (2) 60 000 veces, ¿cuántas veces, aproximadamente, esperarías obtener el número 5?

③ Si repitieras la experiencia aleatoria del ejemplo (3) mil veces, ¿cuántas veces, aproximadamente, esperarías obtener dos caras?

④ Si jugaras un solo número en un sorteo como el del ejemplo (4), ¿crees que sería fácil o difícil que te tocara el primer premio?

Frecuencias absoluta y relativa de un suceso

Suponemos que repetimos varias veces una experiencia aleatoria y consideramos un suceso concreto.

* **Frecuencia absoluta** del suceso es el número de veces que se ha verificado.
* **Frecuencia relativa** del suceso es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se ha repetido la experiencia.

Expresión simbólica

Suponemos que repetimos n veces una determinada experiencia aleatoria. Consideramos el suceso S y contamos que se ha verificado k veces.

* La frecuencia absoluta del suceso S es k.
  * Si llamamos F(S) a la frecuencia absoluta de S, tenemos:

$$\boxed{\mathrm{F(S)} = k}$$

* La frecuencia relativa del suceso S es $k{:}n$.
  * Si llamamos f(S) a la frecuencia relativa de S, tenemos:

$$\boxed{\mathrm{f(S)} = k : n}$$

Ejemplo

Enunciado. Una urna contiene tres bolas verdes (numeradas del 1 al 3), cuatro bolas azules (numeradas del 1 al 4) y cinco bolas rojas (numeradas del 1 al 5), todas del mismo tamaño y material. Es decir: ❶❷❸❶❷❸❹❶❷❸❹❺. Consideramos la experiencia aleatoria «se elige una bola al azar y se dice su color y su número». Repetimos la experiencia cuarenta veces con este resultado:

❶	❷	❸	❸	❹	❸	❶	❶	❶	❸	❺	❶	❺	❶	❸	❶	❷	❺	❶	❶	❸	❺	❶	❶	❹	❶	❷	❶	❹	❸	❶	❹	❷	❸	❺	❸	❹	❶	❺	❷
V1	R2	A3	A3	A4	R3	A1	V1	R1	R3	R5	V1	R5	A1	A3	R1	V2	R5	R1	A1	R3	R5	R1	A1	A4	A1	R2	A1	A1	V3	V1	A4	R2	R3	R5	R3	A4	V1	R3	R2

Se consideran los siguientes sucesos:

* S: «se ha obtenido una bola verde o un número mayor que 3»
* T: «se ha obtenido una bola con un número primo que no es roja»

Calcula la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de los dos sucesos.

Resolución

Señalamos con una flecha (⬆) las veces que se ha verificado el suceso S:

❶	❷	❸	❸	❹	❸	❶	❶	❶	❸	❺	❶	❺	❶	❸	❶	❷	❺	❶	❶	❸	❺	❶	❶	❹	❶	❷	❶	❹	❸	❶	❹	❷	❸	❺	❸	❹	❶	❺	❷	40
V1	R2	A3	A3	A4	R3	A1	V1	R1	R3	R5	V1	R5	A1	A3	R1	V2	R5	R1	A1	R3	R5	R1	A1	A4	A1	R2	A1	A1	V3	V1	A4	R2	R3	R5	R3	A4	V1	R3	R2	
⬆				⬆			⬆			⬆	⬆	⬆				⬆	⬆				⬆			⬆				⬆	⬆	⬆	⬆			⬆		⬆	⬆	⬆		18

Señalamos con una flecha (⬆) las veces que se ha verificado el suceso T:

❶	❷	❸	❸	❹	❸	❶	❶	❶	❸	❺	❶	❺	❶	❸	❶	❷	❺	❶	❶	❸	❺	❶	❶	❹	❶	❷	❶	❹	❸	❶	❹	❷	❸	❺	❸	❹	❶	❺	❷	40
V1	R2	A3	A3	A4	R3	A1	V1	R1	R3	R5	V1	R5	A1	A3	R1	V2	R5	R1	A1	R3	R5	R1	A1	A4	A1	R2	A1	A1	V3	V1	A4	R2	R3	R5	R3	A4	V1	R3	R2	
		⬆	⬆											⬆		⬆													⬆											5

Frecuencias absolutas: F(S) = 18, F(T) = 5

Frecuencias relativas: f(S) = 18 : 40 = 0,45, f(T) = 5 : 40 = 0,125

Solución: F(S) = 18; f(S) = 0,45; F(T) = 5; f(T) = 0,125

Enunciados

① Una urna contiene cinco bolas verdes (numeradas del 3 al 7), tres bolas azules (numeradas del 4 al 6) y cuatro bolas rojas (numeradas del 5 al 8), todas del mismo tamaño y material. Es decir: ❸❹❺❻❼❹❺❻❺❻❼❽. Consideramos la experiencia aleatoria «se elige una bola al azar y se dice su color y su número». Repetimos la experiencia veinticinco veces con este resultado:

❻	❼	❺	❻	❺	❼	❼	❺	❺	❹	❻	❸	❼	❼	❻	❼	❺	❹	❺	❺	❺	❼	❹	❺	❻
A6	R7	R5	V6	V5	V7	R7	A5	R5	V4	A6	V3	V7	V7	A6	V7	R5	V4	R5	A5	V5	V7	V4	R5	A6

Se consideran los siguientes sucesos:

- S: «se ha obtenido una bola roja o un número 6»
- T: «se ha obtenido número menor que 6 en una bola que no es verde»

Calcula la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de los dos sucesos.

② Consideramos la experiencia aleatoria «se lanza a una superficie plana un dado de ocho caras (octaedro) numeradas del 1 al 8 y se dice el número obtenido». Repetimos la experiencia cuarenta veces con este resultado:

1	4	6	6	3	1	8	2	7	5	4	1	4	3	6	3	4	5	5	2
6	2	3	7	3	3	6	8	6	4	2	3	3	4	6	4	4	5	1	8

Se consideran los siguientes sucesos:

- P: «se ha obtenido un número par»
- I: «se ha obtenido un número impar»

Calcula la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de los dos sucesos.

Suma las dos frecuencias absolutas.

③ Consideramos la experiencia aleatoria «se lanzan sobre una mesa tres monedas iguales e indistinguibles y se dice cuántas monedas han caído con la cara hacia arriba». Repetimos la experiencia cincuenta veces con este resultado:

2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	0	1	1	0	1	2	0	0	1	2	1	2	2	2
1	0	2	1	2	3	2	0	3	2	0	2	1	1	2	1	3	3	1	0	1	2	2	2	1

Se consideran los siguientes sucesos:

- M: «se han obtenido menos de dos caras»
- N: «se ha obtenido alguna cara»
- U: «se ha obtenido exactamente una cara»

Calcula la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de los tres sucesos.

Calcula $F(M)+F(N)-F(U)$.

④ Consideramos la experiencia aleatoria «se lanza a una superficie plana un dado de seis caras (hexaedro) numeradas del 1 al 6 y se dice el número obtenido». Repetimos la experiencia veinte veces con este resultado:

4	6	6	3	3	3	4	5	6	2	1	2	5	1	2	6	4	2	4	5

Se consideran los sucesos A: «se ha obtenido un número negativo» y B: «se ha obtenido un número natural». Calcula la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de los dos sucesos.

Propiedades de las frecuencias de un suceso

* Las frecuencias de un suceso tienen bastantes propiedades. En este nivel solo señalaremos las más sencillas, pero más adelante verás más.
* Las propiedades de las frecuencias absolutas son evidentes, basta que te pares a pensarlas un poco.
* Las propiedades de las frecuencias relativas se obtienen dividiendo las propiedades de las frecuencias absolutas entre el número de veces que se repite la experiencia aleatoria.

Tres propiedades de las frecuencias de un suceso

1a. La frecuencia absoluta de cualquier suceso siempre es un número que está entre 0 y el número de veces que se repita la experiencia aleatoria, ambos incluidos (algunas veces se verifica y otras veces no).

1b. La frecuencia relativa de cualquier suceso siempre es un número que está entre 0 y 1, ambos incluidos.

2a. La frecuencia absoluta del suceso imposible es 0 (no se verifica nunca).

2b. La frecuencia relativa del suceso imposible es 0.

3a. La frecuencia absoluta del suceso seguro es el número de veces que se repita la experiencia aleatoria (se verifica siempre).

3b. La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.

Expresión simbólica de las tres propiedades

Consideramos una experiencia aleatoria con espacio muestral E. Suponemos que la repetimos n veces. Consideramos un suceso cualquiera S.

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1. Un suceso cualquiera	$0 \leqslant \mathrm{F(S)} \leqslant n$	$0 \leqslant \mathrm{f(S)} \leqslant 1$
2. Suceso imposible	$\mathrm{F}(\varnothing) = 0$	$\mathrm{f}(\varnothing) = 0$
3. Suceso seguro	$\mathrm{F(E)} = n$	$\mathrm{f(E)} = 1$

Reflexiones sobre la frecuencia relativa de un suceso

Como utilizaremos la frecuencia relativa de un suceso como trampolín mental para saltar a la probabilidad de un suceso, nos detenemos un momento a considerar qué está expresando la frecuencia relativa:

* Si un suceso ocurre pocas veces, su frecuencia relativa será un número pequeño, llegando a ser 0 cuando el suceso no ocurre nunca.
* Si un suceso ocurre muchas veces, su frecuencia relativa será un número grande, llegando a ser 1 cuando el suceso ocurre siempre.

Conocer la frecuencia relativa de un suceso permite hacerse una idea de cuán a menudo se verifica el suceso.

Frecuencia relativa como porcentaje

Como las frecuencias relativas son números entre 0 y 1, es muy habitual expresarlas como porcentaje.

Ejemplo: si un suceso tiene frecuencia 0,35, sabemos que se ha verificado el 35 % de las veces que se ha repetido la experiencia aleatoria.

Probabilidad de un suceso

- ✱ La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1 (ambos incluidos) que expresa la confianza que tenemos en que el suceso se verifique.
- ✱ La probabilidad 0 corresponde al suceso que sabemos que nunca se verifica.
- ✱ La probabilidad 1 corresponde al suceso que sabemos que siempre se verifica.

Expresión simbólica de la probabilidad

- ✱ Se suele denominar la probabilidad de un suceso con la letra «p» minúscula. Así, escribiremos la probabilidad del suceso S como «p(S)».
- ✱ Consideramos una experiencia aleatoria con espacio muestral E y un suceso cualquiera S. Entonces, se verifican estas tres propiedades, por definición:
  - (1) $0 \leqslant p(S) \leqslant 1$
  - (2) $p(\varnothing) = 0$
  - (3) $p(E) = 1$

Como ves, las tres propiedades están inspiradas en las propiedades correspondientes de las frecuencias relativas de un suceso.

Probabilidad como porcentaje

Como las probabilidades son números entre 0 y 1, es muy habitual expresarlas como porcentaje.

Ejemplo: si un suceso tiene probabilidad 0,35, confiamos en que se verificará el 35 % de las veces que se repita la experiencia aleatoria.

Probabilidad y realidad

El cálculo de probabilidades intenta calcular la probabilidad de cualquier suceso **antes** de que se realice la experiencia aleatoria. Para poder llegar siquiera a intentarlo, es imprescindible que tanto la experiencia como el suceso estén perfectamente determinados, bien explicados.

Dejando de lado por un momento los dos casos extremos de probabilidad 0 (el suceso no se verifica nunca) y 1 (el suceso se verifica siempre), debe quedar claro que aunque la probabilidad de un suceso sea muy pequeña (próxima a 0), se puede verificar (incluso varias veces seguidas) y que aunque la probabilidad de un suceso sea muy grande (próxima a 1), puede no verificarse (incluso varias veces seguidas).

Ejemplo 1

En el sorteo extraordinario de Navidad de la lotería nacional de España se venden números desde el 00000 hasta el 99999. Si jugamos un solo número, la probabilidad de que nos toque el primer premio es muy pequeña (exactamente 0,000001), pero es posible que nos toque (por eso juega mucha gente a la lotería).

Ejemplo 2

Consideramos la experiencia aleatoria «se lanzan sobre una mesa doce monedas iguales e indistinguibles y se dice cuántas monedas han caído con la cara hacia arriba» y el suceso «se ha obtenido al menos una cara». La probabilidad de que el suceso se verifique es muy grande (un poco más de 0,99975), pero es posible que no se verifique cuando lancemos efectivamente las doce monedas (es decir, que salgan cruz las doce).

Relación en la realidad entre frecuencia relativa y probabilidad

Hemos explicado que la definición de probabilidad está inspirada en las propiedades de la frecuencia relativa de un suceso. Pero hay una relación mucho más profunda entre ellas; para verla, vamos a simular usando programas de ordenador que realizamos tres experiencias aleatorias diferentes un gran número de veces.

Lanzar una moneda

La experiencia aleatoria es lanzar una moneda y decir si ha salido cara o cruz. El espacio muestral es E={Cara,Cruz}. Repetimos la experiencia aleatoria distintos números de veces (cada vez más veces) y anotamos las frecuencias relativas de cada suceso elemental en cada tanda de repeticiones:

	1000	**10 000**	**100 000**	**1 000 000**	**10 000 000**	**100 000 000**
Cara	0,492	0,4935	0,4991	0,500106	0,4997354	0,50003403
Cruz	0,508	0,5060	0,5009	0,499894	0,5002646	0,49996597

Resulta muy claro que el valor al que se van acercando las frecuencias relativas de los dos sucesos elementales es **0,5**.

Lanzar un dado

La experiencia aleatoria es lanzar un dado de cuatro caras (tetraedro) numeradas de 1 a 4 y decir qué número ha quedado en la base (los tetraedros se apoyan en la base y dejan un vértice arriba). El espacio muestral es E={1,2,3,4}.

	1000	**10 000**	**100 000**	**1 000 000**	**10 000 000**	**100 000 000**
1	0,251	0,2444	0,25044	0,249444	0,2500276	0,25002450
2	0,264	0,2489	0,24935	0,249139	0,2499385	0,25010837
3	0,234	0,2547	0,24991	0,250783	0,2497813	0,24990058
4	0,251	0,2520	0,25030	0,250634	0,2502526	0,24996655

Resulta muy claro que el valor al que se van acercando las frecuencias relativas de los cuatro sucesos elementales es **0,25**.

Lanzar dos monedas

La experiencia aleatoria es lanzar dos monedas y decir cuántas caras han salido. El espacio muestral es E={0,1,2}.

	1000	**10 000**	**100 000**	**1 000 000**	**10 000 000**	**100 000 000**
0	0,252	0,2565	0,24894	0,250779	0,2501028	0,25006102
1	0,503	0,4984	0,50257	0,499433	0,4996762	0,49991267
2	0,245	0,2451	0,24849	0,249788	0,2502210	0,25002631

Resulta muy claro que los valores a los que se van acercando las frecuencias relativas son **0,25** para dos sucesos elementales y **0,5** para el tercero.

Ley de los grandes números

Esta ley, explicada a este nivel de matemáticas, establece que las frecuencias relativas de los sucesos se acercan cada vez más a las probabilidades de los sucesos, conforme el número de repeticiones de la experiencia aleatoria va siendo cada vez mayor. Queda por especificar qué significa matemáticamente «acercarse».

Espacio muestral equiprobable

Se dice que el espacio muestral asociado a una experiencia aleatoria es equiprobable cuando todos sus sucesos elementales tienen la misma probabilidad.

Ejemplos

① La experiencia aleatoria es lanzar una moneda y decir si ha salido cara o cruz. El espacio muestral es E={Cara,Cruz}.

Si la moneda está correctamente construida, la probabilidad de que salga cara o cruz es la misma. Si repitiéramos la experiencia 1000 veces y obtuviéramos 300 caras y 700 cruces, enseguida pensaríamos que la moneda no es válida para esta experiencia aleatoria.

Concluimos que este espacio muestral es equiprobable.

② La experiencia aleatoria es lanzar un dado de seis caras (hexaédro) numeradas de 1 a 6 y decir qué número ha quedado en la parte superior. El espacio muestral es E={1,2,3,4,5,6}.

Estos dados son los más habituales en los juegos que requieren dados. En los casinos se puede apostar grandes cantidades de dinero a distintas combinaciones de los puntos obtenidos al lanzar dos dados. Por eso, es muy importante que los dados estén bien construidos. Está demostrado que en los dados más baratos algunas caras salen más a menudo que otras. Si unos dados han sido fabricados o artificialmente alterados para ayudar a algún jugador, se dice que están «cargados».

Concluimos que este espacio muestral es equiprobable.

③ La experiencia aleatoria es lanzar dos monedas iguales y decir cuántas caras han salido. El espacio muestral es E={0,1,2}.

Razonemos: para que el suceso elemental «0» se verifique, las dos monedas deben salir cruz, es la única posibilidad; análogamente, para que el suceso elemental «2» se verifique, las dos monedas deben salir cara, también es la única posibilidad; sin embargo, para que el suceso elemental «1» se verifique debe salir una moneda cara y la otra cruz, lo que puede ocurrir de dos maneras distintas, según en qué moneda salga cada cosa, así que hay dos posibilidades.

Como hay más posibilidades de que se verifique el suceso «1» de que se verifique cualquiera de los otros dos, su probabilidad es mayor.

Puedes pensar que como las dos monedas son iguales, no podemos distinguir las dos posibilidades de obtener exactamente una cara, pero aunque nosotros no podamos distinguir las dos monedas entre sí, la realidad es que son piezas de metal diferentes (podemos decir que nosotros no las distinguimos, pero ellas sí, igual que les pasa a dos hermanos o hermanas gemelos). Esta distinción será muy importante para resolver algunos problemas, así que te proponemos que reflexiones sobre ella.

Concluimos que este espacio muestral no es equiprobable.

Cálculo de probabilidades en espacios muestrales equiprobables

El caso más sencillo para calcular la probabilidad de un suceso aparece cuando el espacio muestral asociado a la experiencia aleatoria es equiprobable. Verás que el método parece simplemente de sentido común; sin embargo, se podría demostrar rigurosamente en niveles superiores usando definiciones más precisas de probabilidad y propiedades que aún no hemos visto.

Pierre-Simon Laplace

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) fue un astrónomo, físico y matemático francés.

Ley de Laplace

Consideramos una experiencia aleatoria cuyo espacio muestral asociado sea equiprobable y conste de n sucesos elementales. Suponemos que un suceso S consta de k sucesos elementales; entonces, la probabilidad de S es

$$\boxed{\mathrm{p(S)} = \frac{k}{n}}$$

Se suele enunciar como «casos favorables entre casos posibles».

Podemos considerar n como el número total de posibilidades de resultado del experimento aleatorio y k como el número de posibilidades de que el suceso S se verifique. Observa que la palabra «posibilidades» se usa en plural, pero la palabra «probabilidad» se usa en singular. Es decir: cuantas más posibilidades de verificación tiene un suceso, mayor es su probabilidad (es incorrecto decir «tiene más probabilidades» porque tiene una sola probabilidad, que puede ser mayor o menor).

Explicación intuitiva

Como cada suceso elemental tiene la misma probabilidad, esperamos que cada n veces que repitamos la experiencia aleatoria, el suceso S se verificará k veces, luego su frecuencia relativa será k:n.

Ejemplo

Enunciado. Consideramos la experiencia aleatoria «se lanza a una superficie plana un dado de doce caras (dodecaedro) numeradas del 1 al 12 y se dice el número obtenido». Calcula con dos cifras significativas la probabilidad del suceso S «se ha obtenido un número primo».

Resolución

El espacio muestral asociado es E={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

Como suponemos que el dado está bien construido, el espacio muestral es equiprobable y se puede aplicar la ley de Laplace.

El número de sucesos elementales del espacio muestral es 12 (n=12).

Determinamos los sucesos elementales del suceso S: S={2,3,5,7,11}

El suceso S está compuesto por 5 sucesos elementales (k=5).

La probabilidad de S es: $\mathrm{p(S)} = \frac{5}{12} = 0{,}42$

Calculadora: 5 ÷ 1 2 = ⇨ 0.416666666

Solución: p(S) = 0,42

Enunciados

① Consideramos la experiencia aleatoria «se lanza a una superficie plana un dado de veinte caras (icosaedro) numeradas del 1 al 20 y se dice el número obtenido». Calcula la probabilidad del suceso S «se ha obtenido un número primo».

② Consideramos la experiencia aleatoria «se lanza una moneda y se dice si ha salido cara o cruz». Calcula la probabilidad del suceso S «se ha obtenido cara».

③ Una urna contiene tres bolas verdes (numeradas del 1 al 3), cuatro bolas azules (numeradas del 1 al 4) y seis bolas rojas (numeradas del 1 al 6), todas del mismo tamaño y material. Consideramos la experiencia aleatoria «se elige al azar una bola de la urna y se dice su color y su número». Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

R: «se ha obtenido una bola roja»

C: «se ha obtenido un número 4»

④ Usando una baraja española de cuarenta naipes, consideramos la experiencia aleatoria «tomamos al azar un naipe y decimos cuál es». Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

B: «se ha obtenido un basto»

F: «se ha obtenido una figura o un oro»

⑤ Usando una baraja francesa de cincuenta y dos naipes, consideramos la experiencia aleatoria «tomamos al azar un naipe y decimos cuál es». Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

P: «se ha obtenido una pica»

S: «se ha obtenido un diamante que no es el as»

T: «se ha obtenido un corazón o una sota»

K: «se ha obtenido un rey»

⑥ Un establecimiento abre de lunes a viernes y cierra los sábados y los domingos. Una persona se acerca al establecimiento en horario comercial, pero sin percatarse de qué día de la semana es. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que el establecimiento esté abierto.

⑦ Una creencia popular asegura que en el hemisferio norte los meses más indicados para capturar y consumir marisco son los que llevan una erre en su nombre (en español o en inglés). Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que si se elige un mes al azar, su nombre contenga una erre.

⑧ Recordamos los apellidos de varias figuras punteras en el deporte del tenis: Djokovic, Nadal, Federer, Court, Williams, Graft, Evert. Si elegimos al azar uno de los apellidos, calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que tenga en todas sus sílabas la misma vocal.

Ley de Laplace con espacios muestrales grandes

La sencillez de la ley de Laplace puede hacer pensar que los problemas de cálculo de probabilidades que se resuelven con ella son muy sencillos, pero nada más lejos de la realidad. En muchos de estos problemas la verdadera dificultad estriba en averiguar cuántos casos tiene el espacio muestral y cúantos tiene el suceso en cuestión. En el nivel 4 estudiaremos bajo el epígrafe de «combinatoria» varias técnicas avanzadas para realizar este estudio, pero de momento afrontaremos algunos problemas que se pueden atacar con técnicas aritméticas más básicas.

Ejemplo

Enunciado. Una urna contiene 33 bolas negras numeradas del 1 al 33, 47 bolas rojas numeradas del 1 al 47, 46 bolas azules numeradas del 1 al 46 y 38 bolas verdes numeradas del 1 al 38. Las bolas son idénticas en todo salvo en el color y el número. Consideramos la experiencia aleatoria «se extrae al azar una bola de la urna y se dice su color y su número». Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de los siguientes sucesos:

A: «se ha obtenido una bola negra o roja»

B: «se ha obtenido un número par en una bola que no es verde»

Resolución

(En problemas como este no es necesario escribir explícitamente el espacio muestral y los sucesos elementales de cada suceso, aunque se puede hacer, sino que es suficiente calcular razonadamente los distintos números de elementos.)

El espacio muestral es equiprobable porque las bolas son idénticas y se extrae una al azar. Por lo tanto, se puede aplicar la ley de Laplace.

El número de casos del espacio muestral es la suma del número de bolas de cada color: $33+47+46+38=164$.

El número de casos del suceso A es la suma del número de bolas negras y rojas:
$33+47=80$

La probabilidad de A es: p(A) = $\frac{80}{164}$ = 0,49

Calculadora: 8 0 ÷ 1 6 4 = ⇰ 0.487804878

El número de casos del suceso B es la suma del número de bolas negras, rojas o azules que llevan un número par de cada color:

$$\frac{33-1}{2}+\frac{47-1}{2}+\frac{46}{2}=16+23+23=62$$

La probabilidad de B es: p(B) = $\frac{62}{164}$ = 0,38

Calculadora: 6 2 ÷ 1 6 4 = ⇰ 0.37804878

Solución: p(A) = 0,49 ; p(B) = 0,38

Enunciados

① Una urna contiene 71 bolas negras numeradas del 1 al 71, 88 bolas rojas numeradas del 1 al 88, 79 bolas azules numeradas del 1 al 79 y 84 bolas verdes numeradas del 1 al 84. Las bolas son idénticas en todo salvo en el color y el número. Consideramos la experiencia aleatoria «se extrae al azar una bola de la urna y se dice su color y su número». Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de los siguientes sucesos:

A: «se ha obtenido una bola azul o verde»

B: «se ha obtenido un número impar en una bola que no es roja»

T: «se ha obtenido un número múltiplo de tres»

② En un sorteo de lotería el organizador pone a la venta números de cinco cifras, aunque empiecen por cero, desde el 00000 hasta el 99999. Calcula la probabilidad de obtener el primer premio del sorteo si una persona ha comprado todos los números que comienzan por dos ceros y terminan por un cero.

③ En el Abierto Británico de Golf de 2022 en categoría masculina acabaron las cuatro rondas de la competición 83 participantes, con este resultado (en golf gana el que menos golpes da):

268	269	270	274	274	275	275	276	276	276	277	277	277	277	278	278	278	278	278	278	279
279	279	279	279	279	279	280	280	280	280	280	280	281	281	281	281	281	281	281	281	282
282	282	282	282	283	283	283	283	283	283	284	284	284	284	284	284	284	284	284	285	285
285	285	285	285	286	286	286	286	287	287	288	288	289	289	289	290	290	292	292	296	

Se elige al azar un jugador y se dice el nombre del jugador y el número de golpes que ha necesitado. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que el jugador haya empleado entre 274 y 281 golpes (ambas posibilidades incluidas) en terminar las cuatro rondas.

④ En la fase final de la Copa Mundial de Baloncesto de 2022 en categoría femenina, que se celebró en Australia, participaron doce equipos. Calculamos el total de puntos obtenidos en cada partido y ordenamos los resultados:

104	120	120	123	125	126	126	127	127	130	133	133	133	136	139	140	140	140	143
144	145	145	147	148	149	149	151	153	155	155	156	159	160	165	165	176	180	214

Se elige al azar un partido y se dice la denominación oficial del partido y el total de puntos conseguidos en él. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que en el partido se hayan conseguido más de 145 puntos.

⑤ Se elige al azar un número entre 3 y 16, ambos incluidos. Calcula con seis cifras significativas la probabilidad de que el número sea múltiplo de 5.

⑥ Se elige al azar un número entre 37 y 154, ambos incluidos. Calcula con seis cifras significativas la probabilidad de que el número sea múltiplo de 4.

⑦ Se elige al azar un número entre 129 y 9436, ambos incluidos. Calcula con seis cifras significativas la probabilidad de que el número sea múltiplo de 2 o de 3, pero no sea múltiplo de 7.

Cálculo de probabilidades en espacios muestrales no equiprobables

Muchos problemas interesantes de cálculo de probabilidades se presentan en espacios muestrales que no son equiprobables, pero pueden ser reinterpretados en vista del mecanismo subyacente en la experiencia aleatoria. En esos casos, podemos manejar a la vez el espacio muestral original, donde no es aplicable la ley de Laplace, y un espacio muestral auxiliar en el que sí es aplicable.

Ejemplo

Enunciado

En una urna hay tres bolas rojas, dos bolas azules y dos bolas verdes, indistinguibles en todo salvo en el color. Es decir: ●●●●●●●. Se extrae una bola al azar y se dice su color. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que la bola extraída sea de color rojo.

Comentario

Si piensas un poco en el problema, es casi seguro que se te ocurre inmediatamente esto: «hay siete bolas y tres son rojas; pues la probabilidad es $3/7$ y luego divido».

Tu razonamiento es perfectamente correcto, pero no encaja del todo con lo que hemos estudiado hasta el momento; para empezar, el espacio muestral del problema es {rojo, azul, verde}, tiene tres sucesos elementales que no tienen la misma probabilidad (puesto que hay distinto número de bolas de cada color).

Realmente te has puesto a pensar en el espacio muestral {R1, R2, R3, A1, A2, V1, V2}, que es el que expresa lo que ocurre en la realidad: extraes una de las siete bolas y, aunque tú no las distingas, las bolas sí son diferentes. Este espacio muestral en el que te apoyas, con siete sucesos elementales, sí es equiprobable y puedes aplicar la ley de Laplace. Has reinterpretado el suceso {rojo} como el suceso {R1, R2, R3}, que tiene tres elementos y así has llegado a la probabilidad $3/7$.

Resolución

El espacio muestral es E = {rojo, azul, verde}, que no es equiprobable y por tanto no se puede aplicar la ley de Laplace.

Hay que calcular la probabilidad del suceso S = {rojo}

Utilizamos el espacio muestral auxiliar E_{aux} = {R1, R2, R3, A1, A2, V1, V2}, que es equiprobable y por tanto se puede aplicar la ley de Laplace.

Hay que calcular la probabilidad del suceso S_{aux} = {R1, R2, R3}

La probabilidad de S es: $p(S) = p(S_{aux}) = \frac{3}{7} = 0{,}43$

Calculadora: [3] [÷] [7] [=] ⇨ 0.428571428

Solución: 0,43

Comentarios

- ✱ Es muy probable que te ha parecido una explicación muy larga, rebuscada y complicada para un problema tan sencillo. Estamos de acuerdo; pero el método es óptimo para resolver de un modo sencillo problemas más difíciles, como verás en los siguientes ejemplos del curso, y se ajusta mejor a la teoría.
- ✱ Casi todos los libros de texto resuelven estos problemas usando un espacio muestral auxiliar, pero normalmente no lo dicen explicitamente.

Enunciados

① Se lanzan dos monedas indistinguibles y se dice cuántas caras han salido. Calcula la probabilidad de que se obtenga exactamente una cara.

② Se lanzan dos dados indistinguibles de seis caras (hexaedros) rotuladas con puntos de 1 a 6 (es decir: ⚀⚁⚂⚃⚄⚅) y se dice la suma de los puntos de las dos caras superiores. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que la suma sea mayor o igual a 9.

Resoluciones

① El espacio muestral es E = {0, 1, 2}, que no es equiprobable y por tanto no se puede aplicar la ley de Laplace.

Hay que calcular la probabilidad del suceso S = {1}

Reinterpretamos la experiencia aleatoria como lanzar dos monedas y decir el resultado de cada una de ellas (C: cara, X: cruz), siempre en el mismo orden:

	C	**X**
C	CC	CX
X	XC	XX

⇨

	C	**X**
C	2	1
X	1	0

Utilizamos el espacio muestral auxiliar E_{aux} = {CC, CX, XC, XX}, que es equiprobable y por tanto se puede aplicar la ley de Laplace. Tiene 2·2 = 4 casos.

Hay que calcular la probabilidad del suceso S_{aux} = {CX, XC}. Tiene dos casos.

La probabilidad de S es: $p(S) = p(S_{aux}) = \frac{2}{4} = 0{,}5$.

Solución: 0,5

② El espacio muestral es E = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, que no es equiprobable y por tanto no se puede aplicar la ley de Laplace.

Hay que calcular la probabilidad del suceso S = {9, 10, 11, 12}

Reinterpretamos la experiencia aleatoria como lanzar dos dados y decir el resultado de cada uno de ellos, siempre en el mismo orden:

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	⚀⚀	⚀⚁	⚀⚂	⚀⚃	⚀⚄	⚀⚅
⚁	⚁⚀	⚁⚁	⚁⚂	⚁⚃	⚁⚄	⚁⚅
⚂	⚂⚀	⚂⚁	⚂⚂	⚂⚃	⚂⚄	⚂⚅
⚃	⚃⚀	⚃⚁	⚃⚂	⚃⚃	⚃⚄	⚃⚅
⚄	⚄⚀	⚄⚁	⚄⚂	⚄⚃	⚄⚄	⚄⚅
⚅	⚅⚀	⚅⚁	⚅⚂	⚅⚃	⚅⚄	⚅⚅

⇨

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Utilizamos el espacio muestral auxiliar E_{aux} = {1-1, ..., 6-6}, que es equiprobable y por tanto se puede aplicar la ley de Laplace. Tiene 6·6 = 36 casos.

Hay que calcular la probabilidad del suceso

S_{aux} = {63, 54, 45, 36, 64, 55, 46, 65, 56, 66}. Tiene 10 casos.

La probabilidad de S es: $p(S) = p(S_{aux}) = \frac{10}{36} = 0{,}28$.

Solución: 0,28

Enunciados

① Se lanzan tres monedas indistinguibles y se dice cuántas caras han salido. Calcula la probabilidad de que se obtenga exactamente una cara.

② Se lanzan dos dados indistinguibles de seis caras (hexaedros) rotuladas con puntos de 1 a 6 (es decir: ⚀⚁⚂⚃⚄⚅) y se dice la suma de los puntos de las dos caras superiores. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que la suma sea exactamente 7.

③ Se lanzan dos dados indistinguibles de seis caras (hexaedros) rotuladas con puntos de 1 a 6 (es decir: ⚀⚁⚂⚃⚄⚅) y se dice el mayor número puntos obtenido en cualquiera de las dos caras superiores. Calcula la probabilidad de que el número obtenido sea exactamente 5.

④ Se lanzan tres dados indistinguibles de seis caras (hexaedros) rotuladas con puntos de 1 a 6 (es decir: ⚀⚁⚂⚃⚄⚅) y se dice la suma de los puntos de las tres caras superiores. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que la suma sea menor que 5.

⑤ Se lanzan dos dados indistinguibles de doce caras (dodecaedros) numeradas de 1 a 12 y se dice la suma de los números de las dos caras superiores. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de los siguientes sucesos:

A: «la suma es exactamente 13»

B: «la suma es mayor que 21»

⑥ Se lanzan dos dados indistinguibles de ocho caras (octaedros) numeradas de 1 a 8 y se dice el valor absoluto de la diferencia de los números de las dos caras superiores. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de los siguientes sucesos:

A: «el número obtenido es exactamente 1»

B: «el número obtenido es mayor que 4»

⑦ Se dispone de dos dados de doce caras (dodecaedros). Uno tiene siete caras blancas y cinco caras negras; el otro tiene cinco caras blancas y siete caras negras. Consideramos la siguiente experiencia aleatoria: «lanzamos los dos dados y, sin importar el orden, decimos los dos colores obtenidos». Se pide:

a) Describir el espacio muestral con una notación sencilla.

b) Calcular con dos cifras significativas la probabilidad de que las dos caras sean de distinto color.

⑧ Disponemos de dos urnas iguales y de dieciocho bolas indistinguibles en todo salvo por el color: ocho bolas rojas, cinco bolas verdes y cinco bolas azules. En una de las urnas introducimos cuatro bolas rojas, tres bolas verdes y dos bolas azules. En la otra urna introducimos el resto de las bolas. Consideremos la siguiente experiencia aleatoria: «extraemos al azar una bola de cada urna y, sin importar el orden, decimos los dos colores obtenidos». Se pide:

a) Describir el espacio muestral con una notación sencilla.

b) Calcular con dos cifras significativas la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

Números irracionales

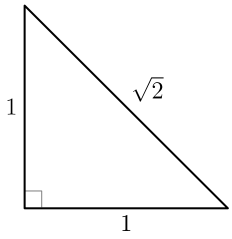
En el nivel 2 vimos la definición de número racional y a partir de ella la de número irracional. Usando esa definición, vimos que podíamos construir fácilmente números irracionales; por ejemplo, estos números son irracionales:

Ejemplo 1: 0,101001000100001...	Ejemplo 2: 0,212112111211112...
Ejemplo 3: 0,1011001110001111...	Ejemplo 4: 0,2522552225552222...

También señalamos que hay algunos números importantes, como el número π, que son irracionales. Ahora es el momento de **demostrar** que hay números muy importantes y utilizados que son irracionales.

La raíz cuadrada de 2

La raíz cuadrada de 2 es un número que les planteó muchos problemas a varios de los mejores matemáticos de la Grecia clásica, como a Pitágoras, porque algunos de ellos pensaban, por una necesidad filosófica de belleza universal, que cualquier número se podía expresar como cociente de dos números enteros. A la derecha puedes ver que si los catetos de un triángulo rectángulo miden la unidad (cualquier unidad), la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ unidades.



La raíz cuadrada de 2 es un número irracional

Vamos a hacer la demostración por reducción al absurdo: supondremos que la raíz cuadrada de 2 es un número racional y llegaremos a una contradicción.

Antes de empezar, nos fijamos en esta propiedad: en la descomposición factorial en factores primos del cuadrado de un número natural, todos los exponentes son pares. Para demostrarlo, basta aplicar las propiedades de las potencias. Por ejemplo: $n = 2250 = 2{\cdot}3^2{\cdot}5^3 \Rightarrow n^2 = (2{\cdot}3^2{\cdot}5^3)^2 = 2^2{\cdot}3^4{\cdot}5^6$

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Entonces, será posible escribirlo como el cociente de dos números naturales: $\sqrt{2} = a{:}b$. Elevando al cuadrado:

$(\sqrt{2})^2 = (a{:}b)^2 \Rightarrow 2 = a^2{:}b^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$. Llamamos $c = a^2 = 2b^2$. La contradicción se deduce de estas dos afirmaciones:

✱ Como $c = a^2$, en la descomposición factorial de c el exponente de 2 es un número par (que podría ser cero).

✱ Como $c = 2b^2$, en la descomposición factorial de c el exponente de 2 es un número impar (al menos es 1).

Generalización de la demostración

La demostración anterior tiene una gran ventaja sobre otras demostraciones: es muy fácil adaptarla a otros casos e incluso generalizarla. Como ejemplo, te damos las pistas para demostrar que $\sqrt[3]{49}$ es un número irracional:

✱ En la descomposición factorial del cubo de un número natural, todos los exponentes son múltiplos de 3.

✱ $\sqrt[3]{49} = a{:}b \Rightarrow (\sqrt[3]{49})^3 = (a{:}b)^3 \Rightarrow 7^2 = a^3{:}b^3 \Rightarrow a^3 = 7^2{\cdot}b^3$; $c = a^3 = 7^2{\cdot}b^3$

✱ Como $c = a^3$, en la descomposición factorial de c el exponente de 7 es un múltiplo de 3 (que podría ser cero).

✱ Como $c = 7^2{\cdot}b^3$, en la descomposición factorial de c el exponente de 7 no es un múltiplo de 3 (al menos es 2).

Operaciones con números racionales e irracionales

Es conveniente que te vayas familiarizando con el uso de números irracionales; para comenzar, vemos algunas propiedades sobre el resultado de operar números raciones e irracionales.

Suma de números racionales e irracionales

- La suma de dos números racionales es un número racional. (Esto ya lo sabíamos desde que aprendimos a sumar fracciones).
  - **Ejemplo 1**: el número $2{,}45+5{,}\overline{23}$ es un número racional.
- La suma de un número racional y un número irracional es un número irracional. Esto se puede demostrar por reducción al absurdo: llamamos r a un número racional y h a un número irracional. Si $r+h$ fuera racional, entonces $h=(r+h)-r$ también sería racional.
  - **Ejemplo 2**: el número $5+\sqrt{2}$ es un número irracional.
- La suma de dos números irracionales puede ser un número irracional o un número racional, dependiendo de qué números se sumen.
  - **Ejemplo 3**: el número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es un número irracional (pero no es evidente, habría que demostrarlo).
  - **Ejemplo 4**: el número $\sqrt{2}+(5-\sqrt{2})$ es un número racional (el resultado de la operación es 5).

Producto de números racionales e irracionales

- El producto de dos números racionales es un número racional. (Esto ya lo sabíamos desde que aprendimos a multiplicar fracciones).
  - **Ejemplo 5**: el número $2{,}45\cdot 5{,}\overline{23}$ es un número racional.
- El producto de un número racional distinto de cero y un número irracional es un número irracional. Esto se puede demostrar por reducción al absurdo: llamamos r a un número racional y h a un número irracional. Si $r\cdot h$ fuera racional, entonces $h=(r\cdot h):r$ también sería racional.
  - **Ejemplo 6**: el número $5\cdot\sqrt{2}$ es un número irracional.
- El producto de dos números irracionales puede ser un número irracional o un número racional, dependiendo de qué números se multipliquen.
  - **Ejemplo 7**: el número $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ es un número irracional (pero no es evidente, habría que demostrarlo).
  - **Ejemplo 8**: el número $\sqrt{2}\cdot(5:\sqrt{2})$ es un número racional (el resultado de la operación es 5).

Potencia de un número irracional

- Debería estar claro que la potencia de un número irracional puede ser un número racional (en algunos casos).
  - **Ejemplo 9**: el número $(\sqrt{2})^2$ es un número racional (el resultado de la operación es 2, según se sigue de la definición de raíz cuadrada).
- Incluso un número irracional elevado a un número irracional (una operación que aún no hemos definido) puede dar como resultado un número racional.
  - **Ejemplo 10**. Este ejemplo requiere aplicar un teorema que no se estudia en la enseñanza secundaria: el número $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ es irracional (teorema de Gelfond–Schneider) y $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ ¡es 2! (¿por qué crees que es así?).

Números irracionales importantes

Además de la gran cantidad de raíces que son números irracionales, hay muchas situaciones matemáticas y de otras ciencias en las que aparecen números que resultan ser irracionales. Vemos tres de ellos.

El número π

Conoces y utilizas este número desde el nivel 1. No solo aparece en muchas fórmulas geométricas, sino también en fórmulas de física. La demostración de que es un número irracional no se puede estudiar en la enseñanza secundaria.

El número de oro

Este número es conocido, al menos, desde la antiguedad del mundo griego. Aparece también en muchas situaciones de la matemática y del estudio de la naturaleza.

Se utiliza como nombre simbólico del número de oro la letra griega «Φ» (phi mayúscula), en honor del escultor griego Φειδίας (Fidias), que vivió en el siglo V a. e. c.; pero a veces lo verás en algunos textos representado con otras letras griegas, como la «φ» (phi minúscula).

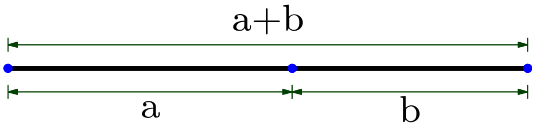
El comienzo de su expresión decimal es $\Phi = 1{,}618\,033\,988\,749\,894\ldots$

Expresión de la proporción áurea

El número de oro se obtiene como el número que expresa la llamada proporción áurea, definida de esta manera: «se divide un segmento en dos partes de manera que el cociente entre la longitud del segmento y la longitud de la parte mayor sea igual que el cociente entre la parte mayor y la parte menor». Es considerada la división de un segmento más armoniosa, por eso se utiliza en arquitectura y en música. A partir de esta expresión, deducimos el valor de Φ:

$$\Phi=\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b} \Rightarrow \Phi=1+\frac{b}{a}=\frac{a}{b} \Rightarrow 1+\frac{1}{\Phi}=\Phi \Rightarrow \Phi+1=\Phi^2 \Rightarrow$$

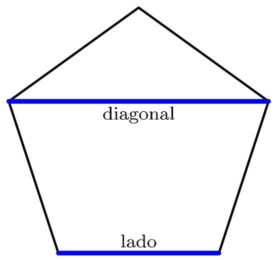
$$\Rightarrow \Phi^2-\Phi-1=0 \Rightarrow \Phi=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$



Como $\Phi>0$, la solución válida es $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, que claramente es irracional.

Cociente entre diagonal y lado del pentágono regular

El número de oro también aparece cuando se divide la longitud de la diagonal de un pentágono regular entre la longitud del lado. La matemática clásica griega se enfrentó al problema (para ellos), de que no se podía expresar esa división como el cociente de dos enteros. Se ha documentado históricamente como la primera vez que aparece un número que no es una razón (división), de ahí el nombre de número «irracional» (no racional).



El número *e*

Este número aparece en numerosos procesos físicos. Su definición en matemáticas se fundamenta en el estudio de la serie de números de la forma $(1+n^{-1})^n$ cuando n es un número natural cada vez mayor. Su nombre se eligió en honor del matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). La demostración de que es un número irracional no se puede estudiar en la enseñanza secundaria.

El comienzo de su expresión decimal es $e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\ldots$

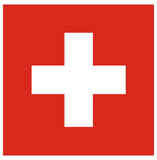
Vexilología

Es el estudio de las banderas. En la descripción de cada bandera aparecen definiciones de colores y el modo de determinar las dimensiones de cada parte.

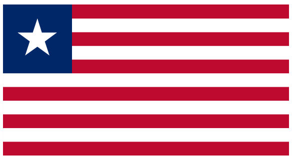
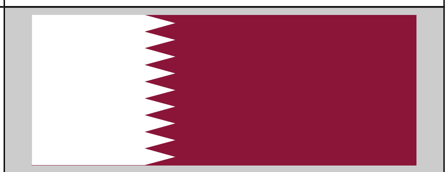
Proporción de una bandera

Cuando se da la proporción de las dos dimensiones de una bandera, lo más común es especificarla con números naturales como **altura:anchura**, pero también se puede expresar como **1:X**, siendo X un número decimal. La proporción más común es la 2:3, usada por el 44 % de los países, seguida por la 1:2 (28 % de los países); pero hay bastante variedad, como puedes ver en los ejemplos.

Ejemplos

País	Suiza	Bélgica	Gabón	Albania	Brasil
Bandera					
Proporción	1:1	13:15 = 1:1,15	3:4 = 1:1,33	5:7 = 1:1,4	7:10 = 1:1,43

País	España	Argentina	Alemania	México
Bandera				
Proporción	2:3 = 1:1,5	5:8 = 1:1,6	3:5 = 1:1,67	4:7 = 1:1,75

País	Liberia	Australia	Catar
Bandera			
Proporción	10:19 = 1:1,9	1:2	11:28 = 1:2,55

La bandera de Togo

Hasta el momento (marzo de 2024), la bandera de Togo (a la derecha) es la única bandera de un país que tiene el número de oro como parte de la descripción de su proporción; efectivamente, la proporción de la bandera de Togo es 1:Φ. Sus cinco bandas horizontales son de la misma altura.

Enunciados

① Calcula con cuatro cifras significativas el porcentaje del color amarillo en la bandera de Togo respecto al área total de la bandera.

② Calcula con cuatro cifras significativas el porcentaje del color verde en la bandera de Togo respecto al área total de la bandera.

Enunciados

Di si los números que se obtienen como resultado de las siguientes operaciones son números racionales o irracionales.

① $7{,}5-2{,}\overline{84}$

② $8{,}3+\sqrt{2}$

③ $7\cdot\sqrt{3}$

④ $9{,}32 : 1{,}0\overline{57}$

⑤ $(\sqrt[3]{7})^3$

⑥ $7{,}\overline{82}^2$

⑦ $\sqrt{5}-2$

⑧ $\sqrt[3]{9} : 1{,}3\overline{67}$

⑨ $\sqrt[3]{27} : 2{,}3\overline{617}$

⑩ $\sqrt[4]{17}$

⑪ $4+\pi$

⑫ $-\Phi$

⑬ $(3-5{,}\overline{8}) : (1+5{,}43\overline{7})$

⑭ $(3+\sqrt{11}) : 19$

⑮ $e-2$

⑯ $7\cdot 1{,}001000100001000001\ldots$

⑰ $\pi : 2$

⑱ $5\cdot\Phi$

⑲ $(3+\sqrt{17})-(5+\sqrt{17})$

⑳ $(3{,}8+\sqrt{2})\cdot(3{,}8-\sqrt{2})$

㉑ $0{,}2233222333222233332222233333\ldots : 0{,}\overline{2233}$

㉒ $4{,}11199911119999 + 5{,}99911199991111$

㉓ $8{,}19+5e$

㉔ $0{,}12112211122211112222\ldots + 0{,}21221122211122221111\ldots$

㉕ $5{,}38338333833338333338\ldots - 5{,}\overline{3}$

㉖ $\pi + 1{,}\overline{01}$

Posibilidades de definición de número real

El concepto de número real y el de conjunto de números reales son dos conceptos de suma importancia en la matemática. De hecho, a partir de este momento del curso, casi vamos a utilizar exclusivamente números reales.

La humanidad tardó varios siglos (al menos del XVII al XIX) en llegar a definir el número real de algún modo que pudiera ser válido para hacer demostraciones con el rigor que se exige en matemáticas; durante esos siglos solo se usaron ideas intuitivas que llevaban a contradicciones.

Existen varias definiciones válidas, pero son muy complicadas para poder ser estudiadas en la enseñanza secundaria y no aportan nada especialmente provechoso en este nivel. Por eso, optamos por presentar definiciones más intuitivas y fáciles de entender, aunque no te ocultamos que hay mucho que afrontar y sobre lo que reflexionar con cualquier definición usada, porque el concepto es muy sutil.

Definiciones intuitivas de número real

Primera definición. Un número real es cualquier número que sea racional o irracional.

Comentario. Es una definición muy razonable: ya que conocemos los números racionales y hemos demostrado que hay números irracionales, tiene sentido considerarlos todos juntos en una nueva categoría que los englobe. Sin embargo, la definición abre la puerta a disponer de cualquier expresión decimal concebible.

Segunda definición. Un número real es un número entero o bien un número decimal en el que la parte decimal puede ser exacta, periódica o no períodica.

Comentario. Los números reales pueden tener cualquier tipo de parte decimal: si no tiene, es un número entero; si la tiene exacta o periódica, es un número racional; si la tiene no periódica, es un número irracional. Están cubiertas todas las posibilidades.

El conjunto de números reales

Se denomina con la letra especial $\mathbb{R}$, que no es más que una erre mayúscula adornada. A veces la verás simplemente como una erre mayúscula en negrita: $\mathbf{R}$.

Con este conjunto completamos un recorrido que comenzamos en el nivel 1:

$$\boxed{\text{Naturales } (\mathbb{N}) \Rightarrow \text{Enteros } (\mathbb{Z}) \Rightarrow \text{Racionales } (\mathbb{Q}) \Rightarrow \text{Reales } (\mathbb{R})}$$

Observa que cada conjunto está contenido en el siguiente:

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

En el nivel 5 definiremos un conjunto aún mayor (conjunto de números complejos), pero está basado en el conjunto de los números reales.

Ejemplos

Estos ejemplos te ayudarán a entender cómo usamos los signos de pertenencia de elementos junto con los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1	$\pi \notin \mathbb{Q}$	El número π no es un número racional	π no pertenece a $\mathbb{Q}$
Ejemplo 2	$\pi \in \mathbb{R}$	El número π es un número real	π pertenece a $\mathbb{R}$
Ejemplo 3	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$	El número $\sqrt{2}$ es un número real	$\sqrt{2}$ pertenece a $\mathbb{R}$

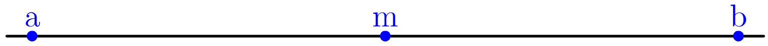
Conjuntos densos

En el nivel 1 vimos que el conjunto de números decimales es denso (entre dos números decimales siempre se puede encontrar otro, y por tanto infinitos), pero ya advertimos de que la situación es aún más rica.

El conjunto de los números racionales es denso

Es fácil demostralo: la media de dos números racionales es otro número racional y está situado entre ellos.

Simbólicamente: $a,b \in \mathbb{Q} \Rightarrow m=\dfrac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ y $a<m<b$



El conjunto de los números irracionales es denso

Esto es más difícil de demostrar, pero se puede imaginar la idea. El caso más difícil es aquel en el que los números irracionales tengan la expresión decimal muy parecida, de modo que comiencen igual. Por ejemplo:

u=5,777888777788887777788888..., v=5,777888877777888888...

Nos fijamos bien en la parte del principio que es común a ambos y en la primera cifra que es diferente:

u=**5,777888**7777788887777788888..., v=**5,777888**877777888888...

Para formar un número irracional que esté entre ellos, comenzamos igual que los dos, repetimos la primera cifra diferente en el menor de los dos, seguimos con una (o más, si es necesario) cifras mayores y a partir de ahí nos inventamos un patrón que nos lleve a un número irracional:

w=**5,777888**78010010001000010000001...

Así obtenemos un número irracional w que verifica u<w<v.

Los números racionales e irracionales están entremezclados

Una propiedad muy interesante, usada frecuentemente en demostraciones matemáticas, es hasta qué punto se entremezclan los números racionales e irracionales:

- ✱ Entre cada dos números racionales hay infinitos números irracionales
- ✱ Entre cada dos números irracionales hay infinitos números racionales

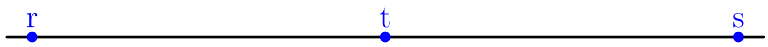
El hecho de considerar números con cualquier expresión decimal abre una gran cantidad de posibilidades, como empezamos a ver con estas dos propiedades.

El conjunto de los números reales es denso

Entre dos números reales siempre hay uno, y por tanto infinitos, números reales.

Esta propiedad se demuestra con la media de los dos números reales, igual que hicimos con dos números racionales.

Simbólicamente: $r,s \in \mathbb{R} \Rightarrow t=\dfrac{r+s}{2} \in \mathbb{R}$ y $r<t<s$



Representación gráfica de los números reales

Desde en nivel 1 sabes representar gráficamente los números enteros y los números decimales. Sabes que se hace sobre una recta, poniendo el cero en algún punto que nos venga bien, los números positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda del cero.

Pues bien, esa es la recta en la que vamos a representar también los números reales. La recta es tan importante que cuando la utilizamos para representar los números reales la denominamos **recta real**. A veces ponemos sobre ella el símbolo del conjunto de los números reales, para que quede aún más claro:

Ejemplo 1

Representamos los números π, Φ, e y $\sqrt{2}$, junto a algunos números enteros que sirvan de referencia:

Hemos marcado los puntos de modo aproximado, usando la expresión decimal de los números irracionales redondeada con precisión suficiente para el ejemplo.

Propiedades

La analogía que hay entre el conjunto de los números reales y la recta real que usamos para la representación es tan grande que muchas veces casi identificamos las dos cosas. Vamos a ver algunas propiedades para ir notando la analogía:

- Si en la recta marcamos todos los números racionales, quedarán infinitos puntos sin marcar (todos los irracionales).
- Si en la recta marcamos todos los números irracionales, quedarán infinitos puntos sin marcar (todos los racionales).
- Pero si en la recta marcamos todos los números reales, no quedará ningún punto sin marcar.

La correspondencia entre cada número real y un punto de la recta real se llama **biunívoca**: a cada número real le corresponde un punto y a cada punto le corresponde un número real.

Objetivo de la representación

Casi siempre usamos la representación gráfica de los números reales como un medio para entender mejor alguna propiedad. Por tanto, la representación suele ser **aproximada**.

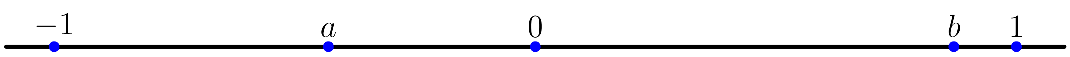
Ejemplo 2

Enunciado

Representa gráficamente los números reales $a = -\dfrac{3}{7}$ y $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ usando como referencia los números enteros que consideres necesarios.

Resolución

Usamos la calculadora para averiguar el comienzo de la expresión decimal de los dos números redondeando a dos cifras significativas: $a = -0{,}43$ y $b = 0{,}87$



Enunciados

Representa gráficamente de modo aproximado los números reales de cada uno de los siguientes apartados añadiendo como referencia en la representación los números enteros que consideres necesarios.

① $a=-\frac{5}{7}$; $b=\frac{\sqrt{5}}{3}$; $c=\frac{\pi}{8}$; $d=-\frac{\pi}{5}$

② $a=\frac{e+1}{2}$; $b=\sqrt{7}-1$; $c=\Phi+\frac{1}{5}$; $d=\frac{\pi}{\Phi}$

③ $a=\sqrt{15}$; $b=\frac{3\pi}{4}$; $c=e^2-4$; $d=\frac{\sqrt{33}}{2}$

④ $a=e-\pi$; $b=\sqrt{2}-2$; $c=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $d=\frac{1}{3}-\frac{5}{4}$

⑤ $a=\pi^2$; $b=\sqrt{85}$; $c=4e$; $d=\sqrt[3]{1111}$

⑥ $a=\frac{1}{\Phi}$; $b=\frac{5}{2}-\pi$; $c=\frac{\sqrt{11}}{8}$; $d=\frac{1-\pi}{4}$

⑦ $a=\sqrt[3]{2}$; $b=\sqrt[3]{7}$; $c=e-\frac{1}{5}$; $d=\frac{20}{7}$

⑧ $a=\sqrt{2}-\sqrt{7}$; $b=\frac{1-e}{2}$; $c=\frac{5-2\pi}{3}$; $d=1-\sqrt{8}$

⑨ $a=\frac{1-\sqrt{15}}{2}$; $b=\frac{e-8}{7}$; $c=\frac{5-8\pi}{9}$; $d=\frac{e-\sqrt{51}}{4}$

⑩ $a=\frac{\pi^2-e^2}{2}$; $b=\frac{\sqrt{43}}{11}$; $c=\frac{1-\pi}{3}$; $d=\frac{\pi+\sqrt[3]{384}}{6}$

⑪ $a=\frac{1+\sqrt{7}}{5}$; $b=\frac{1-\sqrt{7}}{5}$; $c=\sqrt{\frac{11}{6}}$; $d=\sqrt[3]{\frac{2}{25}}$

⑫ $a=\sqrt{1+\sqrt{2}}$; $b=\sqrt{\sqrt{2}-1}$; $c=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{0,3}}$; $d=\frac{2-e}{3}$

⑬ $a=\frac{e\pi}{7}$; $b=\frac{e-2\pi}{2}$; $c=\sqrt{2e-3}$; $d=-\sqrt[7]{9}$

⑭ $a=\frac{e+\sqrt{15}}{8}$; $b=\frac{e-\sqrt{15}}{4}$; $c=\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$; $d=\frac{3-\sqrt{35}}{2}$

⑮ $a=\frac{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{20}}}{2}$; $b=\frac{\sqrt{-\sqrt{7}+\sqrt{20}}}{2}$; $c=\frac{1-\sqrt{20}}{5}$; $d=\frac{1-\sqrt{30}}{3}$

⑯ $a=\sqrt{\frac{7}{3}+\frac{4}{7}}$; $b=\sqrt{\frac{7}{3}-\frac{4}{7}}$; $c=\sqrt{\frac{7}{3}}+\sqrt{\frac{4}{7}}$; $d=\sqrt{\frac{7}{3}}-\sqrt{\frac{4}{7}}$

⑰ $a=\frac{\pi}{4}+\frac{e}{3}$; $b=\frac{\pi}{4}-\frac{e}{3}$; $c=\frac{\pi}{3}-\frac{e}{5}$; $d=\frac{\pi}{3}+\frac{e}{4}$

⑱ $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{7}}$; $b=\sqrt[3]{-2+\sqrt{7}}$; $c=\sqrt[3]{2}-\sqrt{7}$; $d=\sqrt{2}-\sqrt[3]{7}$

Representación gráfica exacta de algunos números reales

Desde el punto de vista del desarrollo teórico de los números reales, tiene interés saber que algunos números reales se pueden representar de manera exacta en la recta real, sin necesidad de usar una aproximación de su expresión decimal.

Representación gráfica exacta de los números racionales

Todos los números racionales se pueden representar en la recta real de modo exacto. El método se basa en la proporcionalidad de segmentos. Consiste en tres pasos:

1. Se obtiene una expresión del número racional como suma de un número entero y una fracción (preferiblemente, irreducible).
2. Se señalan los dos números enteros más cercanos entre los que se encuentra el número racional.
3. Se realiza una construcción geométrica que da la representación exacta.

Enunciados

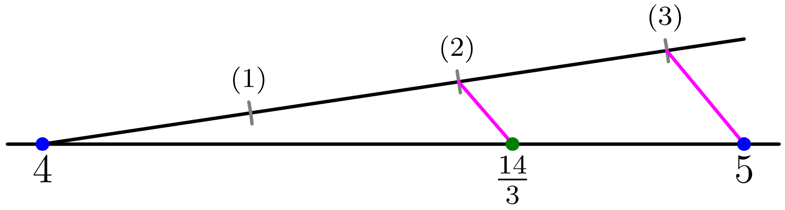
Representa gráficamente de modo exacto los siguientes números:

① $\frac{14}{3}$ ② $-\frac{10}{7}$

Resoluciones

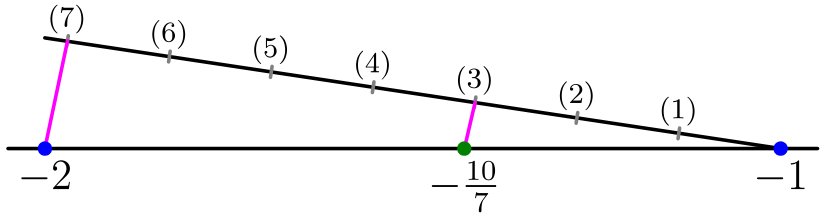
① Paso 1: $\frac{14}{3}=4+\frac{2}{3}$. Paso 2: el número $\frac{14}{3}$ se encuentra entre 4 y 5.

Paso 3: Desde el punto que representa el 4 se levanta una semirrecta hacia la derecha con cualquier ángulo. Sobre ella, se marcan tres puntos (el denominador) a la misma distancia usando un compás. Se dibuja el segmento que une el último punto marcado con el punto que representa el 5. Se traza un segmento paralelo al anterior que pase por el segundo punto (el numerador); donde corte a la recta real estará la representación gráfica pedida.



② Paso 1: $-\frac{10}{7}=-1-\frac{3}{7}$. Paso 2: el número $-\frac{10}{7}$ se encuentra entre –2 y –1.

Paso 3: Desde el punto que representa el –1 se levanta una semirrecta hacia la izquierda con cualquier ángulo. Sobre ella, se marcan siete puntos (el denominador) a la misma distancia usando un compás. Se dibuja el segmento que une el último punto marcado con el punto que representa el –2. Se traza un segmento paralelo al anterior que pase por el tercer punto (el numerador); donde corte a la recta real estará la representación gráfica pedida.



Enunciados

Representa gráficamente de modo exacto los siguientes números:

① $\frac{7}{3}$ ② $-\frac{19}{7}$ ③ $\frac{23}{6}$ ④ $-\frac{20}{11}$ ⑤ $\frac{66}{7}$ ⑥ $-\frac{43}{6}$

Respuestas

①	②

③	④

⑤	⑥

Representación gráfica exacta de algunos números reales

Desde el punto de vista del desarrollo teórico de los números reales, tiene interés saber que algunos números reales se pueden representar de manera exacta en la recta real, sin necesidad de usar una aproximación de su expresión decimal.

Representación gráfica exacta de las raíces cuadradas

Todas las raíces cuadradas con resultado irracional se pueden representar en la recta real de modo exacto. El método es descomponer la cantidad subradical en la suma de dos cuadrados, construir un triángulo rectángulo, aplicar el teorema de Pitágoras y llevar la hipotenusa hasta la recta real con un compás.

- Si la cantidad subradical se puede descomponer en la suma de los cuadrados de dos números naturales, se usan esos números como lados de los catetos.
- Si la cantidad subradical no se puede descomponer en la suma de los cuadrados de dos números naturales, se pueden usar una o dos raíces cuadradas irracionales como lados de los catetos.

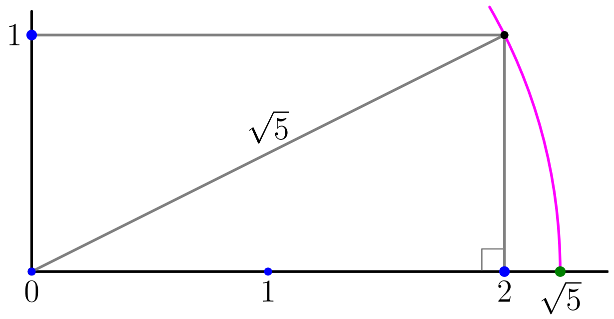
Enunciados

Representa gráficamente de modo exacto los siguientes números:

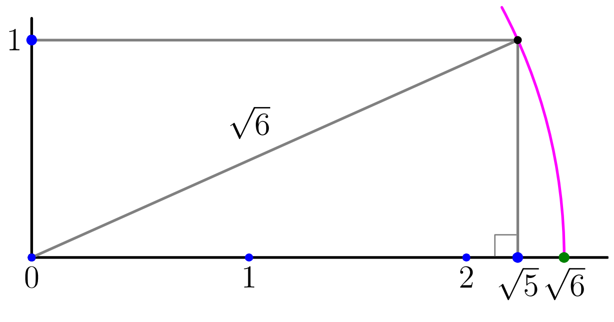
① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{74}$

Resoluciones

① Este es el caso más sencillo, porque $5=1^2+2^2$, así que usamos catetos de longitudes 1 y 2, como vemos en esta ilustración:



② Ahora no se puede descomponer 6 como la suma de los cuadrados de dos números naturales, pero aprovechamos que $6=1^2+(\sqrt{5})^2$ y ya sabemos representar $\sqrt{5}$, así que usamos un triángulo rectángulo con lados 1 y $\sqrt{5}$, como vemos en esta ilustración:



③ Este caso es igual que el (1), pero la dificultad estriba en saber que $74=5^2+7^2$, lo que no es fácil. Por eso lo importante de este método es que **existe**, más que su utilidad práctica.

Enunciados

Representa gráficamente de modo exacto los siguientes números:

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{20}$ ⑥ $\sqrt{24}$

Respuestas

①	②

③	④

⑤	⑥

Los conjuntos en este curso

Comenzamos este curso en el nivel 1 presentando el concepto de conjunto de números naturales y, más adelante, trabajamos con el conjunto de números enteros. En el nivel 2 vimos el conjunto de números racionales y en el 4 nos estamos familiarizando con el conjunto de números reales. Por otra parte, ya hemos utilizado los conjuntos en el nivel 3 para poder manejar con comodidad los sucesos en el cálculo de probabilidades. Avanzando en el curso, necesitaremos algunos conceptos más sobre conjuntos, así que ahora es un buen momento para presentarlos.

La teoría de conjuntos

Aunque en la enseñanza secundaria no se hace un estudio pormenorizado de la teoría de conjuntos, como estás viendo sí se usa como ayuda para expresarse en otras partes de la matemática. En realidad, la teoría de conjuntos forma parte de una parte de la matemática llamada **lógica matemática** y ha tenido una convulsa historia porque su desarrollo al principio generó algunas paradojas muy vistosas.

Símbolos en la teoría de conjuntos

En teoría de conjuntos se usan multitud de símbolos para representar algunas palabras e ideas. Estos símbolos tienen varias ventajas: son universales (es decir, se usan en todos los idiomas) y permiten enunciados más concisos (es decir, más cortos); por eso, son ampliamente utilizados en matemáticas. Pero también tienen varios inconvenientes, especialmente para los estudiantes: hay que aprenderlos (y familiarizarse con ellos) y las expresiones escritas a base de símbolos son más difíciles de entender (al principio) que escritas en un idioma natural.

Por todas estas razones, en la enseñanza secundaria se busca un equilibrio entre usar el lenguaje simbólico y el lenguaje natural. Nuestro consejo: intenta aprender y usar los símbolos, pero no te agobies con ellos y usa el lenguaje natural cuando lo necesites.

Diccionario de símbolos

Algunos ya los conoces, otros son nuevos y los iremos explicando a continuación.

Símbolo	**Significado**
$\in$	pertenece
$\notin$	no pertenece
$\subset$	contenido
$\not\subset$	no contenido
$\supset$	contiene
$\not\supset$	no contiene
$\varnothing$	conjunto vacío
$\forall$	para todo
$\exists$	existe algún
$\exists!$	existe un único
$\nexists$	no existe ningún
∞	infinito (no es un número)

Símbolo	**Significado**
$:$	se verifica
$\mid$	tal que
$\wedge$	conjunción copulativa «y»
$\vee$	conjunción disyuntiva «o»
$\Rightarrow$	se deduce que, implica
$\Leftrightarrow$	equivalente, cuando
$\cup$	unión de conjuntos
$\cap$	intersección de conjuntos
$-$	diferencia de conjuntos
$\setminus$	diferencia de conjuntos
Δ	diferencia simétrica
$\ominus$	diferencia simétrica

Conjuntos y elementos

* Conjunto es la consideración en un **todo** de distintos entes.
* Los entes pueden, en principio, tener cualquier naturaleza. Esta característica es la que es preciso definir, en matemática superior, con mucha precisión, porque es un punto en el que se pueden originar algunas paradojas.
* Los conjuntos se suelen nombrar genéricamente con letras mayúsculas de cualquier alfabeto, aunque ya has visto que los conjuntos numéricos tienen símbolo propio (ℕ, ℤ, ℚ, ℝ).
* Los entes que constituyen un conjunto se llaman **elementos** de ese conjunto.
* Los elementos se suelen nombrar genéricamente con letras minúsculas de cualquier alfabeto. Pero algunos elementos, como los números, ya tienen su propio símbolo.
* Si el elemento «a» **pertenece** al conjunto «A», se escribe «a∈A»; se lee «a pertenece a A».
* Si el elemento «a» **no pertenece** al conjunto «A», se escribe «a∉A»; se lee «a no pertenece a A».

Modos de definir un conjunto

Un conjunto se puede definir de dos maneras:

* Por **extensión**, nombrando todos sus elementos. En ese caso, el conjunto se escribe encerrando entre llaves sus elementos, separados por comas, sin importar el orden. Ejemplo 1: V={a,e,i,o,u}. Si el conjunto es infinito o tiene muchos elementos, se admite usar puntos suspensivos, si su significado es claro. Ejemplo 2: ℕ={1,2,3,4,5,6...}.
* Por **comprensión**, diciendo la característica que solo es cumplida por sus elementos. Es ese caso, se escribe entre llaves la característica que define la pertenencia al conjunto. Ejemplo 3: V={vocales del idioma español}.

Para que un conjunto esté bien definido, debe se debe poder decidir si cualquier ente pertenece o no a él.

Cardinal de un conjunto

* El cardinal de un conjunto finito es el número de elementos que tiene.
* El cardinal de un conjunto infinito se dice que es infinito (no es un número).
* El cardinal del conjunto «A» se puede escribir «card(A)», «|A|» o «#A».
* Ejemplo 4: V={a,e,i,o,u} ⇒ card(V)=5.
* Ejemplo 5: card(∅)=0.
* Ejemplo 6: card(ℕ)=∞.

Ejemplos

Consideramos los conjuntos A={✚,♣,♥,★,☻,➤} y B={▲,■,⬟,⬣}

* Ejemplo 7: card(A)=6.
* Ejemplo 8: card(B)=4.
* Ejemplo 9: ♥∈A.
* Ejemplo 10: ■∉A.
* Ejemplo 11: ⬟∈B.
* Ejemplo 12: ☻∉B.

Subconjuntos y superconjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

✱ Se dice que A es un subconjunto de B, o que B es un superconjunto de A, cuando todos los elementos de A pertenecen a B.

✱ Se puede escribir de dos maneras:
- A es un subconjunto de B se escribe «$A \subset B$»; se lee «A contenido en B».
- B es un superconjunto de A se escribe «$B \supset A$»; se lee «B contiene a A».

✱ Por tanto, se dice que A no es un subconjunto de B, o que B no es un superconjunto de A, cuando hay algún elemento de A no pertenece a B.

✱ Se puede escribir de dos maneras:
- A no es un subconjunto de B se escribe «$A \not\subset B$»; se lee «A no contenido en B».
- B no es un superconjunto de A se escribe «$B \not\supset A$»; se lee «B no contiene a A».

Ejemplos

① Consideramos los conjuntos $A=\{c,d,e,f,g\}$ y $B=\{c,d,e,f,g,h,i,j\}$

Se verifica $A \subset B$ y $B \supset A$ porque todos los elementos de A pertenecen a B.

② Consideramos los conjuntos $C=\{e,f,g,p,q\}$ y $D=\{e,f,g,h,i,j\}$

Se verifica $C \not\subset D$ y $D \not\supset C$ porque hay algún elemento de C que no pertenece a D.

Definición con símbolos

Vamos a ver la definición de subconjunto usando exclusivamente símbolos. Explicaremos detalladamente la definición para que te vayas familiarizando con esta importante manera de escribir matemáticas.

Definición de subconjunto

Sean A y B dos conjuntos.

✱ $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$

✱ Lo leemos: A está contenido en B cuando para todo x perteneciente a A se verifica que x pertenece a B.

Explicaciones:

✱ El símbolo «$\Leftrightarrow$» de equivalencia se usa en las definiciones matemáticas y en ese caso se lee «cuando».

✱ Para expresar que todos los elementos de A tienen una propiedad hemos usado el cuantificador universal «$\forall$».

✱ Hemos tenido que elegir una letra para representar a un elemento cualquiera de A; hemos elegido la «x», pero podríamos haber usado cualquier otra.

Expresión simbólica de no ser subconjunto

Sean A y B dos conjuntos.

✱ $A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x \in A \mid x \notin B$.

✱ Lo leemos: A no está contenido en B cuando existe algún x perteneciente a A tal que x no pertenece a B.

Explicación:

✱ Para expresar que existe algún elemento de A que tiene una propiedad hemos usado el cuantificador existencial «$\exists$».

Partes de un conjunto

Un concepto muy interesante en la teoría de conjuntos es considerar el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto, llamado partes del conjunto. Suena a trabalenguas, así que lo vemos con detenimiento con un ejemplo.

Ejemplo 1

Enunciado. Dado el conjunto A={b,c,d}, averigua todos los subconjuntos de A.

Resolucion. Para no olvidar ningún subconjunto, lo mejor es seguir un orden:

- Subconjuntos de A que no tienen ningún elemento: solo hay uno, el conjunto vacío: ∅.
- Subconjuntos de A que tienen un elemento: hay tres, uno por cada elemento: {b}, {c} y {d}. (Observa que son conjuntos con un solo elemento.)
- Subconjuntos de A que tienen dos elementos: también hay tres, uno por cada elemento que dejemos fuera del subconjunto: {c,d}, {b,d} y {b,c}.
- Subconjuntos de A que tienen tres elementos: solo hay uno, el propio conjunto A.

Así que en total hemos encontrado ocho subconjuntos: ∅, {b}, {c}, {d}, {c,d}, {b,d}, {b,c} y A.

Propiedades y definición

Sea A un conjunto cualquiera. Se verifica:

- ∅⊂A. Es decir: el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.
- A⊂A. Es decir: cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo.

Debido a estas propiedades, los subconjuntos ∅ y A de A se llaman subconjuntos **impropios** de A; todos los demás subconjuntos se llaman subconjuntos **propios**.

Definición

Si A es un conjunto cualquiera, llamamos **partes de A** al conjunto de todos los subconjuntos de A; se escribe P(A).

Ejemplo 2

A={b,c,d} ⇒ P(A)={∅,{b},{c},{d},{c,d},{b,d},{b,c},A}

Propiedad

Si el cardinal del conjunto A es «n», el cardinal de partes de A es «2^n».

Simbólicamente: card(A)=n ⇒ card(P(A))=2^n.

Comentario: más adelante en este nivel podrás demostrar tú mismo esta propiedad usando lo que aprendas de combinatoria.

Ejemplo 3

A={b,c,d} ⇒ card(A)=3; se verifica que card(P(A))=2^3=8.

Curiosidad importante

Aunque parezca algo inútil y forzado, podemos considerar el conjunto «partes del conjunto vacío». Pero realmente es importante en la teoría matemática avanzada de los números naturales.

Veamos: P(∅)={∅}. Es decir: el conjunto vacío solo tiene un subconjunto, que es el propio conjunto vacío. (Suena raro, lo sabemos, pero es así; piénsalo bien).

Incluso se verifica la propiedad de los cardinales:

card(∅)=0 y card(P(∅))=2^0=1.

Enunciados

① Se considera el conjunto W definido por comprensión como el conjunto de números enteros que se escriben usando una sola cifra. Define el conjunto por extensión.

② Se considera el conjunto T definido por comprensión como el conjunto de números naturales que se escriben usando dos cifras iguales. Define el conjunto por extensión.

③ Se considera el conjunto U definido por comprensión como el conjunto de números enteros que se escriben usando exactamente dos cifras. Calcula el cardinal del conjunto U.

④ Se considera el conjunto F definido por comprensión como el conjunto de números racionales positivos que no son enteros y cuando se escriben como fracción irreducible la suma del numerador y el denominador es 7. Calcula el cardinal del conjunto F.

Enunciados

Considerando el conjunto G={a,b,c,d}, decide si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

⑤ card(G)=4	⑧ $b\notin G$	⑪ $\{b\}\notin G$	⑭ $G\supset\{a,e\}$
⑥ $a\in G$	⑨ $b\not\subset G$	⑫ $\{a\}\subset G$	⑮ $G\supset\{c,d\}$
⑦ $a\subset G$	⑩ $\{a\}\in G$	⑬ $\{b\}\not\subset G$	⑯ $G\supset\varnothing$

Enunciados

Considerando los conjuntos A={f,g,h,i,j} y K={g,h,i} decide si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

⑰ card(A)=8	⑳ $K\supset A$	㉓ $\{g,h\}\subset K$	㉖ $K\supset\{i\}$
⑱ $A\in K$	㉑ $A\supset K$	㉔ $\varnothing\subset K$	㉗ $|A|+\#K=8$
⑲ $A\subset K$	㉒ $\{g,h\}\in K$	㉕ $K\supset i$	㉘ $\{g,i\}\subset A$

Enunciados

㉙ Si un conjunto tiene 4 elementos, ¿cuántos subconjuntos tiene?

㉚ Si un conjunto tiene 5 elementos, ¿cuántos subconjuntos propios tiene?

㉛ Considerando el conjunto H={p,q,r}, se pide:

a) Todos los subconjuntos de H a los que pertenezca el elemento «p».

b) Todos los subconjuntos de H a los que no pertenezca el elemento «q».

㉜ Considerando los conjuntos C={s,t,u,v} y D={s,t,w,z}, averigua todos los subconjuntos propios de C que estén contenidos en D.

㉝ Considerando los conjuntos E={α,β,γ} y U={β,δ}, define por extensión el conjunto B que verifica: card(B)=1, $B\subset E$ y $B\subset U$.

Unión de dos conjuntos

- La unión de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a cualquiera de los dos conjuntos.
- El símbolo para indicar la unión de dos conjuntos es «∪» (no es una «u» mayúscula, aunque se parece).
- Hay que señalar que si un elemento pertenece a los dos conjuntos, en la unión solo hay que escribirlo una vez, porque los conjuntos no pueden tener elementos repetidos.
- Ejemplo 1. $\{a,b,c\}\cup\{c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$
- Ejemplo 2. $\{f,g,h,i\}\cup\{h,i,j,k\} = \{f,g,h,i,j,k\}$
- Ejemplo 3. $\{p,q,r\}\cup\{s,t,u\} = \{p,q,r,s,t,u\}$

Definición con símbolos

Aunque la definición con palabras es perfectamente válida, es conveniente en este nivel de estudios ir acostumbrándose a ver también las definiciones simbólicas, porque son las que se usarán más adelante para realizar demostraciones.

Vamos con la definición:

$$\boxed{\text{Sean A y B dos conjuntos. } A\cup B = \{x \mid x\in A \vee x\in B\}}$$

Se lee así: A unión B es igual al conjunto de elementos x tales que x pertenece a A o x pertenece a B.

Observa que en la definición con símbolos usamos el símbolo «∨» (no es una «v» minúscula, aunque se parece) en vez de la palabra «o». En idiomas distintos del español la palabra podrá ser otra, pero en los textos de matemáticas el símbolo siempre es el mismo.

Observa que el símbolo de «unión» («∪») y el de «o» («∨») comparten la característica de que la apertura está en la parte de arriba. Esto quizá te ayude a recordarlos.

Propiedades

Sea A un conjunto. Se verifica:

- $A\cup A=A$. La unión de un conjunto consigo mismo es el mismo conjunto.
  - Ejemplo 4. $\{b,c,d\}\cup\{b,c,d\} = \{b,c,d\}$
- $A\cup\varnothing=A$. La unión de un conjunto con el conjunto vacío es el conjunto original.
  - Ejemplo 5. $\{e,f,g\}\cup\varnothing = \{e,f,g\}$

Sean A y B dos conjuntos.

- $A\subset B \Rightarrow A\cup B=B$. La unión de un conjunto con un subconjunto suyo es el superconjunto.
  - Ejemplo 6. $\{a,b,c,e,f\}\cup\{a,c,f\} = \{a,b,c,d,e,f\}$
- $A\subset A\cup B$. La unión de dos conjuntos es un superconjunto de los dos.

Sean A, B y C tres conjuntos.

- $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$. La unión de conjuntos es asociativa; por eso, la unión de más de dos conjuntos se puede escribir sin paréntesis: $A\cup B\cup C$
  - Ejemplo 7. $\{a,b,c\}\cup\{c,d,e\}\cup\{e,f,g\} = \{a,b,c,d,e,f,g\}$

Intersección de dos conjuntos

- La intersección de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a los dos conjuntos.
- El símbolo para indicar la intersección de dos conjuntos es «∩» (al revés que el símbolo de la unión).
- Hay que señalar que puede ocurrir perfectamente que no haya ningún elemento que pertenezca a los dos conjuntos. En ese caso, simplemente el resultado de la intersección es el conjunto vacío y se dice que los conjuntos son **disjuntos**.
- Ejemplo 1. $\{f,g,h,i\}\cap\{h,i,j,k\} = \{h,i\}$
- Ejemplo 2. $\{p,q,r\}\cap\{s,t,u\} = \varnothing$

Definición con símbolos

Aunque la definición con palabras es perfectamente válida, es conveniente en este nivel de estudios ir acostumbrándose a ver también las definiciones simbólicas, porque son las que se usarán más adelante para realizar demostraciones.

Vamos con la definición:

$$\boxed{\text{Sean A y B dos conjuntos. } A\cap B = \{x \mid x\in A \wedge x\in B\}}$$

Se lee así: A intersección B es igual al conjunto de elementos x tales que x pertenece a A y x pertenece a B.

Observa que en la definición con símbolos usamos el símbolo «∧» (justo al revés que el símbolo de «o») en vez de la palabra «y». En idiomas distintos del español la palabra podrá ser otra, pero en los textos de matemáticas el símbolo siempre es el mismo.

Observa que el símbolo de «intersección» («∩») y el de «y» («∧») comparten la característica de que la apertura está en la parte de abajo. Esto quizá te ayude a recordarlos.

Propiedades

Sea A un conjunto. Se verifica:

- $A\cap A=A$. La intersección de un conjunto consigo mismo es el mismo conjunto.
  - Ejemplo 3. $\{b,c,d\}\cap\{b,c,d\} = \{b,c,d\}$
- $A\cap\varnothing=\varnothing$. La intersección de un conjunto con el conjunto vacío es el conjunto vacío.
  - Ejemplo 4. $\{e,f,g\}\cap\varnothing = \varnothing$

Sean A y B dos conjuntos.

- $A\subset B \Rightarrow A\cap B=A$. La intersección de un conjunto con un subconjunto suyo es el subconjunto.
  - Ejemplo 5. $\{a,b,c,e,f\}\cap\{a,c,f\} = \{a,c,f\}$
- $A\cap B\subset A$. La intersección de dos conjuntos es un subconjunto de los dos.

Sean A, B y C tres conjuntos.

- $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$. La intersección de conjuntos es asociativa; por eso, la intersección de más de dos conjuntos se puede escribir sin paréntesis: $A\cap B\cap C$
  - Ejemplo 6. $\{a,b,c,d\}\cap\{c,d,e,f\}\cap\{c,d,g,h\} = \{c,d\}$

Diferencia de dos conjuntos

- La diferencia de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al primer conjunto pero no al segundo.
- El símbolo para indicar la diferencia de dos conjuntos puede ser «–» (el mismo que para la diferencia de números) o «\» (la barra invertida).
- Hay que señalar que esta operación no es conmutativa; es decir: si A y B son dos conjuntos, en general A–B da un resultado diferente de B–A.
- Ejemplo 1. {a,b,c}–{c,d,e} = {a,b}
- Ejemplo 2. {c,d,e}–{a,b,c} = {d,e}
- Ejemplo 3. {f,g,h,i}–{h,i,j,k} = {f,g}
- Ejemplo 4. {h,i,j,k}–{f,g,h,i} = {j,k}
- Ejemplo 5. {p,q,r}–{s,t,u} = {p,q,r}

Definición con símbolos

Aunque la definición con palabras es perfectamente válida, es conveniente en este nivel de estudios ir acostumbrándose a ver también las definiciones simbólicas, porque son las que se usarán más adelante para realizar demostraciones.

Vamos con la definición:

$$\boxed{\text{Sean A y B dos conjuntos. } A-B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}}$$

Se lee así: A menos B es igual al conjunto de elementos x tales que x pertenece a A y x no pertenece a B.

Observa que en la definición con símbolos usamos el símbolo «∧» (justo al revés que el símbolo de «o») en vez de la palabra «y». En idiomas distintos del español la palabra podrá ser otra, pero en los textos de matemáticas el símbolo siempre es el mismo.

Propiedades

Sea A un conjunto. Se verifica:

- A–A=∅. La diferencia de un conjunto consigo mismo es el conjunto vacío.
  - Ejemplo 6. {b,c,d}–{b,c,d} = ∅
- A–∅=A. La diferencia de un conjunto con el vacío es el conjunto original.
  - Ejemplo 7. {e,f,g}–∅ = {e,f,g}
- ∅–A=∅. La diferencia del conjunto vacío con cualquier otro es el vacío.
  - Ejemplo 8. ∅–{e,f,g} = ∅

Sean A y B dos conjuntos.

- A⊂B ⇒ A–B=∅. La diferencia de un conjunto con un superconjunto suyo es el conjunto vacío.
  - Ejemplo 9. {a,c,f}–{a,b,c,e,f} = ∅
- A–B⊂A. La diferencia de dos conjuntos es un subconjunto del primero.
  - Ejemplo 10. A={c,d,e,f}, B={e,f,g,h} ⇒ A–B={c,d}⊂A
- (A–B)∩B=∅. La diferencia de dos conjuntos y el segundo conjunto son conjuntos disjuntos.
  - Ejemplo 11. A={c,d,e,f}, B={e,f,g,h} ⇒ A–B={c,d}; {c,d}∩B=∅

Diferencia simétrica de dos conjuntos

- La diferencia simétrica de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno de los dos conjuntos pero no al otro.
- El símbolo para indicar la diferencia simétrica de dos conjuntos puede ser «∆» (se llama «incremento» y es muy parecido a la letra griega delta mayúscula, pero no idéntico) o «⊖». En este curso usaremos «∆».
- Esta operación, al contrario que la diferencia de conjuntos, sí es conmutativa.
- Ejemplo 1. $\{a,b,c\}\Delta\{c,d,e\} = \{a,b,d,e\}$
- Ejemplo 2. $\{f,g,h,i\}\Delta\{h,i,j,k\} = \{f,g,j,k\}$
- Ejemplo 3. $\{p,q,r\}\Delta\{s,t,u\} = \{p,q,r,s,t,u\}$

Definición con símbolos

Aunque la definición con palabras es perfectamente válida, es conveniente en este nivel de estudios ir acostumbrándose a ver también las definiciones simbólicas, porque son las que se usarán más adelante para realizar demostraciones.

Vamos con la definición:

$$\boxed{\text{Sean A y B dos conjuntos. } A\Delta B = \{x \mid (x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\in B \wedge x\notin A) \}}$$

Se lee así: A diferencia simétrica con B es igual al conjunto de elementos x tales que o bien x pertenece a A y x no pertenece a B o bien x pertenece a B y x no pertenece a A. (Los paréntesis son difíciles de pronunciar, por eso hemos hecho la pequeña variación de usar dos veces «o bien»).

Propiedades

Sea A un conjunto. Se verifica:

- $A\Delta A=\varnothing$. La diferencia simétrica de un conjunto consigo mismo es el conjunto vacío.
  - Ejemplo 4. $\{b,c,d\}\Delta\{b,c,d\} = \varnothing$
- $A\Delta\varnothing=A$. La diferencia de un conjunto con el vacío es el conjunto original.
  - Ejemplo 5. $\{e,f,g\}\Delta\varnothing = \{e,f,g\}$

Sean A y B dos conjuntos.

- $A\subset B \Rightarrow A\Delta B=B-A$. La diferencia simétrica de un conjunto con un subconjunto suyo es igual a la diferencia entre el superconjunto y el subconjunto.
  - Ejemplo 6. $\{a,c,f\}\Delta\{a,b,c,e,f\} = \{b,e\}$
- $A\Delta B=A\cup B-A\cap B$. La diferencia simétrica de dos conjuntos es igual a la unión de los dos conjuntos menos su intersección.

  Aunque no hemos definido las operaciones combinadas entre conjuntos, es fácil ver que el segundo miembro de esta igualdad lo es; en ella, la operación que tiene menor jerarquía es la diferencia, que, por tanto, es la última que hay que realizar.
  - Ejemplo 7. Sean $A=\{c,d,e,f\}$ y $B=\{e,f,g,h\}$

    Se verifica: $A\Delta B=\{c,d,g,h\}$ y $A\cup B-A\cap B=\{c,d,e,f,g,h\}-\{e,f\}=\{c,d,g,h\}$
- $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$. La diferencia simétrica de dos conjuntos es igual a la unión de las dos diferencias.

Recomendación

Para que puedas comparar más fácilmente tus soluciones con las que proponemos, te sugerimos que escribas por orden alfabético los elementos de tu solución.

Enunciados

① Siendo F={h,i,j,k,l} y G={k,l,m,n,p}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

② Siendo F={h,i,j} y G={j,k,l}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

③ Siendo F={h,i} y G={j,k}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

④ Siendo F={h,i,j,k} y G={k,l,m,n}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

⑤ Siendo F={h,i,j,k,l,m} y G={n,p}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

⑥ Siendo F={h,i,j,k} y G={i,j,k}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

⑦ Siendo F={h,i,j} y G={i}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

⑧ Siendo F={p,q,r,s} y G={q,r,s,t}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

⑨ Siendo F={p,q} y G={p,q}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

⑩ Siendo F={h,i} y G={s,t}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

⑪ Siendo F={h,i,j,q} y G={q,r,s}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

⑫ Siendo F={h,i,j,k} y G={h,m,n}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

⑬ Siendo F={p,q,r,s} y G={p,s}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

⑭ Siendo F={p,q,r,s,t} y G={p,u,v}, se pide:

a) F∪G b) F∩G c) F–G d) G–F e) FΔG

Diagramas de Euler

- ✱ Son una manera de representar gráficamente dos o más conjuntos, de modo que quede patente la relación entre ellos.
- ✱ Resulta muy clarificador cuando hay pocos conjuntos y con pocos elementos.
- ✱ Se complica cuando hay más de tres conjuntos y muchos elementos.
- ✱ Los elementos se pueden representar con su nombre o añadiendo un punto.

Ejemplos

Representa con diagramas de Euler las siguientes series de conjuntos:

① A={c,d,e,f}, B={e,f,g,h}   ② A={c,d,e,f}, B={g,h,i,j}

③ A={d,e,f,g,h}, B={f,g,i,j,k}, C={g,h,k,m,n}

Comentarios

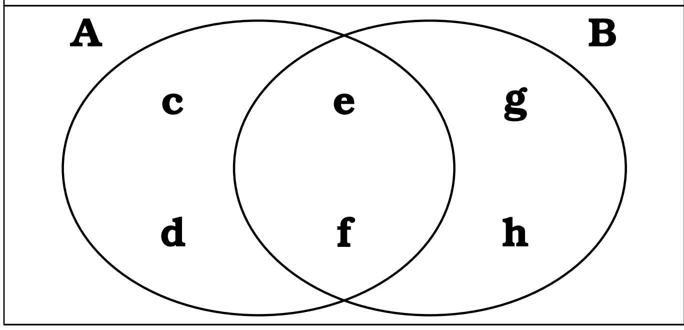
① Hay dos elementos que pertenecen a A y a B, es imprescindible representarlos de modo que quede claro este hecho.

② Los conjuntos A y B son disjuntos (no tienen en común ningún elemento), así los representamos completamente separados.

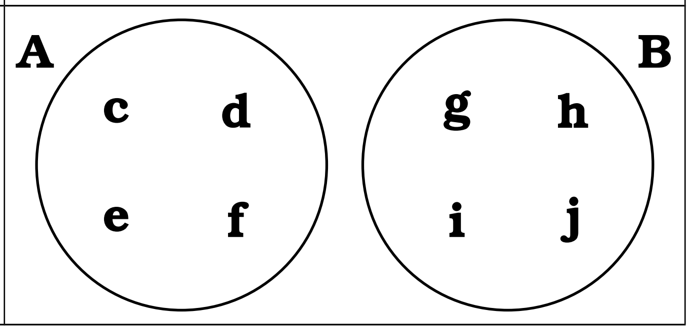
③ Hay que representar correctamente todas las intersecciones.

Resoluciones

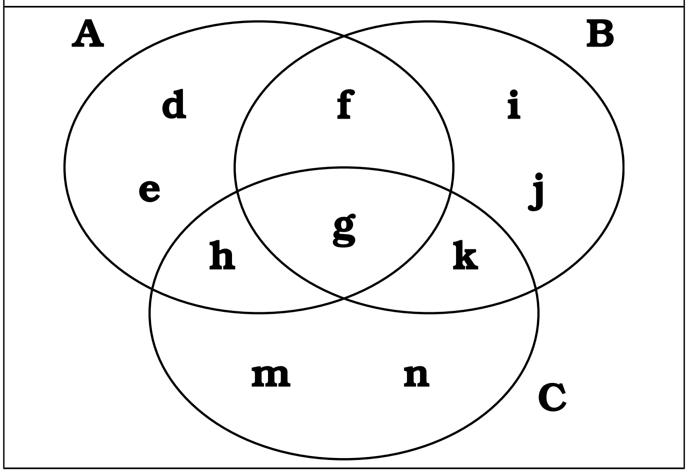
①



②



③



Conjunto universal

Hay muchos problemas en los que hay que considerar un conjunto de referencia y trabajar exclusivamente con subconjuntos de él. Por ejemplo, cuando se considera el espacio muestral de un experimento aleatorio, que estudiamos en este curso en los temas sobre cálculo de probabilidades.

En teoría de conjuntos es habitual llamar U a este conjunto universal.

Conjunto complementario

- Si llamamos U al conjunto universal de un determinado problema y llamamos A a un subconjunto suyo, se llama conjunto complementario de A al conjunto de todos los elementos de U que no pertenecen a A.
- El conjunto complementario de A se representa $\overline{A}$ o A^C. En este curso usaremos preferentemente la primera notación.
- Ejemplo 1. Consideramos el conjunto universal U={b,c,d,e,f} y su subconjunto A={b,c}. Entonces $\overline{A}$={d,e,f}.
- Ejemplo 2. Consideramos como conjunto universal el conjunto de los números naturales. El complementario del subconjunto formado por todos los números pares es el conjunto de números impares.

Definición con símbolos

Aunque la definición con palabras es perfectamente válida, es conveniente en este nivel de estudios ir acostumbrándose a ver también las definiciones simbólicas, porque son las que se usarán más adelante para realizar demostraciones.

Vamos con la definición. Llamamos U al conjunto universal. Entonces:

$$\boxed{\text{Sea } A \text{ un conjunto. } \overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}}$$

Se lee así: el complementario del conjunto A es igual al conjunto de elementos x que pertenecen a U tales que x no pertenece a A.

Propiedades

- El complementario de un conjunto tiene muchas propiedades en relación con otras operaciones con conjuntos.
- Ahora solo vamos a ver las más sencillas.
- Todas se pueden probar muy fácilmente usando las definiciones simbólicas, pero también las puedes entender usando las definiciones con palabras.

Si U es el conjunto universal y A es un subconjunto suyo, se verifica:

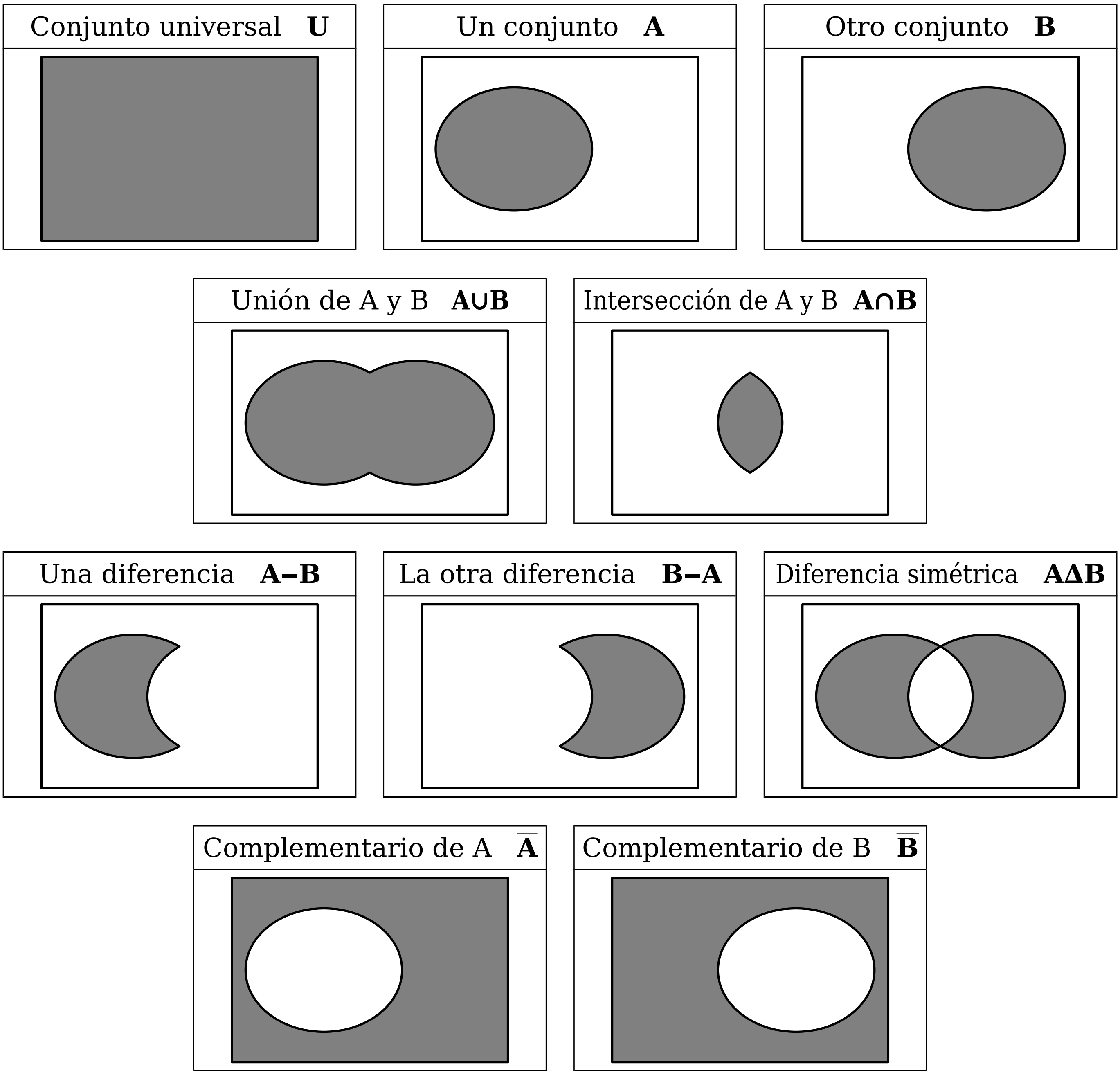
- $(A^C)^C=A$. Es decir, el complementario del complementario de un conjunto es el conjunto original.
- $A\cup\overline{A}=U$. Es decir, la unión de un conjunto y su complementario es igual al conjunto universal.
- $A\cap\overline{A}=\varnothing$. Es decir, la intersección de un conjunto y su complementario es igual al conjunto vacío. Dicho de otra forma, un conjunto y su complementario son conjuntos disjuntos.
- $\overline{U}=\varnothing$. Es decir, el complementario del conjunto universal es el conjunto vacío.
- $\overline{\varnothing}=U$. Es decir, el complementario del conjunto vacío es el conjunto universal.

Diagrama de Euler con el conjunto universal

- Una de las ayudas gráficas más interesantes de que las que se dispone en matemáticas es un diagrama de Euler en el que aparezca el conjunto universal.
- Lo más habitual es representar el conjunto universal por un rectángulo, pero sin escribir en él los elementos, simplemente asumiendo que todos los puntos del rectángulo son los elementos de conjunto universal.
- Cada subconjunto del conjunto universal se representa con alguna figura, como un círculo o una elipse, también asumiendo que todos sus puntos son elementos del conjunto.

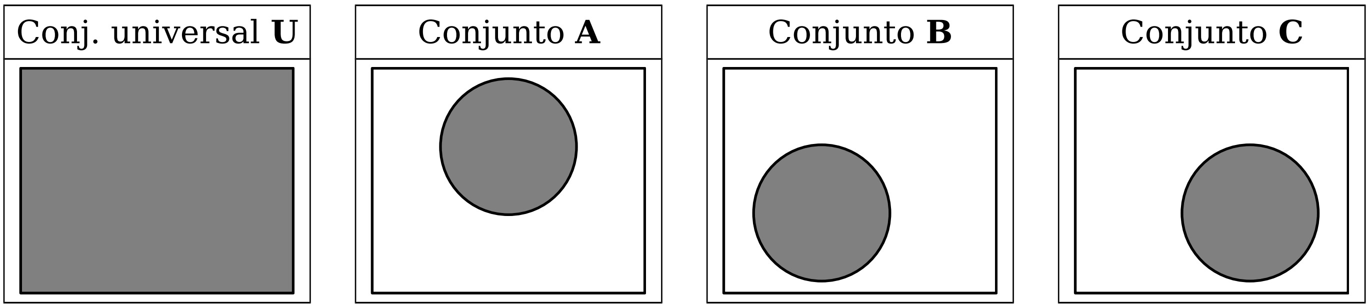
Ejemplo

Representamos un conjunto universal, dos subconjuntos suyos y algunas operaciones entre conjuntos. Cada resultado se muestra sombreado.

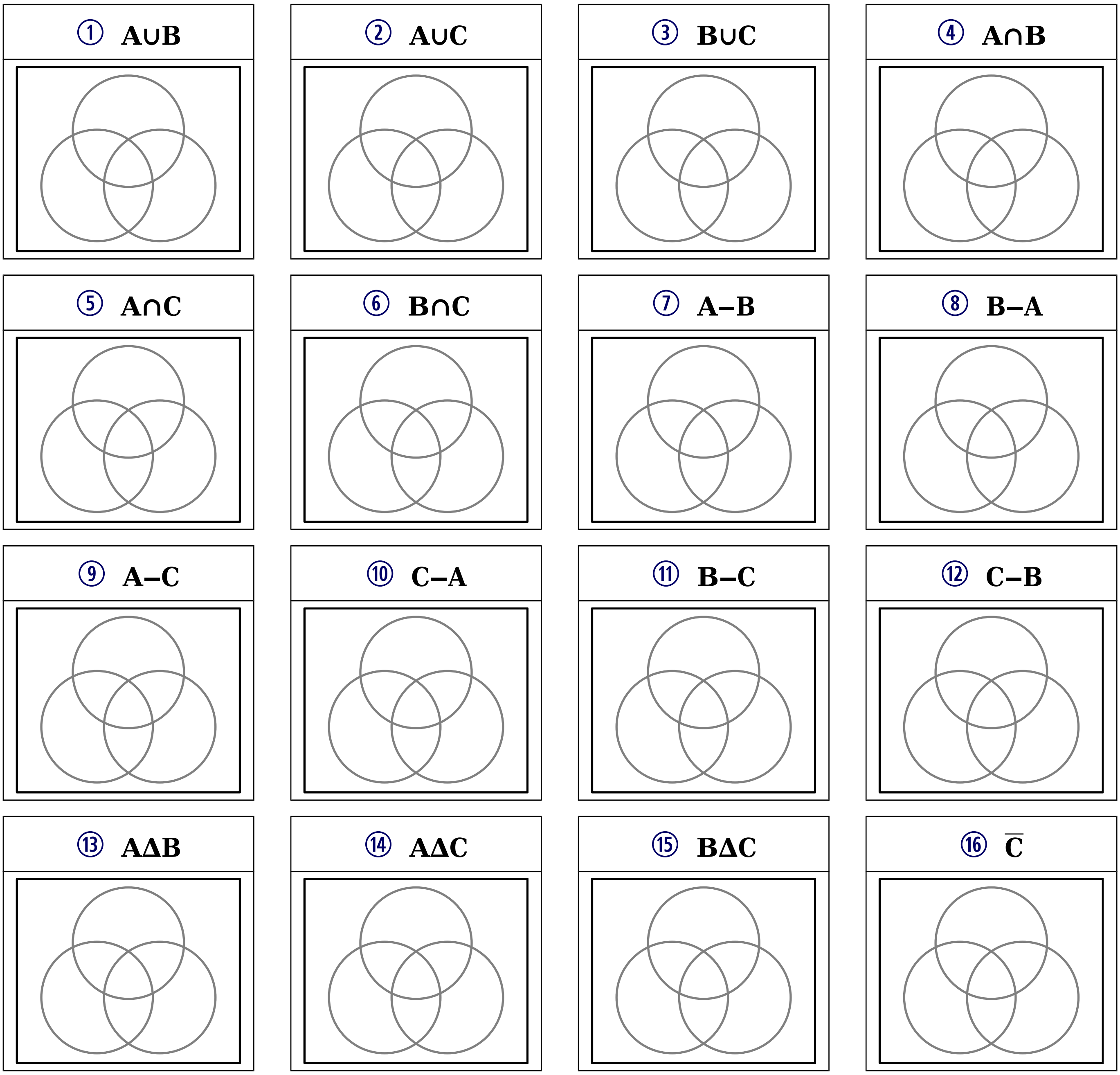


Enunciados

Consideramos un conjunto universal U, representado por un rectángulo y los conjuntos A, B y C (subconjuntos de U) que se muestran a continuación:



Resalta, sombreando el conjunto, el resultado de las siguientes operaciones:

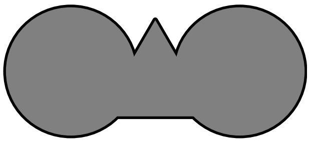
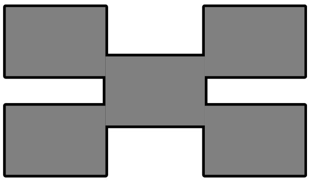
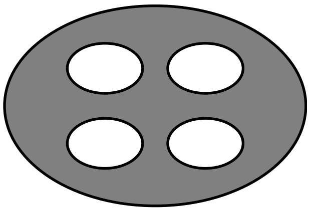
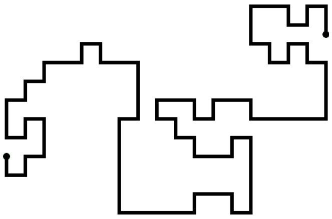


Definición intuitiva de conjunto conexo

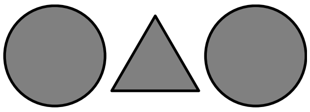
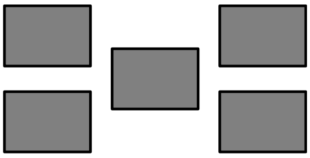
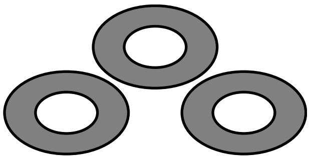
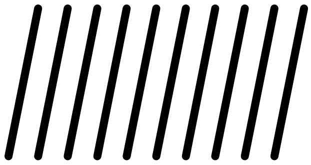
- ✱ Un conjunto **conexo** es un conjunto formado por una sola pieza.
- ✱ Si un conjunto no es conexo, se dice que es **disconexo**.

Ejemplos en dimensión dos

Los siguientes conjuntos de puntos del plano son conexos:

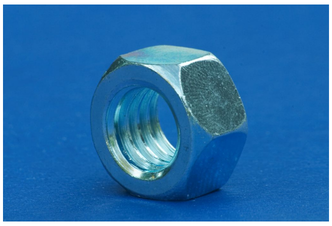
Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
			

Los siguientes conjuntos de puntos del plano son disconexos:

Ejemplo 5	Ejemplo 6	Ejemplo 7	Ejemplo 8
			

Ejemplos en dimensión tres

Los siguientes conjuntos de puntos del espacio son conexos:

Ejemplo 9	Ejemplo 10	Ejemplo 11	Ejemplo 12
			
Un tornillo	Una tuerca	Una bola de billar	Un sombrero

Los siguientes conjuntos de puntos del espacio son disconexos:

Ejemplo 13	Ejemplo 14	Ejemplo 15	Ejemplo 16
			
Unas botas	Unos gemelos	Los palillos	Un bikini

Subconjuntos propios conexos de la recta real

✱ Buscamos averiguar, definir y estudiar aquellos subconjuntos de la recta real que sean conexos, es decir, que estén formados por una sola pieza.

✱ Observamos que la recta real representa perfectamente al conjunto de los números reales, por lo que estamos buscando subconjuntos de números reales que no presenten «huecos», por así decir.

✱ Observa que el conjunto de los números racionales es disconexo, porque los números irracionales provocan «huecos»; y el conjunto de los números irracionales también es disconexo.

✱ El conjunto de los números reales sí es conexo, pero no es un subconjunto propio, por lo que no forma parte de lo que buscamos.

Intervalos y semirrectas

✱ Llamamos **intervalo** a cualquier subconjunto propio de los números reales que tenga longitud finita.

- Ejemplo 1. El conjunto de números reales entre 2 y 5, ambos excluidos, es un subconjunto propio de los números reales de longitud 3, luego es un intervalo.

✱ Llamamos **semirrecta** a cualquier subconjunto propio de los números reales que tenga longitud infinita.

- Ejemplo 2. El conjunto de números reales mayores o iguales que 5 es un subconjunto propio de los números reales de longitud infinita, luego es una semirrecta.

Extremo abierto o cerrado

✱ Decimos que un extremo de un intervalo o semirrecta es **abierto** cuando el extremo **no pertenece** al subconjunto.

- Ejemplo 3. El conjunto de números reales entre 2 y 5, ambos excluidos, es un intervalo abierto por sus dos extremos, porque ninguno de ellos pertenece al conjunto.

✱ Decimos que un extremo de un intervalo o semirrecta es **cerrado** cuando el extremo **pertenece** al subconjunto.

- Ejemplo 4. El conjunto de números reales mayores o iguales que 5 es una semirrecta con su único extremo cerrado, ya que el extremo pertenece al subconjunto.

✱ **Representación gráfica**. Como la diferencia entre un extremo abierto o cerrado es solamente la ausencia o presencia de un número (que en la representación gráfica solo es un punto), es imposible distinguirlos si no se hace alguna marca especial para indicarlo.

- Para indicar un extremo abierto se usa un paréntesis o un punto hueco.
- Para indicar un extremo cerrado se usa un corchete o un punto relleno.

Número de intervalos y semirrectas

✱ Hay cuatro tipos diferentes de intervalos.

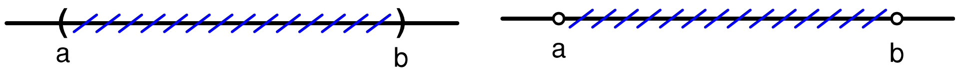
✱ Hay cuatro tipos diferentes de semirrectas.

Definiciones de intervalo

Sean a y b dos números reales tales que $a<b$.

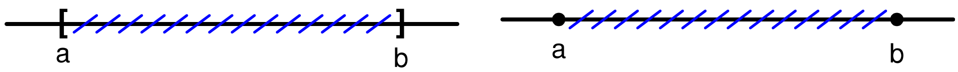
✱ Intervalo **abierto** de extremos a y b es el conjunto de números reales que son mayores que a y menores que b. Se escribe (a,b).

- La definición con símbolos es: $(a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$
- Ejemplo 1: $(2,5)=\{x\in\mathbb{R} \mid 2<x<5\}$
- En la representación gráfica hay que señalar que los dos extremos son abiertos y conviene marcar de alguna manera el tramo desde a hasta b.



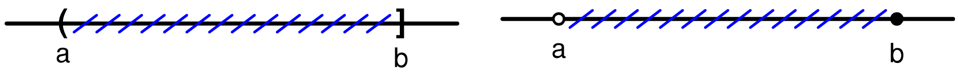
✱ Intervalo **cerrado** de extremos a y b es el conjunto de números reales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b. Se escribe $[a,b]$.

- La definición con símbolos es: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leqslant x\leqslant b\}$
- Ejemplo 2: $[3,7]=\{x\in\mathbb{R} \mid 3\leqslant x\leqslant 7\}$
- En la representación gráfica hay que señalar que los dos extremos son cerrados y conviene marcar de alguna manera el tramo desde a hasta b.



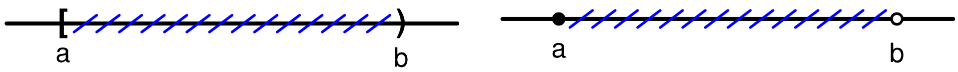
✱ Intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha de extremos a y b es el conjunto de números reales que son mayores que a y menores o iguales que b. Se escribe $(a,b]$.

- La definición con símbolos es: $(a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leqslant b\}$
- Ejemplo 3: $(-3,2]=\{x\in\mathbb{R} \mid -3<x\leqslant 2\}$
- En la representación gráfica hay que señalar que el extremo izquierdo es abierto y el derecho cerrado y conviene marcar de alguna manera el tramo desde a hasta b.



✱ Intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha de extremos a y b es el conjunto de números reales que son mayores o iguales que a y menores que b. Se escribe $[a,b)$.

- La definición con símbolos es: $[a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leqslant x<b\}$
- Ejemplo 4: $[-5,-1)=\{x\in\mathbb{R} \mid -5\leqslant x<-1\}$
- En la representación gráfica hay que señalar que el extremo izquierdo es cerrado y el derecho abierto y conviene marcar de alguna manera el tramo desde a hasta b.



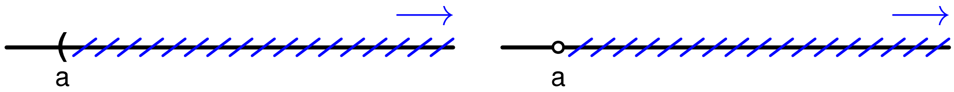
✱ Los intervalos que son abiertos por un extremo y cerrados por el otro se llaman **semiabiertos** y también se llaman **semicerrados**.

Definiciones de semirrecta

Sea a un número real.

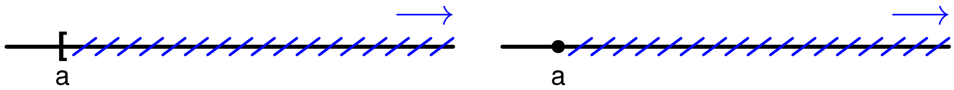
✱ Semirrecta **abierta por la izquierda** de extremo a es el conjunto de números reales que son mayores que a. Se escribe $(a,\rightarrow)$ o bien (a,∞).

- La definición con símbolos es: $(a,\rightarrow)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\}$
- Ejemplo 1: $(3,\rightarrow)=(3,\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid 3<x\}$
- En la representación gráfica hay que señalar que el extremo es abierto y conviene marcar de alguna manera el tramo desde a hacia la derecha.



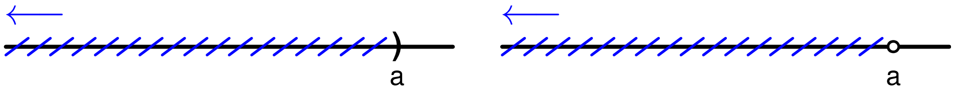
✱ Semirrecta **cerrada por la izquierda** de extremo a es el conjunto de números reales que son mayores o iguales que a. Se escribe $[a,\rightarrow)$ o bien $[a,\infty)$.

- La definición con símbolos es: $[a,\rightarrow)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leqslant x\}$
- Ejemplo 2: $[7,\rightarrow)=[7,\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid 7\leqslant x\}$
- En la representación gráfica hay que señalar que el extremo es cerrado y conviene marcar de alguna manera el tramo desde a hacia la derecha.



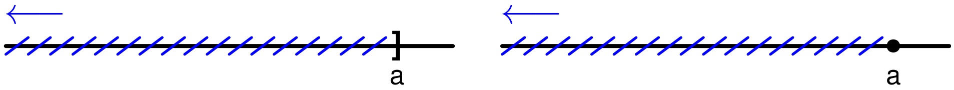
✱ Semirrecta **abierta por la derecha** es el conjunto de números reales que son menores que a. Se escribe $(\leftarrow,a)$ o bien $(-\infty,a)$.

- La definición con símbolos es: $(\leftarrow,a)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$
- Ejemplo 3: $(\leftarrow,4]=(-\infty,4)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<4\}$
- En la representación gráfica hay que señalar que el extremo es abierto y conviene marcar de alguna manera el tramo desde a hacia la izquierda.



✱ Semirrecta **cerrada por la derecha** es el conjunto de números reales que son menores o iguales que a. Se escribe $(\leftarrow,a]$ o bien $(-\infty,a]$.

- La definición con símbolos es: $(\leftarrow,a]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leqslant a\}$
- Ejemplo 4: $(\leftarrow,2]=(-\infty,2)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leqslant 2\}$
- En la representación gráfica hay que señalar que el extremo es cerrado y conviene marcar de alguna manera el tramo desde a hacia la izquierda.



Observación. Fíjate que el símbolo que aparece al lado de las flechas, el símbolo de infinito o de menos infinito siempre es un paréntesis, nunca un corchete. Esto nos recuerda el carácter de abierto que le damos a esa parte de la semirrecta.

Enunciados

Representa gráficamente los siguientes intervalos y semirrectas y di si las afirmaciones que los acompañan son verdaderas o falsas.

① Intervalo (2,8)

Afirmaciones: (a) 2∈(2,8) (b) 8∉(2,8) (c) 0∉(2,8) (d) 2,5∈(2,8)

② Intervalo [–3,4]

Afirmaciones: (a) –3∈[–3,4] (b) 4∉[–3,4] (c) 0∉[–3,4] (d) 5∈[–3,4]

③ Intervalo (5,9]

Afirmaciones: (a) 5∈(5,9] (b) 9∈(5,9] (c) 4,98∈(5,9] (d) $8,\overline{8}$∈(5,9]

④ Intervalo [1,2)

Afirmaciones: (a) 1∉[1,2) (b) 2∉[1,2) (c) 0∉[1,2) (d) 1,5∉[1,2)

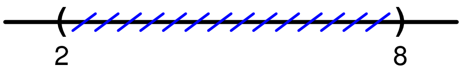
⑤ Semirrecta (–2,→). Afirmaciones: (a) –2∈(–2,→) (b) –3∈(–2,→) (c) 93∈(–2,→)

⑥ Semirrecta [1,→). Afirmaciones: (a) 1∈[1,→) (b) 0∈[1,→) (c) –33∈[1,→)

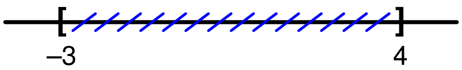
⑦ Semirrecta (←,–3). Afirmaciones: (a) –3∉(←,–3) (b) 0∈(←,–3) (c) –2∉(←,–3)

⑧ Semirrecta (←,5]. Afirmaciones: (a) 5∉(←,5] (b) 0∈(←,5] (c) –33∈(←,5]

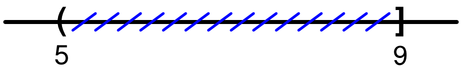
Resoluciones

①


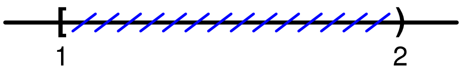
(a) Falsa (b) Verdadera (c) Verdadera (d) Verdadera

②


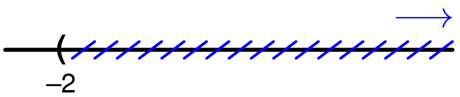
(a) Verdadera (b) Falsa (c) Falsa (d) Falsa

③


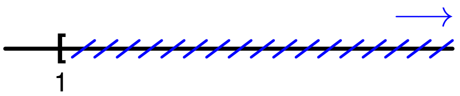
(a) Falsa (b) Verdadera (c) Falsa (d) Verdadera

④


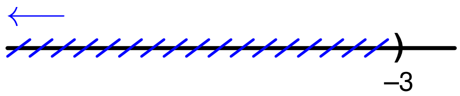
(a) Falsa (b) Verdadera (c) Verdadera (d) Falsa

⑤


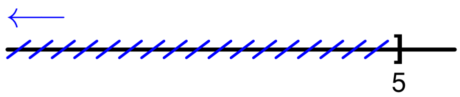
(a) Falsa (b) Falsa (c) Verdadera

⑥


(a) Verdadera (b) Falsa (c) Falsa

⑦


(a) Verdadera (b) Falsa (c) Verdadera

⑧


(a) Falsa (b) Verdadera (c) Verdadera

Enunciados

Representa gráficamente los siguientes intervalos y semirrectas y di si las afirmaciones que los acompañan son verdaderas o falsas.

① Intervalo (3,9)

Afirmaciones: (a) $3\in(3,9)$ (b) $9\in(3,9)$ (c) $4\in(3,9)$ (d) $10\in(3,9)$

② Intervalo [–4,1]

Afirmaciones: (a) $-4\in[-4,1]$ (b) $1\in[-4,1]$ (c) $1{,}01\in[-4,1]$ (d) $0\in[-4,1]$

③ Intervalo (–2,2]

Afirmaciones: (a) $2\in(-2,2]$ (b) $-2\in(-2,2]$ (c) $-2{,}1\in(-2,2]$ (d) $2{,}1\in(-2,2]$

④ Intervalo [1,8)

Afirmaciones: (a) $1\in[1,8)$ (b) $8\in[1,8)$ (c) $0\in[1,8)$ (d) $9\in[1,8)$

⑤ Intervalo (0,1)

Afirmaciones: (a) $0\notin(0,1)$ (b) $1\notin(0,1)$ (c) $0{,}5\notin(0,1)$ (d) $-0{,}1\notin(0,1)$

⑥ Intervalo [–3,4]

Afirmaciones: (a) $-3\notin[-3,4)$ (b) $4\notin[-3,4)$ (c) $-2\notin[-3,4)$ (d) $5\notin[-3,4)$

⑦ Intervalo (–7,–5]

Afirmaciones: (a) $-7\notin(-7,-5]$ (b) $-5\notin(-7,-5]$ (c) $4\notin(-7,-5]$ (d) $-4\notin(-7,-5]$

⑧ Intervalo [2,3)

Afirmaciones: (a) $2\notin[2,3)$ (b) $3\notin[2,3)$ (c) $2{,}6\notin[2,3)$ (d) $3{,}6\notin[2,3)$

⑨ Semirrecta (8,→)

Afirmaciones: (a) $8\in(8,\rightarrow)$ (b) $7{,}99\in(8,\rightarrow)$ (c) $9\in(8,\rightarrow)$

⑩ Semirrecta [–3,→)

Afirmaciones: (a) $-3\in[-3,\rightarrow)$ (b) $-3{,}1\in[-3,\rightarrow)$ (c) $-2{,}9\in[-3,\rightarrow)$

⑪ Semirrecta (←,5)

Afirmaciones: (a) $5\in(\leftarrow,5)$ (b) $5{,}1\in(\leftarrow,5)$ (c) $4{,}9\in(\leftarrow,5)$

⑫ Semirrecta (←,–7]

Afirmaciones: (a) $-7\in(\leftarrow,-7]$ (b) $-300\in(\leftarrow,-7]$ (c) $-6\in(\leftarrow,-7]$

⑬ Semirrecta (0,→)

Afirmaciones: (a) $0\notin(0,\rightarrow)$ (b) $0{,}\overline{1}\notin(0,\rightarrow)$ (c) $-0{,}00001\notin(0,\rightarrow)$

⑭ Semirrecta [–9,→)

Afirmaciones: (a) $-9\notin[-9,\rightarrow)$ (b) $-8\notin[-9,\rightarrow)$ (c) $-10\notin[-9,\rightarrow)$

Operaciones con intervalos y semirrectas

Como los intervalos y semirrectas son subconjuntos de números reales, es posible realizar con ellos todas las operaciones habituales con conjuntos; tomaremos como conjunto universal el conjunto $\mathbb{R}$.

Manejar bien estas operaciones es importante porque se utilizan para describir muchas propiedades de las funciones que utilizan los números reales. Por ejemplo, en el nivel 3 teníamos que definir los dominios de las funciones usando descripciones muy largas, que realmente podíamos haber sustituido por intervalos o semirrectas.

Para realizar las operaciones lo más importante es recordar y aplicar correctamente las definiciones de extremos abiertos y cerrados.

Al principio te puede venir bien representar gráficamente los conjuntos de los enunciados, pero verás que habrá un momento en que ya no lo necesitarás.

Enunciados

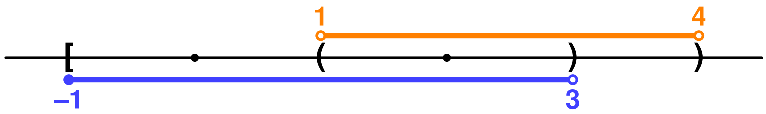
Escribe como un conjunto, del modo más sencillo posible, el resultado de cada una de las siguientes operaciones.

① $[-1,3)\cup(1,4)$ ② $[-2,4]\cap(1,5)$ ③ $[2,4)-(3,5]$ ④ $\overline{(\leftarrow,8]}$

Resoluciones

Para ayudarnos, hacemos una representación gráfica en la que queden muy claros separadamente los conjuntos que intervienen en la operación.

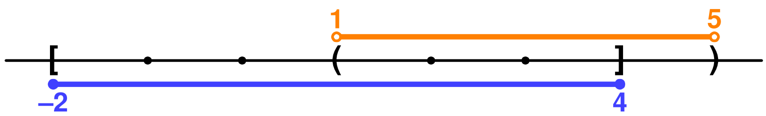
① Representación gráfica:



$[-1,3)\cup(1,4)=[-1,4)$

Nota: $-1\in[-1,3)\cup(1,4)$ porque $-1\in[-1,3)$ y $4\notin[-1,3)\cup(1,4)$ porque $4\notin(1,4)$

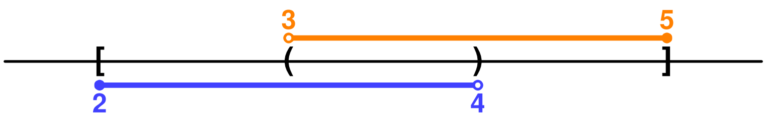
② Representación gráfica:



$[-2,4]\cap(1,5)=(1,4]$

Nota: $-1\notin[-2,4]\cap(1,5)$ porque $-1\notin(1,5)$ y $4\in[-2,4]\cap(1,5)$ porque $4\in[-2,4]$

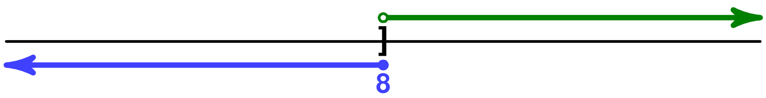
③ Representación gráfica:



$[2,4)-(3,5]=[2,3]$

Nota: $3\in[2,4)-(3,5]$ porque $3\notin(3,5]$

④ Representación gráfica:



$\overline{(\leftarrow,8]}=(8,\rightarrow)$

Nota: $8\notin\overline{(\leftarrow,8]}$ porque $8\in(\leftarrow,8]$

Enunciados

Escribe como un conjunto, del modo más sencillo posible, el resultado de cada una de las siguientes operaciones. Si lo necesitas, puedes hacer una representación gráfica aproximada.

①	②	③	④
$[2,4)\cup(3,5)$	$[1,5]\cap(2,6)$	$[0,2)-(1,3]$	$\overline{(\leftarrow,1]}$
⑤	⑥	⑦	⑧
$(-5,-3)\cup(-4,-2)$	$[7,9]\cap[8,10)$	$[-1,2)-[0,3)$	$\overline{(\leftarrow,-2)}$
⑨	⑩	⑪	⑫
$(5,8)\cup[7,9]$	$[-8,-5)\cap(-6,-4)$	$(6,8)-(7,9]$	$\overline{(3,\rightarrow)}$
⑬	⑭	⑮	⑯
$[0,4]\cup(3,5]$	$[-1,3)\cap[0,4)$	$[-3,0]-[-1,1]$	$\overline{[-6,\rightarrow)}$
⑰	⑱	⑲	⑳
$[-2,0)\cup(-1,1)$	$[0,3]\cap(1,4)$	$(4,8)-(5,8)$	$\overline{(\leftarrow,0]}$

Algunas operaciones concretas con intervalos y semirrectas

A menudo aparecen operaciones con intervalos y semirrectas que a primera vista resultan extrañas. Es conveniente trabajarlas para ver sus particularidades.

Enunciados

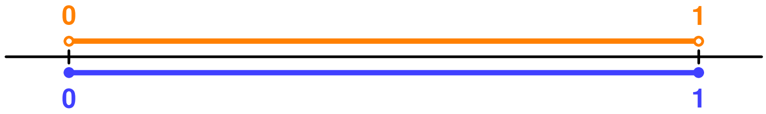
Escribe como un conjunto, del modo más sencillo posible, el resultado de cada una de las siguientes operaciones.

① [0,1]–(0,1) ② (0,1)∪{0} ③ [–1,0)∩(0,1) ④ (0,5)–(2,3)

Resoluciones

Para ayudarnos, hacemos una representación gráfica en la que queden muy claros separadamente los conjuntos que intervienen en la operación.

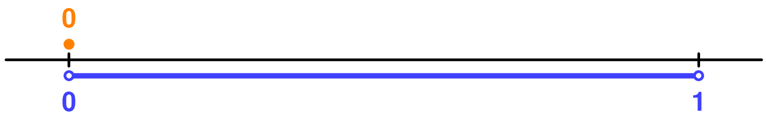
① Representación gráfica:



[0,1]–(0,1)={0,1}

Explicación: cuando a un intervalo cerrado le eliminamos el invervalo abierto con sus mismos extremos, solo quedan los propios extremos, que son dos puntos y por tanto hay que escribir el resultado con la notación general de cualquier conjunto, escribiendo sus elementos entre llaves.

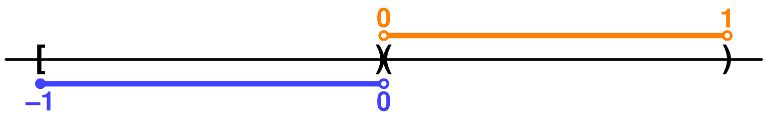
② Representación gráfica:



(0,1)∪{0}=[0,1)

Explicación: si a un intervalo que tiene un extremo abierto le añadimos exactamente el punto del extremo, cerramos ese extremo, porque ahora está incluido en el conjunto.

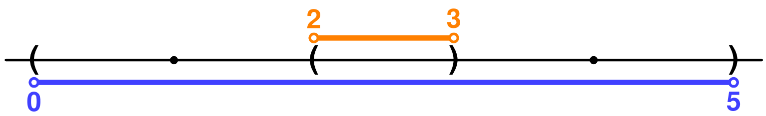
③ Representación gráfica:



[–1,0)∩(0,1)=∅

Explicación: a primera vista, el único punto que puede pertenecer a los dos intervalos de la operación es el punto 0, pero realmente no pertenece a ninguno de los dos. Parece que el 0 podría ser el punto de contacto de los dos conjuntos, pero no lo es, realmente los intervalos son disjuntos.

④ Representación gráfica:



(0,5)–(2,3)=(0,2]∪[3,5)

Explicación: el resultado que obtenemos de esta operación ya no es un conjunto conexo, luego no es intervalo. Para poder trabajar fácilmente con el resultado de la operación, suele ser preferible escribirlo como unión de dos intervalos disjuntos.

Enunciados

Escribe como un conjunto, del modo más sencillo posible, el resultado de cada una de las siguientes operaciones. Si lo necesitas, puedes hacer una representación gráfica aproximada.

①	②	③	④
$[3,4]-[3,4)$	$(4,6)\cup\{4,6\}$	$(2,4)\cap[4,5)$	$(0,5)-[2,3]$
⑤	⑥	⑦	⑧
$[-1,0]\cap[0,1)$	$\overline{[2,5)}$	$[5,7)-\{6\}$	$(8,9]-(7,10)$
⑨	⑩	⑪	⑫
$(-3,2)-(3,\rightarrow)$	$(3,\rightarrow)\cup(\leftarrow,5)$	$(3,\rightarrow)\cap(\leftarrow,5)$	$\mathbb{R}-(-3,3)$
⑬	⑭	⑮	⑯
$(0,1)\cup[1,2)$	$(0,1)\cup(1,2)$	$(\leftarrow,5)\cap(0,6]$	$[-1,1]-\{-1,0,1\}$
⑰	⑱	⑲	⑳
$[-2,2]\cup\{-1,0,1\}$	$(-1,1)\cap\{-1,0,1\}$	$(\leftarrow,0)\cap(0,\rightarrow)$	$\mathbb{R}-\{0\}$

Números menor y mayor de intervalos y semirrectas

Encontrar el número menor o el número mayor de un intervalo o de una semirrecta parece un problema sencillo y de poca utilidad. Sin embargo, no es tan sencillo (porque hay algún caso que esconde una complicación) y es de mucha utilidad, como veremos de ahora en adelante en este curso.

Enunciados

Averigua cuál es el número menor y el número mayor de cada uno de los siguientes conjuntos:

① [2,5]

② (←,4)

Resoluciones

① Empezamos con el caso más sencillo de todos.

El menor de los números del intervalo cerrado [2,5] es el 2, porque $2\in[2,5]$ y cualquier número menor que 2 ya no pertenece.

El mayor de los números del intervalo cerrado [2,5] es el 5, porque $5\in[2,5]$ y cualquier número mayor que 5 ya no pertenece.

Solución: el menor número es el 2 y el mayor número es el 5.

② En este caso nos enfrentamos a dos dificultades diferentes.

No hay ningún número de la semirrecta que sea el menor de la semirrecta, porque, para cualquier número $x\in(\leftarrow,4)$, siempre se puede encontrar otro número de la semirrecta que sea menor; por ejemplo, $x-1$.

No hay ningún número de la semirrecta que sea el mayor de la semirrecta, ya que cada vez que pensemos en un número $y\in(\leftarrow,4)$, por muy próximo que esté a 4, siempre podemos encontrar un número mayor que y que siga perteneciendo a la semirrecta; por ejemplo, $(y+4):2$ (recuerda que entre dos números reales hay infinitos números reales). La idea de que el mayor número de la semirrecta es el $3{,}\overline{9}$ es falsa, porque hay que recordar que $3{,}\overline{9}=4$ y por tanto no pertenece a la semirrecta.

Solución: no existe un menor número y no existe un mayor número.

Una diferencia entre extremo abierto y cerrado

Comparando los dos ejemplos anteriores se observa una diferencia muy importante entre un extremo abierto (incluyendo las posibilidades ∞ y $-\infty$) y un extremo cerrado: si el extremo está abierto, siempre podremos seguir indefinidamente aproximándonos a él permaneciendo en el conjunto, pero si el extremo está cerrado, llegaremos «al final».

Estudio de otros casos

Cualquier otro conjunto que nos pueda aparecer se podrá estudiar casi exactamente igual que con los dos ejemplos que acabamos de estudiar, con muy pequeñas variaciones en el razonamiento.

Enunciados

Averigua cuál es el número menor y el número mayor de cada uno de los siguientes conjuntos.

	Conjunto	Número menor	Número mayor
①	[–7,9]		
②	(←,–2)		
③	(3,8]		
④	[5,→)		
⑤	[–1,0)		
⑥	ℝ		
⑦	(–∞,9]		
⑧	(3,6)		
⑨	(–12,8]		
⑩	(0,∞)		
⑪	(–π,π]		
⑫	[π,→)		
⑬	(–∞,3)		
⑭	[–4,∞)		
⑮	[–2,0]		
⑯	(11,15]		
⑰	[–15,–11)		
⑱	(2,3)∪{4}		
⑲	[0,3]∪[4,5)		
⑳	ℝ–ℚ		
㉑	[0,1]∩ℚ		
㉒	(0,1)∩ℚ		
㉓	[0,1]–ℚ		
㉔	(0,1)–ℚ		

Conjuntos numerables

- En el nivel 1 del curso pudiste ver que card($\mathbb{Z}$)=card($\mathbb{N}$).
- En el nivel 2 del curso pudiste ver que card($\mathbb{Q}$)=card($\mathbb{N}$).
- En ambos casos la demostración consistió en establecer una correspondencia biunívoca (es decir, cada elemento de cada conjunto se relaciona con un elemento del otro) entre los elementos de $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$ con los de $\mathbb{N}$.
- Los conjuntos que tienen el mismo cardinal que $\mathbb{N}$ se llaman conjuntos **numerables**; se elige esa palabra para indicar que podemos poner los elementos del conjunto «en fila» y contarlos usando números naturales (1, 2, 3, etcétera).

El conjunto de los números reales no es numerable

Esta afirmación es bastante «fuerte», porque nos indica que hay diferentes tamaños de infinito, algo que, en principio, no es intuitivo, ¡pero que es verdad! Vamos a mostrarte una versión ligeramente simplificada de la demostración, que tiene gran importancia en matemáticas por utilizar una técnica llamada diagonalización.

Demostración

Vamos a demostrar por reducción al absurdo que el conjunto de números del intervalo abierto (0,1) no es numerable. Supongamos que fuera numerable; en ese caso, podríamos escribir todos los números reales de (0,1) en una lista numerada, como por ejemplo comenzaría la que vemos abajo la izquierda:

1	0,2294843590...
2	0,8404119383...
3	0,1192002237...
4	0,0010122838...
5	0,7739705311...
6	0,9384763091...
7	0,4912094203...
8	0,9388509219...
9	0,1009482733...
10	0,1120491290...

1	0,**2**294843590...
2	0,8**4**04119383...
3	0,11**9**2002237...
4	0,001**0**122838...
5	0,7739**7**05311...
6	0,93847**6**3091...
7	0,491209**4**203...
8	0,9388509**2**19...
9	0,10094827**3**3...
10	0,112049129**0**...

Nos fijamos en la primer cifra decimal del primer número de la lista, la segunda cifra decimal del segundo número de la lista, y así sucesivamente, como vemos señalados arriba a la derecha.

Formamos un número del intervalo (0,1) eligiendo sus cifras decimales de modo que sean distintas de las que hemos señalado antes; por ejemplo:

0,3501875341...

El número así construido no es igual a ningún número de la lista porque difiere del primer número en el primer decimal, del segundo número en el segundo decimal, etcétera. Pero está claro que el número pertenece al intervalo (0,1), luego deducimos que en la lista no estaban todos los números del intervalo (0,1), como habíamos supuesto. Hemos llegado a una contradicción, luego el conjunto de números reales del intervalo (0,1) no es numerable y por tanto tampoco lo es $\mathbb{R}$.

Clasificaciones de los números reales

Según la definición de hemos dado de los números reales, estos se pueden clasificar como racionales o irracionales. Sin embargo, hay aún otra clasificación que indaga en otras características que pueden tener los números reales.

Números algebraicos y trascencentes

- ✱ Se dice que un número real es un número algebraico cuando es la raíz de algún polinomio cuyos coeficientes son números enteros y no son todos nulos.
- ✱ Se dice que un número real es un número trascencente cuando no es un número algebraico.

Ejemplos

① El número $\sqrt{2}$ es algebraico porque es raíz del polinomio x^2-2.

② El núméro $\sqrt[3]{49}$ es algebraico porque es raíz del polinomio x^3-49.

③ El número de oro $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es algebraico porque es raíz del polinomio x^2-x-1.

Propiedad

Todo número racional es un número algebraico.

Demostración

Sea x un número racional.

Existen dos números enteros p y q (con $q\neq0$) que verifican $x=\frac{p}{q}$.

Deducimos: $x=\frac{p}{q} \Rightarrow qx=p \Rightarrow qx-p=0$

Luego x es raíz del polinomio $qx-p$, con $q\neq0$.

Algunos números que se sabe que son trascencentes

- ✱ No es nada fácil demostrar que un número es trascencente. De hecho, hay pocas demostraciones de que algún número es trascencente.
- ✱ Se sabe que π y e son trascendentes.

Cardinales de los tipos de números reales

- ✱ Sabemos que el conjunto de números racionales es numerable. Por tanto, el conjunto de números irracionales es no numerable.
- ✱ No es difícil demostrar que el conjunto de números algebraicos es numerable, de lo que se deduce que el conjunto de números trascendentes es no numerable.

Propuesta

Piensa cómo se podría demostrar la siguiente propiedad: «si un número real es raíz de un polinomio con coeficientes racionales no todos nulos, entonces es un número albebraico». Para ayudarte a pensar: hay solo un número que es raíz del polinomio $\frac{1}{3}x^5+\frac{2}{5}x^3-\frac{7}{11}$; ese número es raíz de infinitos polinomios con coeficientes enteros. ¿Cuál de ellos tiene el menor coeficiente positivo de x^5? Puedes ver la solución más abajo, a la derecha, pero necesitarás un espejo para verla bien.

$55x^5+66x^3-115$

Raíz de un número real

* Si a es un número real y n es un número natural, se define la «raíz de orden n» de a como un número real que elevado a n da como resultado a.
* Simbólicamente: $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a$
* Tiene las mismas características que cuando la cantidad subradical es un número racional. Las propiedades se demuestran usando la definición.

Ejemplos

① $\sqrt[3]{\pi}$ es un número real que elevado al cubo da π.

② $\sqrt{e}$ es un número real que elevado al cuadrado da e.

③ $\sqrt[3]{-0{,}125}$ es un número real que elevado al cubo da –0,125.

Potencia de base real y exponente racional

* Los números reales **no negativos** son positivos o cero: [0,→).
* Si a es un número real no negativo y q es un número racional, sabemos que q se puede expresar como una fracción $\frac{m}{n}$, en la que m es un número entero y n es un número natural.
* Definimos la potencia de base a y exponente q como el número real obtenido de la operación $\sqrt[n]{a^m}$. Es decir:

$$\boxed{q=\frac{m}{n} \Rightarrow a^q=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}}$$

Ejemplos

④ $2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3}$ ⑤ $5^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^{-2}}$ ⑥ $3^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{3}$ ⑦ $7^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{7^{-1}}$

⑧ $(-1)^{\frac{1}{2}}$ no está definido. ⑨ $0^{\frac{7}{11}}=0$.

Cálculos con calculadora

* Las calculadoras admiten los exponentes fraccionarios, aunque no hay que olvidar encerrarlos entre paréntesis.
* Si una calculadora no tiene tecla de raíz genérica, la operación se puede realizar reescribiéndola como una potencia con exponente fraccionario.
* Las calculadoras deben detectar si la base es negativa y advertir del error.

Ejemplos

⑩ $2^{\frac{3}{4}}=1{,}681792831$. Calculadora: 2 y^x (3 ÷ 4) =

⑪ $5^{-\frac{2}{3}}=0{,}341995189$. Calculadora: 5 y^x ((-) 2 ÷ 3) =

⑫ $\sqrt[5]{3}=1{,}24573094$. Calculadora: 3 y^x (1 ÷ 5) =

⑬ $(-1)^{\frac{1}{2}}$ no existe. Calculadora: ((-) 1) y^x (1 ÷ 2) = ⇨ Error

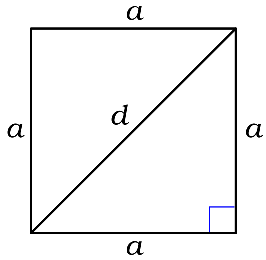
Importancia del uso de radicales

En matemáticas, un radical es una raíz indicada; es decir, no se calcula su valor decimal, sino que se deja el signo de raíz. Naturalmente, si la raíz fuera exacta y sencilla, usaríamos el valor, pero no suele ser el caso.

- ✱ **Ejemplo 1**. Si nos aparece como parte de una operación $\sqrt{9}$, escribiremos 3.
- ✱ **Ejemplo 2**. Si nos aparece como parte de una operación $\sqrt{2}$, es más exacto y más sencillo dejarlo así que sustituirlo por una aproximación decimal.

Hay muchos desarrollos e investigaciones en matemáticas en los que es necesario asegurar **exactamente** el resultado, no es suficiente con tener bien digamos cien cifras significativas (en ingeniería sí puede valer). Y también hay ocasiones en las que es más significativo ver el radical que el valor decimal.

Ejemplo 3



Enunciado: si el lado de un cuadrado mide a, ¿cuál es la longitud de su diagonal?

Llamamos d a la longitud de la diagonal del cuadrado.

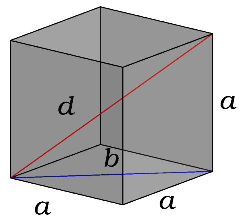
Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2+a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2} = \sqrt{2}\cdot a = a\sqrt{2}$$

Observa que hemos llegado a una expresión útil, sencilla, exacta e incluso fácil de recordar: $d = a\sqrt{2}$. Este es el objetivo del trabajo con radicales.

Para llegar a la expresión final hemos pasado por la igualdad $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2}$, que deberemos justificar cuando demostremos que la raíz de un producto es el producto de las raíces. Hay varias propiedades como esta, que deberemos demostrar y que luego podremos utilizar cuando sea necesario para nuestro objetivo.

Ejemplo 4



Enunciado: si el lado de un cubo mide a, ¿cuál es la longitud de su diagonal?

Llamamos d a la longitud de la diagonal del cubo y b a la longitud de la diagonal de la cara. Por el ejemplo anterior sabemos que $b = a\sqrt{2}$.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2+b^2 = a^2+(a\sqrt{2})^2 = a^2+a^2\cdot 2 = 3a^2 \Rightarrow d = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2} = \sqrt{3}\cdot a = a\sqrt{3}$$

Otra vez llegamos a una expresión interesante: $d = a\sqrt{3}$

Observa que la expresión del ejemplo (3) ha sido muy útil para seguir haciendo operaciones con ella, mucho más que si hubiéramos usado la expresión decimal aproximada de la raíz cuadrada de 2.

Más ejemplos

Los radicales están presentes en muchas expresiones matemáticas, normalmente junto con fracciones.

- ✱ **Ejemplo 5**. Si la longitud del lado de un triángulo equilátero es a, el área del triángulo es $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Te proponemos que lo demuestres tú mismo más adelante.
- ✱ **Ejemplo 6**. Si la longitud del lado de un icosaedro es a, el área del icosaedro es $a^2\cdot 5\sqrt{3}$. Lo puedes demostrar muy fácilmente usando el ejemplo (5).

Simplificación y amplificación de exponente e índice

Si a es un número real no negativo, n y p son números naturales y m es un número entero, se verifica:

$$\boxed{\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}}$$

Demostración

Por definición de raíz, hay que demostrar que $\sqrt[n]{a^m}$ elevado a np da a^{mp}:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^p = \left(a^m\right)^p = a^{mp}$$

Modos de uso

* Si utilizamos la igualdad de izquierda a derecha, estamos **simplificando** el exponente y el índice.
  - Ejemplo 1: $\sqrt[6]{a^8}=\sqrt[3]{a^4}$. Ya que 6=2·3 y 8=2·4, hemos simplificado el 2.
  - Ejemplo 2: $\sqrt[10]{a^{15}}=\sqrt{a^3}$. Ya que 10=2·5 y 15=3·5, hemos simplificado el 5.
  - Ejemplo 3: $\sqrt[12]{a^4}=\sqrt[3]{a}$. Ya que 12=3·4 y 4=1·4, hemos simplificado el 4.
  - Ejemplo 4: $\sqrt[9]{a^{18}}=a^2$. Ya que 9=9·1 y 18=9·2, hemos simplificado el 9. Observa que ha desaparecido la raíz porque queda índice 1.
* Si utilizamos la igualdad de derecha a izquierda, estamos **amplificando** el exponente y el índice.
  - Ejemplo 5: $\sqrt[5]{a^3}=\sqrt[10]{a^6}$. Hemos multiplicado por 2 el exponente y el índice.
  - Ejemplo 6: $\sqrt{a^7}=\sqrt[6]{a^{21}}$. Hemos multiplicado por 3 el exponente y el índice.
  - Ejemplo 7: $\sqrt[7]{a}=\sqrt[35]{a^5}$. Hemos multiplicado por 5 el exponente y el índice.
  - Ejemplo 8: $a^3=\sqrt[7]{a^{21}}$. Hemos multiplicado por 7 el exponente y el índice. Observa que usamos que $a^3=\sqrt[1]{a^3}$

Utilidad de la simplificación

El método de simplificación de exponente e índice se usa para poder manejar expresiones más sencillas. Si la cantidad subradical es un número, se puede descomponer en factores primos para ver si es posible la simplificación.

* Ejemplo 9: $\sqrt[10]{64}=\sqrt[10]{2^6}$ =(simplificando entre 2)= $\sqrt[5]{2^3}=\sqrt[5]{8}$
* Ejemplo 10: $\sqrt[6]{81}=\sqrt[6]{3^4}$ =(simplificando entre 2)= $\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{9}$
* Ejemplo 11: $\sqrt[6]{512}=\sqrt[6]{2^9}$ =(simplificando entre 3)= $\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$

Utilidad de la amplificación

El método de amplificación de exponente e índice se puede utilizar, entre otras cosas, para comparar dos raíces sin calcularlas.

* Ejemplo 12: Compara $\sqrt{41}$ y $\sqrt[3]{274}$ sin calcularlas.

  Resolución: como mcm(2,3)=6, convertimos los dos radicales a índice 6:

  $\sqrt{41}=\sqrt[6]{41^3}=\sqrt[6]{68921}$; $\sqrt[3]{274}=\sqrt[6]{274^2}=\sqrt[6]{75076}$. $75076>68921 \Rightarrow \sqrt[3]{274}>\sqrt{41}$

  Solución: $\sqrt[3]{274}>\sqrt{41}$

Producto de radicales del mismo índice

Si a y b son dos números reales no negativos y n es un número natural, se verifica:

$$\boxed{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$$

Demostración

$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$

Cociente de radicales del mismo índice

Si a y b son dos números reales no negativos y n es un número natural, se verifica:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Demostración

$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$

Modos de uso

✱ Si utilizamos las igualdades de izquierda a derecha, estamos **descomponiendo** el radical.

- Ejemplo 1: $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\cdot 3}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$.
- Ejemplo 2: $\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.
- Ejemplo 3: $\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Ejemplo 4: $\sqrt[3]{\frac{2}{27}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

✱ Si utilizamos las igualdades de derecha a izquierda, estamos **combinando** los radicales.

- Ejemplo 5: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$.
- Ejemplo 6: $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{9\cdot 3}=\sqrt[3]{27}=3$.
- Ejemplo 7: $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{32}{2}}=\sqrt{16}=4$.
- Ejemplo 8: $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{81}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$

Utilidad

Estas transformaciones son muy útiles para simplificar al máximo algunas expresiones con radicales.

✱ Ejemplo 9: $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{6\cdot 10}=\sqrt{60}=\sqrt{4\cdot 15}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{15}=2\sqrt{15}$.

✱ Ejemplo 10: $\frac{\sqrt{66}}{\sqrt{24}}=\sqrt{\frac{66}{24}}=\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Extracción de factores de un radical

Es una de las técnicas más usadas para simplificar radicales. Se basa en la aplicación de dos propiedades: la descomposición de radicales y la simplificación de exponente e índice.

Ejemplo 1

Comenzamos con un ejemplo preliminar dando todos los pasos para entender el concepto; más adelante podremos hacerlo mediante un método más rápido.

Enunciado: simplifica al máximo el radical $\sqrt{42336}$

Descomponemos la cantidad subradical en factores primos: $42336 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7^2$

Como el radical es de índice 2, escribimos todos los exponentes como un múltiplo de 2 más un resto (si lo hay): $42336 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7^2 = 2^{4+1} \cdot 3^{2+1} \cdot 7^2$

Descomponemos las potencias que tienen una suma en el exponente:

$42336 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7^2 = 2^{4+1} \cdot 3^{2+1} \cdot 7^2 = 2^4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 7^2$

Y ya podemos simplificar el radical:

$\sqrt{42336} = \sqrt{2^4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 7^2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{6} = 84\sqrt{6}$.

Solución: $\sqrt{42336} = 84\sqrt{6}$

Ejemplo 2

Enunciado: simplifica al máximo el radical $\sqrt[3]{a^5 \cdot b^6 \cdot c^{10}}$

Cuando hay letras no tenemos que hacer la descomposición factorial.

Como el radical es de índice 3, escribimos todos los exponentes como un múltiplo de 3 más un resto (si lo hay) y descomponemos las potencias que tienen una suma en el exponente: $a^5 \cdot b^6 \cdot c^{10} = a^{3+2} \cdot b^6 \cdot c^{9+1} = a^3 \cdot a^2 \cdot b^6 \cdot c^9 \cdot c$

Y ya podemos simplificar el radical:

$\sqrt[3]{a^5 \cdot b^6 \cdot c^{10}} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a^2 \cdot b^6 \cdot c^9 \cdot c} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6} \cdot \sqrt[3]{c^9} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot c} = a \cdot b^2 \cdot c^3 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot c}$.

Solución: $\sqrt[3]{a^5 \cdot b^6 \cdot c^{10}} = a \cdot b^2 \cdot c^3 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot c}$

Fórmula general

Para simplificar al máximo $\sqrt[n]{a^m}$, hacemos la división entera de m entre n ,para obtener el cociente, c, y el resto, r. Entonces $m=c \cdot n+r$ y la simplificación es:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^c \sqrt[n]{a^r}}$$

Ejemplo 3: simplifica al máximo el radical $\sqrt[7]{a^{25}}$.

División entera: $25 = 3 \cdot 7 + 4$. Por tanto, $\sqrt[7]{a^{25}} = a^3 \cdot \sqrt[7]{a^4}$

Caso particular

Hay un caso de simplificación de radicales, que aparece muy poco, que es bastante particular: la base es negativa y el índice es par. Por ejemplo, ¿como simplificaríamos el radical $\sqrt{(-3)^2}$? Obviamente, la respuesta es 3, ya que $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$. Pero si en vez del -3 vemos una letra, podríamos pensar $\sqrt{a^2} = a$; esta expresión solo es válida cuando a es no negativo (lo que suele ser lo más habitual). Realmente, la simplificación correcta es

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

Enunciados

Simplifica lo máximo que se pueda las siguientes expresiones.

① $\sqrt[22]{a^{14}}$

② $\sqrt[21]{a^{14}}$

③ $\sqrt[18]{a^{6}}$

④ $\sqrt[3]{a^{12}}$

⑤ $\sqrt[15]{3^{10}}$

⑥ $\sqrt[12]{5^{9}}$

⑦ $\sqrt[16]{7^{8}}$

⑧ $\sqrt[21]{10^{7}}$

Enunciados

⑨ Compara $\sqrt{7}$ y $\sqrt[3]{19}$ sin calcularlas.

⑩ Compara $\sqrt{11}$ y $\sqrt[3]{36}$ sin calcularlas.

Enunciados

El resultado de las siguientes operaciones es un número natural. Calcúlalo utilizando propiedades de los radicales.

⑪ $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$

⑫ $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$

⑬ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

⑭ $\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$

Enunciados

Escribe los siguientes radicales del modo más sencillo posible.

⑮ $\sqrt{75}$

⑯ $\sqrt[3]{16}$

⑰ $\sqrt[4]{243}$

⑱ $\sqrt{72}$

⑲ $\sqrt{a^{7}\cdot b^{8}}$

⑳ $\sqrt[5]{a^{21}\cdot b^{27}}$

㉑ $\sqrt[11]{a^{35}}$

Potencia de un radical

Si a es un número real no negativo y n y p son números naturales, se verifica:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}}$$

Demostración

Según la definición de raíz, para demostrar que la raíz enésima de a^p es $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p$, tenemos que elevar $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p$ a la potencia n y comprobar que obtenemos a^p. Lo podremos conseguir utilizando propiedades de las potencias de exponente natural.

$$\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^p\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{pn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^p = a^p$$

Explicación

Una manera de ver esta propiedad es que los exponentes pueden estar tanto dentro como fuera del radical, según nos interese.

Ejemplos

Ejemplo 1. $\left(\sqrt[5]{2}\right)^4 = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$

Ejemplo 2. $\left(\sqrt[7]{3}\right)^2 = \sqrt[7]{3^2} = \sqrt[7]{9}$

Ejemplo 3. $\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = \left(\sqrt[4]{3}\right)^3$

Ejemplo 4. $\sqrt[3]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^2$

Raíz de un radical

Si a es un número real no negativo y n y q son números naturales, se verifica:

$$\boxed{\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[qn]{a}}$$

Demostración

Según la definición de raíz, para demostrar que la raíz qn de a es $\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}$, tenemos que elevar $\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}$ a la potencia qn y comprobar que obtenemos a. Lo podremos conseguir utilizando dos veces la propia definición de raíz y una propiedad de las potencias de exponente natural.

$$\left(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}\right)^{qn} = \left(\left(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}\right)^q\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Ejemplos

Ejemplo 5. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[15]{2}$

Ejemplo 6. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$

Ejemplo 7. $\sqrt[35]{3} = \sqrt[7]{\sqrt[5]{3}}$

Ejemplo 8. $\sqrt[35]{3} = \sqrt[5]{\sqrt[7]{3}}$

Utilización combinada

Normalmente hace falta aplicar varias propiedades de los radicales hasta llegar a una expresión que nos satisfaga.

Ejemplo 9. $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[2]{2^3}} = \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[8]{2^3} = \sqrt[8]{2 \cdot 2^3} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$

(Hemos usado raíz de un radical, producto de radicales y simplificación)

Radicales semejantes

Decimos que dos o más expresiones con radicales son semejantes cuando en todas ellas aparece un número real multiplicado por el mismo radical.

Ejemplo 1. Las expresiones $3\sqrt{2}$ y $-7\sqrt{2}$ son radicales semejantes.

Ejemplo 2. Las expresiones $5\sqrt{2}$ y $9\sqrt{3}$ no son radicales semejantes.

Ejemplo 3. Las expresiones $\frac{\sqrt{7}}{4}$ y $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ son radicales semejantes.

Ejemplo 4. Las expresiones $\frac{\sqrt[3]{2}}{5}$ y $\frac{3\sqrt{2}}{7}$ no son radicales semejantes.

Suma de radicales

Evidentemente, los radicales siempre se pueden sumar usando sus expresiones decimales, puesto que son números reales. Pero cuando trabajamos con radicales lo que realmente nos interesa es si es posible agrupar la suma de dos o más radicales en uno solo, puesto que eso sería una buena simplificación de la expresión.

* La suma de dos o más radicales solo se puede agrupar en un solo radical si son semejantes. Para hacerlo, basta extraer factor común el radical y operar.
* La suma de dos radicales no se agrupar en un solo radical si los radicales no son semejantes.

Ejemplos

Ejemplo 5. $3\sqrt{2}-7\sqrt{2} = (3-7)\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$

Ejemplo 6. $5\sqrt{2}+9\sqrt{3}$ es una expresión que no se puede simplificar más.

Ejemplo 7. $\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{2\sqrt{7}}{3} = \left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\sqrt{7} = \frac{11}{12}\sqrt{7}$

Ejemplo 8. $\frac{\sqrt{5}}{7}+\frac{\sqrt{11}}{4}$ es una expresión que no se puede simplificar más.

Preparación de radicales para agruparlos

Una de las técnicas más usadas para agrupar una suma de radicales es prepararlos primero para que sean semejantes. Para ello solemos extraer factores de los radicales. No siempre es posible aplicar esta técnica en problemas reales, pero en los ejercicios de educación secundaria es muy habitual (porque se preparan así).

Ejemplo 9. $5\sqrt{8}+3\sqrt{2}-2\sqrt{18} = 5\sqrt{2^3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2\cdot 3^2} = 5\cdot 2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\cdot 3\sqrt{2} =$
$= 10\sqrt{2}+3\sqrt{2}-6\sqrt{2} = (10+3-6)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

Ejemplo 10. $3\sqrt{75}-8\sqrt{27}+\sqrt{48} = 3\sqrt{3\cdot 5^2}-8\sqrt{3^3}+\sqrt{2^4\cdot 3} =$
$= 3\cdot 5\sqrt{3}-8\cdot 3\sqrt{3}+2^2\sqrt{3} = 15\sqrt{3}-24\sqrt{3}+4\sqrt{3} =$
$= (15-24+4)\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$

Ejemplo 11. $\frac{\sqrt{20}}{4}+\frac{\sqrt{45}}{2}+\frac{3\sqrt{125}}{2} = \frac{\sqrt{2^2\cdot 5}}{4}+\frac{\sqrt{3^2\cdot 5}}{2}+\frac{3\sqrt{5^3}}{2} =$
$= \frac{2\sqrt{5}}{4}+\frac{3\sqrt{5}}{2}+\frac{3\cdot 5\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}+\frac{15\sqrt{5}}{2} =$
$= \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{15}{2}\right)\sqrt{5} = \frac{19\sqrt{5}}{2}$

Enunciados

Simplifica lo máximo que se pueda las siguientes expresiones.

① $17\sqrt{2}+2\sqrt{8}-3\sqrt{32}$

② $2\sqrt{27}-4\sqrt{3}-\sqrt{243}$

③ $7\sqrt{44}+5\sqrt{99}-3\sqrt{11}$

④ $-3\sqrt{605}+4\sqrt{80}-10\sqrt{405}$

⑤ $9\sqrt{24}+\sqrt{54}-11\sqrt{150}$

⑥ $\dfrac{\sqrt{363}}{2}+\dfrac{\sqrt{48}}{2}-\dfrac{5\sqrt{192}}{8}$

⑦ $-\dfrac{\sqrt{162}}{3}+\sqrt{98}+\dfrac{5\sqrt{72}}{3}$

⑧ $\dfrac{7\sqrt{45}}{3}+\dfrac{5\sqrt{180}}{12}-\sqrt{245}$

⑨ $\dfrac{\sqrt{28}}{4}-\sqrt{343}+\dfrac{7\sqrt{63}}{3}$

⑩ $\dfrac{\sqrt{294}}{14}+\sqrt{216}-\dfrac{\sqrt{486}}{3}$

⑪ $5\sqrt[3]{40}-3\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{625}$

⑫ $8\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{250}$

⑬ $2\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{375}-3\sqrt[3]{192}$

⑭ $\sqrt[3]{864}+3\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{500}$

⑮ $\sqrt[3]{88}+\sqrt[3]{297}-\sqrt[3]{1331}$

⑯ $4\sqrt{2}+7\sqrt{3}-5\sqrt{8}-\sqrt{27}$

⑰ $3\sqrt{20}+\sqrt{7}-3\sqrt{28}+2\sqrt{45}$

⑱ $6\sqrt{50}+2\sqrt{63}-4\sqrt{242}-3\sqrt{252}$

⑲ $7\sqrt{50}+4\sqrt[3]{2}-3\sqrt{98}+\sqrt[3]{54}$

⑳ $-7\sqrt[3]{24}+2\sqrt{45}+7\sqrt[3]{81}+4\sqrt{500}$

㉑ $\sqrt{125}+3\sqrt{80}-\dfrac{\sqrt{72}}{3}-\dfrac{\sqrt{288}}{4}$

㉒ $\dfrac{\sqrt[3]{48}}{4}+\dfrac{\sqrt[3]{162}}{6}-5\sqrt{288}+4\sqrt{338}$

㉓ $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{6}+\dfrac{\sqrt[3]{250}}{5}-\dfrac{\sqrt[5]{486}}{2}+\dfrac{\sqrt[3]{54}}{2}$

Operaciones comunes con radicales

Aunque es importante conocer todas las propiedades de los radicales, es verdad que algunas de ellas son un poco «exóticas» y se usan poco en el día a día. Lo que sí nos encontramos constantemente son operaciones comunes en los que intervienen radicales sencillos. Vamos a ver unos ejemplos con detenimiento; tú podrás saltarte pasos en cuanto lo manejes un poco.

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo posible.

① $\sqrt{7}\cdot(4\sqrt{7})$

② $\sqrt{2}(3+5\sqrt{8})$

③ $(3+4\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})$

④ $(3+7\sqrt{5})^2$

⑤ $(7-4\sqrt{3})^2$

⑥ $(5+2\sqrt{7})(5-2\sqrt{7})$

⑦ $(1+\sqrt{2})^4$

⑧ $(3-5\sqrt{3})^2 + (2+9\sqrt{3})^2$

Resoluciones

Tratamos los radicales de un modo muy similar a como tratábamos las letras en las expresiones algebraícas: la expresión «$7+5\sqrt{17}$» se parece a «$7+5x$».

① $\sqrt{7}\cdot(4\sqrt{7}) = 4\cdot(\sqrt{7})^2 = 4\cdot 7 = 28$

② $\sqrt{2}(3+5\sqrt{8}) = 3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\sqrt{8} = 3\sqrt{2}+5\sqrt{16} = 3\sqrt{2}+5\cdot 4 = 20+3\sqrt{2}$

③ $(3+4\sqrt{2})(5-2\sqrt{2}) = 3\cdot 5-3\cdot 2\sqrt{2}+4\cdot 5\sqrt{2}-4\cdot 2(\sqrt{2})^2 = 15-6\sqrt{2}+20\sqrt{2}-8\cdot 2 =$
$= -1+14\sqrt{2}$

④ $(3+7\sqrt{5})^2 = 3^2+2\cdot 3\cdot 7\sqrt{5}+(7\sqrt{5})^2 = 9+42\sqrt{5}+49\cdot 5 = 254+42\sqrt{5}$

⑤ $(7-4\sqrt{3})^2 = 7^2-2\cdot 7\cdot 4\sqrt{3}+(4\sqrt{3})^2 = 49-56\sqrt{3}+16\cdot 3 = 97-56\sqrt{3}$

⑥ $(5+2\sqrt{7})(5-2\sqrt{7}) = 5^2-(2\sqrt{7})^2 = 25-4\cdot 7 = -3$

⑦ $(1+\sqrt{2})^4 = ((1+\sqrt{2})^2)^2 = (1+2\sqrt{2}+2)^2 = (3+2\sqrt{2})^2 = 9+2\cdot 2\cdot\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2 =$
$= 9+4\sqrt{2}+4\cdot 2 = 17+4\sqrt{2}$

⑧ $(3-5\sqrt{3})^2 + (2+9\sqrt{3})^2 = 9-30\sqrt{3}+75+4+36\sqrt{3}+243 = 331+6\sqrt{3}$

(Hemos ido un poco más rápido en este ejemplo)

Comentarios

En las resoluciones (1) y (6) vemos que la expresión original tiene radicales, pero la expresión final no las tiene. Usaremos eso más adelante.

Enunciados

Escribe las siguientes expresiones del modo más sencillo posible.

① $(2\sqrt{11})\sqrt{11}$

② $\sqrt{3}(2+7\sqrt{27})$

③ $(5+3\sqrt{2})(4-7\sqrt{2})$

④ $(5+3\sqrt{5})^2$

⑤ $(4-7\sqrt{3})^2$

⑥ $(1+3\sqrt{7})(1-3\sqrt{7})$

⑦ $(2+\sqrt{3})^4$

⑧ $(2-7\sqrt{5})^2 + (1+8\sqrt{5})^2$

⑨ $(2+3\sqrt{11})(-2+4\sqrt{11})+(5-\sqrt{11})^2$

⑩ $(4+\sqrt{13})(4-\sqrt{13})+(2-\sqrt{17})(2+\sqrt{17})$

⑪ $(2\sqrt{13})\sqrt{13}$

⑫ $\sqrt{5}(1-\sqrt{125})$

⑬ $(7-2\sqrt{3})(2-5\sqrt{3})$

⑭ $(2+7\sqrt{2})^2$

⑮ $(5-2\sqrt{3})^2$

⑯ $(4-5\sqrt{2})(4+5\sqrt{2})$

⑰ $(1-\sqrt{5})^4$

⑱ $(4-\sqrt{3})^2+(5+3\sqrt{3})^2$

⑲ $(-1+4\sqrt{13})(2+3\sqrt{13})+(5-2\sqrt{13})^2$

⑳ $(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})+(4-\sqrt{13})(4+\sqrt{13})$

㉑ $(1+\sqrt[4]{2})(1-\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})$

㉒ $(1+\sqrt[4]{3})^2+\sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{3}-2)$

㉓ $\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}+\dfrac{3(3-\sqrt{3})^2}{4}$

㉔ $(\sqrt{3}+\sqrt{10})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{15})^2$

㉕ $\dfrac{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})}{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}$

Racionalización

Llamamos racionalización al proceso de modificar una expresión para que algunos radicales cambien de lugar; casi siempre se utiliza en fracciones: podemos racionalizar el denominador y conseguir que los radicales pasen al numerador o al revés, según interese en cada caso. La racionalización, bien utilizada, permite simplificar algunos problemas o incluso resolverlos. En este nivel aprenderás cómo racionalizar denominadores, pero lo más importante es que te familiarices con las técnicas utilizadas, que te serán útiles más adelante.

Cálculos con raíces en el denominador

Uno de los usos más tempranos de la racionalización fue aplicado al cálculo numérico manual, pasando los radicales del denominador al numerador.

Imagina que necesitas calcular con bolígrafo y papel el valor numérico de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

¿Ves el problema? Como el dividendo tiene infinitas cifras, tendrás que comenzar por calcular una aproximación. Usaremos el signo «≈» con el significado de «aproximadamente».

Si usas $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, entonces $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1{,}41} = 0{,}7092$ (con cuatro cifras significativas)

Si usas $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1{,}4142} = 0{,}7071$ (con cuatro cifras significativas)

Si necesitas que la solución final tenga más cifras significativas, necesitas calcular la raíz con más cifras significativas (eso es fácil) y **empezar la división desde el principio** (esto es laborioso), luego no es un método muy bueno.

Sin embargo, con una pequeña manipulación con radicales, podemos llegar a una expresión alternativa:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ahora, si necesitamos más precisión en la respuesta, podemos averiguar más cifras de la raíz cuadrada y **continuar la división desde donde la dejamos**. Por tanto, este método es mejor.

Por otro lado, debemos comparar la diferente dificultad que tiene dividir con un divisor que tiene muchas cifras y dividir con un divisor con una sola cifra. Este argumento también nos indica que el segundo método es mejor que el primero.

Metodos de racionalización

El método concreto que hay que aplicar para racionalizar depende del aspecto que tengan los radicales, pero la idea básica es sencilla: multiplicar el numerador y el denominador por la misma expresión, para que al realizar las operaciones pertinentes, los radicales desaparezcan del lugar deseado.

- Ejemplo 1. Si multiplicamos $\sqrt{2}$ por $\sqrt{2}$: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$
- Ejemplo 2. Si multiplicamos $\sqrt[5]{a^3}$ por $\sqrt[5]{a^2}$: $\sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a^3\cdot a^2} = \sqrt[5]{a^5} = a$
- Ejemplo 3. Si multiplicamos $3+\sqrt{5}$ por $3-\sqrt{5}$: $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = 9-5 = 4$
- Ejemplo 4. Si multiplicamos $\sqrt{7}-2$ por $\sqrt{7}+2$: $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2) = 7-4 = 3$
- Ejemplo 5. Si multiplicamos $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ por $\sqrt{3}-\sqrt{2}$: $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$

Enunciados

Racionaliza los denominadores de las siguientes expresiones y simplifícalas lo máximo que sea posible.

① $\frac{6}{\sqrt{3}}$ ② $\frac{7}{\sqrt{14}}$ ③ $\frac{10}{\sqrt[7]{8}}$ ④ $\frac{2}{\sqrt[5]{26^2}}$ ⑤ $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ ⑥ $\frac{3}{\sqrt{17}+\sqrt{8}}$

Resoluciones

Vamos a dar muchos pasos, pero tú puedes saltarte algúno que veas muy claro.

① Multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{3}$

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

② Multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{14}$

$$\frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{(\sqrt{14})^2} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

③ Como $\sqrt[7]{8} = \sqrt[7]{2^3}$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[7]{2^4}$

Hemos calculado que 7–3=4.

$$\frac{10}{\sqrt[7]{8}} = \frac{10}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{10\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3}\cdot\sqrt[7]{2^4}} = \frac{10\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3\cdot 2^4}} = \frac{10\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^7}} = \frac{10\sqrt[7]{2^4}}{2} = 5\sqrt[7]{2^4} = 5\sqrt[7]{16}$$

④ Como 5–2=3, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[5]{26^3}$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{26^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{26^3}}{\sqrt[5]{26^2}\cdot\sqrt[5]{26^3}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{26^3}}{\sqrt[5]{26^2}\cdot\sqrt[5]{26^3}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{26^3}}{\sqrt[5]{26^5}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{26^3}}{26} = \frac{\sqrt[5]{26^3}}{13}$$

Dejamos una potencia en el resultado porque ya había una potencia en el enunciado (al contrario que en el ejercicio anterior).

⑤ Multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{3}+1$

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3}+1$$

⑥ Multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{17}-\sqrt{8}$

$$\frac{3}{\sqrt{17}+\sqrt{8}} = \frac{3(\sqrt{17}-\sqrt{8})}{(\sqrt{17}+\sqrt{8})(\sqrt{17}-\sqrt{8})} = \frac{3(\sqrt{17}-\sqrt{8})}{(\sqrt{17})^2-(\sqrt{8})^2} = \frac{3(\sqrt{17}-\sqrt{8})}{17-8} =$$

$$= \frac{3(\sqrt{17}-\sqrt{8})}{9} = \frac{\sqrt{17}-\sqrt{8}}{3}$$

Conjugado de una expresión

Dadas dos expresiones de la forma «a+b» y «a–b», se dice que una es el conjugado de la otra. Por eso, la técnica que hemos usado en los ejemplos (5) y (6) se suele explicar diciendo que hemos multiplicado el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

Enunciados

Racionaliza los denominadores de las siguientes expresiones y simplifícalas lo máximo que sea posible.

① $\frac{30}{\sqrt{5}}$

② $\frac{3}{\sqrt{21}}$

③ $\frac{15}{\sqrt[5]{27}}$

④ $\frac{2}{\sqrt[5]{22^3}}$

⑤ $\frac{4}{\sqrt{5}-3}$

⑥ $\frac{2}{\sqrt{19}+\sqrt{17}}$

⑦ $\frac{42}{\sqrt{7}}$

⑧ $\frac{5}{\sqrt{15}}$

⑨ $\frac{14}{\sqrt[3]{2}}$

⑩ $\frac{3}{\sqrt[5]{15^2}}$

⑪ $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$

⑫ $\frac{5}{\sqrt{13}-\sqrt{8}}$

⑬ $\frac{70}{\sqrt{5}\sqrt{7}}$

⑭ $\frac{4}{(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

⑮ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

⑯ $\frac{1}{\sqrt{5}-2}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}$

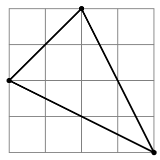
⑰ $\frac{6}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2+\sqrt{3}}$

Enunciados

① Demuestra que $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

② Consideramos un triángulo equilátero cualquiera y su circunferencia circunscrita. Expresa de manera exacta el cociente entre la longitud del radio de la circunferencia y la del lado del triángulo.

③ En la figura de la derecha la unidad de medida es la longitud del lado de cada cuadradito gris. Expresa de manera exacta la longitud del perímetro del triángulo señalado.

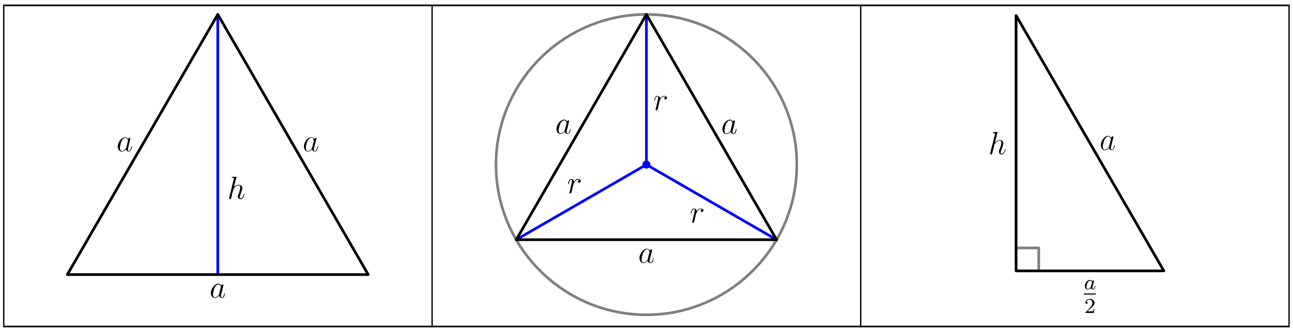


Resoluciones

① Para demostrar que la raíz cuadrada de $3-2\sqrt{2}$ es $\sqrt{2}-1$, basta aplicar la definición de raíz cuadrada: elevamos al cuadrado $\sqrt{2}-1$ y debemos obtener como resultado $3-2\sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+1 = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-2\sqrt{2}$$

② Llamamos a a la longitud del lado del triángulo equilátero y r a la longitud del radio de la circunferencia circunscrita; si llamamos h a la longitud de la altura del triángulo, sabemos que $r=\frac{2}{3}h$



Calculamos h mediante el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2-\frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ahora calculamos r: $r = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Y, por último, el cociente pedido: $\frac{r}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{3}:a = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Solución: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

③ Cada uno de los lados es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, luego sus longitudes se pueden calcular con el teorema de Pitágoras. Observamos que el triángulo es isósceles.

$$\text{Perímetro} = 2\sqrt{2^2+4^2}+\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{20}+\sqrt{8} = 2\sqrt{2^2\cdot 5}+\sqrt{2^3} = 2\cdot 2\sqrt{5}+2\sqrt{2} =$$
$$= 4\sqrt{5}+2\sqrt{2}$$

Solución: $4\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

Enunciados

① Sabemos que el número de oro es $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Demuestra:

a) $\Phi^2=\Phi+1$ b) $\frac{1}{\Phi}=\Phi-1$

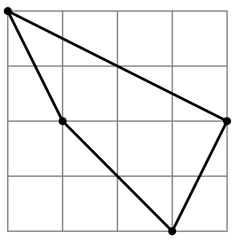
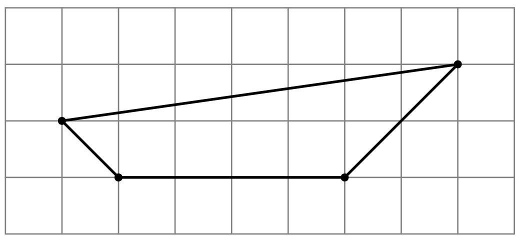
② Demuestra que $\sqrt{7+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

③ Demuestra que $\sqrt[4]{1561-696\sqrt{5}}=3-2\sqrt{5}$

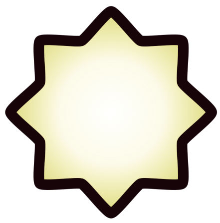
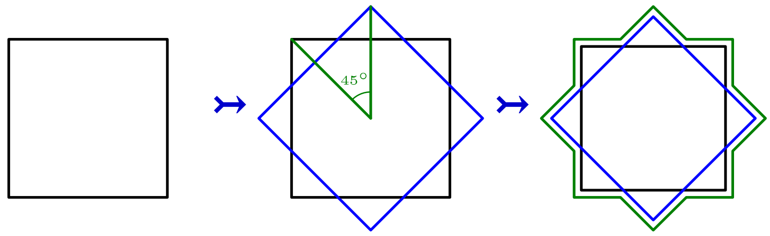
④ Expresa de manera exacta el cociente entre la longitud de la altura de un tetredro regular y la longitud de su lado.

⑤ Expresa de manera exacta el cociente entre la longitud de la diagonal de un octaedro regular y la longitud de su lado.

⑥ En las dos siguientes figuras la unidad de medida es la longitud del lado de cada cuadradito gris. Expresa de manera exacta la longitud del perímetro de los cuadriláteros señalados.

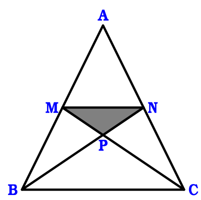
a)  b) 

⑦ La estrella de ocho puntas es un polígono que ha sido usado por numerosas culturas y ha recibido diferentes nombres, como «estrella tartésica». Se puede obtener a partir de un cuadrado, girándolo 45° y uniendo los ocho vértices y las ocho intersecciones entre los dos cuadrados.

Estrella tartésica	Obtención de la estrella tartésica
	

Si partimos de un cuadrado cuyo lado mida 2, expresa de manera exacta la longitud del lado de la estrella.

⑧ Si ABC es un triángulo equilátero cuyo lado mide 12, M y N los puntos medios de AB y AC, y P es el punto de intersección de CM y BN, expresa de manera exacta el área del triángulo MNP.



⑨ En un cuadrado de vértices A, B, C y D cuyo lado mide 1 trazamos la diagonal AC; después trazamos las circunferencias inscritas en los triángulos ACD y ABC, cuyos centros son respectivamente los puntos E y F. Expresa de manera exacta el área del cuadrilátero AFCE.

La combinatoria

Es la rama de la matemática que estudia de cuántas maneras distintas se puede hacer una elección u ordenación de elementos, iguales o diferentes.

Ejemplos

Estos son enunciados de problemas que resuelve la combinatoria; no los resolveremos ahora (aunque tú puedes intentarlo), el objetivo es que veas qué tipo de problemas vas a tratar:

① Si tienes tres camisetas, dos pantalones y un par de zapatos, ¿de cuántas maneras te puedes vestir?

② Durante una competición de salto de altura solo tres atletas consiguen superar una determinada altura, de modo que se van a jugar las medallas entre ellas. ¿De cuántas maneras distintas se pueden repartir las medallas?

③ Si en una reunión hay cuatro personas y cada una saluda a todas las demás, ¿cuántos saludos se producen?

④ Usando siempre todas las letras de la palabra **MEME**, ¿cuántas palabras, pronunciables o no, existentes o no, se pueden formar?

Métodos de resolución

A estas alturas del curso, estamos seguros de que eres muy capaz de resolver ahora mismo los problemas anteriores. Pero en matemáticas atacamos problemas con números mayores y también más complicados, lo que los hacen más difíciles. La combinatoria tiene métodos que nos ayudan a pensar más fácilmente problemas mucho más peliagudos que estos.

* **Principio del producto**. Es una estrategia básica: muchos problemas se pueden resolver simplemente con la adecuada multiplicación.
* **Variaciones, combinaciones y permutaciones** (sin repetición y con repetición). Son seis modelos de elección de elementos que permiten resolver muchos problemas sin más que reconocer a qué modelo pertenecen. Son la base de la combinatoria que estudiaremos en este curso.

Estos dos métodos de resolución, por sí solos, no son suficientes. En los problemas de combinatoria muchas veces deberás ayudarte de ellos parcialmente y luego utilizar algo más que se te ocurra a ti.

Dificultades de los problemas

Cuando resolvemos problemas de combinatoria, hay dos dificultades que se pueden presentar, sin que nos demos cuenta, que nos lleven a resolverlos mal; deberás estar muy atento: dejar sin contar algún caso y contar algún caso más de una vez.

La explosión combinatoria

Llamamos así al proceso que observamos en algunos problemas, en los que la cantidad de casos posibles aumenta espectacularmente según el conjunto de elementos va siendo cada vez mayor. Por ejemplo: **siete** objetos distintos se pueden colocar en fila de **5040** maneras diferentes, **trece** elementos de **6 227 020 800** maneras, **veinte** elementos de **2,43 billones** de maneras y **69** elementos de $\mathbf{1{,}71 \cdot 10^{98}}$ maneras. Vemos que, con relativamente pocos elementos, desbordamos la capacidad de una calculadora científica usual.

La estrategia del producto, versión simple

Hay toda una serie de problemas, fácilmente identificables, que sabes resolver desde el nivel 1 con una simple multiplicación. Veamos algunos:

① Si dispones de siete camisetas y cinco pantalones, ¿de cuántas maneras los puedes combinar para vestirte?

Resolución: $7 \cdot 5 = 35$. Solución: 35.

② En un restaurante ofrecen seis primeros platos y cuatro segundos platos. ¿de cuántas maneras podemos comer?

Resolución: $6 \cdot 4 = 24$. Solución: 24.

La estrategia del producto, versión múltiple

Si a los enunciados anteriores les añadimos alguna condición más, el método de resolución tendrá alguna multiplicación más, pero esencialmente será lo mismo.

③ Si dispones de siete camisetas, cinco pantalones y tres pares de zapatos, ¿de cuántas maneras los puedes combinar para vestirte?

Resolución: $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$. Solución: 105.

④ En un restaurante ofrecen seis primeros platos, cuatro segundos platos y cinco postres. ¿de cuántas maneras podemos comer?

Resolución: $6 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Solución: 120.

La estrategia del producto añadiendo alguna suma

Es posible que alguna situación requiera aplicar la estrategia del producto más de una vez y sumar los resultados parciales para obtener el resultado final.

⑤ Queremos ir a comer y dudamos entre dos restaurantes. En el restaurante A ofrecen seis primeros platos, cuatro segundos platos y cinco postres; en el restaurante B ofrecen cuatro primeros platos, tres segundos platos y cuatro postres ¿de cuántas maneras podemos comer?

Resolución: $6 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 3 = 120 + 36 = 156$. Solución: 156.

La estrategia del producto atendiendo a cada paso

Es posible que haya que ir pensando qué números hay que multiplicar porque varíen paso a paso.

⑥ En el concurso de salto de longitud de las mejores competiciones de atletismo la última fase se llama «la mejora»: son tres intentos adicionales, tras los tres intentos iniciales que tienen todos los participantes, para los ocho mejores clasificados hasta el momento. ¿De cuántas maneras se pueden repartir las tres medallas (oro, plata y bronce) los ocho clasificados?

Resolución

Para la asignación de la medalla de oro hay 8 posibilidades. Una vez establecida esta, para la medalla de plata hay 7 posibilidades. Y una vez establecidas esas dos medallas, para la de bronce hay 6 posibilidades. Por tanto, el número de posibilidades es $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Solución: 336.

(Podíamos haber pensado la asignación de medallas en cualquier otro orden.)

Enunciados

① Si dispones de nueve camisetas y ocho pantalones, ¿de cuántas maneras los puedes combinar para vestirte?

② Si dispones de diez camisetas, siete pantalones y cinco pares de zapatos, ¿de cuántas maneras los puedes combinar para vestirte?

③ En un restaurante ofrecen cinco primeros platos y cuatro segundos platos. ¿de cuántas maneras podemos comer?

④ En un restaurante ofrecen siete primeros platos, seis segundos platos y cinco postres. ¿de cuántas maneras podemos comer?

⑤ En un restaurante almacenan las botellas de vino en un mueble específico (llamado botellero) que tiene huecos individuales repartidos en seis filas y siete columnas. ¿Cuántas botellas puede almacenar como máximo?

⑥ En un restaurante almacenan las botellas de vino en muebles específicos (llamados botelleros) que tienen huecos individuales repartidos en ocho filas y nueve columnas. Si disponen de siete botelleros, ¿cuántas botellas puede almacenar el restaurante como máximo?

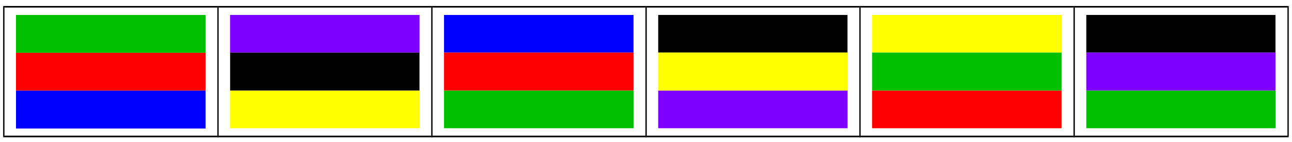
⑦ Cuando salen a la cancha los participantes en un partido de baloncesto la costumbre es que los cinco de cada equipo saluden a los cinco del otro equipo. ¿Cuántos saludos se dan en total?

⑧ Desde los Juegos Olímpicos de 1984, en Los Ángeles, en cada final de atletismo de 1500 metros (hay dos categorías) corren doce participantes. ¿De cuántas maneras se pueden repartir las tres medallas (oro, plata y bronce) en cada final?

⑨ Una persona decide regalar algunos libros que ya no va a usar. Coloca diez libros en una mesa en su jardín e invita a un grupo de cuatro personas a que elijan cada una un libro. ¿De cuántas maneras se puede hacer el reparto?

⑩ Queremos colocar cuatro objetos decorativos en una estantería, uno al lado del otro para que se vean bien todos. ¿De cuántas maneras podemos colocar los objetos?

⑪ Tenemos seis bandas del mismo tamaño, pero de distintos colores. Vamos a confeccionar una bandera eligiendo tres bandas y colocándolas una encima de otra (vemos unos ejemplos posibles más abajo). ¿Cuántas banderas diferentes podremos obtener?



La estrategia del producto como parte de la resolución

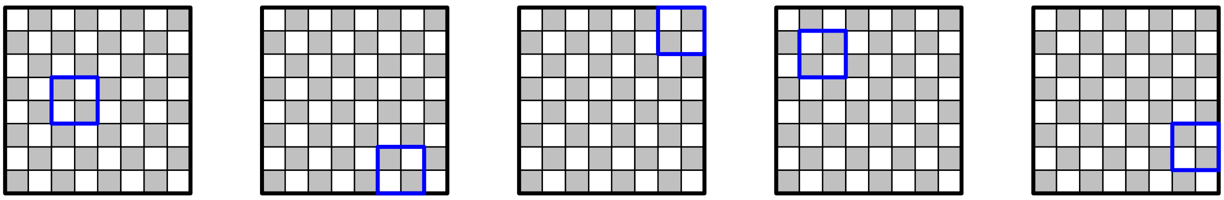
En general para resolver problemas hay que ser creativo: es bueno pensar libremente cómo combinar ideas de distintos campos para resolver problemas nuevos. El área de la combinatoria en matemáticas es especialmente interesante para practicar la resolución de problemas.

Incluso una técnica tan aparentemente humilde como la estrategia del producto puede ser muy provechosa si se combina adecuadamente con más ideas. De hecho, es posible que ni te des cuenta de que estás aplicando la estrategia del producto porque solo es una fase más de la resolución de un problema.

Enunciados

① Un grupo de veinte personas se reune en un salón y antes de empezar sus actividades se saludan todos con todos. ¿Cuántos saludos se dan en total?

② Un tablero de ajedrez (es el mismo que el tablero de damas) se compone de 64 escaques (el nombre común es «casillas») distribuidos en ocho filas y ocho columnas. Calcula cuántos cuadrados de cuatro casillas se pueden determinar en un tablero de ajedrez. Se muestran varios cuadrados válidos como ejemplo:



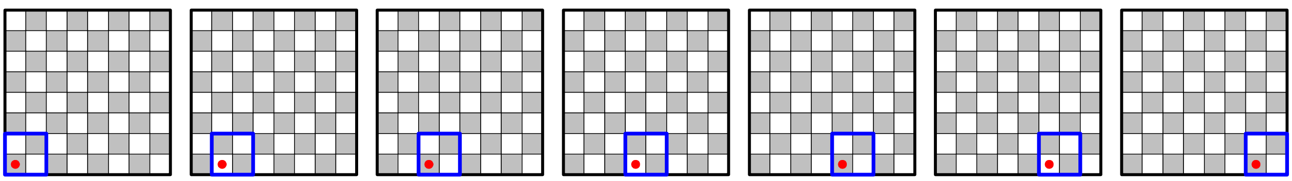
Resoluciones

① Pensando que cada una de las veinte personas saludará a las otras diecinueve, podemos aplicar la estrategia del producto y calcular 20·19.

Pero si lo dejamos así, habremos contado cada saludo dos veces: si la persona A saluda a la persona B es el mismo saludo que cuando la persona B saluda a la persona A. Por tanto, hay que dividir el número anterior entre 2:

Número de saludos $= \dfrac{20\cdot 19}{2} = 10\cdot 19 = 190$. Solución: 190

② El escaque inferior izquierdo (señalado con un punto rojo) de un cuadrado válido puede estar en siete columnas distintas (no en ocho), como vemos:



Análogamente, el escaque inferior izquierdo de un cuadrado válido puede estar en siete filas distintas.

Con esta idea previa, ahora podemos aplicar la estrategia del producto:

Número de cuadrados $= 7\cdot 7 = 49$.

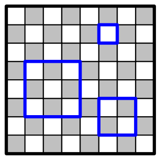
Solución: 49

Enunciados

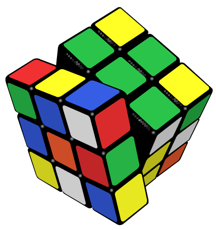
① ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de 40 lados?

② Si un polígono regular tiene 119 diagonales, ¿cuántos lados tiene?

③ ¿Cuántos cuadrados que estén compuestos por escaques completos se pueden determinar sobre un tablero de ajedrez? A la derecha se ven tres cuadrados válidos para lo que se pregunta.

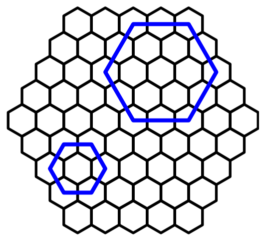


④ El cubo de Rubik es un rompecabezas mecánico tridimensional creado por el escultor y profesor de arquitectura húngaro Ernő Rubik en 1974 (figura 1). Tras su gran éxito comercial, se crearon multitud de variantes más complicadas (figura 2). Nos fijamos en el cubo de Rubik que tiene caras con 4×4 cuadrados, denominado cubo de Rubik 4×4×4 (figura 3).

Figura 1	Figura 2	Figura 3
		

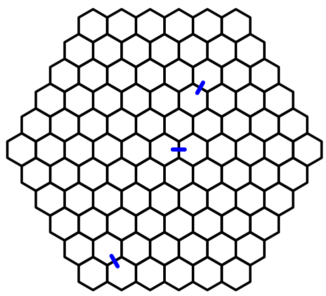
Los cubos de Rubik solo tienen pequeños cubos (vamos a llamarlos «cubitos») en las caras, porque por dentro se encuentra el mecanismo que permite los giros, pero para este problema vamos a imaginar que el interior está formado por cubitos del mismo tamaño que los que vemos en las caras. ¿Cuántos cubos que estén compuestos por cubitos completos se pueden determinar en un cubo de Rubik de 4x4x4?

⑤ Consideramos un conjunto de hexágonos regulares todos iguales formando una red que tiene cinco hexágonos en cada lado. Averigua cuántos hexágonos se pueden dibujar dentro de la figura uniendo los centros de algunos hexágonos individuales. En la figura de la derecha se ven dos hexágonos válidos para lo que se pregunta.



⑥ En el patio de un instituto hay setenta chicos y chicas alineados en siete filas y diez columnas. Cada uno da la mano a todos los que están a su alrededor; por ejemplo, el que está situado en una esquina da la mano a tres compañeros. ¿Cuántos saludos hubo en total?

⑦ Construimos un conjunto de depósitos de agua hexagonales, formando entre todos un gran conjunto con forma hexagonal con seis depósitos en cada lado. Para comunicar cada depósito con sus vecinos vamos a realizar unas canalizaciones entre cada dos depósitos. En la ilustración de la derecha se han señalado tres de estas canalizaciones. ¿Cuántas habrá que realizar?



Problemas similares

Los siguientes problemas tienen unas resoluciones tan parecidas que en matemáticas se consideran el mismo problema cuando se estudian en general.

① ¿De cuántas maneras se pueden repartir ocho personas tres medallas de diferente valor?

② Si veinte equipos juegan una competición por el sistema de liguilla, ¿de cuántas maneras pueden declararse el campeón y el subcampeón?

③ En un concurso literario participan cien personas y se reparten cinco premios de diferente valor. ¿De cuántas maneras se pueden repartir los premios?

En todos los problemas consideramos un conjunto con cierto número de elementos (que llamaremos «m») del que hay que elegir un subconjunto con otro número de elementos (que llamaremos «n») con la particularidad de que **importa el orden** en que se eligen.

En el problema (1), m=8, n=3; en el (2), m=20, n=2; en el (3), m=100, n=5.

Variaciones

Llamamos variaciones de «m» elementos tomados de «n» en «n», siendo m⩾n, a la cantidad de posibles elecciones de «n» elementos de entre los «m», importando el orden de la elección. Se escribe $V_{m,n}$ o bien V_m^n .

Fórmula de las variaciones

Las variaciones de «m» elementos tomados de «n» en «n» (con m⩾n) es igual al producto de «n» factores decrecientes comenzando por «m».

$$\boxed{V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}$$

Ejemplo 1: $V_{8,3}$ → tres factores decrecientes comenzando en 8: $8\cdot7\cdot6 = 336$

Ejemplo 2: $V_{20,2}$ → dos factores decrecientes comenzando en 20: $20\cdot19 = 380$

Ejemplo 3: $V_{100,5}$ → cinco factores decrecientes comenzando en 100:

$100\cdot99\cdot98\cdot97\cdot96 = 9\,034\,502\,400$

Demostración

Usamos la estrategia del producto: para la primera elección hay «m» posibilidades, para la segunda elección hay «m−1» posibilidades, y así sucesivamente.

Calculadora

Muchas calculadoras incorporan la tecla `nPr` para calcular variaciones.

Ejemplo 4: $V_{8,3} = 336$. Calculadora: `8` `nPr` `3` `=`

Ejemplo 5: $V_{20,2} = 380$. Calculadora: `2` `0` `nPr` `2` `=`

Ejemplo 6: $V_{100,5} = 9\,034\,502\,400$. Calculadora: `1` `0` `0` `nPr` `5` `=`

Resolución de los problemas

Podemos resolver los tres problemas propuestos aplicando directamente la estrategia del producto, pero debemos ser capaces de reconocer en ellos el mismo patrón de problema, que se resuelve mediante variaciones. Así pensamos de un modo más general y podremos atacar más adelante problemas más difíciles.

Soluciones: ① 336 ② 380 ③ 9 034 502 400

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas aplicando la fórmula de las variaciones que corresponda.

① En una competición participan dieciséis equipos por un sistema de liguilla. ¿De cuántas maneras se pueden clasificar los cuatro primeros equipos?

② En un concurso de poesía se entregan como premios una flor natural, un patinete eléctrico y un viaje para dos personas. Se presentan cuarenta poesías al concurso; ¿de cuántas maneras se pueden repartir los premios?



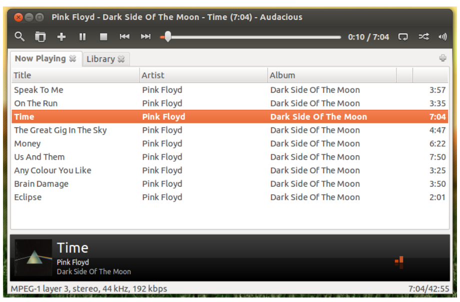
③ Usando los dígitos «3», «4», «6», «7» y «8», sin repetirlos, ¿cuántos números de dos cifras se pueden formar?

④ Estamos preparando una presentación para convencer a un conjunto de inversores para que nos pague un viaje para hacer fotografías. Disponemos de 35 fotografías que nos parecen interesantes, pero para no cansar a los inversores solo vamos a incluir seis en la presentación, cuidando mucho el orden para que resulte atractiva. ¿De cuántas maneras podremos elegir las fotografías?

⑤ Un familiar muy maniático tiene una colección de dieciséis objetos, de los que siempre expone ocho en una estantería, con un orden muy preciso que solo entiende él, y deja los otros ocho en una caja. Un día nos ponemos a jugar con los dieciséis objetos pero al llegar el momento de volverlos a dejar en la estantería y en la caja, no nos acordamos de cómo estaban. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los objetos en la estantería?

⑥ Disponemos de nueve bandas de tela de las mismas dimensiones pero de distintos colores. Vamos a formar banderas cosiendo cuatro bandas de modo que queden horizontales (hay un ejemplo a la derecha). ¿Cuántas banderas podremos formar?

⑦ Tenemos quince canciones seleccionadas en un programa de reproducción de audio. Le pedimos al programa que elija nueve al azar y las reproduzca una tras otra. ¿De cuántas maneras podrá hacerlo?



Problemas similares

Los siguientes problemas tienen unas resoluciones tan parecidas que en matemáticas se consideran el mismo problema cuando se estudian en general.

① Se lanza una moneda diez veces y anotamos los resultados obtenidos en el orden que han salido. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?

② Se lanza un dado de seis caras cuatro veces y vamos anotando la cara que va saliendo. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?

③ Una urna contiene cuatro bolas de colores distintos. Repetimos seis veces la experiencia de extraer al azar una bola, decir el color y devolverla a la urna. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?

En todos los problemas consideramos un conjunto con cierto número de elementos (que llamaremos «m») del que hay que elegir un elemento repetidamente un cierto número de veces (que llamaremos «n»).

En el problema (1), m=2, n=10; en el (2), m=6, n=4; en el (3), m=4, n=6.

Variaciones con repetición

Llamamos variaciones con repetición de «m» elementos tomados de «n» en «n», a la cantidad de posibles elecciones de un elemento de entre los «m» cuando se repite «n» veces la experiencia, **importando el orden** en que se van obteniendo. Se escribe $VR_{m,n}$ o bien VR_m^n.

Fórmula de las variaciones con repetición

Las variaciones con repetición de «m» elementos tomados de «n» en «n» es igual a «m» elevado a «n».

$$\boxed{VR_{m,n} = m^n}$$

Ejemplo 1: $VR_{2,10}$ → 2 elevado a 10: $2^{10} = 1024$

Ejemplo 2: $VR_{6,4}$ → 6 elevado a 4: $6^4 = 1296$

Ejemplo 3: $VR_{4,6}$ → 4 elevado a 6: $4^6 = 4096$

Demostración

Usamos la estrategia del producto: para la cada una de las «n» elecciones hay «m» posibilidades, luego hay que multiplicar «m» por sí mismo «n» veces.

Calculadora

Usaremos la tecla habitual de potencia para calcular variaciones con repetición.

Ejemplo 4: $VR_{2,10} = 2^{10} = 1024$. Calculadora: 2 y^x 1 0 =

Ejemplo 5: $VR_{6,4} = 6^4 = 1296$. Calculadora: 6 y^x 4 =

Ejemplo 6: $VR_{4,6} = 4^6 = 4096$. Calculadora: 4 y^x 6 =

Resolución de los problemas

Podemos resolver los tres problemas propuestos aplicando directamente la estrategia del producto, pero debemos ser capaces de reconocer en ellos el mismo patrón de problema, que se resuelve mediante variaciones con repetición. Así pensamos de un modo más general y podremos atacar más adelante problemas más difíciles.

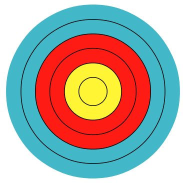
Soluciones: ① 1024 ② 1296 ③ 4096

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas aplicando la fórmula de las variaciones con repetición que corresponda.

① Lanzamos un dado de doce caras cinco veces, anotando la cara que se va obteniendo en cada lanzamiento. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?

② En una atracción de feria hay tres dianas con premios diferentes. Pagamos para disparar siete veces a cualquiera de ellas, eligiendo la que queramos en cada disparo. ¿De cuántas maneras diferentes podremos disponer el orden de los disparos?

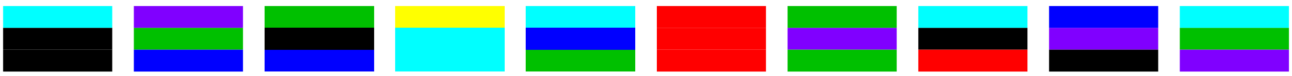


③ Usando los dígitos «2», «3», «5», «6», «7» y «9» tantas veces como queramos, ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?

④ En el concurso de televisión *Saber y ganar*, un concursante tiene que enviar cada una de cinco preguntas a cualquiera de otros dos concursantes diferentes. ¿De cuántas maneras distintas lo puede hacer?

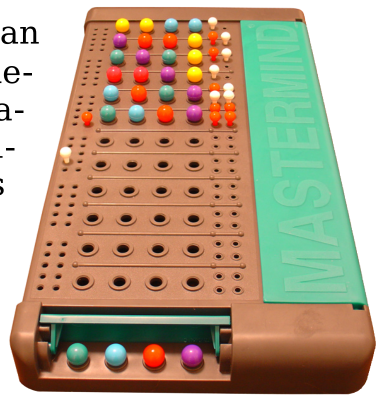
⑤ Un examen tipo test consta de diez preguntas; en cada una de ellas hay que elegir entre cuatro posibles respuestas diferentes. ¿De cuántas maneras se puede responder el examen?

⑥ Disponemos de bandas de tela de las mismas dimensiones de siete colores distintos, tres bandas de cada color. Vamos a formar banderas cosiendo tres bandas de modo que queden horizontales. Vemos abajo varios ejemplos. ¿Cuántas banderas podremos formar?

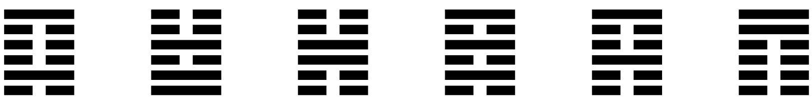


⑦ En un pasillo hemos instalado trece puntos de luz, que podemos encender o apagar individualmente. ¿De cuántas maneras podemos iluminar el pasillo?

⑧ Hay muchos juegos de mesa y de ordenador que se basan en que un jugador determina un código con colores, letras o números y el contrincante tiene un número limitado de intentos para averiguarlo. En cada intento, el jugador que ha preparado el código informa de cuántos aciertos en elemento y posición ha conseguido el otro jugador. Imaginemos un juego en el que para preparar un código se dispone de seis colores y hay que elegir cuatro, pudiendo repetirse. Calcula cuántos códigos se pueden determinar.



⑨ Los hexagramas del *I Ching* (un libro oracular chino) son símbolos formados por seis trazos rectos colocados unos sobre otros. Los trazos pueden estar completos o partidos. Más abajo se muestran algunos hexagramas. Calcula cuántos hay en total.



Problemas similares

Los siguientes problemas tienen unas resoluciones tan parecidas que en matemáticas se consideran el mismo problema cuando se estudian en general.

① ¿De cuántas maneras se pueden colocar cuatro objetos en fila?

② Si seis equipos juegan una competición en formato de liguilla, ¿de cuántas maneras pueden quedar clasificados?

③ Si reproduces de manera aleatoria un disco con doce canciones sin repetirlas, ¿de cuántas maneras lo puedes oír?

En todos los problemas consideramos un conjunto con cierto número de elementos (que llamaremos «n») que hay que colocar de todas las maneras posibles.

En el problema (1), n=4; en el (2), n=6; en el (3), n=12.

Permutaciones

Llamamos permutaciones de «n» elementos a la cantidad de posibles ordenaciones de «n» elementos. Se escribe P_n.

Fórmula de las permutaciones

Las permutaciones de «n» elementos es igual al producto de «n» factores decrecientes comenzando por «n».

$$\boxed{P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$

Ejemplo 1: P_4 → cuatro factores decrecientes comenzando en 4: $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

Ejemplo 2: P_6 → seis factores decrecientes comenzando en 6: $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$

Ejemplo 3: P_{12} → doce factores decrecientes comenzando en 12:

$12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 479\,001\,600$

Demostración

Usamos la estrategia del producto: para la primera elección hay «n» posibilidades, para la segunda elección hay «n–1» posibilidades y así sucesivamente hasta llegar a la última, para la que solo queda una posibilidad.

Factorial de un número natural

Llamamos factorial de un número natural «n» al producto de todos los números naturales menores o iguales que «n». Se escribe «n!». Por tanto:

$$\boxed{P_n = n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$

Calculadora

Las calculadoras incorporan la tecla **x!** para calcular el factorial.

Ejemplo 4: $P_4 = 4! = 24$. Calculadora: **4** **x!** **=**

Ejemplo 5: $P_6 = 6! = 720$. Calculadora: **6** **x!** **=**

Ejemplo 6: $P_{12} = 12! = 479\,001\,600$. Calculadora: **1** **2** **x!** **=**

Resolución de los problemas

Podemos resolver los tres problemas propuestos aplicando directamente la estrategia del producto, pero debemos ser capaces de reconocer en ellos el mismo patrón de problema, que se resuelve mediante permutaciones.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas aplicando la fórmula de las permutaciones que corresponda.

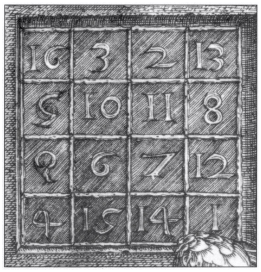
① Una película está protagonizada por seis personas. No se ponen de acuerdo en el orden en que deben aparecer sus nombres en los créditos iniciales (los que salen al comienzo de la película), solo están de acuerdo en que salgan todos a la vez, uno debajo de otro. La productora propone que aparezcan en un orden elegido al azar. ¿De cuántas maneras pueden quedar los nombres?

② Hay muchas variedades de juegos de bolos, bastantes solo se juegan en algunas zonas del mundo y otras son tan populares que incluso hay competiciones profesionales. De estas últimas, la más conocida utiliza diez bolos todos iguales que una máquina se encarga de recoger y volver a colocar cada tirada, de modo que ningún bolo tiene un lugar propio. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los diez bolos?

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas aplicando la fórmula de las permutaciones que corresponda. Da los resultados con cinco cifras significativas.

③ Los cuadrados mágicos son disposiciones de números, casi siempre naturales consecutivos, en un cuadrado de modo que todas las filas y columnas sumen la misma cantidad; normalmente también hay otras partes del cuadrado que suman la misma cantidad, llamada constante mágica. Uno muy conocido aparece en el cuadro *Melancolía I*, del pintor alemán Alberto Durero (1471–1528); está reproducido a la derecha. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los números en este cuadrado, sean mágicas o no?



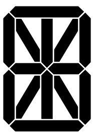
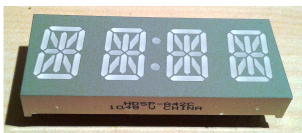
④ Una manera muy simple de cifrar un texto consiste en sustituir cada letra por otra según una clave. Por ejemplo, en español usando esta clave:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
b	k	e	i	g	q	m	v	ñ	t	c	j	a	r	f	z	x	u	n	p	h	w	y	s	d	o	l

la frase «Disfruta el riachuelo» se convierte en «Iñpqnwhb gj nñbevwgjz»

Calcula cuántas claves puede haber, sean buenas, malas o pésimas.

⑤ Los visualizadores de 14 segmentos son componentes electrónicos muy usados para ofrecer información. Abajo a la izquierda vemos los segmentos individuales y a la derecha un conjunto de cuatro visualizadores. Un programador quiere escribir un programa que pruebe consecutivamente de uno en uno los 14 segmentos en orden aleatorio. ¿Cuántas secuencias se pueden dar?

Problemas similares

Los siguientes problemas tienen unas resoluciones tan parecidas que en matemáticas se consideran el mismo problema cuando se estudian en general.

① ¿De cuántas maneras se pueden escribir las letras de la palabra **ESE**?

② ¿De cuántas maneras se pueden escribir las letras de la palabra **ASONANCIA**?

En los dos problemas consideramos un conjunto con cierto número de elementos (que llamaremos «n»), con uno o más elementos repetidos algún número de veces (que llamaremos «m_1», «m_2», «m_3», etc.) que hay que colocar de todas las maneras posibles.

En el problema (1), n=3, m_1=2 (la «**E**»); en el (2), n=9, m_1=3 (la «**A**»), m_2=2 («**N**»)

Permutaciones con repetición

Llamamos permutaciones con repetición de «n» elementos estando repetidos algunos de ellos «m_1», «m_2»,... veces a la cantidad de posibles ordenaciones de esos elementos. Se escribe $P_n^{m_1, m_2, \ldots}$.

Fórmula de las permutaciones con repetición

Las permutaciones de «n» elementos estando repetidos algunos de ellos «m_1», «m_2», «m_3»,... veces es:

$$\boxed{P_n^{m_1, m_2, \ldots} = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots}}$$

Ejemplo 1: $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = 3$

Ejemplo 2: $P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$

Idea de la demostración

Ilustramos la idea con el problema (1). La palabra **ESE** tiene tres letras, pero la «**E**» está repetida. Para razonar, imaginamos que podemos distinguir las dos «**E**» y para ello les ponemos subíndices: «$\mathbf{E_1SE_2}$». Entonces las P_3 son:

$\mathbf{E_1SE_2}$ (**ESE**) $\mathbf{E_1E_2S}$ (**EES**) $\mathbf{SE_1E_2}$ (**SEE**) $\mathbf{SE_2E_1}$ (**SEE**) $\mathbf{E_2SE_1}$ (**ESE**) $\mathbf{E_2E_1S}$ (**EES**)

Vemos que cuando intercambiamos las dos «**E**» se obtiene el mismo resultado (señalado con el mismo color), luego hay que dividir P_3 entre P_2.

Propiedad del factorial de un número natural

Cuando hay que dividir factoriales entre sí podemos utilizar esta propiedad para hacer simplificaciones y hacer operaciones que no podríamos hacer con la calculadora. Y la demostración es obvia.

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1)!}$$

Ejemplo 3. Hemos utilizado esta propiedad en los cálculos anteriores.

Ejemplo 4: $\frac{72!}{70!} = \frac{72 \cdot 71 \cdot 70!}{70!} = 72 \cdot 71 = 5112$

Observa que 72! = 72·71! = 72·71·70! aplicando dos veces la propiedad.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas aplicando la fórmula de las permutaciones con repetición que corresponda.

① ¿De cuántas maneras se pueden escribir las letras de las siguientes palabras?

a) **BONDADOSO** b) **DESEADERA** c) **ACANALADA**

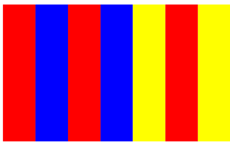
d) **EXCEDENTE** e) **TENDERETE** f) **SUBURBANA**

② Vamos a hacer una fotografía de cinco objetos, de los cuales tres son indistinguibles entre sí; algo similar a esto: «⬣⬣⬣■●». Como pondremos los objetos en fila para que se vean bien, ¿de cuántas maneras los podemos colocar?

③ Lanzamos una moneda diez veces y vamos anotando por orden el resultado de cada lanzamiento. ¿De cuántas maneras se puede obtener el mismo número de caras que de cruces?

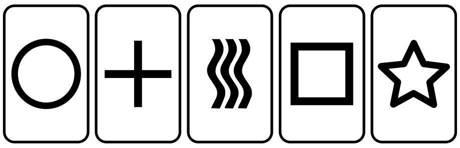
④ Usando tres treses y cuatro cuatros, ¿cuántos números de siete cifras se pueden formar?

⑤ Disponemos de tres bandas de tela roja, dos de tela azul y dos de tela amarilla, todas de las mismas dimensiones. Vamos a formar una bandera cosiéndolas todas de modo que queden las bandas verticales. ¿Cuántas banderas podremos formar? A la derecha mostramos una posibilidad.



⑥ Queremos desarrollar la expresión algebraica $x^3 \cdot y^2 \cdot z^4$ de modo que no quede ninguna potencia. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

⑦ Las cartas Zener son un conjunto de cinco cartulinas, como las que se ven más abajo, diseñadas por el psicólogo estadounidense Karl Zener (1903-1964), para estudiar fenómenos de posible percepción extrasensorial. Si unimos tres juegos de cartulinas, las barajamos y las colocamos en fila, ¿de cuántas maneras podrán quedar?



⑧ Colocamos en fila 98 piedras negras, todas iguales, y 2 piedras blancas, las dos iguales. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

⑨ Una persona está diseñando un juego consistente en distintas pantallas que hay que ir pasando de una en una hasta llegar al final. La persona diseñadora tiene preparadas veinticinco pantallas que considera fáciles, veinticinco pantallas que considera de dificultad media y treinta que considera difíciles. Ahora le queda decidir en qué orden las irá presentado, atendiendo solo a la dificultad, no a la pantalla en concreto; es decir: le da igual poner una fácil que otra cualquiera que también sea fácil en cada lugar. Calcula de cuántas maneras lo podrá hacer. Da el resultado con cuatro cifras significativas.

Problemas similares

Los siguientes problemas tienen unas resoluciones tan parecidas que en matemáticas se consideran el mismo problema cuando se estudian en general.

① ¿De cuántas maneras se pueden repartir ocho personas tres premios del mismo valor?

② Si doce equipos juegan una competición por el sistema de liguilla y pasan a la siguiente fase los cuatro primeros, ¿de cuántas maneras se pueden clasificar?

En los dos problemas consideramos un conjunto con cierto número de elementos (que llamaremos «m») del que hay que elegir un subconjunto con otro número de elementos (que llamaremos «n»).

En el problema (1), m=8, n=3; en el (2), m=12, n=4

Combinaciones

Llamamos combinaciones de «m» elementos tomados de «n» en «n», siendo m⩾n, a la cantidad de posibles elecciones de «n» elementos de entre los «m». Se escribe $C_{m,n}$ o bien C_m^n .

Fórmula de las combinaciones

Las combinaciones de «m» elementos tomados de «n» en «n» (con m⩾n) es igual al cociente las variaciones de «m» elementos tomados de «n» en «n» entre las permutaciones de «n» elementos.

$$\boxed{C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}}$$

Ejemplo 1: $C_{8,3} = \dfrac{V_{8,3}}{P_3} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7 = 56$

Ejemplo 2: $C_{12,4} = \dfrac{V_{12,4}}{P_4} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 11\cdot 5\cdot 9 = 495$

Idea de la demostración

Vemos la idea de la demostración observando qué ocurre cuando elegimos del conjunto {A,B,C} dos elementos. Las variaciones son {AB, BA, AC, CA, BC, CB}; hay que dividir su número entre las permutaciones de 2, porque las variaciones «AB» y «BA» son la misma combinación. En general, dos variaciones que solo cambien en el orden de los elementos son la misma combinación; de ahí la necesidad de dividir.

Calculadora

Muchas calculadoras incorporan la tecla `nCr` para calcular combinaciones.

Ejemplo 3: $C_{8,3}$ = 56. Calculadora: `8` `nCr` `3` `=`

Ejemplo 4: $C_{12,4}$ = 495. Calculadora: `1` `2` `nCr` `4` `=`

Resolución de los problemas

Podemos resolver los tres problemas propuestos aplicando la estrategia del producto y observando que hay que hacer una división posterior, pero es mucho más sencillo reconocer en ellos el mismo patrón de problema, que se resuelve mediante combinaciones. Soluciones: ① 56 ② 495

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas aplicando la fórmula de las combinaciones que corresponda.

① Para decidir qué tres atletas representarán a Estados Unidos en las pruebas de atletismo de los Juegos Olímpicos se realiza una competición llamada los *trials*, en la que se clasifican los tres mejores. Si la final de una prueba la disputan ocho atletas, ¿de cuántas maneras se pueden clasificar?

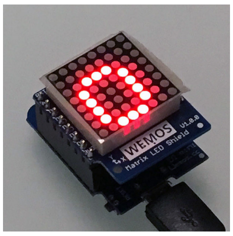
② En algunas oposiciones a puestos de funcionario del estado se requiere desarrollar un tema, que el opositor elige entre tres que salen de un sorteo. Si una oposición consta de cuarenta temas, ¿de cuántas maneras le pueden tocar tres a cada opositor?

③ En las finales del concurso de lanzamiento de jabalina de las mejores competiciones de atletismo suelen participar doce personas, que realizan tres lanzamientos cada una. Las ocho mejores pasan a la última fase, que se llama «la mejora» y consiste en tres intentos adicionales ¿De cuántas maneras se pueden clasificar para la mejora?

④ En un concurso permiten al ganador llevarse cuatro objetos, a elegir por él mismo entre un catálogo de veinte objetos. ¿De cuántas maneras puede el ganador elegir los regalos?

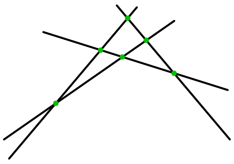
⑤ En una empresa de fabricación de ciertos aparatos terminan cincuenta aparatos al día. En el control de calidad eligen al azar cuatro de los aparatos fabricados para comprobar su correcto funcionamiento. ¿De cuántas maneras pueden hacer la elección de los aparatos cada día?

⑥ Las matrices de LED de 8×8 son dispositivos electrónicos que sirven para ofrecer información. A la derecha vemos una. Una persona compra una matriz para utilizarla en un proyecto y decide escribir antes un programa de prueba en el que se iluminarán cinco LED individuales cada vez, elegidos al azar. ¿Cuántos patrones de iluminación se pueden dar?



⑦ Una productora musical desea lanzar al mercado un nuevo grupo de música con cuatro cantantes. Se presentan a la prueba cien aspirantes. ¿De cuántas maneras se pueden elegir?

⑧ Dados veinte segmentos que cumplen la condición de que no hay dos de ellos que estén sobre la misma recta, calcula el número máximo de puntos de corte que pueden presentar. A la derecha se muestra una situación como la pedida, pero con solo cuatro segmentos.



⑨ Se está preparando una exposición de un conocido artista con 101 piezas suyas representativas de toda su obra. Cuando todo está casi preparado, descubren que, por motivos de espacio, solo pueden colocarse 99 piezas. (a) ¿De cuántas maneras pueden elegir las que se expondrán? (b) ¿De cuántas maneras pueden elegir las que no se expondrán?

Propiedades de las combinaciones

Las combinaciones tienen muchas propiedades de bastante interés en matemáticas. Vamos a ver las tres más sencillas, que resultan muy útiles para realizar algunos cálculos de modo sencillo. Aunque con la calculadora se puede averiguar fácilmente el número de combinaciones, estas propiedades permiten hacer algunos cálculos incluso más fácilmente que con la calculadora.

Combinaciones de «m» elementos tomados de «m» en «m»

Obviamente, solo puede haber una. Si hay que elegir todos los elementos de un conjunto, la única manera de hacerlo es... elegirlos todos. Por tanto,

$$\boxed{C_{m,m} = 1}$$

Ejemplo 1: $C_{15,15} = 1$

Combinaciones de «m» elementos tomados de 1 en 1

Obviamente, hay «m». Si hay que elegir un elemento de un conjunto, podremos hacerlo de tantas maneras como número de elementos haya. Por tanto,

$$\boxed{C_{m,1} = m}$$

Ejemplo 2: $C_{15,1} = 15$

Combinaciones de «m» elementos tomados de 0 en 0

Sí, suena muy raro. ¿Como es eso de no elegir ningún elemento? Pues hay situaciones en la vida en las que lo mejor es no hacer nada. Por ejemplo: en ajedrez, si el rey está ahogado, no hay ninguna jugada legal, y se declara la partida tablas (es decir, empate).

Tenemos que concluir que el número de maneras de elegir 0 elementos de un conjunto es una, la que consiste en no elegir nada. Por tanto,

$$\boxed{C_{m,0} = 1}$$

Ejemplo 3: $C_{37,0} = 1$

Elegir o no elegir

El número de maneras de seleccionar algunos elementos coincide con el número de maneras de elegir cuáles no vamos a seleccionar. Por ejemplo, si de 12 elementos hay que elegir 7, cada vez que elijamos 7 estaremos dejando de elegir los otros 5, y cada vez que dejemos de elegir 5, estaremos eligiendo los otros 7.

Por tanto, $C_{12,7} = C_{12,5}$., y en general:

$$\boxed{C_{m,n} = C_{m,m-n}}$$

Ejemplo 4: $C_{15,9} = C_{15,6}$ Ejemplo 5: $C_{32,30} = C_{32,2}$

Cálculos sin calculadora científica

Si tu calculadora no dispone de la tecla para calcular combinaciones, puedes utilizar estas propiedades de las combinaciones y la simplificación de fracciones para ayudarte en los cálculos, incluso hacerlo sin calculadora en absoluto.

Ejemplo 6: $C_{10,7} = C_{10,3} = \dfrac{V_{10,3}}{P_3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 10 \cdot 12 = 120$

Problemas similares

Los siguientes problemas tienen unas resoluciones tan parecidas que en matemáticas se consideran el mismo problema cuando se estudian en general.

① ¿De cuántas maneras se pueden repartir cuatro bolas idénticas en dos urnas diferentes?

② ¿De cuántas maneras, éticas o no, se pueden repartir diez caramelos iguales a cuatro niños y niñas?

En los dos problemas consideramos un conjunto con cierto número de elementos (que llamaremos «m») del que hay que elegir un elemento, que se puede elegir más de una vez, un determinado número de veces (que llamaremos «n»).

En el problema (1), m=2, n=4; en el (2), m=4, n=10

Combinaciones con repetición

Llamamos combinaciones con repetición de «m» elementos tomados de «n» en «n» a la cantidad de posibles maneras elegir uno de los «m» elementos «n» veces, pudiendo repetir el elemento elegido. Se escribe $CR_{m,n}$ o bien CR_m^n.

Fórmula de las combinaciones con repetición

Las combinaciones de «m» elementos tomados de «n» en «n» es igual las combinaciones de «m+n–1» elementos tomados de «n» en «n».

$$\boxed{C_{m,n} = C_{m+n-1,n}}$$

Ejemplo 1: $C_{2,4} = C_{5,4} = \dfrac{V_{5,4}}{P_4} = \dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 5$; mejor: $C_{2,4} = C_{5,4} = C_{5,1} = 5$

Ejemplo 2: $C_{4,10} = C_{13,10} = C_{13,3} = \dfrac{V_{13,3}}{P_3} = \dfrac{13\cdot12\cdot11}{3\cdot2\cdot1} = 13\cdot2\cdot11 = 286$

Idea de la demostración

Ilustramos el problema (1) usando el símbolo «●» para las bolas y el símbolo «|» como el separador del contenido de las dos urnas. Las cinco soluciones son:

● ● ● ● | ● ● ● | ●   ● ● | ● ●   ● | ● ● ● | ● ● ● ●

Hemos convertido el problema original en otro, que consiste en rellenar 5 huecos eligiendo 4 lugares para las bolas, lo que es $C_{5,4}$. Los cinco huecos salen de las 4 bolas más 1 separador, porque para dos urnas solo hace falta un separador; con «n» urnas harían falta «n–1» separadores, de ahí viene el «m+n–1».

Calculadora

Usaremos la tecla de combinaciones para calcular combinaciones con repetición.

Ejemplo 3: $C_{2,4} = C_{5,4} = 5$. Calculadora: `5` `nCr` `4` `=` (pero mejor sin calculadora).

Ejemplo 4: $C_{4,10} = C_{13,10} = 286$. Calculadora: `1` `3` `nCr` `1` `0` `=`

Resolución de los problemas

Reconocer el patrón de las combinaciones con repetición puede ser más difícil que el de otros patrones de la combinatoria, pero es una enorme ayuda.

Soluciones: ① 5 ② 286

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas aplicando la fórmula de las combinaciones con repetición que corresponda.

① ¿De cuántas maneras se pueden repartir seis bolas idénticas en tres urnas diferentes?

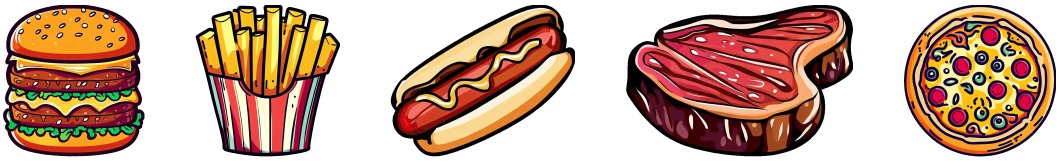
② ¿De cuántas maneras, éticas o no, se pueden repartir doce caramelos iguales a cinco niños y niñas?

③ En una heladería disponen de quince sabores de helado. Una persona se dispone a pedir un helado de dos bolas, para las que puede elegir los sabores que quiera. ¿Cuántos tipos de helado puede pedir?

④ En una pizzería disponen de doce ingredientes para añadir a la base de tomate y queso. La pizza estándar lleva tres ingredientes: ¿cuántos tipos de pizza estándar se pueden pedir?

⑤ Una persona quiere llevar una bandeja con doce pasteles a una fiesta. En la pastelería disponen de diez tipos de pasteles diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá rellenar la bandeja?

⑥ Un grupo de ocho amigos y amigas va a encargar comida a domicilio y contactan con un restaurante que proporciona cuatro menús diferentes. ¿De cuántas maneras podrán los amigos y las amigas hacer el pedido?



⑦ Una urna contiene bolas de color azul, verde y rojo. Se realiza la siguiente experiencia: repetimos diez veces el acto de sacar una bola al azar y devolverla a la urna. Al terminar la experiencia decimos cuántas bolas han salido de cada color. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?

⑧ El juego clásico del dominó se desarrolla usando fichas que están divididas en dos partes. Cada parte puede llevar un número de puntos de uno a seis o no llevar nada (se llama «la blanca»). Abajo vemos varias fichas del juego. Calcula cuántas fichas tiene el juego del dominó clásico.

⑨ En un restaurante de cocina india hay una zona en la que los comensales pueden elegir qué especias añadir a algunos platos. Hay disponibles quince especias distintas y la recomendación del restaurante es que se añadan al plato exactamente cuatro cucharadas de especias, a elegir libremente según el gusto de cada uno. Calcula de cuántas maneras es posible aderezar el plato siguiendo las instrucciones del restaurante.

⑩ Averigua cuántas soluciones tiene la ecuación «x+y+z+w=9» en las que todas las incógnitas tienen valores enteros no negativos.

Desarrollo de las variaciones, permutaciones y combinaciones

En algunos problemas no es suficiente con saber de cuántas maneras se puede hacer una elección, sino que hace falta saber cuáles son esas elecciones, para poder realizar operaciones adicionales con ellas. Para ilustrar esa necesidad, vamos a resolver un problema real.

Enunciado

La prueba de los 4×100 metros estilos mixto es una prueba de natación en la que cuatro personas nadan 100 metros cada una a un estilo distinto, por este orden: espalda, braza, mariposa y libre. Dos personas deben ser mujeres y dos personas deben ser hombres, pero cada equipo decide cómo se distribuyen en cada estilo.

A fecha de septiembre de 2024, los récords del mundo de 100 metros en cada estilo y categoría eran los de la tabla de más abajo. Usamos para los tiempos el formato habitual en natación de separar los minutos y los segundos con «:».

Categoría	Espalda	Braza	Mariposa	Libre
Masculina ♂	Thomas Ceccon 51,60	Adam Peaty 56,88	Caeleb Dressel 49,45	Pan Zhanle 46,40
Femenina ♀	Regan Smith 57,13	Lilly King 1:04,13	Gretchen Walsh 55,18	Sarah Sjöström 51,71

¿Qué alineación deberemos utilizar para obtener el mejor tiempo posible y cuál será ese tiempo, teóricamente?

Resolución

Primero averiguamos cuántas alineaciones son posibles. De los cuatro estilos hay que elegir dos para una categoría y automáticamente quedarán los otros dos para las otras categorías. Por tanto, el número es $C_{4,2} = 6$.

Necesitamos saber cuáles son esas seis posibilidades para poder sumar los tiempos. Aunque existen otros métodos, podemos obtenerlas por tanteo:

♂♂♀♀	♂♀♂♀	♂♀♀♂	♀♂♂♀	♀♂♀♂	♀♀♂♂

Ahora podemos sumar los tiempos de cada alineación:

♂♂♀♀ → 51,60 + 56,88 + 55,18 + 51,71 = 215,37 = 3:35,37

♂♀♂♀ → 51,60 + 1:04,13 + 49,45 + 51,71 = 216,89 = 3:36,89

♂♀♀♂ → 51,60 + 1:04,13 + 55,18 + 46,40 = 217,31 = 3:37,31

♀♂♂♀ → 57,13 + 56,88 + 49,45 + 51,71 = 215,17 = **3:35,17**

♀♂♀♂ → 57,13 + 56,88 + 55,18 + 46,40 = 215,59 = 3:35,59

♀♀♂♂ → 57,13 + 1:04,13 + 49,45 + 46,40 = 217,11 = 3:37,11

Solución

La mejor alineación posible es Regan Smith, Adam Peaty, Caeleb Dressel y Sarah Sjöström, con un tiempo teórico previsto de 3:35,17

Comentario

A fecha de septiembre de 2024, el récord del mundo de 4×100 metros estilos mixto lo ostentaba un equipo de Estados Unidos con un tiempo de 3:37,43.

Desarrollo de las variaciones, permutaciones y combinaciones

Es posible obtener el desarrollo de las variaciones, permutaciones y combinaciones, sin y con repetición, siguiendo métodos bien definidos que no dejen ningún caso sin considerar y sin repetirlos. Estos métodos se llaman **algoritmos**. Utilizar los algoritmos a mano suele ser pesado, especialmente cuando hay muchos elementos, pero los algoritmos son perfectos para programar ordenadores.

Desarrollo con un lenguaje de programación

Un desarrollo se puede programar en cualquier lenguaje, pero algunos ya incorporan los algoritmos necesarios, de modo que solo hay que darles los elementos y especificar qué deseamos.

Simplificando la notación, en el lenguaje de programación llamado **Python** se puede utilizar:

Ejemplo 1. Variaciones de {A, B, C} de dos en dos:

`itertools.permutations(ABC,2) → AB AC BA BC CA CB`

Ejemplo 2. Variaciones con repetición de {A, B, C} de dos en dos:

`itertools.product(ABC,2) → AA AB AC BA BB BC CA CB CC`

Ejemplo 3. Permutaciones de {A, B, C}

`itertools.permutations(ABC,3) → ABC ACB BAC BCA CAB CBA`

Ejemplo 4. Combinaciones de {A, B, C, D, E} de dos en dos:

`itertools.combinations(ABCDE,2) → AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE`

Ejemplo 5. Combinaciones con repetición de {A, B, C} de dos en dos:

`itertools.combinations_with_replacement(ABC,2) → AA AB AC BB BC CC`

Observa que en inglés se usa la palabra *permutations* para designar tanto las variaciones como las permutaciones. Esto explica que la tecla de la calculadora para calcular variaciones sea **`nPr`**.

Desarrollo «a mano»

Si hay que desarrollar a mano variaciones, permutaciones o combinaciones, los consejos son:

- Si puedes, empieza por colocar por orden los elementos. El orden puede ser alfabético o numérico. Ejemplo 6: mejor «ABCDE» que «CEADB»
- Utiliza un método que siga siempre el mismo orden, no lo hagas al azar.

Ejemplo 7. Desarrolla las variaciones de {A, B, C, D} de tres en tres.

Comenzamos por las tres primeras letras en orden alfabético: ABC.

Sustituimos la tercera letra por la única posible: ABD.

Comenzando por AB ya no hay más posibilidades, así que ahora toca cambiar la segunda letra por la siguiente en orden: ACB y ACD. Y seguimos, colocando la D en el segundo lugar: ADB y ADC.

Comenzando por A ya no queda ningún caso, así que comenzamos por B y seguimos el mismo proceso que antes: BAC, BAD, BCA, BCD, BDA y BDC.

Seguimos, colocando C en primer lugar: CAB, CAD, CBA, CBD, CDA y CDB.

Y terminamos con la D: DAB, DAC, DBA, DBC, DCA y DCB.

Solución: ABC, ABD, ACB, ACD, ADB, ADC, BAC, BAD, BCA, BCD, BDA, BDC, CAB, CAD, CBA, CBD, CDA, CDB, DAB, DAC, DBA, DBC, DCA, DCB.

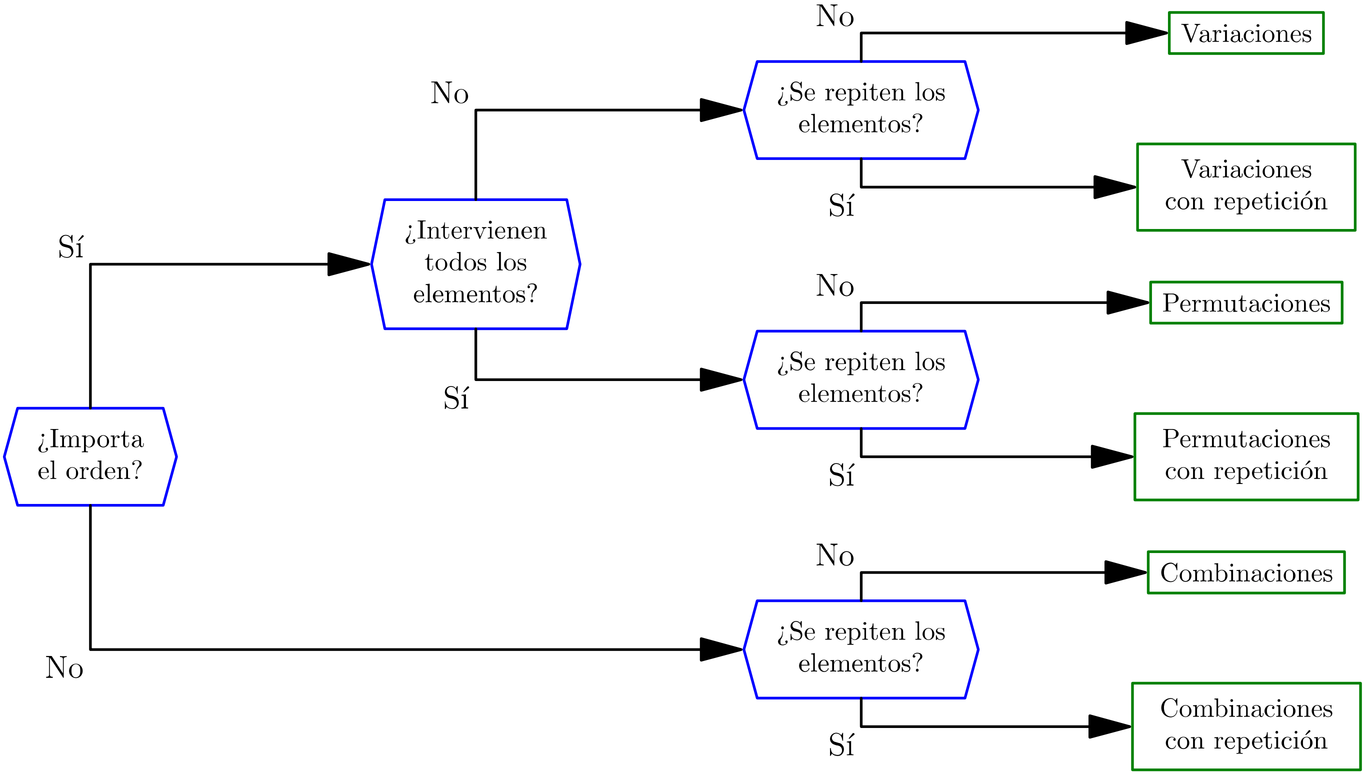
Aplicación directa de un modelo

Cuando resolvemos problemas usando las técnicas de la combinatoria, los modelos de las variaciones, variaciones con repetición, permutaciones, permutaciones con repetición, combinaciones y combinaciones con repetición son muy útiles. Algunos problemas se pueden resolver «simplemente» averiguando con qué modelo encajan y aplicando la fórmula correspondiente. Pero no nos engañemos, no es tan fácil encontrar el modelo válido, el número de elementos y de cuántos en cuántos hay que elegirlos: ¡hay que pensar!

Las seis fórmulas

- **Variaciones** de «m» elementos tomados de «n» en «n»
  - $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$ [«n» factores decrecientes a partir de «m»]
- **Variaciones con repetición** de «m» elementos tomados de «n» en «n»
  - $VR_{m,n} = m^n$
- **Permutaciones** de «n» elementos
  - $P_n = n!$
- **Permutaciones** de «n» elementos estando **repetidos** «m1», «m2», «m3»,...
  - $P_n^{m_1, m_2, \ldots} = \dfrac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots}$
- **Combinaciones** de «m» elementos tomados de «n» en «n»
  - $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n}$
- **Combinaciones con repetición** de «m» elementos tomados de «n» en «n»
  - $CR_{m,n} = C_{m+n-1,n}$

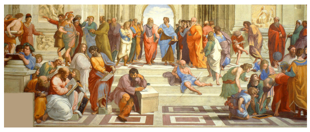
Esquema



Enunciados

Resuelve los siguientes problemas aplicando la fórmula de las variaciones, variaciones con repetición, permutaciones, permutaciones con repetición, combinaciones o combinaciones con repetición, según corresponda.

① En la asignatura de Filosofía se estudian ocho autores y en los exámenes siempre se preguntan tres. ¿Cuántos exámenes distintos se pueden plantear?

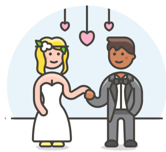


② En un procesador de 16 bits (son muy antiguos) cada instrucción tiene 16 bits y cada bit solo puede tener el valor «1» o el valor «0». ¿Cuántas instrucciones distintas puede haber?

③ Cuatro amigos y amigas entrar en un bar a tomar un aperitivo. En la barra hay seis taburetes. ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar? (Dejar taburetes libres entre ellos puede ser útil para dejar bolsos y abrigos).

④ Elegimos al azar nueve puntos de una circunferencia. ¿Cuántos triángulos se pueden formar usando los puntos como vértices?

⑤ En una boda, es costumbre que las personas que contraen matrimonio pasen por todas las mesas de invitados para charlar con ellos y preguntar si todo está a su gusto. Si en una celebración los contrayentes tienen que visitar siete mesas, ¿de cuántas maneras lo pueden hacer?

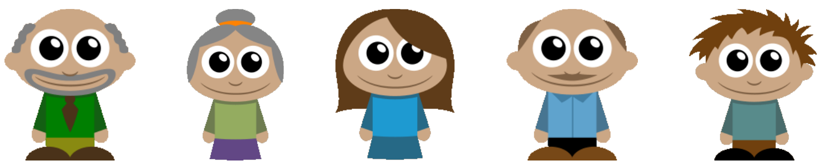


⑥ ¿Cuántos números hay entre 2000 y 3000 que tengan sus cifras diferentes?

⑦ En una clase de veinte estudiantes se van a conceder tres premios: uno al más destacado en ciencias, otro al mejor en humanidades y otro al mejor en fotografía. ¿De cuántas formas distintas se pueden conceder los premios?

⑧ Multiplicando tres números elegidos entre el 2, el 3, el 5 y el 7, pudiendo repetir factores, ¿cuántos números diferentes se pueden obtener?

⑨ He comprado cinco billetes de tren para ir con mi familia de viaje, todos en el mismo vagón, pero hay tres asientos juntos en una parte del vagón y otros dos asientos juntos en otra parte. Si no importa en qué orden nos sentemos juntos, ¿de cuántas maneras nos podemos distribuir?



⑩ Usando siempre todas las cifras del número 32 823, ¿cuántos números diferentes se pueden obtener?

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas aplicando la fórmula de las variaciones, variaciones con repetición, permutaciones, permutaciones con repetición, combinaciones o combinaciones con repetición, según corresponda. Da todos los resultados con cinco cifras significativas.

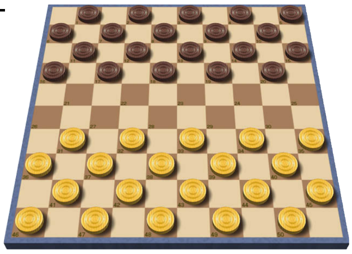
① La lotería nacional de España fue introducida por el rey Carlos III en 1763. El método para apostar era tan complicado que se publicaron manuales de ayuda. En esencia, el sorteo consistía en seleccionar cinco números del 1 al 90, importando el orden en que obtenían. A partir de esos números, había distintos tipos de apuestas. ¿De cuántas maneras se podía resolver la elección de los números?

② En una fábrica de chocolate y bombones deciden crear una página web para realizar pedidos destinados a regalos personalizados. La fábrica dispone de cincuenta variedades de bombones, todos realizados con las mismas dimensiones, y cajas que admiten veinte bombones. Los usuarios de la página web pueden decidir libremente cuántos bombones de cada variedad eligen hasta completar una caja. ¿De cuántas maneras se puede rellenar la caja?

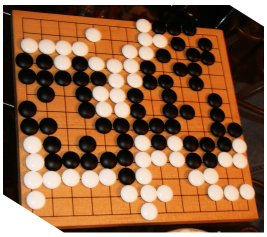
③ El «problema del viajante» es un clásico problema de optimización de recursos originado por la necesidad de encontrar el trayecto más barato que pase por ciertas ciudades sin dejar ninguna. Por ejemplo, la cantante estadounidense Taylor Swift (nacida en 1989) dio conciertos en Europa en 2024 en dieciocho ciudades dentro de su gira llamada *The Eras Tour*. ¿De cuántas maneras se pueden visitar las dieciocho ciudades?

④ Existe un juego de azar muy popular en muchos países que recibe distintos nombres según el lugar, como lotería o quiniela, además de los nombres propios en cada país. El procedimiento general es el mismo en todos ellos: de entre un conjunto de números se eligen unos cuantos al azar, sin que importe en qué orden se obtienen. Si se eligieran siete números del 1 al 99, ¿cuántos posibles resultados se podrían dar?

⑤ El juego de las damas se suele practicar, por conveniencia, en el mismo tablero que el ajedrez. Sin embargo la variante llamada «damas internacionales» utiliza un tablero mayor. A la derecha se ve la posición inicial de las fichas en esta variante. Observa que todas las fichas se sitúan en casillas negras. ¿De cuántas maneras se podrían colocar al azar todas las fichas de modo que solo estuvieran situadas en casillas negras?



⑥ El go es un juego muy antiguo, de origen chino, que profesionalmente se juega en un tablero de 19×19 líneas, aunque existen tableros más pequeños para facilitar el juego. En una partida de go solo se usan piezas (llamadas «piedras») blancas o negras. A la derecha se ve la posición final de una partida jugada en un tablero de 13×13 líneas. Calcula el número de posibles colocaciones de las piedras al final de una partida en un tablero así, sean posiciones legales o no.



Fórmulas con factoriales

Vamos a ver dos fórmulas para calcular variaciones y combinaciones usando factoriales. Son malas fórmulas para aplicar en el cálculo real de los números buscados, pero tienen interés para demostrar algunas propiedades. Por tanto, normalmente las usamos en los desarrollos teóricos, pero no en los cálculos prácticos.

Fórmula de las variaciones usando factoriales

Las variaciones de «m» elementos tomados de «n» en «n» (con m⩾n) se pueden calcular con la fórmula

$$\boxed{V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

Demostración

$$V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1) = m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\cdot\frac{(m-n)!}{(m-n)!} =$$

$$= \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\cdot(m-n)!}{(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Ejemplo 1: $V_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{40320}{120} = 336$

Fórmula de las combinaciones usando factoriales

Las combinaciones de «m» elementos tomados de «n» en «n» (con m⩾n) se pueden calcular con la fórmula

$$\boxed{C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}}$$

Demostración

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Ejemplo 2: $C_{10,4} = \frac{10!}{4!\cdot(10-4)!} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{3628800}{24\cdot 720} = 210$

Comparación práctica

Seguro que ya has observado que el cálculo práctico con estas fórmulas es mucho menos cómodo que con las fórmulas habituales y, desde luego, que con una calculadora científica.

Ejemplo 3: $V_{8,3} = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$

Ejemplo 4: $C_{10,4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210$

Utilización en la teoría

La fórmula de las combinaciones con factoriales permite demostrar fácilmente algunas propiedades:

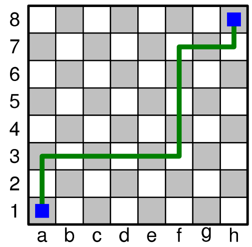
Ejemplo 5: $C_{m,m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot(m-(m-n)!)} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = C_{m,n}$

Resolución de problemas usando combinatoria

Las técnicas básicas de la combinatoria (método del producto, variaciones, permutaciones y combinaciones) son una magnífica ayuda para resolver problemas, pero normalmente hay que utilizarlas con algo más, como aplicar varias fórmulas y operar sus resultados, mezclar combinatoria con operaciones sencillas y lo que se te ocurra, tu creatividad es esencial. Además, es muy común que estos problemas se puedan resolver de varias maneras diferentes: puede que tu idea sea única.

Enunciados

① A la derecha vemos un tablero de ajedrez con la notación habitual de filas y columnas. Imagina una pieza que solo se pueda mover un escaque hacia arriba o un escaque a la derecha. Sitúala en el escaque a1. Calcula de cuántas maneras distintas puede llegar hasta el escaque h8. En la figura se muestra una de las maneras válidas.



② Disponemos de cinco objetos de adorno: dos caballitos y tres casitas, como se ven más abajo. Queremos poner dos caballitos y dos casitas en fila en una estantería, de modo que queden alternados los caballitos y las casitas ¿de cuántas maneras podemos hacerlo?

Resoluciones

① Las maneras válidas de desplazarse desde a1 hasta h8 consisten en siete movimientos hacia la derecha y siete movimientos hacia arriba, catorce movimientos en total. Podemos calcular el número pedido de dos maneras distintas:

$C_{14,7} = 3432$. Calculadora: $\boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{\text{nCr}}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$

$P_{14}^{7,7} = \dfrac{14!}{7!\cdot 7!} = 3432$. Calculadora: $\boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{x!}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{x!}\ \boxed{x^2}\ \boxed{=}$

Solución: 3432

Observación: en este problema los dos métodos son correctos y por eso dan el mismo resultado, pero es que incluso sin calcular el resultado final sabemos, aplicando la fórmula de las combinaciones con factoriales, que las dos fórmulas se pueden calcular igual:

$$C_{14,7} = \frac{14!}{7!\cdot(14-7)!} = \frac{14!}{7!\cdot 7!} = P_{14}^{7,7}$$

② Hay dos maneras de comenzar la exposición: por caballito o por casita.

Los caballitos se pueden colocar de P_2 maneras.

Las casitas se pueden colocar de $V_{3,2}$ maneras.

Por tanto, el número total de posibilidades es $2\cdot P_2\cdot V_{3,2} = 2\cdot 2\cdot 6 = 24$

Solución: 24

La dificultad de la colocación en círculo

Hay algunos problemas en los que el simple cálculo de permutaciones nos dará la respuesta incorrecta, porque cada caso se calculará más de una vez. Ocurre muy a menudo cuando los objetos se colocan sobre una circunferencia.

Ponemos un ejemplo: cuando cuatro personas se sientan a una mesa (cuadrada o circular, es igual, porque lo importante es la colocación de las personas) para jugar a un juego por parejas, las dos personas de la pareja se sientan una enfrente de la otra y sus contrincantes quedan a los lados. Lo único importante es la posición relativa de unos con otros, no importa en qué parte concreta de la mesa se sienten, luego permutaciones de cuatro elementos no es la solución correcta. Si Drácula, Criatura, Hombre Lobo y Zombi se sientan a jugar por parejas, estas cuatro posiciones son realmente la misma:

Este tipo de problemas se conoce como **permutaciones circulares**. Te damos la oportunidad de que tú mismo encuentres cómo resolverlos. Si no lo consiguieras, junto con las soluciones te ofrecemos la explicación.

Enunciados

① Si Drácula, Criatura, Hombre Lobo y Zombi se sientan en una mesa a jugar por parejas, ¿de cuántas maneras pueden hacerlo?

② El *Trivial Pursuit* es un juego de mesa desarrollado por Scott Abbott y Chris Haney en 1979. En él, los participantes deben contestar preguntas de seis categorías diferentes. Cuando aciertan la respuesta de una categoría, obtienen una figura de un color (llamado popularmente un «quesito»), que se almacena en un depósito cilíndrico. A la derecha vemos el depósito relleno con los seis quesitos. Cada concursante coloca los quesitos en el orden que quiera. ¿De cuántas maneras lo puede hacer?

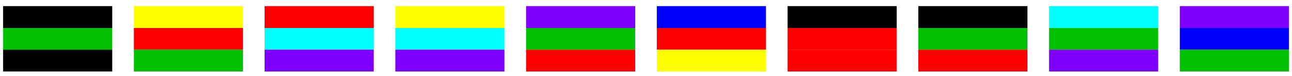
③ El *hot pot* es una cómida común en muchos países de Asia en la que se presenta en la mesa un caldero con caldo caliente rodeado de diversos ingredientes que los comensales van depositando en el caldero para que se cocinen el tiempo que le parezca a cada uno. A la derecha vemos un ejemplo. Si un *hot pot* se presenta con doce ingredientes colocados en círculo alrededor del caldero, ¿de cuántas maneras se puede presentar?

Enunciados

① A una reunión asisten quince personas, de las que siete solo hablan español y las otras ocho solo hablan inglés. ¿Cuántas conversaciones entre dos personas se pueden establecer de modo que no sea necesario utilizar un intérprete?

② En una caja hay veinte juguetes de los que quince están en buen estado y cinco están estropeados. Si elijo cinco juguetes al azar, ¿de cuántas maneras puede ocurrir que elija tres en buen estado y dos estropeados?

③ Disponemos de bandas de tela de las mismas dimensiones de siete colores distintos, pero solamente dos bandas de cada color. Vamos a formar banderas cosiendo tres bandas de modo que queden horizontales. Vemos abajo varios ejemplos. ¿Cuántas banderas podremos formar?

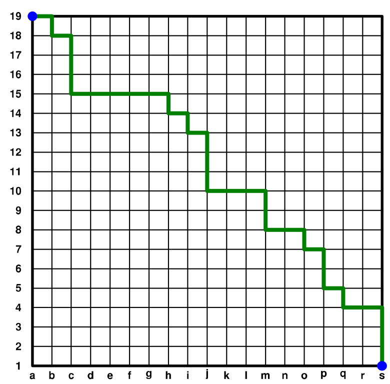


④ Cuatro humanos y cuatro no humanos, que vemos más abajo, forman una pandilla. Para demostrar al mundo que conviven juntos perfectamente, deciden que cada vez que se sienten en algún lugar público se sentarán alternando un humano y un no humano.

a) Primero van al cine y se sientan en ocho butacas contiguas en la misma fila. ¿De cuántas maneras se pueden sentar?

b) Tras ver la película, se van a cenar a un restaurante y se sientan en una mesa circular. ¿De cuántas maneras se pueden sentar?

⑤ El go es un juego muy antiguo, de origen chino, que profesionalmente se juega en un tablero de 19×19 líneas. Para facilitar las explicaciones, nombramos sus líneas verticales con letras y sus líneas horizontales con números. En una partida de go se usan piezas (llamadas «piedras») que se colocan en las intersecciones de las líneas. Colocamos una piedra en la intersección `a19` y vamos a moverla hasta la intersección `s1` con pasos individuales que pueden ser de una intersección hacia abajo o una intersección a la derecha. Al lado se muestra un camino válido.



a) ¿Cuántos caminos posibles hay?

b) ¿Cuántos caminos posibles pasan por la intersección `j10`?

c) ¿Cuántos caminos posibles pasan por las intersecciones `g13` y `m7`?

Enunciados

① En un examen se presentan dos grupos de preguntas, con cuatro preguntas cada grupo. Hay que contestar en total cinco preguntas, pero no más de tres de cada grupo. ¿De cuántas maneras se pueden elegir las preguntas?

② ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x+y+z+w=12$ en las que todos los números son enteros no negativos y $w>1$?

③ Calcula de cuántas maneras se pueden escribir, sean pronunciables o no, todas las letras de la palabra AGUACATE de modo que se cumpla cada una de las siguientes condiciones:

a) Las tres letras A siempre estén juntas.

b) Las letras G y T nunca estén juntas.

④ Siete amigos se sientan a merendar en una mesa redonda. Calcula de cuántas maneras se pueden sentar de modo que se cumpla cada una de las siguientes condiciones:

a) Carmen y Emilia siempre estén sentadas una al lado de la otra.

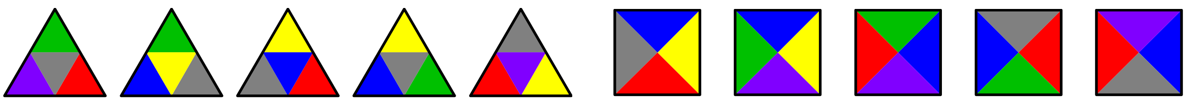
b) Daniel y Fernando nunca estén sentados uno al lado del otro.

⑤ En el mundo del tenis profesional se disputan cada año cuatro torneos en categoría individual tan importantes que juntos se conocen como el Gran Slam. Son el Australian Open (en Australia), Roland Garros (en Francia), Wimbledon (en el Reino Unido) y el US Open (en Estados Unidos).

Todos los partidos en categoría masculina se disputan al mejor de cinco sets, es decir: el primer tenista que gana tres sets gana el partido. Calcula de cuántas maneras distintas se puede desarrollar un partido al mejor de cinco sets.

⑥ Una empresa de creación de baldosas de porcelana está preparando dos nuevas series de baldosas.

La serie T (de «triangular») consiste en baldosas con forma de triángulo equilátero divididas en cuatro triángulos equiláteros iguales, cada uno de un color diferente elegido entre seis colores. Abajo vemos varias piezas.



La serie C (de «cuadrada») consiste en baldosas con forma de cuadrado divididas en cuatro triángulos isósceles iguales, cada uno de un color diferente elegido entre seis colores. Arriba vemos varias piezas.

a) ¿Cuántos tipos de baldosas tendrá la serie T?

b) ¿Cuántos tipos de baldosas de la serie T tienen el centro de color rojo?

c) ¿Cuántos tipos de baldosas tendrá la serie C?

Enunciados

Da todos los resultados con cinco cifras significativas, excepto el (4a).

① En el juego clásico del dominó se utilizan 28 fichas que están divididas en dos partes. Vemos varias fichas del juego:

El juego normalmente se desarrolla entre cuatro personas que juegan por parejas. Para comenzar, se ponen boca abajo todas las fichas, se revuelven y cada jugador elige siete fichas al azar. Calcula de cuántas maneras se pueden distribuir las fichas entre los jugadores.

② Los partidos profesionales de pelota vasca se juegan a 22 puntos: el jugador o la pareja que primero alcance los 22 puntos, gana el partido. Y, a diferencia del resto de deportes de la misma famila (tenis, bádminton, pádel), no es necesario ganar por una diferencia de dos puntos, así que el resultado final 22-21 es posible. Calcula de cuántas maneras distintas se puede desarrollar un partido profesional de pelota vasca.

③ El sudoku es un pasatiempo de origen japonés que consiste en completar con números del 1 al 9 una cuadrícula de 81 casillas y nueve subcuadrículas. A la derecha vemos uno resuelto. ¿De cuántas maneras, sean solución o no del sudoku, se pueden rellenar las 81 casillas de modo que en cada una de las nueve subcuadrículas se encuentren los números del 1 al 9?

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

④ La máquina electromecánica Enigma fue utilizada por los nazis en la Segunda Guerra Mundial para enviar instrucciones desde el alto mando hasta la primera línea. Para cifrar los mensajes se usaban dos métodos combinados. Primero se elegían ordenadamente tres ruedas dentadas (llamadas rotores) con 26 posiciones cada una de entre cinco ruedas posibles. Segundo, en un panel con las 26 letras del alfabeto alemán se conectaban entre sí diez parejas de letras para invertir sus posiciones. Se pide:

a) Calcula de modo exacto de cuántas maneras se podían configurar los rotores.

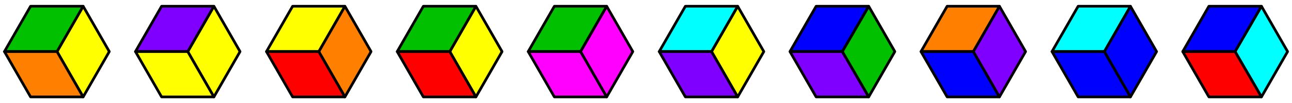
b) Calcula de cuántas maneras se podía configurar el panel de conexiones.

c) Calcula de cuántas maneras se podía configurar la máquina Enigma.

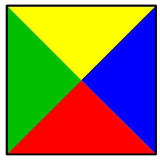
Durante la guerra, los países aliados intentaron desesperadamente descifrar el código y, tras mucho esfuerzo, lo consiguieron liderados por el matemático británico Alan Turing (1912-1944). Puedes ver una dramatización de cómo lo hicieron en la película *The Imitation Game*. Turing es considerado uno de los padres de la teoría de la computación, a pesar de su prematura muerte, ocurrida en tristes circunstancias.

Enunciados

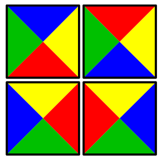
① A partir de la idea básica del juego del dominó se han desarrollado algunas variantes. En una de ellas se utilizan piezas hexagonales divididas en tres rombos iguales; cada rombo puede ser de un color cualquiera de los disponibles en el juego. Abajo vemos varias piezas válidas. Si queremos usar siete colores, ¿cuántas piezas hace falta fabricar para cubrir todas las posibilidades?



② Consideramos todas las baldosas cuadradas diferentes que se pueden crear descomponiendo un cuadrado en triángulos isósceles iguales y eligiendo entre cuatro colores un color diferente para cada uno de los triángulos. A la derecha vemos uno de los posibles cuadrados. (a) ¿Cuántos modelos de baldosa hay?



Tengo cuatro unidades de cada modelo para decorar una zona de una pared de mi vivienda con cuatro de esas baldosas colocadas formando un cuadrado. A la derecha se ve un ejemplo. (b) Calcula de cuántas maneras distintas puedo decorar la zona de la pared.



③ Con las cifras 1, 2, 5, 7 y 9 se forman todos los números posibles de tres cifras. Calcula cuánto suman todos esos números.

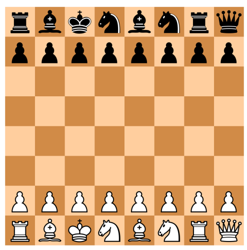
④ El ajedrez se juega en un tablero de 8×8 escaques, la mitad blancos y la mitad negros, usando dieciséis piezas blancas y dieciséis piezas negras, distribuidas en cada color de este modo: un rey (♔♚), una dama (♕♛), dos alfiles (♗♝), dos caballos (♘♞), dos torres (♖♜) y ocho peones (♙♟). La posición inicial del tablero y las piezas se ven a la izquierda.

Para evitar el uso que hacen los programas de ajedrez de una amplia biblioteca de aperturas (primeras jugadas de una partida), el ajedrecista islandés Bobby Fischer (1943-2008), de origen estadounidense, propuso una variante conocida como ajedrez aleatorio de Fischer en la que la posición inicial se sortea de acuerdo a estas reglas:

(1) Solo se sortea la columna de las piezas blancas que no sean peones; las negras irán en la misma columna que las blancas y los peones no se sortean.

(2) Los alfiles deben colocarse en escaques de distinto color.

(3) El rey debe quedar entre las dos torres.



A la derecha se ve un ejemplo de posición inicial.

Calcula:

(a) ¿De cuántas maneras se pueden sortear las piezas cumpliendo solo la primera condición?

(b) ¿En cuántas de esas maneras los alfiles están en escaques de distinto color?

(c) ¿De cuántas maneras se pueden sortear las piezas?

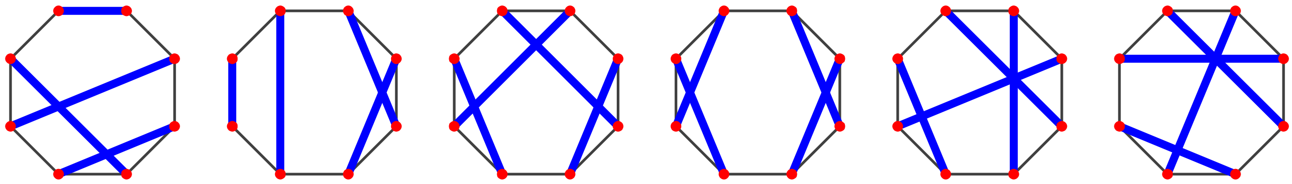
Doble factorial

En varias áreas de la matemática es preciso utilizar el doble factorial. El doble factorial del número natural positivo «n» se define como el producto de los números naturales menores o iguales que «n» que tengan la misma paridad que «n». Se escribe «n!!»; no hay que confundirlo con calcular el factorial del factorial de «n», operación que se escribe «(n!)!».

Ejemplo 1: $8!! = 8{\cdot}6{\cdot}4{\cdot}2 = 384$; ejemplo 2: $9!! = 9{\cdot}7{\cdot}5{\cdot}3{\cdot}1 = 945$

Enunciados

① Calcula de cuántas maneras se pueden emparejar todos los vértices de un octógono regular uniéndolos con una diagonal o un lado. Aquí se muestran varias posibilidades de emparejamiento:



② El tutor de una clase de educación secundaria tiene treinta alumnos y alumnas. La dirección le obliga a sentarlos por parejas. Si numeramos los alumnos y alumnas de 1 a 30, vemos abajo, a la izquierda, una posible colocación.

25	13	3	9	20	5	8	4	7	27
12	2	28	6	30	21	19	22	18	23
11	24	26	29	10	1	16	14	15	17

Calcula con cinco cifras significativas de cuántas maneras puede colocar a los alumnos y alumnas, teniendo en cuenta que no importa la situación en el aula de las parejas ni el orden en que se siente cada pareja. Por ejemplo, los cuatro personajes Drácula, Criatura, Hombre Lobo y Zombi solo se pueden sentar por parejas de las tres maneras que vemos más arriba, a la derecha.

③ Un grupo de seis personas entra en un establecimiento a tomar unas bebidas. En el local solo quedan disponibles dos mesas de tres personas cada una. Si no importa de qué manera se sienten en cada mesa, ni en qué mesa se sienta cada uno, calcula de cuántas maneras distintas se pueden distribuir.

④ Un grupo de doce personas entra en un establecimiento a tomar unas bebidas. En el local solo quedan disponibles tres mesas de cuatro personas cada una. Si no importa de qué manera se sienten en cada mesa, ni en qué mesa se sienta cada uno, calcula de cuántas maneras distintas se pueden distribuir.

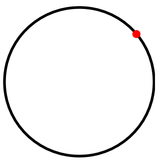
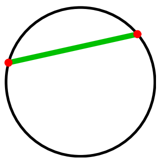
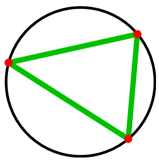
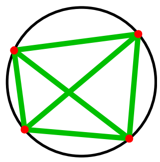
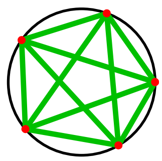
⑤ Una persona dirige una asignatura en la universidad. Tiene treinta alumnos y alumnas. Les propone que realicen un trabajo por grupos de seis personas. Calcula con cinco cifras significativas de cuántas maneras se pueden formar los grupos.

El problema del círculo de Moser

Enunciado: si se seleccionan varios puntos en una circunferencia, ¿cuál es el número máximo de regiones internas al círculo que quedan determinadas cuando se trazan todos los segmentos que unen dos de los puntos?

Convenio: llamaremos «R(n)» al número máximo de regiones determinadas cuando se usan «n» puntos.

Ejemplos. Mostramos los primeros valores de R(n):

				
$R(1) = 1$	$R(2) = 2$	$R(3) = 4$	$R(4) = 8$	$R(5) = 16$

Primer impulso. La primera impresión es pensar que como los números obtenidos son potencias de dos, R(6) tendrá que ser la siguiente potencia de dos, 32. ¡Pero es falso! Usar ejemplos sencillos para resolver problemas complicados es un magnífico método para buscar soluciones, pero debemos dar con un razonamiento que nos sirva para explicar todos los ejemplos, y en este caso no hay ninguno que pueda explicar por qué todos los resultados de R(n) deben ser potencias de dos.

Enunciados

① Averigua la fórmula combinatoria que hay que utilizar para determinar cuántas cuerdas de la circunferencia se trazan cuando se utilizan «n» puntos, para valores de «n» mayores que 1.

② Averigua la fórmula combinatoria que hay que utilizar para determinar cuántos puntos de intersección de las cuerdas se obtienen, como máximo, cuando se utilizan «n» puntos, para los valores de «n» mayores que 3.

Solución del problema del círculo de Moser

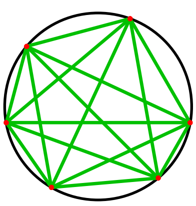
Usando solamente técnicas de enseñanza secundaria, se puede llegar a entender la demostración de la solución de este problema. El número de regiones es

$$\boxed{R(n) = C_{n,4} + C_{n,2} + 1}$$

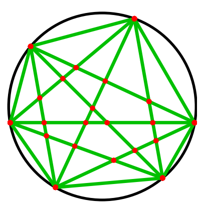
Ejercicio

③ Usando la fórmula de la solución del problema del círculo de Moser, calcula el valor R(6).

Idea clave de la demostración



A la izquierda vemos un gráfico genérico de R(6). A la derecha, hemos añadido los puntos de intersección de las cuerdas y dividido estas en varios segmentos. Hay 21 puntos y 51 segmentos (contando los arcos).



Se cumple una propiedad deducida a partir de la característica de Euler de los poliedros regulares: Puntos – Segmentos + Regiones = 1.

Por tanto, Regiones = Segmentos – Puntos + 1 = 51–21+1 = 31.

Números combinatorios

Las combinaciones de «m» elementos tomados de «n» en «n» (con m⩾n) también reciben el nombre de número combinatorio.

En ese caso se escribe $\binom{m}{n}$ y se lee «m sobre n». Es decir:

$$\boxed{\binom{m}{n} = C_{m,n}}$$

Por tanto, podremos calcular los números combinatorios con cualquiera de las fórmulas de las combinaciones y en la calculadora con la misma tecla.

Propiedades ya conocidas

Vamos a escribir algunas propiedades ya presentadas de las combinaciones escritas como números combinatorios:

1. $\binom{m}{0} = 1$ 2. $\binom{m}{m} = 1$ 3. $\binom{m}{1} = m$ 4. $\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$

Propiedad

Vemos ahora una propiedad que no es tan obvia, pero es muy interesante:

$\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}$. **Nota**: expresión equivalente a $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$

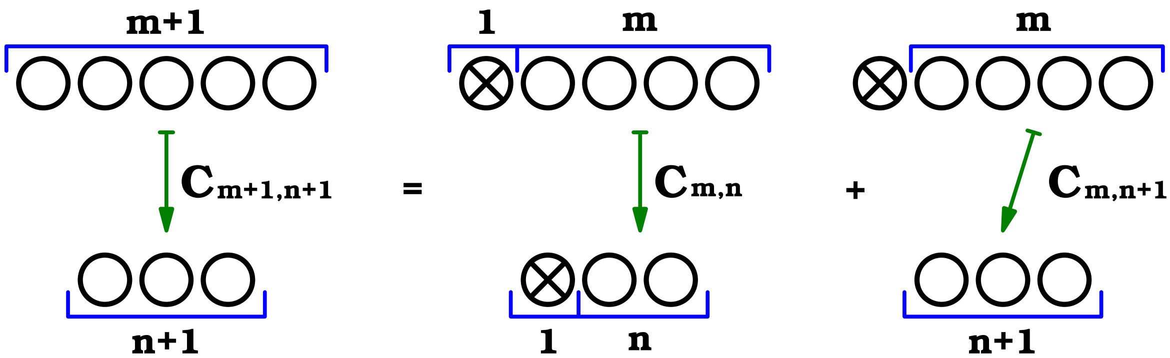
Ejemplo: $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$. Comprobación: $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10$

Demostración

Es posible desarrollar al menos dos demostraciones de esta propiedad usando las dos fórmulas para calcular las combinaciones, pero esas demostraciones requieren un uso de las fracciones algebraicas que presentaremos en este curso un poco más adelante, en este mismo nivel.

Nos parece más oportuno mostrar una demostración basada en la propia definición de combinaciones: hay que demostrar que $C_{m+1,n+1} = C_{m,n} + C_{m,n+1}$

Las combinaciones de «m+1» elementos tomados de «n+1» en «n+1» se pueden obtener sumando dos tipos de combinaciones: las que tienen un elemento determinado de los «m+1» y las que no lo tienen. Para calcular las primeras, hay que elegir de entre los «m» elementos aparte del elemento determinado qué «n» elementos le acompañarán (esto es, $C_{m,n}$). Para calcular las segundas, hay que elegir de entre los «m» elementos aparte del elemento determinado qué «n+1» elementos formarán la combinación (esto es, $C_{m,n+1}$). Te puede ayudar esta figura:

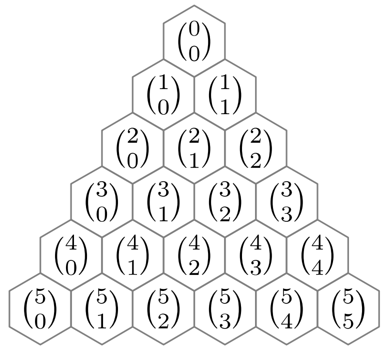


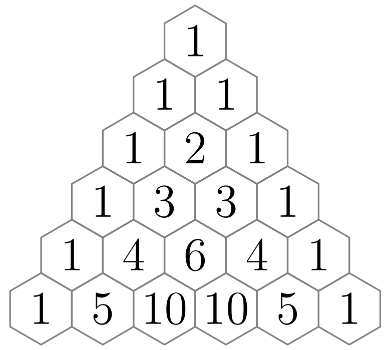
El triángulo de Pascal

Blaise Pascal fue un sabio francés que vivió de 1623 a 1662. El triángulo de Pascal recibe ese nombre en honor a él, pero también se conoce como triángulo de Tartaglia en honor al matemático italiano (o veneciano) Nicolò Fontana (~1499-1557), apodado Tartaglia por su tartamudez.

El triángulo de Pascal o de Tartaglia consiste en la representación de los números combinatorios bien ordenados, formando un triángulo que se puede extender hacia abajo indefinidamente. A la izquierda lo presentamos con los resultados numéricos, en el centro viendo los números combinatorios y a la derecha rodeando los números de unos hexágonos que ayudarán a entender las propiedades:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$





Propiedades

- El triángulo es simétrico respecto al eje vertical (figura 1). Esta propiedad se demuestra porque $\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$.
- Los valores de los extremos son todos 1 (figura 1). Esta propiedad se demuestra porque $\binom{m}{0} = 1$, $\binom{m}{m} = 1$ y el valor que corresponde a $\binom{0}{0}$ debe ser 1, ya que el número de maneras de elegir ningún elemento de un conjunto sin elementos es una: precisamente, no elegir ninguno.
- Los valores que no están en los extremos se calculan sumando los dos valores que tienen inmediatamente arriba (figura 2). Esta propiedad se demuestra porque $\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}$.
- Las sumas de todos los elementos de cada fila van siendo potencias consecutivas de 2 (figura 3). Esto se demuestra viendo que cada elemento de una fila se usa dos veces para obtener elementos de la fila siguiente (figura 2).

Figura 1

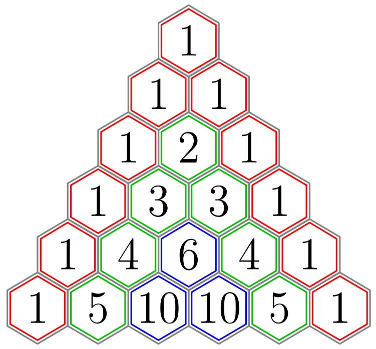


Figura 2

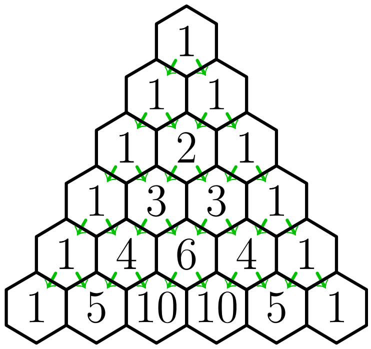
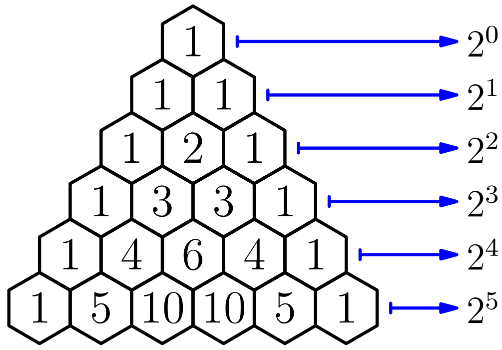
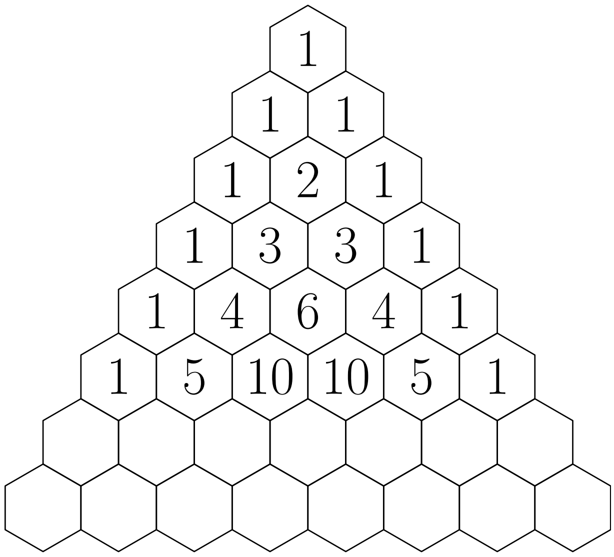


Figura 3



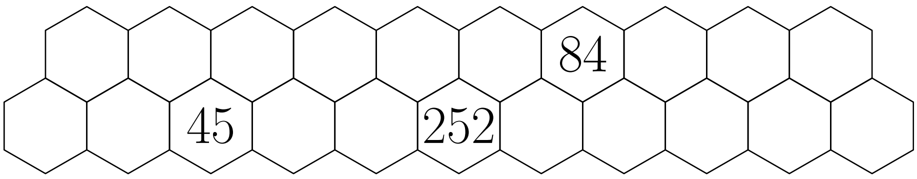
Enunciados

① Completa los huecos del siguiente triángulo de Pascal:



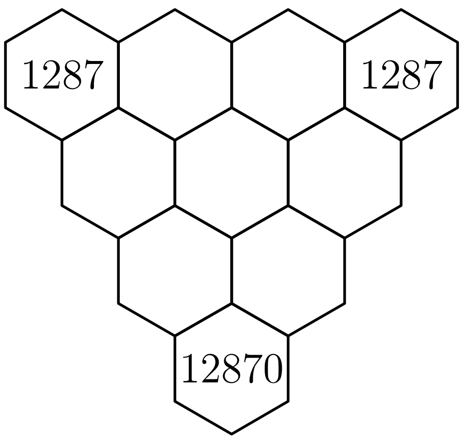
② Si todos los elementos de una fila del triángulo de Pascal suman 1024, ¿cuánto suman todos los elementos de la fila siguiente?

③ Utilizando exclusivamente propiedades del triángulo de Pascal, completa estas dos filas consecutivas del triángulo. Es decir: no debes usar cómo calcular números combinatorios.



④ Si todos los elementos de una fila del triángulo de Pascal suman 16 384, averigua cuánto suman todos los elementos de la fila anterior.

⑤ Completa el siguiente fragmento del triángulo de Pascal:



⑥ Calcula la suma de todos los elementos de las primeras 25 filas del triángulo de Pascal.

Polinomios múltiplos y divisores

Consideramos dos polinomios A(x) y B(x), ambos de grado mayor o igual que uno y los multiplicamos, obteniendo el polinomio C(x): A(x)·B(x) = C(x). Entonces, se dice:

- ✱ El polinomio A(x) es divisor del polinomio C(x)
- ✱ El polinomio B(x) es divisor del polinomio C(x)
- ✱ El polinomio C(x) es múltiplo del polinomio A(x)
- ✱ El polinomio C(x) es múltiplo del polinomio B(x)

Ejemplo 1

Consideramos los polinomios A(x)=x+2 y B(x)=x–5. Los multiplicamos para obtener el polinomio C(x): C(x) = A(x)·B(x) = (x+2)(x–5) = x^2–3x–10. Entonces, se dice:

- ✱ El polinomio «x+2» es divisor del polinomio «x^2–3x–10»
- ✱ El polinomio «x–5» es divisor del polinomio «x^2–3x–10»
- ✱ El polinomio «x^2–3x–10» es múltiplo del polinomio «x+2»
- ✱ El polinomio «x^2–3x–10» es múltiplo del polinomio «x–5»

Ejemplo 2

Si en vez de hacer el producto de los polinomios lo dejamos indicado, es muy sencillo apreciar las relaciones entre divisor y múltiplo, y también bastante útil.

- ✱ El polinomio «3x–2» es divisor del polinomio «(3x–2)(5x+1)»
- ✱ El polinomio «5x+1» es divisor del polinomio «(3x–2)(5x+1)»
- ✱ El polinomio «(3x–2)(5x+1)» es múltiplo del polinomio «3x–2»
- ✱ El polinomio «(3x–2)(5x+1)» es múltiplo del polinomio «5x+1»

Polinomios de grado 0

Es fundamental tener en cuenta que los polinomios que multiplicamos en la definición no pueden ser de grado 0, esto es, no pueden ser números; si lo fuera alguno de los dos, las definiciones no se verificarían.

Ejemplo 3

Consideramos los polinomios A(x)=5 y B(x)=3x+2. Los multiplicamos para obtener el polinomio C(x): C(x) = A(x)·B(x) = 5(3x+2) = 15x+10. Entonces:

- ✱ El polinomio «5» **no** es divisor del polinomio «15x+10»
- ✱ El polinomio «3x+2» **no** es divisor del polinomio «15x+10»
- ✱ El polinomio «15x+10» **no** es múltiplo del polinomio «5»
- ✱ El polinomio «15x+10» **no** es múltiplo del polinomio «3x+2»

Propiedad

Si el polinomio P(x) es de grado mayor que 0, el polinomio Q(x) es de grado mayor que el grado de P(x) y la división de Q(x) entre P(x) es una división exacta, entonces P(x) es divisor de Q(x) y Q(x) es múltiplo de P(x).

Ejemplo 4

Consideramos los polinomios P(x)=x+4 y Q(x)=x^2+x–12. La división de Q(x) entre P(x) es (x^2+x–12):(x+4) = x–3, exacta. (Hay que hacerla, no es obvio). Por tanto,

- ✱ «x+4» es divisor de «x^2+x–12»
- ✱ «x^2+x–12» es múltiplo de «x+4»

Definición de máximo común divisor de varios polinomios

Llamamos polinomio máximo común divisor de varios polinomios a cualquier polinomio que sea divisor de todos ellos y que verifique que no hay ningún polinomio de grado superior al suyo que también sea divisor de todos.

Notación

Dados los polinomios P(x) y Q(x), su polinomio máximo común divisor se escribe MCD(P(x),Q(x)).

Observación

Hay infinitos polinomios que son el polinomio máximo común divisor de varios polinomios, pero cualquiera de ellos se puede obtener multiplicando otro por una constante distinta de cero. Por tanto, se dice que el polinomio máximo común divisor es único salvo una constante.

Cálculo del máximo común divisor de varios polinomios

Paso 1. Se factorizan todos los polinomios de los que hay que calcular el máximo común divisor.

Paso 2. El polinomio máximo común divisor es el producto de un número cualquiera distinto de cero y de todos los factores comunes a todos los polinomios; es muy común dejarlo factorizado.

Ejemplo 1

Enunciado. Averigua el máximo común divisor de los polinomios
$P(x) = 2x^2+13x+15$ y $Q(x) = 2x^2-5x-12$.

Resolución

Factorizamos P(x): $P(x) = 0 \Rightarrow 2x^2+13x+15 = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ -5 \end{cases}$. $P(x)=2(x+\frac{3}{2})(x+5)$

Factorizamos Q(x): $Q(x) = 0 \Rightarrow 2x^2-5x-12 = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = \begin{cases} 4 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$. $Q(x)=2(x-4)(x+\frac{3}{2})$

Vemos que el único polinomio que es factor común de P(x) y de Q(x) es $(x+\frac{3}{2})$, que ya podríamos dar como solución. Pero, si nos viene bien, podemos multiplicarlo por cualquier número distinto de cero. Por ejemplo, si multiplicamos por 2 eliminamos la fracción: $2(x+\frac{3}{2}) = 2x+3$. Podemos dar como solución cualquiera de las dos posibilidades, todo depende de dónde lo tengamos que usar.

Solución: $MCD(P(x),Q(x)) = 2x+3$

Ejemplo 2

Enunciado. Averigua el máximo común divisor de los polinomios
$A(x) = (x-\frac{1}{2})(x+1)(x+\frac{1}{3})$, $B(x) = (x+8)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})$ y $C(x) = (x-\frac{1}{2})(x-31)(x+\frac{1}{3})$

Resolución

Los polinomios ya están factorizados. Multiplicamos por 6 los factores comunes: $6\cdot(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3}) = (2x-1)(3x+1)$. Solución: $MCD(A(x),B(x),C(x)) = (2x-1)(3x+1)$

Enunciados

Calcula el polinomio máximo común divisor de cada uno de los siguientes grupos de polinomios.

① $A(x) = x^2-1$ y $B(x) = x^2+2x-3$

② $C(x) = x^2+4x+4$ y $D(x) = x^2-4$

③ $E(x) = (x^2+1)(x+3)$, $F(x) = (x-8)(x^2+1)$ y $G(x) = x^3+x$

④ $H(x) = x^3+x^2$, $I(x) = x^4$ y $J(x) = x^5+3x^3$

⑤ $K(x) = 5x^2+14x-3$ y $L(x) = 15x^2+2x-1$

⑥ $M(x) = 2x+7$, $N(x) = 3x+4$ y $P(x) = x-13$

⑦ $Q(x) = 14x-7$ y $R(x) = 3-6x$

⑧ $S(x) = x^3+3x^2+2x$ y $T(x) = x^3-x$

⑨ $U(x) = 3x^2+2x$ y $V(x) = 6x+4$

⑩ $W(x) = x^2-9$, $Y(x) = x^2+6x+9$ y $Z(x) = x^2+3x$

⑪ $A(x) = x$, $B(x) = x+1$ y $C(x) = x^2+3$

⑫ $D(x) = x^2+5x-14$ y $E(x) = x^2+10x+21$

⑬ $F(x) = x+4$ y $G(x) = x^2-16$

⑭ $H(x) = 7x^2+4x$, $I(x) = -3x^2+5x$ y $J(x) = 11x^2-x$

⑮ $K(x) = (x+2)(x-3)(x+5)$, $L(x) = (x-3)x(x+5)$ y $M(x) = (x+5)(x^2+1)(x-3)$

⑯ $N(x) = x^3-x^2+x-1$ y $P(x) = x^2-9x+8$

⑰ $Q(x) = x^3+x^2+2x+2$ y $R(x) = x^3+x^2+3x+3$

⑱ $S(x) = 7x$, $T(x) = x^3$ y $S(x) = 8x^2$

⑲ $T(x) = x^5-x^4+10x^3-10x^2$ y $U(x) = x^5+x^4+10x^3+10x^2$

⑳ $V(x) = x^4-1$ y $W(x) = x^4-x^3+x^2-x$

㉑ $Y(x) = 5x-1$ y $Z(x) = 5x+2$

㉒ $A(x) = x^2+2x-15$ y $B(x) = x^2+4x-21$

㉓ $C(x) = x^3+3x$, $D(x) = x^2-x$ y $E(x) = x^2$

㉔ $F(x) = x^3+x-2$ y $G(x) = x^3-1$

㉕ $H(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$ y $J(x) = \dfrac{x^2+4x-5}{3}$

Definición de mínimo común múltiplo de varios polinomios

Llamamos polinomio mínimo común múltiplo de varios polinomios a cualquier polinomio que sea múltiplo de todos ellos y que verifique que no hay ningún polinomio de grado inferior al suyo que también sea múltiplo de todos.

Notación

Dados los polinomios P(x) y Q(x), su polinomio mínimo común múltiplo se escribe mcm(P(x),Q(x)).

Observación

Hay infinitos polinomios que son el polinomio mínimo común múltiplo de varios polinomios, pero cualquiera de ellos se puede obtener multiplicando otro por una constante distinta de cero. Por tanto, se dice que el polinomio mínimo común múltiplo es único salvo una constante.

Cálculo del mínimo común múltiplo de varios polinomios

Paso 1. Se factorizan todos los polinomios de los que hay que calcular el mínimo común múltiplo.

Paso 2. El polinomio mínimo común múltiplo es el producto de un número cualquiera distinto de cero y de todos los factores que aparezcan en las factorizaciones de los polinomios; es muy común dejarlo factorizado.

Ejemplo 1

Enunciado. Averigua el mínimo común múltiplo de los polinomios

$P(x) = x^4+6x^3+9x^2$ y $Q(x) = x^4+3x^3$.

Resolución

Factorizamos P(x): $P(x) = x^4+6x^3+9x^2 = x^2(x^2+6x+9) = x^2(x+3)^2$

Factorizamos Q(x): $Q(x) = x^4+3x^3 = x^3(x+3)$

Vemos que en las descomposiciones aparecen dos polinomios:

- «x^3», que incluye al polinomio «x^2».
- «$(x+3)^2$», que incluye al polinomio «$x+3$».

Por tanto, hay que multiplicar «x^3» y «$(x+3)^2$». Podríamos multiplicar también por cualquier número distinto de cero, pero en este caso solo serviría para complicar la expresión. La solución es «$x^3(x+3)^2$»; podemos desarrollar la expresión si nos lo piden, pero normalmente es más útil dejarla así.

Solución: $\text{mcm}(P(x),Q(x)) = x^3(x+3)^2$

Ejemplo 2

Enunciado. Averigua el mínimo común múltiplo de los polinomios

$A(x) = x(x+1)$, $B(x) = (x-5)^2$ y $C(x) = (x-1)^3$

Resolución

Los polinomios ya están factorizados. Vemos que no hay ningún factor que aparezca en más de uno de los polinomios dados, luego en este caso el polinomio mínimo común múltiplo coincide con el producto (salvo una constante). Podemos desarrollar el producto o no hacerlo, pero casi siempre es preferible disponer del producto, entre otros motivos porque así se ven fácilmente sus raíces.

Solución: $\text{mcm}(A(x),B(x),C(x)) = x(x+1)(x-5)^2(x-1)^3$

Enunciados

Calcula el polinomio mínimo común múltiplo de cada uno de los siguientes grupos de polinomios.

① $A(x) = x^2-1$ y $B(x) = x^2+2x+1$

② $C(x) = x^3+5x^2$ y $D(x) = x^3+3x$

③ $E(x) = x$, $F(x) = x+2$ y $G(x) = x^2+1$

④ $H(x) = x^2+2x$ e $I(x) = x^2+4x+4$

⑤ $J(x) = 6x-18$, $K(x) = 3-x$ y $L(x) = 10x-30$

⑥ $M(x) = x+7$, $N(x) = x^2+14x+49$ y $P(x) = (x+7)^3$

⑦ $Q(x) = x^2(x+2)^2$, $R(x) = x^3$ y $S(x) = (x+2)^3$

⑧ $T(x) = 3x^2+3$, $U(x) = 5x^2+5$ y $V(x) = -7x^2-7$

⑨ $W(x) = x^2+3x$, $Y(x) = x^2-3x$ y $Z(x) = x^2-9$

⑩ $A(x) = x^2+2x-3$, $B(x) = x^2+4x+3$ y $C(x) = x^2-1$

⑪ $D(x) = x^2-25$, $E(x) = x^2+10x+25$ y $F(x) = x^2-10x+25$

⑫ $G(x) = (x+8)^3(x-7)^4$ y $H(x) = (x+8)^4(x-7)^3$

⑬ $I(x) = x^4-81$, $J(x) = x^3+6x^2+9x$ y $K(x) = x^3-6x^2+9x$

⑭ $L(x) = 2x^2-3x-5$ y $M(x) = 2x^2-7x+5$

⑮ $N(x) = x^2+4x-5$ y $P(x) = x^2+5x-6$

⑯ $Q(x) = x^2+3x$, $R(x) = x^2-9$ y $S(x) = x^2-2x-15$

⑰ $T(x) = x$, $U(x) = x^2$ y $V(x) = x+11$

⑱ $W(x) = (x-4)^2$, $Y(x) = (x-13)^3$ y $Z(x) = (2x+1)^2$

⑲ $A(x) = 2x^3-2x^2+x-1$ y $B(x) = 2x^3+2x^2+x+1$

⑳ $C(x) = 4x^2-4$, $D(x) = 6x+6$ y $E(x) = 7x-7$

㉑ $F(x) = (x+5)^5$, $G(x) = (x-6)^6$ y $H(x) = (x+5)(x-6)$

㉒ $I(x) = x^3-3x^2+3x-1$, $J(x) = (x-1)^2(x+2)$ y $K(x) = (x-1)^2(x+5)$

㉓ $L(x) = x^2-12x+36$ y $M(x) = x^3(x-6)$

㉔ $N(x) = 3x$, $M(x) = 4(x-1)$ y $P(x) = 7(x+2)$

㉕ $Q(x) = \dfrac{x+1}{7}$, $R(x) = \dfrac{x-2}{9}$ y $S(x)=4x-8$

Método para simplificar fracciones algebraicas

Para simplificar una fracción algebraica hay que encontrar un polinomio que divida al numerador y el denominador, dividir ambos entre él y luego eliminarlo.

Ejemplo 1

Enunciado: simplifica lo máximo que sea posible $\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2+x-1}$

Resolución

Observamos que x=1 es raíz del numerador: $1^3-1^2+2\cdot 1-2=0$.

Observamos que x=1 es raíz del denominador: $1^3-1^2+1-1=0$.

Por tanto, el numerador y el denominador son divisibles entre «x–1».

Hacemos las divisiones (podemos usar la regla de Ruffini):

$(x^3-x^2+2x-2):(x-1)=x^2+2$; $(x^3-x^2+x-1):(x-1)=x^2+1$

Ya podemos simplificar: $\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2+x-1}=\frac{(x-1)(x^2+2)}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{x^2+2}{x^2+1}$

La fracción algebraica obtenida es irreducible porque el numerador y el denominador son polinomios irreducibles, por ser de grado dos y no tener raíces.

Solución: $\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2+x-1}=\frac{x^2+2}{x^2+1}$

La verdadera dificultad del método

La parte más complicada del método es encontrar algún polinomio que divida al numerador y al denominador. Si el polinomio fuera de la forma «x–a», siendo «a» un número entero, «a» deberá ser un divisor del término independiente del numerador y del denominador, por lo que sería fácil detectarlo; pero «a» podría ser un número no entero (por lo que no hay método sencillo para averiguarlo) o incluso el polinomio podría ser de grado dos.

En los casos más difíciles, será necesario factorizar completamente el numerador y el denominador; y, en muchas ocasiones, será un trabajo sin recompensa, porque puede ser que no haya divisores comunes.

Ejemplo 2

Enunciado: simplifica lo máximo que sea posible $\frac{x^3-2x^2+7x-14}{x^3-2x^2+5x-10}$

Resolución

Los divisores comunes a «–14» y a «–10» son 1, –1, 2 y –2. Vamos probando si alguno de ellos es raíz del numerador y del denominador y encontramos el 2.

Hacemos las divisiones (podemos usar la regla de Ruffini):

$(x^3-2x^2+7x-14):(x-2)=x^2+7$; $(x^3-2x^2+5x-10):(x-2)=x^2+5$

Ya podemos simplificar: $\frac{x^3-2x^2+7x-14}{x^3-2x^2+5x-10}=\frac{(x-2)(x^2+7)}{(x-2)(x^2+5)}=\frac{x^2+7}{x^2+5}$

La fracción algebraica obtenida es irreducible porque el numerador y el denominador son polinomios irreducibles, por ser de grado dos y no tener raíces.

Solución: $\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2+x-1}=\frac{x^2+7}{x^2+5}$

Enunciados

Simplifica lo máximo que sea posible las siguientes fracciones algebraicas:

① $\dfrac{x^3+5x^2}{x^3-x^2}$ ② $\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+4}$ ③ $\dfrac{x^2-9x-36}{x^2-16x+48}$ ④ $\dfrac{15x^2-41x+12}{35x^2-74x-24}$

Resoluciones

① Este es un caso muy sencillo, porque salta a la vista que se puede extraer factor común «x^2» en el numerador y el denominador:

$$\frac{x^3+5x^2}{x^3-x^2} = \frac{x^2(x+5)}{x^2(x-1)} = \frac{x+5}{x-1}$$

② El uso de identidades notables facilita mucho la tarea:

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x+4} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{x-2}{x+2}$$

③ Los términos independientes del numerador y del denominador tienen muchos divisores comunes, por lo que sería largo buscar si hay alguna raíz común; pero como los dos polinomios son de segundo grado, podemos factorizarlos simplemente calculando sus raíces:

$$x^2-9x-36=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = \begin{cases} 12 \\ -3 \end{cases} ;\ x^2-16x+48=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = \begin{cases} 12 \\ 4 \end{cases}$$

$$\frac{x^2-9x-36}{x^2-16x+48} = \frac{(x-12)(x+3)}{(x-12)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4}$$

④ Usamos el mismo método que en el ejemplo anterior:

$$15x^2-41x+12=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{12}{5} \\ \frac{1}{3} \end{cases} ;\ 35x^2-74x-24=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{12}{5} \\ -\frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\frac{15x^2-41x+12}{35x^2-74x-24} = \frac{15\left(x-\frac{12}{5}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{35\left(x-\frac{12}{5}\right)\left(x+\frac{2}{7}\right)} = \frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}{7\left(x+\frac{2}{7}\right)} = \frac{3x-1}{7x+2}$$

Observaciones

* Si se simplifica una vez una fracción algebraica, hay que comprobar si es posible seguir simplificándola. En todos los ejemplos anteriores el numerador y el denominador son de grado uno, luego son irreducibles y las fracciones algebraicas resultantes no se pueden simplificar más.
* Ya viste en el nivel 3 que hay polinomios que aún no se pueden factorizar con los conocimientos que hemos visto hasta el momento, así que también debes saber que hay fracciones algebraicas que se pueden simplificar, pero que en este nivel no se sabe cómo hacerlo. Ciertamente, serán casos raros.
* En enseñanza secundaria no suele ser necesario simplificar fracciones algebraicas complicadas, pero sí las sencillas.

Enunciados

Simplifica lo máximo que sea posible las siguientes fracciones algebraicas:

1	$\frac{x^4-5x^3}{x^4+6x^3}$	2	$\frac{x^2+x}{x^2-x}$	3	$\frac{5x^2}{x^3+6x^2}$
4	$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$	5	$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$	6	$\frac{x+5}{x^2-25}$
7	$\frac{x^2-8x-48}{x^2-15x+36}$	8	$\frac{x^2+14x+48}{x^2+2x-48}$	9	$\frac{x^2+12x+20}{x^2+5x-20}$
10	$\frac{6x^2+25x+24}{9x^2+30x+16}$	11	$\frac{20x^2-11x-3}{24x^2-26x+6}$	12	$\frac{42x^2-13x-42}{42x^2-85x+42}$
13	$\frac{x^3-x^2+3x-3}{x^3-x^2+4x-4}$	14	$\frac{2x^3-2x^2+x-1}{2x^3-2x^2+3x-3}$	15	$\frac{5x^3+5x^2+4x+4}{6x^3+6x^2+5x+5}$
16	$\frac{x^2+6x+9}{x^3+3x^2+3x+9}$	17	$\frac{x^3-2x^2+2x-4}{x^2-4x+4}$	18	$\frac{x^2-4}{x^3+2x^2+x+2}$
19	$\frac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-3}$	20	$\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$	21	$\frac{x^3+12x^2+35x}{x^3+14x^2+45x}$
22	$\frac{x}{x+3}$	23	$\frac{x+1}{x^2}$	24	$\frac{4x}{2x^2+4x}$
25	$\frac{x-3}{x^3-7x-6}$	26	$\frac{x^2+x}{x^3+x^2}$	27	$\frac{x-1}{x^2+4x+4}$
28	$\frac{x^2+x-20}{x^2+11x+30}$	29	$\frac{x^2-1}{x^3+7x^2-x-7}$	30	$\frac{2x^2+6x+4}{2x^2+10x+12}$
31	$\frac{x^3-3x^2+4}{x^4-3x^3+4x}$	32	$\frac{x+1}{(x-1)(x^2-1)}$	33	$\frac{(x+2)(x^2-4x+3)}{(x-1)(x^2+5x+6)}$
34	$\frac{x^3+x^2}{x^4-x^2}$	35	$\frac{3x^2+5x-2}{3x^2+7x+2}$	36	$\frac{2x+14}{x^4+7x^3+x+7}$
37	$\frac{2x-7}{2x^3-7x^2+8x-28}$	38	$\frac{x^2+4}{x+2}$	39	$\frac{(3x-9)(x+5)}{(x^2-25)(x-3)}$
40	$\frac{x^2-1}{x^4-1}$	41	$\frac{x^2-6x}{x^2-36}$	42	$\frac{(x+3)^2(x+2)^5}{(x+2)^4(x+3)^3}$
43	$\frac{x^2+2x+4}{x^3-8}$	44	$\frac{x^2+1}{x^4+2x^2+1}$	45	$\frac{x^3-3x^2+2x}{x^3-5x^2+8x-4}$
46	$\frac{(x+1)^3(x-1)^2}{(x^2-1)^3}$	47	$\frac{4x-20}{6x^2-30x}$	48	$\frac{x^2-4}{x^3-8}$

Suma de fracciones algebraicas

Se utiliza el mismo método que para sumar fracciones ordinarias.

Paso previo: si es posible simplificar alguna fracción, casi siempre es conveniente hacerlo antes de empezar la suma.
Paso 1: usando el polinomio mínimo común múltiplo de todos los denominadores, se convierten todas las fracciones a común denominador.
Paso 2: se suman los numeradores con la precaución de que si una fracción algebraica lleva signo negativo, este afecta a todo el numerador.
Paso 3: si es posible, se simplifica la fracción algebraica resultante (no es común).

Es habitual dejar el numerador como polinomio y el denominador como producto de polinomios, ya que ayuda en las operaciones que haya que realizar después.

Enunciados

Escribe como fracción algebraica irreducible el resultado de estas operaciones.

① $\frac{2}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}-\frac{x-3}{x^2-x}$

② $\frac{5}{x+2}-\frac{4}{x-3}$

Resoluciones

① Las tres fracciones son irreducibles, así que pasamos a calcular el polinomio mínimo común múltiplo de los tres denominadores:

$x^2-1=(x+1)(x-1)$ y $x^2-x=x(x-1)$, luego $\text{mcm}(x,x^2-1,x^2-x)=x(x+1)(x-1)$

Es costumbre escribir a la vez los pasos 2 y 3, porque, si no, habría que escribir varias veces el mismo denominador, que puede ser largo.

Fíjate **detenidamente** en el primer paso, que es el más importante.

$$\frac{2}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}-\frac{x-3}{x^2-x}=\frac{2x(x-1)-4x-(x-3)(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-4x-(x^2+x-3x-3)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{2x^2-6x-x^2-x+3x+3}{x(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{2x^2-6x-x^2-x+3x+3}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-4x+3}{x(x+1)(x-1)}=\frac{(x-1)(x-3)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x-3}{x(x+1)}$$

Hemos calculado que las raíces de «x^2-4x+3» son «1» y «3»

Solución: $\frac{x-3}{x(x+1)}$

② Operaciones sencillas como esta aparecen mucho más a menudo que las más complicadas; vemos que el mínimo común múltiplo de los denominadores es sencillamente su producto y que no hay simplificación posible, ni antes ni después de sumar.

$$\frac{5}{x+2}-\frac{4}{x-3}=\frac{5(x-3)-4(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{5x-15-4x-8}{(x+2)(x-3)}=\frac{x-23}{(x+2)(x-3)}$$

Solución: $\frac{x-23}{(x+2)(x-3)}$

Enunciados

Escribe como fracción algebraica irreducible el resultado de estas operaciones.

① $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}$

② $\frac{x+2}{x-3}-\frac{3}{x+1}$

③ $\frac{2}{x-2}-\frac{4x}{x^2-4}+\frac{3}{x}$

④ $\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2-4x}$

⑤ $\frac{12}{x^2+4x+4}+\frac{x-6}{x+2}$

⑥ $\frac{2}{x}+\frac{1}{x+4}-\frac{2x+1}{x^2+x-12}$

⑦ $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$

⑧ $\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}+\frac{2}{x^2+8x+16}$

⑨ $\frac{x+2}{x^2-4}-\frac{x-3}{x^2-9}$

⑩ $\frac{x-3}{x^2+7x+10}-\frac{4x+5}{x^2+5x}+\frac{3x+2}{x^2+2x}$

⑪ $\frac{1}{x+3}-\frac{x+2}{(x+3)^2}$

⑫ $\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{2x}{x^2-9}$

Enunciado

El resultado de cada una de las siguientes operaciones es un número natural; averigua en cada caso cuál es.

⑬ $\frac{7x}{x+3}+\frac{21}{x+3}$

⑭ $\frac{x+3}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-1}$

⑮ $\frac{x+2}{x+1}-\frac{1}{x^2+3x+4}+\frac{x+1}{x+2}$

⑯ $\frac{10x+25}{4x+10}+\frac{42x+105}{12x+30}$

Producto de fracciones algebraicas

- Se utiliza el mismo método que para multiplicar fracciones ordinarias: multiplicando los numeradores entre sí para obtener el nuevo numerador y los denominadores entre sí para obtener el nuevo denominador.
- Hay que prestar atención a las simplificaciones que puedan aparecer. Observa que las simplicaciones se pueden aplicar incluso sin escribir como una sola fracción algebraica los productos indicados.
- Es normal dejar factorizado el numerador o el denominador, según convenga para las operaciones que haya que hacer a continuación.

Enunciados

Escribe del modo más sencillo posible el resultado de estas operaciones.

① $\frac{(x+5)^5}{(x-7)^4}\cdot\frac{(x-7)^2}{x+5}$

③ $\frac{(x+5)^2}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x+5}$

② $\frac{x^2-16}{x^2-9}\cdot\frac{x-3}{x+4}$

④ $\frac{x+7}{x^2-x-6}\cdot\frac{x+2}{x^2+3x-21}$

Resoluciones

① Podemos realizar la operación pasando por escribir el producto indicado y simplificando en un paso siguiente:

$$\frac{(x+5)^5}{(x-7)^4}\cdot\frac{(x-7)^2}{x+5} = \frac{(x+5)^5\cdot(x-7)^2}{(x-7)^4\cdot(x+5)} = \frac{(x+5)^4}{(x-7)^2}$$

Pero puedes no escribir el paso intermedio, porque es trivial, y simplificando directamente: se ahorra mucho tiempo.

Solución: $\frac{(x+5)^4}{(x-7)^2}$

② Podemos hacer alguna factorización que consideremos interesante en el mismo paso en que escribimos los productos de numeradores y denominadores.

$$\frac{x^2-16}{x^2-9}\cdot\frac{x-3}{x+4} = \frac{(x+4)(x-4)(x-3)}{(x+3)(x-3)(x+4)} = \frac{x-4}{x+3}$$. Solución: $\frac{x-4}{x+3}$

③ Siempre que hagamos operaciones con fracciones algebraicas debemos tener en cuenta que el resultado puede ser un polinomio, como ocurre en este caso.

$$\frac{(x+5)^2}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x+5} = \frac{(x+5)^2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+5)} = (x+5)(x-1)$$. Solución: $(x+5)(x-1)$

④ Puede ser necesario factorizar haciendo operaciones auxiliares; en este ejemplo, los dos denominadores son polinomios de grado dos, de los que calculamos sus raíces para hacer la factorización.

$$\frac{x+7}{x^2-x-6}\cdot\frac{x+2}{x^2+3x-21} = \frac{(x+7)(x+2)}{(x+2)(x-3)(x-3)(x+7)} = \frac{1}{(x-3)^2}$$. Solución: $\frac{1}{(x-3)^2}$

Cociente de fracciones algebraicas

- ✱ Se utiliza el mismo método que para dividor fracciones ordinarias: el numerador del resultado es el producto del numerador del dividendo y el denominador del divisor y el denominador del resultado es el producto del denominador del dividendo y el numerador del divisor.
- ✱ Hay que prestar atención a las simplificaciones que puedan aparecer. Observa que las simplicaciones se pueden aplicar incluso sin escribir como una sola fracción algebraica los productos indicados: se puede simplificar un factor repetido en los numeradores (o en los denominadores) de dividendo y divisor.
- ✱ Es normal dejar factorizado el numerador o el denominador, según convenga para las operaciones que haya que hacer a continuación.

Enunciados

Escribe del modo más sencillo posible el resultado de estas operaciones.

① $\dfrac{(x+8)^4}{(x-9)^5}:\dfrac{x+8}{(x-9)^3}$ ② $\dfrac{x^2-25}{x^2-49}:\dfrac{x^2+10x+25}{x^2-14x+49}$ ③ $\dfrac{(x-3)^2}{x+5}:\dfrac{x-3}{(x+5)^3}$

Resoluciones

① Podemos realizar la operación pasando por escribir todos los productos indicado y simplificando en un paso siguiente:

$$\frac{(x+8)^4}{(x-9)^5}:\frac{x+8}{(x-9)^3}=\frac{(x+8)^4(x-9)^3}{(x-9)^5(x+8)}=\frac{(x+8)^3}{(x-9)^2}$$

Pero también podemos simplificar los factores «x+8» y «x–9»repetidos en el numerador y el denominador:

$$\frac{(x+8)^4}{(x-9)^5}:\frac{x+8}{(x-9)^3}=\frac{(x+8)^3}{(x-9)^2}:\frac{1}{1}=\frac{(x+8)^3}{(x-9)^2}$$

La decisión de cómo hacerlo es tuya; simplemente, ten cuidado con cualquiera de los dos métodos.

Solución: $\dfrac{(x+8)^3}{(x-9)^2}$

② Podemos hacer alguna factorización que consideremos interesante en el mismo paso en que escribimos los productos de los polinomios. Como siempre, es una decisión que te corresponde a ti: hazlo como te resulte más cómodo.

$$\frac{x^2-25}{x^2-49}:\frac{x^2+10x+25}{x^2-14x+49}=\frac{(x+5)(x-5)(x-7)^2}{(x+7)(x-7)(x+5)^2}=\frac{(x-5)(x-7)}{(x+7)(x+5)}$$

Solución: $\dfrac{(x-5)(x-7)}{(x+7)(x+5)}$

③ Siempre que hagamos operaciones con fracciones algebraicas debemos tener en cuenta que el resultado puede ser un polinomio, como ocurre en este caso.

$\dfrac{(x-3)^2}{x+5}:\dfrac{x-3}{(x+5)^3}=\dfrac{(x-3)^2(x+5)^3}{(x+5)(x-3)}=(x-3)(x+5)^2$. Solución: $(x-3)(x+5)^2$

Enunciados

Escribe del modo más sencillo posible el resultado de estas operaciones.

① $\dfrac{(x+3)^3}{(x-2)^2} \cdot \dfrac{(x+3)^4}{(x-2)^3}$

② $\dfrac{(x-5)^7}{(x+4)^3} : \dfrac{(x-5)^2}{(x+4)^2}$

③ $\dfrac{x^2+12x+36}{x-3} \cdot \dfrac{x^2-9}{x+6}$

④ $\dfrac{x^2-36}{x-5} : \dfrac{x^2-12x+36}{x^2-10x+25}$

⑤ $\dfrac{4x+2}{x^2-1} \cdot \dfrac{x-1}{2x+1}$

⑥ $\dfrac{x^2+5x+6}{x-5} : \dfrac{x+3}{x^2-8x+15}$

⑦ $\dfrac{x+3}{x^2+6x+5} \cdot \dfrac{x^2+4x+3}{x+5}$

⑧ $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x-6} : \dfrac{x-2}{x-6}$

⑨ $\dfrac{x^2-2x}{x^2-7x+10} \cdot \dfrac{x^2+x-12}{x^2-3x}$

⑩ $\dfrac{4x+32}{2x-6} : \dfrac{x+8}{x-3}$

⑪ $\dfrac{x^2+10x+24}{x^2+4x-5} \cdot \dfrac{x^2+11x+30}{x^2+3x-4}$

⑫ $\dfrac{x^7}{4x^2+12x+9} : \dfrac{x^5}{2x+3}$

⑬ $\dfrac{x+1}{x^2-4x+4} \cdot \dfrac{x-2}{x^2+2x+1}$

⑭ $\dfrac{14}{(x+9)^7} : \dfrac{7}{(x+9)^4}$

⑮ $\dfrac{x-4}{x+8} \cdot \dfrac{x+8}{x} \cdot \dfrac{x^6}{x-4}$

⑯ $\dfrac{1}{x+1} : \dfrac{1}{x^2+2x+1}$

Operaciones combinadas con polinomios y fracciones algebraicas

Como una fracción algebraica es una división de polinomios indicada (es decir, no calculada), tiene perfecto sentido considerar operaciones combinadas en las que intervengan polinomios y fracciones algebraicas. Cuando aparecen estas operaciones, el objetivo casi siempre es simplificarlas hasta dejarlas del modo más sencillo posible, que puede ser un polinomio (incluyendo la posibilidad de que sea sencillamente un número) o una fracción algebraica irreducible.

Ideas para llegar a la expresión simplificada:

- Debemos respetar la jerarquía de operaciones, que es la misma que para números enteros.
- Suele ser conveniente simplificar en cuanto sea posible, antes de seguir realizando más operaciones.
- A veces es necesario realizar la división de polinomios indicada en una fracción algebraica.

Enunciados

Escribe de la manera más sencilla que sea posible (polinomio o fracción algebraica irreducible) el resultado de las siguientes operaciones:

① $(x+1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ ② $\left(1+\frac{1}{x+1}\right):\left(x-\frac{2}{x+1}\right)$ ③ $\frac{x^3-1}{x-1}-(x+1)(x-1)$

Resoluciones

① Hay que calcular primero el paréntesis y luego multiplicar.

$$(x+1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right) = (x+1)\cdot\frac{x+1-2}{(x+1)(x-1)} = (x+1)\cdot\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= (x+1)\cdot\frac{1}{x+1} = 1.$$ Solución: 1

② Hay que calcular primero los dos paréntesis y luego dividir.

$$\left(1+\frac{1}{x+1}\right):\left(x-\frac{2}{x+1}\right) = \frac{x+1+1}{x+1}:\frac{x(x+1)-2}{x+1} = \frac{x+2}{x+1}:\frac{x^2+x-2}{x+1} = \frac{x+2}{x^2+x-2} =$$

$$= \frac{x+2}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1}$$

Para factorizar «x^2+x-2» hemos averiguado que sus raíces son 1 y -2.

Solución: $\frac{1}{x-1}$

③ En este caso está claro que la fracción algebraica se puede convertir en un polinomio; en otros casos puede costar más esfuerzo darse cuenta.

$$\frac{x^3-1}{x-1}-(x+1)(x-1) = x^2+x+1-(x^2-1) = x^2+x+1-x^2+1 = x+2.$$ Solución: $x+2$

Hemos hecho la división mediante la regla de Ruffini, pero en otros casos puede ser necesario usar el método general para dividir polinomios.

Enunciados

Escribe de la manera más sencilla que sea posible (polinomio o fracción algebraica irreducible) el resultado de las siguientes operaciones.

① $\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x}\right):\frac{3}{x}$

② $\left(\frac{5}{x-5}-\frac{x}{x-5}\right)\cdot(4-3x)$

③ $\left(1-\frac{2}{x+6}\right):\left(x+\frac{8}{x+6}\right)$

④ $x\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}\right)$

⑤ $\left(1+\frac{8}{x^2-9}\right)\cdot\frac{x+3}{x^2-1}$

⑥ $\frac{2x}{x+1}:\left(2-\frac{2x}{x+1}\right)$

⑦ $\left(x+\frac{2x+1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)$

⑧ $\left(x+3-\frac{4}{x+3}\right)\cdot\left(x+\frac{6}{x+5}\right)$

⑨ $\left(1+\frac{4}{2}-\frac{5}{x^2}\right):\left(\frac{x^2+x-2}{x^2}\right)$

⑩ $\left(2-\frac{2x-6}{x+1}\right)\cdot\frac{x^2-1}{4}\cdot\left(3-\frac{3x-4}{x-1}\right)$

⑪ $\frac{x^4-1}{4}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right)$

⑫ $\left(x^2-\frac{1}{x}\right):\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)$

⑬ $\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{(x+6)^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x+5}+\frac{1}{(x+5)^2}\right)$

⑭ $\frac{20x}{x-2}:\frac{2x^2}{x^2-4}:\frac{5x-10}{x}$

⑮ $\left(\frac{3}{x+3}+\frac{1}{x-5}\right)\cdot\left(\frac{7}{x+2}-\frac{2}{x-3}\right)$

⑯ $\left(1-\frac{1}{x^2}\right):\left(1-\frac{1}{x^3}\right)$

Ecuaciones factorizadas igualadas a cero

Aquí tienes unos ejemplos de las ecuaciones que pretendemos resolver:

① $(x-5)(x+3)(x-7) = 0$ ② $(x^2-5x+4)(x^2+1) = 0$ ③ $(x+7)^3(2x-5)^2 = 0$

En todos ellos vemos el mismo patrón: un producto de polinomios igualado a cero.

Ya has resuelto un problema parecido en el nivel 2 de este curso, para resolver ecuaciones de segundo grado sin término independiente, ya que el primer paso es factorizar el polinomio; recuerda:

$x^2-6x = 0 \Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$. Solución: $x = \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases}$

Idea fundamental

La idea fundamental que sustenta esta resolución es:

> Para que un producto dé como resultado 0, alguno de los factores debe ser 0

Esta idea se puede aplicar a los tres ejemplos propuestos, así como a muchas otras situaciones que encajen con la idea de un producto igualado a 0.

Resoluciones

① $(x-5)(x+3)(x-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+3=0 \\ x-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-3 \\ x=7 \end{cases}$. Solución: $x = \begin{cases} -3 \\ 5 \\ 7 \end{cases}$

② $(x^2-5x+4)(x^2+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=0 \\ x^2+1=0 \end{cases}$

Resolvemos cada una de las dos ecuaciones resultantes.

$$x^2-5x+4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{5\pm3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \rightarrow$ sin solución

Unimos todas las soluciones obtenidas en cada una de las ecuaciones; habría que eliminar las soluciones repetidas, si las hubiera. Cuando hay más de una solución, suele ser buena idea escribirlas en orden creciente.

Solución: $x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$

③ $(x+7)^3(2x-5)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+7)^3=0 \\ (2x-5)^2=0 \end{cases}$

Resolvemos cada una de las dos ecuaciones resultantes:

$(x+7)^3 = 0 \Rightarrow x+7 = 0 \Rightarrow x = -7$

$(2x-5)^2 = 0 \Rightarrow 2x-5 = 0 \Rightarrow x = 2{,}5$

Solución: $x = \begin{cases} -7 \\ 2{,}5 \end{cases}$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Escribe como números decimales exactos las soluciones que no sean números enteros.

① $(x+6)(x-8)(x+2) = 0$

② $(x^2-3x-10)(x^2+2x+5) = 0$

③ $(4x+1)^7(x+8)^5 = 0$

④ $(x-3)(x^2-6x+9) = 0$

⑤ $(x^2+x-2)(x^2-4x+3) = 0$

⑥ $(2x-1)^3(5x+2)^4 = 0$

⑦ $x^3(8x-3)^7 = 0$

⑧ $(x^2+3)(x^2+5)(x^4+1) = 0$

⑨ $(6x-6)^4(x-1)^5 = 0$

⑩ $(x-3)^3(x^2-x-6) = 0$

⑪ $(2x-10)(x^2-10x+25) = 0$

⑫ $5(x-9)(x+8) = 0$

⑬ $-13(x+7)^6 = 0$

⑭ $18(x^2+2)(x^2+3x+4) = 0$

⑮ $(x-6)^3(x^2-7x+6) = 0$

⑯ $(10x-1)(10x-10)(2x+1) = 0$

⑰ $(x^2+2x-8)(x^2-4x+4)(x^2+8x+16) = 0$

⑱ $15(x+4)^5(x^2+10)(x-5)^6 = 0$

⑲ $(x^2+9)^3(x+5)^4 = 0$

⑳ $(4x-1)(4x^2-3x-1) = 0$

㉑ $(2x^2+3x-2)(2x^2-7x+3) = 0$

㉒ $(2x-3)^3(10x^2-19x+6) = 0$

㉓ $(x+7)^3(x-5)^4(x+1)^3 = 0$

㉔ $(5x^2+9x-2)^4(5x^2-6x+1)^5 = 0$

㉕ $(x^2+16)^8(x-7)^4 = 0$

㉖ $(x-3)(x+2)(x^2-x-6)^3 = 0$

Raíces de un polinomio y ecuación factorizada igualada a cero

Calcular las raíces de un polinomio y resolver una ecuación factorizada igualada a cero son dos versiones del mismo problema que se van complementando. Mostramos con un ejemplo cómo se van entremezclando.

Ejemplo

Enunciado 1: factoriza el polinomio x^6-1.

Enunciado 2: resuelve la ecuación $x^6-1=0$.

Resolución

Comenzamos por una idea muy sencilla que facilita mucho la tarea; vemos que la expresión x^6-1 es la diferencia de dos cuadrados, así que se puede aplicar una identidad notable:

$x^6-1 = (x^3+1)(x^3-1)$

El valor $x=-1$ es raíz del polinomio x^3+1, como se aprecia a simple vista, luego se puede dividir de manera exacta x^3+1 entre $x+1$ (por ejemplo, mediante la regla de Ruffini), para obtener $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$.

El polinomio x^2-x+1 no tiene raíces reales, luego es irreducible:

$$x^2-x+1=0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2} \rightarrow \text{sin solución}$$

El valor $x=1$ es raíz del polinomio x^3-1, como se aprecia a simple vista, luego se puede dividir de manera exacta x^3-1 entre $x-1$ (por ejemplo, mediante la regla de Ruffini), para obtener $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$.

El polinomio x^2+x+1 no tiene raíces reales, luego es irreducible:

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \rightarrow \text{sin solución}$$

Solución del enunciado 1: $x^6-1 = (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

Para resolver la ecuación $x^6-1=0$ comenzamos por utilizar la factorización anterior para convertir la ecuación en una ecuación factorizada igualada a 0:

$$x^6-1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 & \Rightarrow x=-1 \\ x^2-x+1=0 & \rightarrow \text{sin solución} \\ x-1=0 & \Rightarrow x=1 \\ x^2+x+1=0 & \rightarrow \text{sin solución} \end{cases}$$

Solución del enunciado 2: $x = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$

Observación: en el proceso de factorización ya hemos tenido que ir calculando todas las raíces.

Fórmulas de las raíces de un polinomio

Polinomio de grado 1

Desde el nivel 1 de este curso sabes calcular la raíz de un polinomio de grado 1 usando una fórmula que utiliza los coeficientes del polinomio. La frase suena complicada, pero si la ves simbólicamente verás que su significado es muy sencillo:

$$\boxed{ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}}$$

Polinomio de grado 2

Esta fórmula la conoces desde el nivel 2 de este curso:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Pregunta lógica

Estas dos fórmulas son conocidas por la humanidad desde hace mucho tiempo. A la vista de que existen fórmulas para los polinomios de grado 1 y de grado 2, la pregunta lógica que se plantearon los matemáticos a continuación es si también existen fórmulas similares para polinomios de mayores grados. La pregunta fue completamente resuelta en el siglo XIX gracias a la teoría de Galois.

Polinomios de grados 3 y 4

Para estos polinomios también existen fórmulas para calcular las raíces a partir de los coeficientes, pero son demasiado complejas para que sea interesante conocerlas y aplicarlas en educación secundaria.

La fórmula para los polinomios de grado 3 sin monomio de grado 2 fue descubierta por el matemático italiano Scipione del Ferro (1465-1526) y la fórmula general por el también matemático italiano Niccolò Fontana (1499/1500-1557), apodado Tartaglia por su dificultad para hablar tras un ataque que sufrió de joven. A la derecha vemos un retrato de Niccolò Fontana. Sin embargo, la fórmula se conoce como fórmula de Cardano, por el matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576), que fue el primero que la publicó, aunque sin el permiso de su auténtico descubridor.

La fórmula para los polinomios de grado 4 fue descubierta por Girolamo Cardano y su discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565)

Polinomios de grado 5 y superior

Para estos polinomios no existe una fórmula general. Es una afirmación sorprendente por su contundencia, pero completamente cierta. Su demostración requiere conocimientos de álgebra que no se explican en la educación secundaria.

Ecuaciones polinómicas particulares

Aunque las fórmulas para los polinomios de grados 3 y 4 sean muy complicadas y no exista una fórmula general que sirva para resolver cualquier caso en los polinomios de grado 5 y superior, sí que existen algunas ecuaciones de grado superior a 2 que se pueden resolver mediante técnicas interesantes en la educación secundaria, además de la técnica de factorización que ya conoces. Estudiaremos las ecuaciones llamadas bicuadradas, sobre todo por el interés del método de resolución.

Ecuaciones bicuadradas

Llamamos así a las ecuaciones que tienen este aspecto:

$$\boxed{ax^4+bx^2+c=0}$$

Es decir, son ecuaciones de cuarto grado que no tienen monomio de grado 3 ni de grado 1.

Método de resolución

El método para resolver las ecuaciones cuadráticas es muy interesante porque introduce una nueva idea: se llama método de **cambio de variable**. Consiste en convertir la ecuación con la incógnita «x» en una ecuación más sencilla con una incógnita distinta. Antes de seguir leyendo piensa tú mismo cuál podría ser la relación entre «x» y la nueva incógnita.

Utilizamos una nueva incógnita con cualquier nombre que nos guste. Aquí vamos a llamarla «z». La relación entre «x» y «z» es esta: $z=x^2$. Aplicando ese cambio de variable, la ecuación cambia de forma:

$ax^4+bx^2+c=0 \Rightarrow a(x^2)^2+bx^2+c=0 \Rightarrow az^2+bz+c=0$

La ecuación se ha simplificado, que es el objetivo del cambio de variable.

Ahora se resuelve la ecuación de segundo grado con la incógnita «z» para obtener sus soluciones (recuerda: puede tener ninguna, una o dos soluciones).

Una vez conocido el valor de la incógnita «z», queda calcular los valores de la incógnita «x»; para ello hay que **deshacer el cambio**, lo que ya es muy sencillo.

Ejemplo

Enunciado: resuelve la ecuación $x^4-10x^2+9=0$.

Resolución

Hacemos el cambio de incógnita $z=x^2$

$x^4-10x^2+9=0 \Rightarrow (x^2)^2-10x^2+9=0 \Rightarrow z^2-10z+9=0$

Resolvemos la nueva ecuación:

$$z^2-10z+9=0 \Rightarrow z=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1}=\frac{10\pm 8}{2}=\begin{cases}9\\1\end{cases}.$$

Ahora sabemos que z^2 puede valer 9 o 1. Por tanto, para calcular «x» hay que resolver independientemente dos ecuaciones:

$$z=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\begin{cases}3\\-3\end{cases}$$

$$z=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\begin{cases}1\\-1\end{cases}$$

Unimos todas las soluciones obtenidas para «x». Es costumbre escribirlas en orden ascendente.

$$\text{Solución: } x=\begin{cases}-3\\-1\\1\\3\end{cases}$$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones; da las soluciones de esta manera:

- ✱ Si la solución es un número entero, escríbelo tal cual.
- ✱ Si la solución es un número racional, escríbelo como fracción irreducible.
- ✱ Si la solución es un número irracional, escríbelo con cuatro cifras significativas.

① $25x^4-109x^2+36=0$ ② $x^4+5x^2+6=0$ ③ $x^4-7x^2+11=0$

Resoluciones

① Con el cambio de incógnita $z=x^2$, la ecuación se convierte en $25z^2-109z+36=0$

$$25z^2-109z+36=0 \Rightarrow z=\frac{-(-109)\pm\sqrt{(-109)^2-4\cdot25\cdot36}}{2\cdot25}=\frac{109\pm91}{50}=\begin{cases}4\\ \frac{9}{25}\end{cases}$$

$$z=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\begin{cases}2\\ -2\end{cases};\ z=\frac{9}{25} \Rightarrow x^2=\frac{9}{25} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=\begin{cases}\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5}\end{cases}$$

$$\text{Solución: } x=\begin{cases}-2\\ -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5}\\ 2\end{cases}$$

② Con el cambio de incógnita $z=x^2$, la ecuación se convierte en $z^2+5z+6=0$

$$z^2+5z+6=0 \Rightarrow z=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm1}{2}=\begin{cases}-2\\ -3\end{cases}$$

$z=-2 \Rightarrow x^2=-2 \rightarrow$ sin solución; $z=-3 \Rightarrow x^2=-3 \rightarrow$ sin solución

Solución: la ecuación no tiene solución.

③ Con el cambio de incógnita $z=x^2$, la ecuación se convierte en $z^2-7z+11=0$

$$z^2-7z+11=0 \Rightarrow z=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot11}}{2\cdot1}=\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}4{,}62\\ 2{,}38\end{cases}$$

Calculadora: (7 + √ 5) ÷ 2 STO A ▩ (7 − √ 5) ÷ 2 STO B

$$z=4{,}62 \Rightarrow x^2=4{,}62 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4{,}62}=\begin{cases}2{,}149\\ -2{,}149\end{cases}$$

$$z=2{,}38 \Rightarrow x^2=2{,}38 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2{,}38}=\begin{cases}1{,}543\\ -1{,}543\end{cases}$$

Calculadora: √ RCL A = ⇰ 2.148961142 ▩ √ RCL B = ⇰ 1.543361918

$$\text{Solución: } x=\begin{cases}-2{,}149\\ -1{,}543\\ 1{,}543\\ 2{,}149\end{cases}$$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones; da las soluciones de esta manera:

- ✱ Si la solución es un número entero, escríbelo tal cual.
- ✱ Si la solución es un número racional, escríbelo como fracción irreducible.
- ✱ Si la solución es un número irracional, escríbelo con cuatro cifras significativas.

① $x^4-29x^2+100=0$

② $4x^4-5x^2+1=0$

③ $x^4-8x^2-9=0$

④ $x^4-85x^2+1764=0$

⑤ $100x^4+91x^2-9=0$

⑥ $x^4+11x^2+24=0$

⑦ $x^4-x^2-6=0$

⑧ $x^4-11x^2+28=0$

⑨ $x^4-2x^2-2=0$

⑩ $3x^4+4x^2+3=0$

⑪ $16x^4-24x^2+9=0$

⑫ $2x^4+x^2-1=0$

⑬ $x^4+3x^2+1=0$

⑭ $2x^4-5x^2+1=0$

⑮ $x^4-99x^2-100=0$

⑯ $25x^4-51x^2+2=0$

⑰ $x^4-44x^2+403=0$

⑱ $x^4+6x^2+1=0$

⑲ $x^4-6x^2-55=0$

⑳ $x^4+8x^2-9=0$

㉑ $36x^4-181x^2+225=0$

㉒ $x^4-18x^2+81=0$

㉓ $49x^4-14x^2+1=0$

㉔ $x^4-7x^2+2=0$

Ecuaciones con incógnita en el denominador

Sabemos que en matemáticas no existe la división entre 0. Por ese motivo, cuando se resuelve una ecuación que tiene alguna incógnita en el denominador, siempre hay que comprobar que ningún denominador se anula para cada posible solución obtenida; eso se llama comprobar la **validez** de la posible solución, que es algo diferente a comprobar la **corrección** de una solución.

Para resolver ecuaciones con incógnita en el denominador seguiremos estos pasos:

Paso 1. Calculamos el polinomio mínimo común múltiplo de los denominadores.

Paso 2. Eliminamos todos los denominadores de la ecuación multiplicando todos sus términos por el polinomio mínimo común múltiplo calculado en el paso 1.

Paso 3. Resolvemos la ecuación resultante.

Paso 4. Para cada una de las soluciones obtenidas en el paso 3, estudiamos su validez comprobando que ningún denominador se anule para ella.

Paso 5. Damos como solución de la ecuación original solamente las que han pasado el filtro del paso 4.

Paso 6. Si deseamos comprobar la corrección de las soluciones obtenidas en el paso 5, podemos sustituir cada una de ellas en la ecuación original y comprobar que se verifica la igualdad.

Ejemplo

Enunciado: resuelve la ecuación $\frac{2}{x-2}+\frac{5}{x-3}=\frac{5}{(x-3)(x-2)}+1$

Resolución

El polinomio mínimo común múltiplo de los denominadores es $(x-2)(x-3)$.

Multiplicamos por él todos términos de la ecuación:

$$\frac{2(x-2)(x-3)}{x-2}+\frac{5(x-2)(x-3)}{x-3}=\frac{5(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-2)}+1(x-2)(x-3)$$

Simplificamos (podíamos haber multiplicado y simplificado en un solo paso):

$$2(x-3)+5(x-2) = 5+(x-2)(x-3)$$

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$2(x-3)+5(x-2) = 5+(x-2)(x-3) \Rightarrow 2x-6+5x-10 = 5+x^2-3x-2x+6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-12x+27=0 \Rightarrow x = \frac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 1\cdot 27}}{2\cdot 1} = \frac{12\pm 6}{2} = 6\pm 3 = \begin{cases} 9 \\ 3 \end{cases}$$

Comprobamos la **validez** de las soluciones obtenidas:

$x = 9$ es una solución válida porque $\mathbf{9}-2 \neq 0$, $\mathbf{9}-3 \neq 0$ y $(\mathbf{9}-2)(\mathbf{9}-3) \neq 0$

$x = 3$ no es una solución válida porque $\mathbf{3}-3 = 0$ (se anula un denominador).

Solución: $x = 9$

Ahora, si lo consideramos oportuno, podemos comprobar la **corrección** de la solución obtenida:

$\frac{2}{\mathbf{9}-2}+\frac{5}{\mathbf{9}-3}=\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=\frac{47}{42}$ y $\frac{5}{(\mathbf{9}-3)(\mathbf{9}-2)}+1=\frac{5}{42}+1=\frac{47}{42}$, luego, efectivamente, es una solución correcta.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones.

① $\frac{15}{(x+1)(x-4)}+\frac{3}{x+1}=1+\frac{1}{x-4}$

② $\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}=1$

③ $\frac{x-3}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-2}$

④ $\frac{4x}{x+2}=1-\frac{8}{x+2}$

⑤ $\frac{1}{x-6}+\frac{8}{x-4}=\frac{2}{(x-6)(x-4)}-1$

⑥ $\frac{4}{x+5}-\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2+2x-15}$

⑦ $\frac{1}{x}-\frac{2}{x-2}=1$

⑧ $\frac{4}{x-2}+\frac{5}{x+1}=3$

⑨ $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+5}=2$

⑩ $\frac{4}{(x-1)(x-5)}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-5}+1=0$

⑪ $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2}{x^2-1}$

⑫ $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}=\frac{2}{x^3-x}$

⑬ $\frac{25}{x+5}-\frac{4}{x-2}=7$

⑭ $\frac{2}{x}+\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x+3}$

⑮ $\frac{12}{(x+1)(x-5)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{x+11}{(x-5)(x+3)}$

⑯ $\frac{3}{x^2-1}+\frac{x+4}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{(x-1)(x-2)}$

⑰ $\frac{3x+2}{x-1}-\frac{6}{x-3}=2$

⑱ $\frac{4}{x+1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}=1+\frac{2}{x^3-x}$

Ecuaciones con incógnita en una raíz cuadrada

Como estás viendo en este tema, las ecuaciones más complicadas se resuelven convirtiéndolas en ecuaciones más sencillas, que ya sepamos resolver; por este motivo, casi siempre acaba apareciendo como último paso una ecuación polinómica.

La manera de eliminar una raíz cuadrada es elevándola al cuadrado. Este procedimiento es correcto porque si dos números son iguales, sus cuadrados lo son también; es decir: $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$.

Pero si dos números tienen el mismo cuadrado, los números pueder ser iguales u opuestos; por ejemplo: $7^2 = (-7)^2$ pero $7 \neq -7$, 7 y -7 son opuestos.

Por este motivo, cuando elevamos al cuadrado los dos términos de una ecuación para eliminar alguna raíz cuadrada, puede ocurrir que la nueva ecuación tenga soluciones que no lo son de la original, que luego habrá que depurar. Un ejemplo muy sencillo para que veas la complicación es este:

Ejemplo 1. Enunciado: resuelve la ecuación $x = 1$.

Obviamente, la única solución es $x = 1$. Pero si elevamos al cuadrado los dos miembros de la ecuación y resolvemos la ecuación resultante, nos aparece una solución nueva: $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

Método para resolver estas ecuaciones

Aunque cada ecuación puede requerir pasos algo diferentes, conviene tener en cuenta las ideas principales:

Paso 1. Se eliminan todas las raíces cuadradas que incluyan a la incógnita elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación. Para facilitar la operación, suele ser necesario aislar en un miembro la raíz cuadrada antes de elevar al cuadrado los dos miembros.

Paso 2. Resolvemos la ecuación resultante.

Paso 3. Para cada una de las soluciones obtenidas en el paso 2, comprobamos su corrección sustituyéndola en la ecuación original y comprobando que se verifica la igualdad.

Ejemplo 2

Enunciado: resuelve la ecuación $x=20+\sqrt{x}$

Resolución

Si elevásemos al cuadrado los dos miembros, no eliminaríamos la raíz cuadrada:

$$x=20+\sqrt{x} \Rightarrow x^2=(20+\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2=20^2+2\cdot 20\cdot\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2=400+40\sqrt{x}+x$$

De hecho, llegaríamos a una ecuación más complicada que la original.

Por ese motivo, es mejor aislar la raíz cuadrada en un miembro antes de elevar al cuadrado los dos miembros:

$$x=20+\sqrt{x} \Rightarrow x-20=\sqrt{x} \Rightarrow (x-20)^2=(\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2-2\cdot 20\cdot x+20^2 = x \Rightarrow x^2-40x+400 = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-41x+400 = 0 \Rightarrow x = \frac{41\pm\sqrt{(-41)^2-4\cdot 1\cdot 400}}{2\cdot 1} = \frac{41\pm 9}{2} = \begin{cases} 25 \\ 16 \end{cases}$$

Comprobamos la corrección de la solución 25: $\mathbf{25}=20+\sqrt{\mathbf{25}}$ ✔ es correcta

Comprobamos la corrección de la solución 16: $\mathbf{16}=20+\sqrt{\mathbf{16}}$ ✘ no es correcta

Solución: $x = 25$

Enunciado

Resuelve la ecuación $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$

Resolución

Cuando la incógnita está presente en dos raíces cuadradas diferentes, dejar las dos en el mismo miembro no es la mejor idea, porque, tras elevar al cuadrado los dos miembros, seguirán apareciendo las dos raíces:

$$\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2 \Rightarrow \left(\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}\right)^2=2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{4x+8}\right)^2+2\sqrt{4x+8}\sqrt{3x-2}+\left(\sqrt{3x-2}\right)^2=4 \Rightarrow 4x+8+2\sqrt{4x+8}\sqrt{3x-2}+3x-2=4$$

Ahora habría que aislar el producto de las raíces en un miembro, volver a elevar al cuadrado y por fin desaparecerían las dos raíces. Es posible resolver la ecuación con este método, pero hay una alternativa algo más sencilla, que te mostramos a continuación:

Colocamos una raíz en cada miembro y luego elevamos los dos miembros al cuadrado:

$$\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2 \Rightarrow \sqrt{4x+8}=2+\sqrt{3x-2} \Rightarrow \left(\sqrt{4x+8}\right)^2=\left(2+\sqrt{3x-2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+8=4+2\sqrt{3x-2}+3x-2$$

Ahora hay que volver a elevar al cuadrado los dos miembros, pero es muy importante antes aislar la raíz cuadrada que ha quedado y simplificar al máximo la ecuación, porque al elevar al cuadrado cualquier expresión, esta se complica.

$$4x+8=4+2\cdot 2\sqrt{3x-2}+3x-2 \Rightarrow 4x-3x+8-4+2=4\sqrt{3x-2} \Rightarrow x+6=4\sqrt{3x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+6)^2=\left(4\sqrt{3x-2}\right)^2 \Rightarrow x^2+12x+36=16(3x-2) \Rightarrow x^2+12x+36=48x-32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-36x+68=0 \Rightarrow x=\frac{-(-36)\pm\sqrt{(-36)^2-4\cdot 1\cdot 68}}{2\cdot 1}=\frac{36\pm 32}{2}=18\pm 16=\begin{cases}34\\2\end{cases}$$

En este tipo de ecuaciones, como hemos elevado al cuadrado, siempre hay que comprobar la corrección de las soluciones obtenidas.

Comprobamos la corrección de la solución 34:

$\sqrt{4\cdot\mathbf{34}+8}-\sqrt{3\cdot\mathbf{34}-2}=2$ ✔ es correcta

Comprobamos la corrección de la solución 2:

$\sqrt{4\cdot\mathbf{2}+8}-\sqrt{3\cdot\mathbf{2}-2}=2$ ✔ es correcta

En esta ecuación se da la circunstancia de que las dos soluciones obtenidas son correctas, pero recuerda que en cada ecuación te puedes encontrar con una situación diferente.

Solución: $x=\begin{cases}2\\34\end{cases}$

Observación

Cuando se trabaja con expresiones algebraicas, es habitual que haya varios caminos correctos para llegar a la solución. Si se te ocurren varias vías de desarrollo, intenta valorar la dificultad de cada uno antes de adentrarte en los cálculos.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones.

① $x+\sqrt{x}=6$

② $x-\sqrt{x}=2$

③ $x+\sqrt{x}=110$

④ $x-\sqrt{x}=110$

⑤ $x+\sqrt{x+19}=1$

⑥ $x+\sqrt{x+6}=36$

⑦ $x+\sqrt{x-1}=21$

⑧ $\sqrt{x^2+2x+14}=x+2$

⑨ $\sqrt{x^2+3x-1}=x+2$

⑩ $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$

⑪ $x-5=\sqrt{2x-2}$

⑫ $x+26=\sqrt{3x+132}$

⑬ $\sqrt{x^4+19}=x^2+1$

⑭ $\sqrt{x^3+9}=x+3$

⑮ $\sqrt{x^3+x}=x+1$

⑯ $\sqrt{x^3+8}=x+2$

⑰ $\sqrt{x}+\sqrt{x+45}=15$

⑱ $\sqrt{3x}-\sqrt{2x-5}=2$

⑲ $\sqrt{x+19}-\sqrt{x-9}=2$

⑳ $x+\sqrt{x}=\sqrt{x^2+5x}$

㉑ $\sqrt{2x+21}-\sqrt{x+19}=4$

㉒ $\sqrt{3x+3}+\sqrt{x}=1$

㉓ $x+\sqrt{100-3x}=\sqrt{100+12x}$

㉔ $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}=x$

㉕ $\sqrt{x+61}+\sqrt{x-11}=2\sqrt{x+24}$

㉖ $\sqrt{5x+10}=2+\sqrt{4x-3}$

Resolución general de ecuaciones

En una ecuación puede aparecer cualquier tipo de dificultad. Acabas de estudiar cómo afrontar algunas de ellas, pero en una ecuación particular deberás encontrar tú la combinación adecuada de técnicas, incluso mezclando en una misma ecuación varias de ellas. Será un proceso creativo, en el que te hará falta realizar algún tanteo inicial, tener paciencia y buscar el camino más sencillo. Te ofrecemos un par de ejemplos para romper el hielo, pero la última palabra será la tuya. ¡Ánimo!

Problema 1

Enunciado. Resuelve la ecuación $\frac{2}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{2}{x-1}+1$

Resolución

La ecuación tiene denominadores, que no pueden anularse.

La ecuación tiene raíces cuadradas, luego en algún momento habrá que elevar al cuadrado los dos miembros y se pueden introducir soluciones falsas.

Habrá que resolver estos dos tipos de dificultades.

Aprovechamos que $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)=x-1$, para multiplicar todos los términos por «x–1» y así eliminar todos los denominadores.

$$\frac{2}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{2}{x-1}+1 \Rightarrow 2(\sqrt{x}-1)+\sqrt{x}+1=2+x-1 \Rightarrow 2\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+1=1+x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x}=x+2 \Rightarrow 9x=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases}$$

La solución $x=1$ no es válida porque anula dos denominadores.

Hay que comprobar la corrección de la solución $x=4$:

$\frac{2}{\sqrt{\mathbf{4}}+1}+\frac{1}{\sqrt{\mathbf{4}}-1}=\frac{2}{\mathbf{4}-1}+1$ es verdadero porque los dos miembros dan $\frac{5}{3}$

Solución: $x=4$

Problema 2

Enunciado

Resuelve la ecuación $\sqrt{7x}-\sqrt{5x}=2$. Da la solución con cuatro cifras significativas.

Resolución

Esta resolución es un buen ejemplo de que seguir a ciegas el método general puede llevar a resoluciones mucho más complicadas que si se siguen otros caminos. Basta aplicar algunas propiedades de los radicales para aislar $\sqrt{x}$ y calcularla:

$$\sqrt{7x}-\sqrt{5x}=2 \Rightarrow \sqrt{7}\sqrt{x}-\sqrt{5}\sqrt{x}=2 \Rightarrow (\sqrt{7}-\sqrt{5})\sqrt{x}=2 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\left(\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\right)^2=23{,}83.$$

Calculadora: (2 ÷ (√ 7 − √ 5)) x² = ⇨ 23,83215957

Solución: $x=23{,}83$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Escribe con cuatro cifras significativas las soluciones que no sean números enteros.

① $\dfrac{5}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{4}{x-4}+2$

② $\sqrt{16x}+\sqrt{9x}=161$

③ $\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=2$

④ $\sqrt{\dfrac{x}{5}}+\sqrt{\dfrac{x}{3}}=4$

⑤ $\dfrac{7}{\sqrt{x-7}}+\sqrt{x-7}=8$

⑥ $\sqrt{x+\sqrt{x-3}}=3$

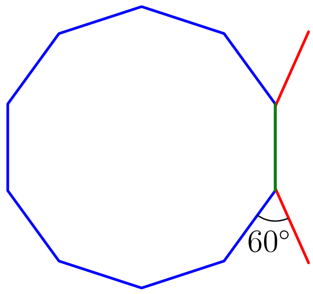
⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{4}$

⑧ $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}+1=\dfrac{1}{x+2}$

⑨ $(x^3+16x^2+53x-70)\dfrac{1}{x^2-6x-91}\sqrt{99-x^2}=0$

Enunciados

⑩ Colocamos sobre un lado común (en verde) un polígono regular de diez lados (en azul) y un polígono regular de *n* lados (en rojo), como se ve en la figura de la derecha. Se forma un ángulo de 60° entre ellos. Calcula el valor de *n*.



⑪ Calcula el área de un triángulo rectángulo sabiendo que un cateto mide 12 metros y el perímetro mide 84 metros. Da el resultado en metros cuadrados.

⑫ Un depósito de agua se puede llenar mediante dos grifos indistintamente. Si se usan individualmente, uno de ellos tarda 33 minutos más que el otro en llenar el depósito; si se usan conjuntamente, tardan 28 minutos en hacerlo. Calcula en minutos cuánto tiempo tarda en llenar el depósito el grifo que tarda menos tiempo.

⑬ Las longitudes de los lados de dos cuadrados suman 129 metros. El área de uno de los cuadrados mide 2193 metros cuadrados más que el otro. Calcula en metros la longitud del lado del menor cuadrado.

⑭ a) Resuelve con cuatro cifras significativas la ecuación $x=1+\dfrac{1}{x}$

b) Calcula con cuatro cifras significativas el valor de $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$

c) ¿Qué nombre propio recibe el número solución del apartado (b)?

⑮ a) Resuelve con cuatro cifras significativas la ecuación $x=\sqrt{1+x}$

b) Calcula con cuatro cifras significativas el valor de $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}$

c) ¿Qué nombre propio recibe el número solución del apartado (b)?

Sistemas de ecuaciones no lineales

Llamamos sistema de ecuaciones no lineales a cualquier sistema de ecuaciones en el que al menos una de las ecuaciones no sea una ecuación lineal.

Ejemplos. Los siguientes sistemas son sistemas de ecuaciones no lineales:

① $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x^2-y=4 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2x-y=0 \\ xy=-4 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=8 \end{cases}$

En (1) y (2), la primera ecuación es lineal, pero la segunda no. En (3), ninguna de las dos ecuaciones es lineal.

Número de soluciones

Un sistema de ecuaciones no lineales puede tener cualquier número de soluciones: ninguna, una, dos,... e incluso infinitas. En los casos más habituales que trabajarás en la educación secundaria los sistemas no lineales que te encontrarás tendrán entre ninguna y cuatro soluciones.

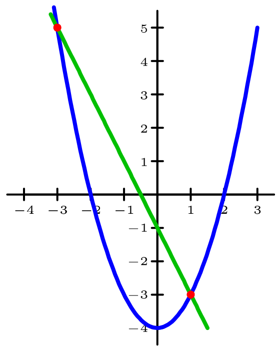
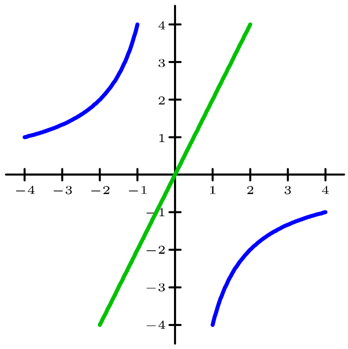
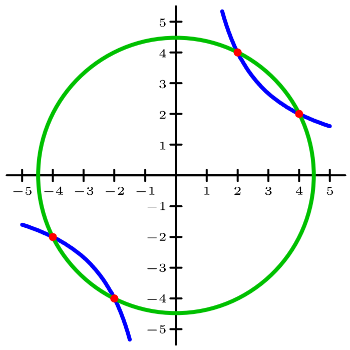
Ejemplos. En los ejemplos anteriores, el (1) tiene dos soluciones, el (2) no tiene ninguna y el (3) tiene cuatro soluciones.

Métodos de resolución

- ✱ Puedes intentar aplicar cualquiera de los tres métodos que conoces (reducción, sustitución e igualación), pero teniendo en cuenta que en algunos sistemas no se podrán aplicar algunos métodos. Por ejemplo, en el sistema (2) no se puede aplicar el método de reducción. Tendrás que examinar el sistema para ver qué método puedes aplicar, y cómo.
- ✱ Cuando alguna ecuación tenga alguna incógnita en algún denominador, habrá que compobar la validez de las soluciones obtenidas.
- ✱ Cuando alguna ecuación tenga alguna raíz cuadrada con incógnita, habrá que compobar la corrección de las soluciones obtenidas.

Interpretación geométrica

Sabes que la interpretación geométrica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es averiguar el punto de corte de dos rectas del plano. Pues bien, la interpretación geométrica de un sistema no lineal también es averiguar el punto de corte de figuras geométricas, pero serán más complicadas que dos rectas, por lo que la interpretación será más rica, aunque más difícil y, en algunos casos, no podrás resolverla tú mismo hasta más adelante en el curso.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		
La recta (en verde) y la parábola (en azul) tienen dos puntos de corte	La recta (en verde) y la hipérbola (en azul) no tienen puntos de corte	La circunferencia y la hipérbola (azul) tienen cuatro puntos de corte

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

① $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x^2-y=4 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2x-y=0 \\ xy=-4 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=8 \end{cases}$

Resoluciones

① Utilizamos el método de reducción para eliminar la incógnita «y»:

$$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x^2-y=4 \end{cases} \Rightarrow 2x+x^2=3 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm4}{2} =$$

$$= -1\pm2 = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

Para cada valor obtenido para la incógnita «x» hay que calcular el valor correspondiente de la incógnita «y». Como hay que hacerlo dos veces, puede ser buena idea despejar antes «y»; lo hacemos en la ecuación de arriba:

$$2x+y=-1 \Rightarrow y=-2x-1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \Rightarrow & y=-2\cdot1-1=-3 \\ x=-3 & \Rightarrow & y=-2\cdot(-3)-1=5 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}, \begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$

② Utilizamos el método de sustitución despejando «y» en la primera ecuación:

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ xy=-4 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y=2x \\ x\cdot2x=-4 \end{array} \right. \Rightarrow 2x^2=-4 \Rightarrow x^2=-2 \rightarrow \text{sin solución}$$

Solución: el sistema no tiene ninguna solución.

③ Utilizamos el método de sustitución despejando «y» en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=8 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x^2+\left(\frac{8}{x}\right)^2=20 \\ y=\frac{8}{x} \end{array} \right. \Rightarrow x^2+\frac{64}{x^2}=20 \Rightarrow x^4+64=20x^2 \Rightarrow x^4-20x^2+64=0$$

Resolvemos la ecuación bicuadrada con el cambio de incógnita $z=x^2$:

$$x^4-20x^2+64=0 \Rightarrow z^2-20z+64=0 \Rightarrow z = \frac{-(-20)\pm\sqrt{(-20)^2-4\cdot1\cdot64}}{2\cdot1} = \frac{20\pm12}{2} =$$

$$= 10\pm6 = \begin{cases} 16 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 = \begin{cases} 16 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \pm\sqrt{16} \\ \pm\sqrt{4} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -4 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{cases}$$

$x=-4 \Rightarrow y=-2$; $x=4 \Rightarrow y=2$; $x=-2 \Rightarrow y=-4$; $x=2 \Rightarrow y=4$

Solución: $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

① $\begin{cases} 2x-y=-6 \\ x^2+y=9 \end{cases}$

② $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=2 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x^2-y=7 \\ xy=-6 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x^2-2x-y=0 \\ 2x-y=4 \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} x^2-3x-y=0 \\ x^2+x+y=4 \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} x^2+2x+y=0 \\ x^2-2x-y=-1 \end{cases}$

⑧ $\begin{cases} x^2-10x+y^2=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

⑨ $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

⑩ $\begin{cases} x^2+y^2=1-2x \\ x^2+y^2=4x+1 \end{cases}$

⑪ $\begin{cases} x^2-y=6 \\ x^2-y^2=0 \end{cases}$

⑫ $\begin{cases} (y-x^2)(y+x^2)=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

⑬ $\begin{cases} x^2+y^2=0 \\ x+y=1 \end{cases}$

⑭ $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ x^2+(y-4)^2=25 \end{cases}$

⑮ $\begin{cases} 4x^2+9y^2=36 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$

⑯ $\begin{cases} y-x=4 \\ y+x=x^3 \end{cases}$

Enunciado

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=2 \\ x^2-y^2=6x \end{cases}$

Comentario

Está claro que vamos a eliminar el denominador de la primera ecuación para dejarla como «x=2y», lo que nos llevará a un sistema de ecuaciones no lineal que ya sabemos resolver. Lo importante de este ejemplo será la comprobación de la **validez** de las soluciones obtenidas.

Resolución

Eliminamos el denominador de la primera ecuación y luego utilizamos el método de sustitución despejando «x» en la primera ecuación:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=2 \\ x^2-y^2=6x \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=2y \\ (2y)^2-y^2=6(2y) \end{array} \right. \Rightarrow 4y^2-y^2 = 12y \Rightarrow 3y^2-12y = 0 \Rightarrow y^2-4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(y-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y-4=0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

Para cada valor obtenido para la incógnita «y» hay que calcular el valor correspondiente de la incógnita «x».

$$x = 2y \Rightarrow \begin{cases} y=0 \;\Rightarrow\; x=2\cdot 0=0 \\ y=4 \;\Rightarrow\; x=2\cdot 4=8 \end{cases}$$

Hemos llegado hasta el momento a dos posibles soluciones: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$

Comprobamos en el sistema original si cada una de las soluciones es válida o no. Para ser válida, no se puede anular ningún denominador.

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ → No es válida porque se anula el único denominador del sistema.

$\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$ → Sí es válida porque no se anula el único denominador del sistema.

Solución: $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$

Observación 1: Si lo deseamos, podemos, además, comprobar la corrección de la solución. Para ser correcta se deben verificar las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{4}=2 \ ✔ \\ 8^2-4^2=6\cdot 8 \ ✔ \end{cases}$$ La solución es correcta.

Observación 2: La pareja de valores $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ no es solución del sistema propuesto, aunque sí lo es del sistema $\begin{cases} x=2y \\ x^2-y^2=6x \end{cases}$

Enunciado

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=4\\ 2y-x=3\end{cases}$

Resolución

Utilizamos el método de sustitución despejando «x» en la segunda ecuación:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=4\\ 2y-x=3\end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix}\sqrt{2y-3+y}-\sqrt{2y-3-y}=4\\ 2y-3=x\end{vmatrix} \Rightarrow \sqrt{3y-3}-\sqrt{y-3}=4$$

Tenemos una ecuación con la incógnita en dos raíces cuadradas, así que habrá que elevar la ecuación al cuadrado dos veces, simplificando cuanto se pueda durante el proceso. Al elevar al cuadrado, se pueden introducir soluciones falsas.

$$\sqrt{3y-3}-\sqrt{y-3}=4 \Rightarrow \sqrt{3y-3}=4+\sqrt{y-3} \Rightarrow \left(\sqrt{3y-3}\right)^2=\left(4+\sqrt{y-3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y-3=16+8\sqrt{y-3}+y-3 \Rightarrow 3y-3=16+8\sqrt{y-3}+y-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y-16=8\sqrt{y-3} \Rightarrow y-8=4\sqrt{y-3} \Rightarrow (y-8)^2=\left(4\sqrt{y-3}\right)^2 \Rightarrow y^2-16y+64=16(y-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2-16y+64=16y-48 \Rightarrow y^2-32y+112=0 \Rightarrow y=\frac{-(-32)\pm\sqrt{(-32)^2-4\cdot 1\cdot 112}}{2\cdot 1}=$$

$$=\frac{32\pm 24}{2}=16\pm 12=\begin{cases}28\\ 4\end{cases}$$

Para cada valor obtenido para la incógnita «y» hay que calcular el valor correspondiente de la incógnita «x».

$$x=2y-1 \Rightarrow \begin{cases}y=28 & \Rightarrow & x=2\cdot 28-3=53\\ y=4 & \Rightarrow & x=2\cdot 4-3=5\end{cases}$$

Hemos llegado hasta el momento a dos posibles soluciones: $\begin{cases}x=53\\ y=28\end{cases}$, $\begin{cases}x=5\\ y=4\end{cases}$

Comprobamos en el sistema original si cada una de las soluciones es correcta o no. Para ser correcta, se deben verificar las dos igualdades.

$\begin{cases}x=53\\ y=28\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\sqrt{53+28}-\sqrt{53-28}=4 \ \checkmark\\ 2\cdot 28-53=3 \ \checkmark\end{cases}$ Esta solución es correcta.

$\begin{cases}x=5\\ y=4\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\sqrt{5+4}-\sqrt{5-4}=4 \ \times\\ 2\cdot 4-5=3 \ \checkmark\end{cases}$ Esta solución no es correcta.

Solución: $\begin{cases}x=53\\ y=28\end{cases}$

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

① $\begin{cases} \dfrac{x+2}{y}=2 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$

② $\begin{cases} \sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}=6 \\ x+y=-1 \end{cases}$

③ $\begin{cases} \dfrac{x+2}{y-1}=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

④ $\begin{cases} \sqrt{2x+3y}=x-6 \\ y-x=2 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-1}=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ x+y=40 \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} \dfrac{2}{y+1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{3}{(x+2)(y-2)}-3 \\ y=x+1 \end{cases}$

⑧ $\begin{cases} \sqrt{x+y}=y-5 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones. Da las soluciones del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

⑨ $\begin{cases} 2\sqrt{x}+y=2 \\ 4x+y=8 \end{cases}$

⑩ $\begin{cases} \dfrac{y+1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y-1}=13 \\ y-4x=1 \end{cases}$

Resolución de problemas usando sistemas de ecuaciones no lineales

Como un sistema de ecuaciones no lineales puede tener distintas cantidades de soluciones, es particularmente importante su discusión; es decir: razonar si cada una de las soluciones obtenidas del sistema realmente son solución del problema.

El trabajo que hiciste en el nivel 3 resolviendo problemas mediante ecuaciones de segundo grado te vendrá muy bien ahora para discutir las soluciones.

Enunciado

Averigua dos números naturales sabiendo que su producto es 726 y que el producto del siguiente del menor y el anterior del mayor es diez unidades mayor que el producto de los números.

Resolución

Llamamos «x» al menor de los dos números e «y» al mayor.

Como el producto de los números es 726, planteamos la ecuación «$xy = 726$».

Como el producto del siguiente del menor y el anterior del mayor es diez unidades mayor que el producto de los números, planteamos la ecuación «$(x+1)(y-1)=736$».

Por tanto, tenemos que resolver el sistema $\begin{cases} xy=726 \\ (x+1)(y-1)=736 \end{cases}$

Desarrollamos la segunda ecuación teniendo en cuenta el enunciado de la primera:

$(x+1)(y-1)=736 \Rightarrow xy-x+y-1 = 736 \Rightarrow 726-x+y-1 = 736 \Rightarrow -x+y = 11$

En el sistema de ecuaciones que hemos planteado sustituimos la segunda ecuación por la ecuación que acabamos de deducir para llegar a un sistema más sencillo que el anterior: $\begin{cases} xy=726 \\ -x+y=11 \end{cases}$

Lo resolvemos por sustitución despejando «y» en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} xy=726 \\ -x+y=11 \end{cases} \left| \begin{array}{l} x(x+11)=726 \\ y=x+11 \end{array} \right. \Rightarrow x^2+11x = 726 \Rightarrow x^2+11x-726 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2-4\cdot 1\cdot(-726)}}{2\cdot 1} = \frac{-11\pm 55}{2} = \begin{cases} 22 \\ -33 \end{cases}$$

Para cada valor obtenido para la incógnita «x» hay que calcular el valor correspondiente de la incógnita «y»:

$$y = x+11 \Rightarrow \begin{cases} x=22 & \Rightarrow & y=22+11=33 \\ x=-33 & \Rightarrow & y=-33+11=-22 \end{cases}$$

Hemos calculado que el sistema tiene dos soluciones: $\begin{cases} x=22 \\ y=33 \end{cases}, \begin{cases} x=-33 \\ y=-22 \end{cases}$

La primera solución del sistema es solución del problema porque los dos números son naturales, pero la segunda solución del sistema no es solución del problema porque alguno de los números no es natural (realmente, ninguno de los dos).

Solución: Los números son 22 y 33.

Enunciados

Resuelve los siguientes problemas planteando un sistema de ecuaciones.

① Un grupo de personas contrata un autocar para hacer un viaje y tiene que pagar un total de 1350 euros. Un poco antes de salir, dos personas del grupo enferman y no pueden hacer el viaje. Como el precio del autocar es el mismo sin importar cuántas personas viajen, los que van tienen que pagar cuatro euros más cada uno. Calcula de cuántas personas se compone el grupo inicial.

② Un avión comercial une dos ciudades con un vuelo de 8400 kilómetros. El equipo de ingeniería que dirige los aspectos técnicos del avión ha calculado que si incrementaran 210 km/h su velocidad media, el trayecto duraría dos horas menos. Calcula la velocidad media a la que se realiza el vuelo.

③ El área de un triángulo rectángulo es 36 metros cuadrados. Si al cateto menor le restas tres metros y al mayor le sumas nueve metros, la hipotenusa no varía de longitud. Calcula las longitudes de los catetos.

④ En una urna hay bolas blancas y negras en proporción 5:2. Si quitamos diez bolas de cada color, la proporción queda 3:1. Calcula cuántas bolas de cada color había al principio.

⑤ Calcula en milímetros redondeando a la unidad las dimensiones del área de visión de una televisión de 65 pulgadas. Puedes usar estos datos:

- El tamaño de una televisión se da siempre diciendo la longitud de la diagonal del área de visión.
- Las televisiones actuales tienen una relación de aspecto de 16:9.
- Una pulgada equivale a 25,4 milímetros.

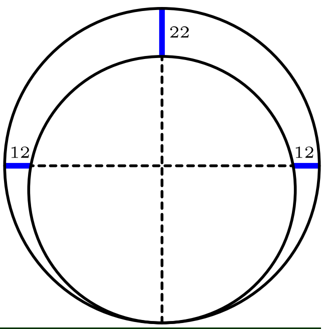
⑥ Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide diecisiete metros y el área mide sesenta metros cuadrados. Da el resultado en metros.

⑦ Calcula con cinco cifras significativas la longitud del lado del octógono regular inscrito en un cuadrado cuyo lado mide tres metros.

⑧ En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 26 metros y la altura correspondiente a la hipotenusa mide 12 metros. Calcula las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

⑨ Calcula los dos lados desconocidos de un triángulo de base 209 metros y altura 48 metros sabiendo que están en razón 15:4.

⑩ Calcula las longitudes de los radios de las dos circunferencias que se observan en la figura de la derecha.



Enunciado

⑪ Si a los términos de una fracción irreducible se les suma el denominador y a la fracción resultante se le resta la de partida, se obtiene de nuevo esta. ¿De qué fracción se trata?

Desigualdades

En matemáticas estamos acostumbrados a usar principalmente el signo de igualdad («=») y a manipular igualdades. Pero también debemos dar mucha importancia las desigualdades, puesto que en el mundo real no se suele encontrar la igualdad «exacta». Las dificultades que presentan las desigualdades sobre las igualdades son que hay cuatro y que las manipulaciones son, en algunos casos, diferentes.

Tipos de desigualdades

Hay cuatro tipo de desigualdades:

- **Menor que**. Su símbolo es «$<$». Ejemplo 1: $7<9$
- **Menor o igual que**. Su símbolo es «$\leqslant$». Ejemplo 2: $3\leqslant 4$. Ejemplo 3: $5\leqslant 5$
- **Mayor que**. Su símbolo es «$>$». Ejemplo 4: $7>1$
- **Mayor o igual que**. Su símbolo es «$\geqslant$». Ejemplo 5: $8\geqslant 4$. Ejemplo 6: $9\geqslant 9$

Los casos «menor o igual que» y «mayor o igual que» pueden desconcertar a algunos estudiantes; por ejemplo, es común pensar: si veo un 2 y un 6, ¿para qué voy a escribir $2\leqslant 6$ si ya sé que realmente $2<6$?; o bien: ya sé que $9=9$, ¿qué sentido tiene escribir $9\geqslant 9$? La respuesta es que esos símbolos no se suelen usar en esos casos, sino el los casos en que hay que comparar un número desconocido o general con un número conocido. Es decir: $x\leqslant 6$ o $x\geqslant 9$.

Manipulación de desigualdades

Las desigualdades se manejan exactamente igual que las igualdades, pero con dos excepciones:

- Si una desigualdad se escribe al revés, hay que cambiar el sentido de la desigualdad (esto es: los menores pasan a mayores y viceversa).
- Si una desigualdad se multiplica (o divide) por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

Ejemplos

Ejemplos sin cambio de sentido:

- Ejemplo 7: $x<y \Rightarrow x+8<y+8$. Sumamos 8 a cada miembro.
- Ejemplo 8: $x>y \Rightarrow x-7>y-7$. Sumamos -7 a cada miembro.
- Ejemplo 9: $x\leqslant y \Rightarrow 6x\leqslant 6y$. Multiplicamos los dos miembros por 6.
- Ejemplo 10: $x\geqslant y \Rightarrow \frac{x}{3}\geqslant\frac{y}{3}$. Dividimos los dos miembros entre 3.

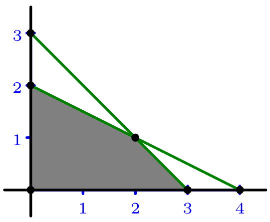
Ejemplos con cambio de sentido:

- Ejemplo 11: $1<3 \Rightarrow 3>1$. Escribimos la desigualdad al revés.
- Ejemplo 12: $x>y \Rightarrow x<y$. Escribimos la desigualdad al revés.
- Ejemplo 13: $x\leqslant y \Rightarrow -5x\geqslant -5y$. Multiplicamos los dos miembros por -5.
- Ejemplo 14: $x>y \Rightarrow \frac{x}{-4}<\frac{y}{-4}$. Dividimos los dos miembros entre -4.
- Ejemplo 15: $x\geqslant y \Rightarrow -x\leqslant -y$. Cambiamos de signo los dos miembros, que es lo mismo que multiplicar por -1 los dos miembros.
- Ejemplo 16: $x<y \Rightarrow -x>-y$. Cambiamos de signo los dos miembros

Inecuaciones

* Si en una ecuación sustituimos el signo de igualdad por alguno de los signos de desigualdad, lo que obtenemos se llama una inecuación.
* Las inecuaciones tienen la misma nomenclatura que las ecuaciones: hay incógnitas, soluciones, grados y sistemas de inecuaciones.
* La diferencia principal entre las ecuaciones y las inecuaciones es que la mayor parte de las inecuaciones tienen infinitas soluciones.
    - En las inecuaciones con una sola incógnita, las soluciones se suelen dar con desigualdades o usando intervalos o semirrectas de números reales.
    - En las inecuaciones con dos incógnitas la solución es una parte del plano.

Ejemplos

	Inecuación	Descripción	Solución
1	$3x+4<13$	Inecuación de primer grado con una incógnita	$x<3$
2	$7x-4\geqslant 3$	Inecuación de primer grado con una incógnita	$x\geqslant 1$
3	$x^2-5x+6\leqslant 0$	Inecuación de segundo grado con una incógnita	$x\in[2,3]$
4	$x^2-3x-4>0$	Inecuación de segundo grado con una incógnita	$x\in(\leftarrow,-1)\cup(4,\rightarrow)$
5	$\begin{cases} x-2\leqslant 4 \\ x-4>-7 \end{cases}$	Sistema de dos inecuaciones de primer grado con una incógnita	$x\in[-3,6]$
6	$\begin{cases} x+2>6 \\ x-2<1 \end{cases}$	Sistema de dos inecuaciones de primer grado con una incógnita	Sin solución
7	$\begin{cases} x+2y\leqslant 4 \\ x+y\leqslant 3 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$	Sistema de cuatro inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	

Métodos de resolución

Por desgracia, los métodos de resolución de inecuaciones no son los mismos que los de resolución de ecuaciones. Solamente son parecidos ambos métodos con las inecuaciones de primer grado con una incógnita. Por tanto, tendrás que aprender nuevas técnicas.

* Para resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita usaremos los métodos de resolución de ecuaciones de primer grado, pero con el cuidado de cambiar el sentido de la desigualdad en los pasos en que sea necesario.
* Para resolver sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita, resolveremos cada una de las ecuaciones por separado y calcularemos la intersección de las soluciones.
* Para resolver inecuaciones de segundo grado con una incógnita usaremos la representación gráfica de funciones cuadráticas.
* Para resolver sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas usaremos la representación gráfica de funciones lineales. Lo veremos en el nivel 5 del curso.

Resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita

Despejamos la incógnita (con el cuidado de cambiar el sentido de la desigualdad en los pasos en que sea necesario) para llegar a una desigualdad con la incógnita en el primer miembro, lo que será una expresión de las infinitas soluciones de la inecuación. También podemos dar el resultado interpretando como una semirrecta del conjunto de los números reales la desigualdad obtenida.

Enunciados

Resuelve las siguientes inecuaciones:

① $3(x-4)+1<4(x-2)$

② $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{3}\geqslant\frac{5x+7}{6}$

Resoluciones

① Eliminamos los paréntesis, pasamos los monomios con incógnita al primer miembro y los monomios sin incógnita al segundo y simplificamos. Ninguno de estos pasos requiere cambiar el sentido de la desigualdad:

$3(x-4)+1<4(x-2) \Rightarrow 3x-12+1<4x-8 \Rightarrow 3x-4x<-8+12-1 \Rightarrow -x<3$

Para terminar de despejar la incógnita hay que cambiar de signo los dos miembros, lo que conlleva cambiar el sentido de la desigualdad:

$-x<3 \Rightarrow x>-3$. Ya hemos llegado a una expresión de la solución.

Solución: $x>-3$

También podemos dar la solución usando una semirrecta:

Solución: $x\in(-3,\rightarrow)$

② Eliminamos los denominadores multiplicando todos los términos por 12 (el mínimo común múltiplo de 4, 3 y 6), eliminamos los paréntesis que aparecen, pasamos los monomios con incógnita al primer miembro y los monomios sin incógnita al segundo y simplificamos. Ninguno de estos pasos requiere cambiar el sentido de la desigualdad:

$\frac{x-1}{4}-\frac{1}{3}\geqslant\frac{5x+7}{6} \Rightarrow 3(x-1)-4\geqslant 2(5x+7) \Rightarrow 3x-3-4\geqslant 10x+14 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-10x\geqslant 14+3+4 \Rightarrow -7x\geqslant 21$

Para terminar de despejar la incógnita hay que dividir entre −7 (número negativo) los dos miembros, lo que conlleva cambiar el sentido de la desigualdad:

$-7x\geqslant 21 \Rightarrow x\leqslant \frac{21}{-7} \Rightarrow x\leqslant -3$. Ya hemos llegado a una expresión de la solución.

Solución: $x\leqslant -3$

También podemos dar la solución usando una semirrecta:

Solución: $x\in(\leftarrow,-3]$

Observación

Daremos la solución solo de una de las dos maneras posibles, según nos lo pida el enunciado o nos interese para lo que debamos hacer a continuación.

Enunciados

Resuelve las siguientes inecuaciones. Escribe la solución como una desigualdad con la incógnita en el primer miembro.

① $-2x+1\leqslant 9$

② $\frac{x+3}{2}+\frac{1}{3}>x-\frac{1}{6}$

③ $5(x+2)+3<2(3x+6)$

④ $\frac{x+1}{2}+\frac{2x-1}{5}\geqslant\frac{2x-3}{3}+2$

⑤ $8(x-3)-2>4(x-5)+x$

⑥ $\frac{x-1}{3}+\frac{x+1}{4}<x-3$

⑦ $-(2x+4)>x+2$

⑧ $\frac{6x+1}{5}\geqslant\frac{x+7}{3}-1$

⑨ $(x+3)^2+5\leqslant(x-2)^2$

⑩ $\frac{x+1}{2}+\frac{2x+1}{5}>\frac{7x+1}{10}$

Enunciados

Resuelve las siguientes inecuaciones. Escribe la solución como una semirrecta del conjunto de los números reales.

⑪ $-2(x+1)>3x-2$

⑫ $\frac{x+8}{2}-\frac{3(x+3)}{5}\leqslant\frac{x+1}{3}+3x+1$

⑬ $2(x+3(x-3))<3(3x-4)-2$

⑭ $\frac{7x+1}{3}+\frac{4x-1}{2}\geqslant\frac{5x-1}{6}$

⑮ $(x-3)(x+2)>x^2+3$

⑯ $\frac{4x+1}{3}-\frac{3x+1}{2}>\frac{6x+1}{5}+\frac{1-5x}{6}$

⑰ $3(2(x+1)-4(x-3))+2\geqslant 8(x+2)$

⑱ $\frac{2(x^2+x-1)}{5}<\frac{x(x+1)}{3}+\frac{x(x-2)}{15}$

Interpretación geométrica de una inecuación de primer grado con una incógnita

Se puede entender mejor por qué las soluciones de una inecuación de primer grado con una incógnita forman una semirrecta del conjunto de los números reales si hacemos una representación gráfica de la inecuación y de la solución.

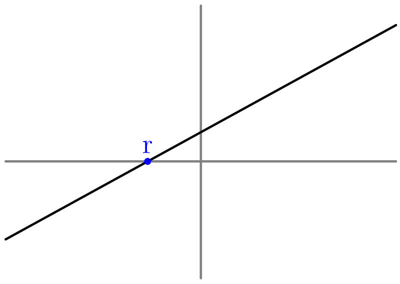
Todas las inecuaciones de primer grado con una incógnita se pueden simplificar hasta llegar a una de estas cuatro formas:

ax+b>0	ax+b⩾0	ax+b<0	ax+b⩽0

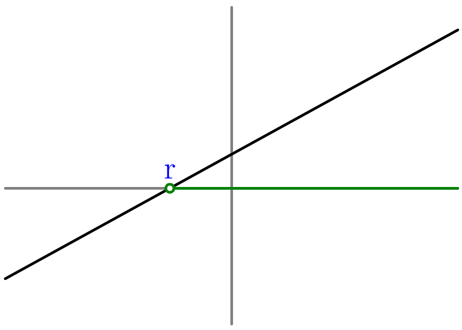
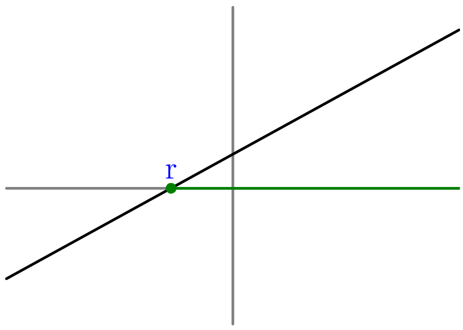
En las cuatro formas nos encontramos un polinomio de grado uno (ax+b) comparado con cero mediante una de las cuatro posibles desigualdades.

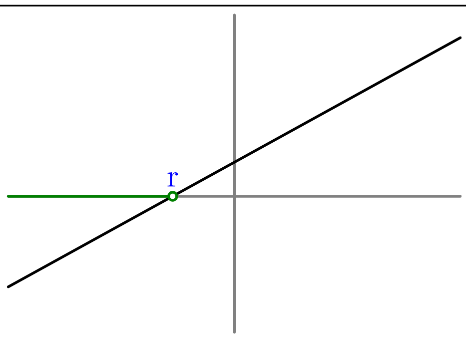
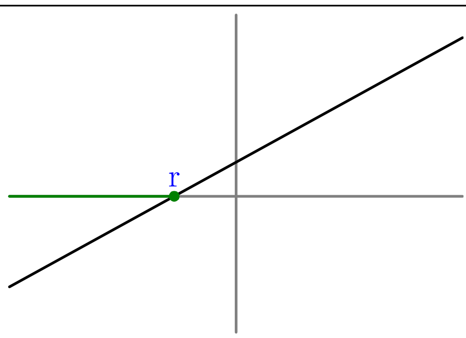
Representamos gráficamente la función lineal «y=ax+b». Para ello, calculamos el valor de su única raíz, que llamaremos «r»:

$$ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$. El valor de la raíz es $r=-\frac{b}{a}$.



Cuando la pendiente sea positiva, la representación gráfica será similar a la que presentamos a la derecha. Haremos los razonamientos con una función lineal con pendiente positiva, que serán similares si la pendiente fuera negativa.

ax+b>0	ax+b⩾0
	
Buscamos puntos de la gráfica con y>0 Solución: x∈(r,→)	Buscamos puntos de la gráfica con y⩾0 Solución: x∈[r,→)

ax+b<0	ax+b⩽0
	
Buscamos puntos de la gráfica con y<0 Solución: x∈(←,r)	Buscamos puntos de la gráfica con y⩽0 Solución: x∈(←,r]

Resolución de sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita

Son necesarios dos pasos:

Paso 1. Resolvemos independientemente cada una de las ecuaciones que forman el sistema y escribimos cada solución como semirrecta.

Paso 2. La solución del sistema será la intersección de todas las semirrectas obtenidas en el paso anterior.

Posibilidades de la solución

Ya que la solución del sistema será la intersección de dos o más semirrectas, hay cuatro posibilidades para la solución:

✱ El sistema no tiene ninguna solución porque las semirrectas tienen intersección vacía.

✱ El sistema tiene una única solución porque la intersección de las semirrectas es un solo punto de la recta real.

✱ La solución del sistema es un intervalo.

✱ La solución del sistema es una semirrecta.

Ejemplos

Vamos a ver las cuatro posibilidades para la solución partiendo de sistemas de inecuaciones especialmente sencillos; más adelante, verás ejemplos más complejos.

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

① $\begin{cases} x>3 \\ x<2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x\geqslant 4 \\ x\leqslant 4 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x>-2 \\ x\leqslant 1 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} x>5 \\ x\geqslant 6 \end{cases}$

Resoluciones

① $\begin{cases} x>3 \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(3,\rightarrow) \\ x\in(\leftarrow,2) \end{cases} \Rightarrow x\in(3,\rightarrow)\cap(\leftarrow,2)=\varnothing$

Solución: el sistema no tiene ninguna solución.

Observación: por pura lógica vemos que el sistema no puede tener ninguna solución porque no puede haber ningún número que sea, a la vez, mayor que 3 y menor que 2.

② $\begin{cases} x\geqslant 4 \\ x\leqslant 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in[4,\rightarrow) \\ x\in(\leftarrow,4] \end{cases} \Rightarrow x\in[4,\rightarrow)\cap(\leftarrow,4]=\{4\}$

Solución: $x=4$

③ $\begin{cases} x>-2 \\ x\leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-2,\rightarrow) \\ x\in(\leftarrow,1] \end{cases} \Rightarrow x\in(-2,\rightarrow)\cap(\leftarrow,1]=(-2,1]$

Solución: $x\in(-2,1]$

④ $\begin{cases} x>5 \\ x\geqslant 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(5,\rightarrow) \\ x\in[6,\rightarrow) \end{cases} \Rightarrow x\in(5,\rightarrow)\cap[6,\rightarrow)=[6,\rightarrow)$

Solución: $x\in[6,\rightarrow)$

Observación: también podemos dar la solución como «$x\geqslant 6$»; incluso directamente, si observamos que la condición $x\geqslant 6$ ya implica $x>5$.

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

① $\begin{cases} 3(x-2)-\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1 \\ (x+2)^2-(x-2)^2\geqslant 6(x+1) \end{cases}$ ② $\begin{cases} (x+2)(x-3)\geqslant x^2-8 \\ \dfrac{x+3}{2}-\dfrac{3(x+5)}{4}\leqslant x-1 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 2x+5>3x+9 \\ (x+3)^2>x^2+3x \end{cases}$

Resoluciones

① Resolvemos independientemente cada una de las ecuaciones del sistema:

$3(x-2)-\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1 \Rightarrow 6(x-2)-(x+1)\leqslant 2 \Rightarrow 6x-12-x-1\leqslant 2 \Rightarrow 6x-x\leqslant 2+12+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x\leqslant 15 \Rightarrow x\leqslant 3 \Rightarrow x\in(\leftarrow,3]$

$(x+2)^2-(x-2)^2\geqslant 6(x+1) \Rightarrow x^2+4x+4-(x^2-4x+4)\geqslant 6x+6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+4x+4-x^2+4x-4\geqslant 6x+6 \Rightarrow 4x+4x-6x\geqslant 6-4+4 \Rightarrow 2x\geqslant 6 \Rightarrow x\geqslant 3 \Rightarrow x\in[3,\rightarrow)$

Calculamos la intersección de las semirrectas:

$(\leftarrow,3]\cap[3,\rightarrow) = \{3\}$

Solución: $x=3$

② Resolvemos independientemente cada una de las ecuaciones del sistema:

$(x+2)(x-3)\geqslant x^2-8 \Rightarrow x^2-3x+2x-6\geqslant x^2-8 \Rightarrow -3x+2x\geqslant -8+6 \Rightarrow -x\geqslant -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\leqslant 2 \Rightarrow x\in(\leftarrow,2]$

$\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{3(x+5)}{4}\leqslant x-1 \Rightarrow 2(x+3)-3(x+5)\leqslant 4x-4 \Rightarrow 2x+6-3x-15\leqslant 4x-4 \Rightarrow$

$2x-3x-4x\leqslant -4-6+15 \Rightarrow -5x\leqslant 5 \Rightarrow x\geqslant -1 \Rightarrow x\in[-1,\rightarrow)$

Calculamos la intersección de las semirrectas:

$(\leftarrow,2]\cap[-1,\rightarrow) = [-1,2]$

Solución: $x\in[-1,2]$

③ Resolvemos independientemente cada una de las ecuaciones del sistema:

$2x+5>3x+9 \Rightarrow 2x-3x>9-5 \Rightarrow -x>4 \Rightarrow x<-4 \Rightarrow x\in(\leftarrow,-4)$

$(x+3)^2>x^2+3x \Rightarrow x^2+6x+9>x^2+3x \Rightarrow 6x-3x>-9 \Rightarrow 3x>-9 \Rightarrow x>-3 \Rightarrow x\in(-3,\rightarrow)$

Calculamos la intersección de las semirectas:

$(\leftarrow,-4)\cap(-3,\rightarrow) = \varnothing$

Solución: el sistema no tiene solución

Consejo

Cuando resuelvas inecuaciones debes ser especialmente cuidadoso con los posibles cambios de sentido de las desigualdades. Un pequeño error te puede llevar en el sentido contrario del correcto.

Enunciados

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones. Si tiene solución, escríbela como un intervalo o una semirrecta del conjunto de los números reales.

① $\begin{cases} x+2>3 \\ 2x<4 \end{cases}$

② $\begin{cases} 2x+4>0 \\ -x\geqslant -1 \end{cases}$

③ $\begin{cases} -3x+9>3 \\ 5x-1>4 \end{cases}$

④ $\begin{cases} 3x+9>3 \\ 2x-8>4 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} 2(x+4)>18 \\ 3(x-3)+1<2(2x+1) \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} 3x-6>0 \\ 5(x+1)+3\leqslant 3 \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} 3x+9<0 \\ 4x-8<0 \end{cases}$

⑧ $\begin{cases} (x+3)^2\geqslant x^2+9 \\ (x+2)^2\leqslant (x-1)^2+3 \end{cases}$

⑨ $\begin{cases} \dfrac{x+1}{6}+\dfrac{2(x-2)}{3}\leqslant \dfrac{3(x-1)}{2}-3 \\ \dfrac{x+1}{8}+\dfrac{2x+1}{5}\leqslant \dfrac{x+3}{2}-1 \end{cases}$

⑩ $\begin{cases} \dfrac{x+6}{5}+\dfrac{2x+7}{3}>\dfrac{4x-1}{15}+2x+1 \\ (2x+5)^2\geqslant (2x+3)(2x-3)-6 \end{cases}$

⑪ $\begin{cases} (x+1)(x-3)<(x+2)^2-1 \\ \dfrac{2x+5}{3}+\dfrac{x+1}{4}\geqslant x+2 \end{cases}$

⑫ $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}-\dfrac{3x-5}{5}\leqslant 1 \\ \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{2x+2}{5}\geqslant 1 \end{cases}$

⑬ $\begin{cases} \dfrac{4x+15}{3}-\dfrac{5x+19}{2}\leqslant x+2 \\ \dfrac{x+5}{2}-\dfrac{x+11}{4}\geqslant x+2 \end{cases}$

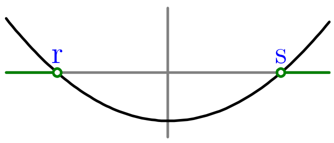
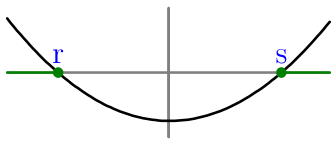
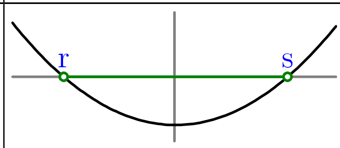
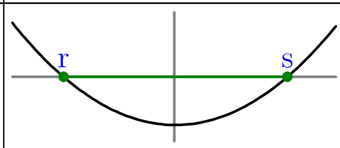
Resolución de inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Simplificaremos al máximo la inecuación hasta llegar a una de estas cuatro formas:

$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$

Luego estudiaremos el signo de la función cuadrática «$y=ax^2+bx+c$» y daremos como solución los valores de «x» que verifiquen para «y» la desigualdad pedida.

Vemos como ejemplo las soluciones que daríamos en el caso de que la función cuadrática tuviera dos raíces (que llamaremos «r» y «s») y «$a>0$»:

$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$
			
$x\in(\leftarrow,r)\cup(s,\rightarrow)$	$x\in(\leftarrow,r]\cup[s,\rightarrow)$	$x\in(r,s)$	$x\in[r,s]$

Enunciado

Resuelve la inecuación $(x+2)^2+(x-3)^2\geqslant(x+1)^2-2(x-8)$

Resolución

Eliminamos los paréntesis y pasamos todos los monomios al primer miembro. Ninguno de estos pasos requiere cambiar el sentido de la desigualdad:

$$(x+2)^2+(x-3)^2\geqslant(x+1)^2-2(x-8) \Rightarrow x^2+4x+4+x^2-6x+9\geqslant x^2+2x+1-2x+16 \Rightarrow x^2-2x-3\geqslant 0$$

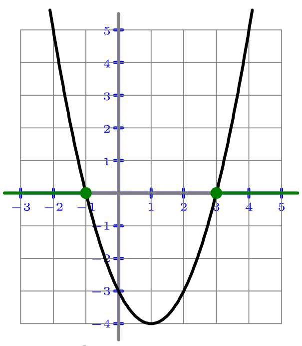
Vamos a estudiar el signo de la función cuadrática «$y=x^2-2x-3$»:

Como el coeficiente de «x^2» es positivo, el vértice de la parábola que es la representación gráfica de la función es un mínimo.

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas:

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=1\pm 2=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$$

Los puntos de corte son $(-1,0)$ y $(3,0)$.



Como tenemos información suficiente para estudiar el signo de la función, no calculamos las coordenadas del vértice de la parábola. Nuestro objetivo no es hacer una representación gráfica precisa, sino solo averiguar para qué valores la «y» verifica «$y\geqslant 0$».

Vemos a la derecha la representación gráfica aproximada.

Hay dos semirrectas de la recta real para las que se verifica la desigualdad, luego las soluciones son todos los valores de «x» que hay en cualquiera de las dos semirrectas. La manera más sencilla de escribir eso es usar la unión de conjuntos.

Solución: $x\in(\leftarrow,-1)\cup(3,\rightarrow)$

Comentario

En otros ejercicios puede ser necesario averiguar más datos de la representación gráfica de la función cuadrática. Tendrás que decidir tú hasta dónde llegar.

Casos particulares de inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Sabemos que para resolver una inecuación de segundo grado con una incógnita hay que simplificar la inecuación hasta llegar a una de estas cuatro formas:

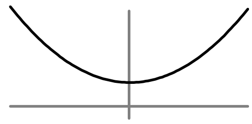
$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$

Para estudiar el signo de la función cuadrática «$y=ax^2+bx+c$» el aspecto más importante es resolver la ecuación «$ax^2+bx+c=0$». Lo más habitual es que la ecuación tenga dos raíces, pero también hay que saber cómo actuar en los casos en que no tenga ninguna solución o solo tenga una.

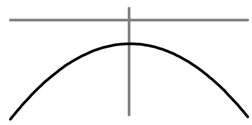
La ecuación «$ax^2+bx+c=0$» no tiene solución

En este caso la parábola asociada a la función cuadrática nunca corta al eje de abscisas, así que siempre se verifica «$y>0$» (cuando «$a>0$») o bien «$y<0$» (cuando «$a<0$»). Por tanto la inecuación o bien no tiene ninguna solución o bien cualquier número real es solución. Esta última posibilidad se puede expresar como «$x\in\mathbb{R}$»

Vemos las soluciones en el caso «$a>0$»:

$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$	
$x\in\mathbb{R}$	$x\in\mathbb{R}$	Sin solución	Sin solución	

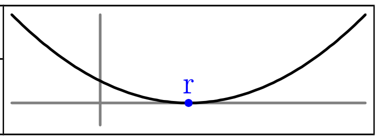
Vemos las soluciones en el caso «$a<0$»:

$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$	
Sin solución	Sin solución	$x\in\mathbb{R}$	$x\in\mathbb{R}$	

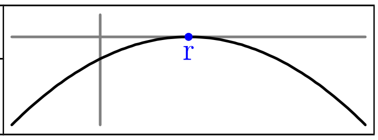
La ecuación «$ax^2+bx+c=0$» tiene una sola solución

Llamamos «r» a la única raíz de la ecuación. En este caso la parábola asociada a la función cuadrática corta al eje de abscisas en un solo punto, el punto (r,0).

Vemos las soluciones en el caso «$a>0$»:

$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$	
$x\in(\leftarrow,r)\cup(r,\rightarrow)$	$x\in\mathbb{R}$	Sin solución	$x=r$	

Vemos las soluciones en el caso «$a<0$»:

$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$	
Sin solución	$x=r$	$x\in(\leftarrow,r)\cup(r,\rightarrow)$	$x\in\mathbb{R}$	

Consejo

No te aprendas de memoria los casos. Te los hemos presentado para que te sea más sencillo comprenderlos. Cuando entiendas el significado, podrás aplicarlo en los casos que tengas que resolver.

Enunciados

Resuelve las siguientes inecuaciones.

① (a) $x^2-x-12>0$ (b) $x^2-x-12\geqslant 0$ (c) $x^2-x-12<0$ (d) $x^2-x-12\leqslant 0$

② (a) $-x^2+1>0$ (b) $-x^2+1\geqslant 0$ (c) $-x^2+1<0$ (d) $-x^2+1\leqslant 0$

③ (a) $x^2-3x>0$ (b) $x^2-3x\geqslant 0$ (c) $x^2-3x<0$ (d) $x^2-3x\leqslant 0$

④ (a) $x^2+1>0$ (b) $x^2+1\geqslant 0$ (c) $x^2+1<0$ (d) $x^2+1\leqslant 0$

⑤ (a) $x^2+4x+4>0$ (b) $x^2+4x+4\geqslant 0$ (c) $x^2+4x+4<0$ (d) $x^2+4x+4\leqslant 0$

⑥ (a) $-x^2>0$ (b) $-x^2\geqslant 0$ (c) $-x^2<0$ (d) $-x^2\leqslant 0$

⑦ (a) $x^2+x-2>0$ (b) $x^2+x-2\geqslant 0$ (c) $x^2+x-2<0$ (d) $x^2+x-2\leqslant 0$

⑧ (a) $x^2-8x+15>0$ (b) $x^2-8x+15\geqslant 0$ (c) $x^2-8x+15<0$ (d) $x^2-8x+15\leqslant 0$

⑨ (a) $-x^2+4x-5>0$ (b) $-x^2+4x-5\geqslant 0$ (c) $-x^2+4x-5<0$ (d) $-x^2+4x-5\leqslant 0$

⑩ (a) $-x^2-3x>0$ (b) $-x^2-3x\geqslant 0$ (c) $-x^2-3x<0$ (d) $-x^2-3x\leqslant 0$

⑪ $(x-5)^2+(x+3)^3\geqslant(x+1)^2+49$

⑫ $(x+2)(x-2)<(2x+1)^2+2x-5$

⑬ $2(x+3)^2-(x-5)^2\leqslant 4(5x-2)$

⑭ $(x+2)^2-(1-2x)^2\geqslant 9$

⑮ $(x^2+3)^2>(x^2-1)^2+16x$

⑯ $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{5x-8}{2}\leqslant 1$

⑰ $\dfrac{(x-3)^2}{6}-\dfrac{11-3x}{3}>6$

⑱ $(x+1)^2-\dfrac{(x-3)^2}{2}<4x+4$

⑲ $\dfrac{(x+5)^2}{2}-\dfrac{(x+4)^2}{3}\leqslant\dfrac{26x+7}{6}$

⑳ $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqslant\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{11}{3}\right)^2+\dfrac{20}{3}$

Inecuaciones racionales

Llamamos así a una inecuación en la que aparece alguna fracción algebraica. En el nivel 6 veremos un método simple para resolverlas, que se basa en propiedades que aún no hemos estudiado. Pero ahora, usando lo que sabemos hasta el momento, también podemos resolverlas sin dificultad, aunque el método sea más largo.

Ejemplo

Enunciado: resuelve la inecuación $\frac{x+3}{1-x} \geqslant 0$

Resolución

Podría parecer que es posible aplicar el método que usamos para resolver una ecuación con incógnita en el denominador, esto es:

Error ⇛ $\frac{x+3}{1-x} \geqslant 0 \Rightarrow x+3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -3$

El problema con esta resolución es que perdemos toda la información sobre el signo del polinomio «1–x», cuando el enunciado está pidiendo que una fracción algebraica tenga un signo concreto.

El método correcto de resolución consiste en considerar que una fracción puede ser positiva en dos casos distintos: que el numerador y el denominador sean simultáneamente positivos o simultáneamente negativos.

Además, en este caso, hay que tener en cuenta que el numerador puede ser cero (la fracción valdría 0), pero el denominador no puede serlo (la fracción no existiría).

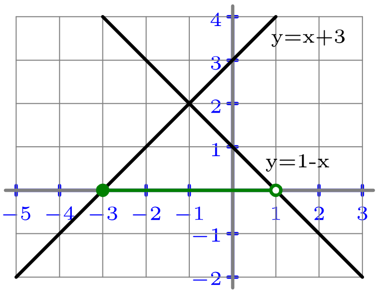
Por tanto, hay que resolver dos sistemas de inecuaciones y calcular la unión de sus soluciones. A la derecha vemos la interpretación geométrica:

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -3 \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-3, \rightarrow) \\ x \in (\leftarrow, 1) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3,\rightarrow) \cap (\leftarrow,1) = [-3,1)$$

$$\begin{cases} x+3 \leqslant 0 \\ 1-x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -3 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (\leftarrow, -3] \\ x \in (1, \rightarrow) \end{cases} \Rightarrow x \in (\leftarrow,-3) \cap (1,\rightarrow) = \varnothing$$

$[-3,1) \cup \varnothing = [-3,1)$

Solución: $x \in [-3,1)$



Enunciados

Resuelve las siguientes inecuaciones.

① $\frac{x-4}{1-x} > 0$

② $\frac{x^2-3x}{2-2x} \geqslant 0$

③ $\frac{x^2+2x-3}{-x^2+3x+4} \leqslant 0$

④ $\frac{x^2+x+1}{-x^2+4x-5} > 0$

⑤ $\frac{3x-2}{x+2} \geqslant 1$

Definición conjuntista de función

En el nivel 3 viste una primera aproximación al concepto de función y en el nivel 4 viste las ideas básicas de la teoría de conjuntos. Es posible utilizar la teoría de conjuntos para definir las funciones de un modo más general.

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera y f una manera de relacionar elementos del conjunto A con elementos del B. Se escribe de cualquiera de estas maneras:

$$\boxed{f\colon A \rightarrow B} \qquad \boxed{A \xrightarrow{f} B}$$

y se lee «efe de A en B»

A se llama conjunto de partida de la relación y B se llama conjunto de llegada.

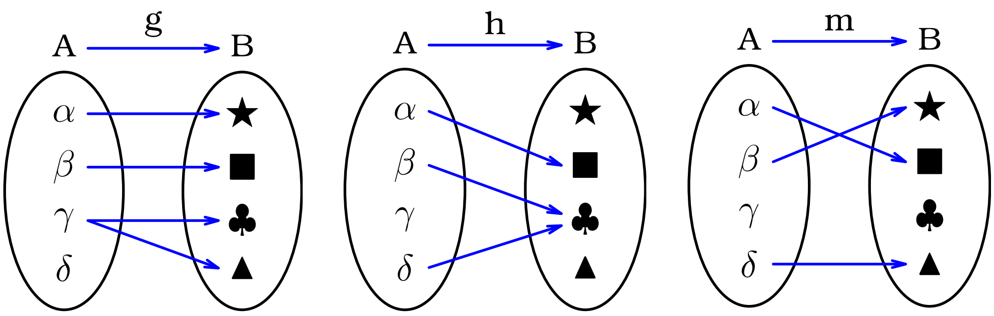
Si f relaciona el elemento x∈A con el elemento y∈B, decimos que y es la imagen de x mediante f y escribimos «y=f(x)»

Se dice que f es una **función** cuando se verifica la siguiente propiedad:

Si x es un elemento de A que está relacionado con algún elemento de B, entonces solo está relacionado con ese elemento y con ninguno más. Con otras palabras, si un elemento de A tiene alguna imagen en B, solo tiene una.

Ejemplos

Consideramos los conjuntos A={α,β,γ,δ} y B={★,■,♣,▲} y las relaciones entre elementos de A y de B llamadas g, h y m, que definimos con estos diagramas de Euler:



✱ Para la relación g: g(α)=★, g(β)=■, g(γ)={♣,▲}, g(δ) no existe.

La relación g no es una función porque el elemento γ tiene más de una imagen. Realmente g es lo que se llama una correspondencia, aunque las correspondencias no se estudian en la educación secundaria.

✱ Para la relación h: h(α)=■, g(β)=♣, g(γ) no existe, g(δ)=♣.

La relación h es una función, no importa que γ no tenga imagen.

✱ Para la relación m: m(α)=■, m(β)=★, m(γ) no existe, m(δ)=▲.

La relación h es una función, no importa que γ no tenga imagen.

Función inyectiva

Una función es inyectiva cuando cada pareja de elementos distintos del conjunto de partida tienen imágenes diferentes en el conjunto de llegada.

Ejemplos

Usando los conjuntos y funciones anteriores:

✱ La función h no es inyectiva porque hay dos elementos de A que tienen la misma imagen en B: g(β)=g(δ)=♣.

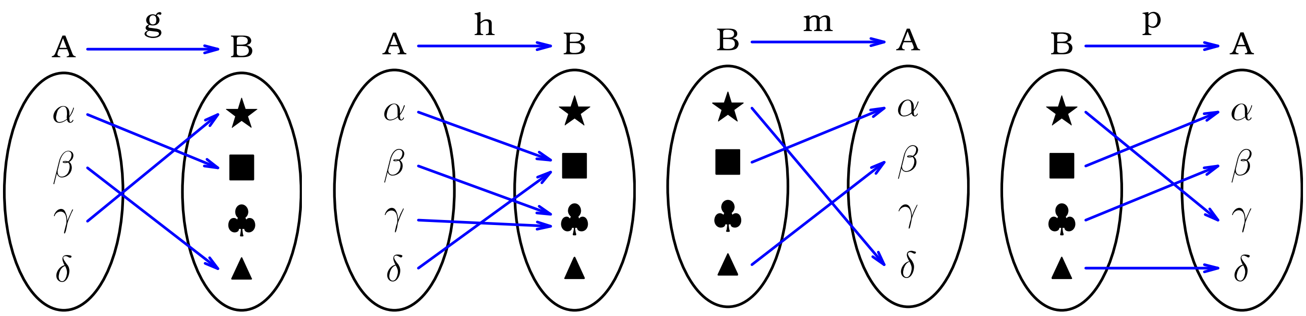
✱ La función m es inyectiva.

Dominio e imagen de una función

- El dominio de una función es el conjunto de elementos del conjunto de partida que tienen imagen en el conjunto de llegada.
- La imagen (también llamada el recorrido) de una función es el conjunto de elementos del conjunto de llegada que son imagen de algún elemento del conjunto de partida.
- Si f es una función, su dominio se puede escribir Dom(f) o bien D(f).
- Si f es una función, su imagen se escribe Im(f).

Ejemplos

Consideramos los conjuntos A={α,β,γ,δ} y B={★,■,♣,▲} y las funciones g, h, m y p, que definimos con estos diagramas de Euler:



- Dominio e imagen de la función g: Dom(g)={α,β,γ}; Im(g)={★,■,▲}.
- Dominio e imagen de la función h: Dom(h)={α,β,γ,δ}, que es más sencillo escribir como Dom(h)=B; Im(h)={■,♣}.
- Dominio e imagen de la función m: Dom(m)={★,■,▲}; Im(m)={α,β,δ}.
- Dominio e imagen de la función p: Dom(p)={★,■,♣,▲}, que es más sencillo escribir como Dom(p)=B; Im(m)={α,β,γ,δ}, que es más sencillo escribir como Im(p)=A.

Definición con símbolos

Si f: A → B es una función, definimos:

Dominio de f = Dom(f) = {x∈A | ∃ y∈B : y=f(x)}

Imagen de f = Im(f) = {y∈B | ∃ x∈A : y=f(x)}

Función sobreyectiva

Una función es sobreyectiva cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de algún elemento del conjunto de partida.

Ejemplos: de los ejemplos anteriores, solo la función p es sobreyectiva.

Función biyectiva

Una función biyectiva, también llamada biyección, es una función que es inyectiva y sobreyectiva.

Las funciones biyectivas son muy importantes porque demuestran cierta similitud entre los dos conjuntos que conectan. Por ejemplo, a lo largo del curso las hemos utilizado para demostrar que ℕ, ℤ y ℚ tienen el mismo número de elementos.

Ejemplos: de los ejemplos anteriores, solo la función p es biyectiva.

Funciones numéricas

En la educación secundaria estamos especialmente interesados en funciones que tienen como conjuntos de partida y de llegada algún conjunto numérico. Estas funciones reciben calificativos exactos que permiten saber cuáles son esos conjuntos. La regla para calificar la funciones es muy sencilla, pero no la vamos a escribir; mejor vamos a mostrarte ejemplos para que la deduzcas tú mismo.

f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$	Función entera de variable natural
f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$	Función natural de variable entera
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$	Función racional de variable real
f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$	Función real de variable racional
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	Función real de variable real

Casi todo el análisis que se estudia en la educación secundaria se basa en trabajar con funciones reales de variable real.

Diferentes propiedades con la misma expresión analítica

Funciones con la misma expresión analítica pueden tener distintas propiedades si conectan conjuntos diferentes. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

La función «cuadrado» puede ser inyectiva o no serlo según cambie el conjunto de partida.

- f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(x) = x^2$ es una función inyectiva, porque si dos números naturales son distintos, también lo son sus cuadrados.
- g: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida como $g(x) = x^2$ no es una función inyectiva, porque existen números enteros distintos que tienen el mismo cuadrado, como
  $g(4) = g(-4) = 16$.

Ejemplo 2

La función «sumar 2» puede ser sobreyectiva o no serlo según cambie el conjunto de partida.

- p: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $p(x) = x+2$ no es una función sobreyectiva, porque el número natural 1 no es imagen de ningún número natural, ya que ningún número natural verifica $x+2 = 1$.
- q: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida como $q(x) = x+2$ es una función sobreyectiva, porque cualquier número natural se puede obtener sumando 2 a un número entero.

Ejemplo 3

La función «dividir entre 2» puede ser biyectiva o no serlo según cambie el conjunto de partida.

- r: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida como $r(x) = x:2$ es una función biyectiva, porque la mitad de un número racional es otro número racional y el doble de un número racional es otro número racional.
- s: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida como $s(x) = x:2$ no es una función biyectiva, porque es inyectiva pero no es sobreyectiva; por ejemplo, no hay ningún número entero que verifique $s(x)=\frac{3}{4}$.

Dominio e imagen de algunas funciones

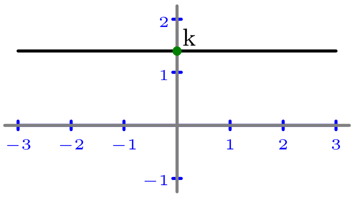
El estudio del dominio y la imagen de las funciones reales de variable real suele ser vital para comprender su comportamiento.

La representación gráfica de la función es un complemento muy útil del estudio: el dominio será el conjunto de todas las abscisas de los puntos de la gráfica y la imagen será el conjunto de todas las ordenadas de los puntos de la gráfica.

Vemos ejemplos con funciones reales de variable real simples e importantes.

Función constante

Definición de la función:



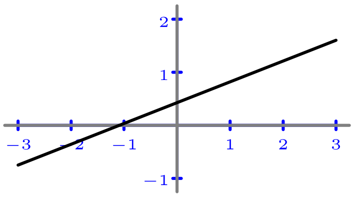
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con expresión analítica $f(x) = k$ (siendo k un número real).

Dominio e imagen: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$; $\mathrm{Im}(f) = \{k\}$

Es decir, el dominio es el conjunto de los números reales y la imagen es un solo valor.

Función lineal

Definición de la función:



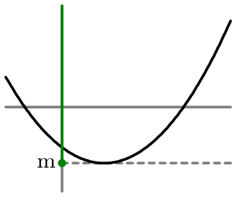
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con expresión analítica $g(x)=ax+b$ (siendo a y b dos números reales y $a\neq 0$).

Dominio e imagen: $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$; $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$

Es decir, tanto el dominio como la imagen son el conjunto de los números reales.

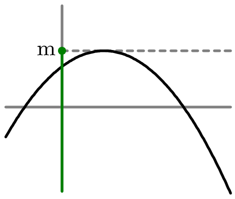
Función cuadrática

Definición de la función:



h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con expresión analítica $h(x) = ax^2+bx+c$ (siendo a, b y c tres números reales y $a\neq 0$).

Dominio e imagen:

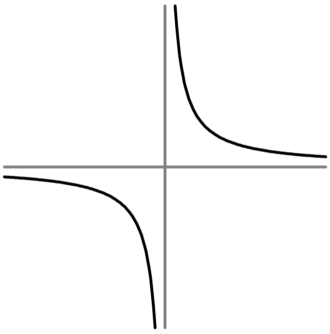


$\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$; $\mathrm{Im}(h) = \begin{cases} [m, \rightarrow) & \text{si } a>0 \\ (\leftarrow, m] & \text{si } a<0 \end{cases}$, siendo m la ordenada del vértice de la parábola.

Es decir, el dominio es el conjunto de los números reales y la imagen es una semirrecta cerrada.

Función de proporcionalidad inversa

Definición de la función:



p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con expresión analítica $p(x) = \dfrac{k}{x}$ (siendo k un número real y $k\neq 0$).

Dominio e imagen: $\mathrm{Dom}(p)=(\leftarrow,0)\cup(0,\rightarrow)$; $\mathrm{Im}(p)=(\leftarrow,0)\cup(0,\rightarrow)$

Es decir, tanto el dominio como la imagen de esta función es el conjunto de los números reales excluido el cero. Este conjunto muchas veces se escribe como $\mathbb{R}-\{0\}$, lo cual es perfectamente comprensible, o como $\mathbb{R}^*$, aunque esta última manera se suele definir antes de usarla.

Diferentes definiciones de función exponencial

La expresión analítica de la función exponencial es $y = a^x$. Bajo su aparente sencillez (es una potencia), encierra varias dificultades que se han ido solventando a lo largo de este curso, en diferentes niveles.

Función entera de variable natural

En el nivel 1 vimos esta definición:

f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = a^x$, siendo «a» un número entero.

$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x \text{ factores}}$. Ejemplo 1: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Ejemplo 2: $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

Función racional de variable entera

En el nivel 2 vimos esta definición:

f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida como $f(x) = a^x$, siendo «a» un número racional.

$$a^x = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x \text{ factores}} & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1}{a^{-x}} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Ejemplo 3: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$. Ejemplo 4: $\left(-\frac{4}{5}\right)^0 = 1$

Ejemplo 5: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{8}$

Función real de variable racional

En el nivel 4 vimos esta definición:

f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = a^x$, siendo «a» un número real no negativo.

Escribimos x como una fracción $\frac{m}{n}$, con n un número natural. $a^x = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplo 6: $1{,}55^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1{,}55^2} = 1{,}339330623\ldots$

Función real de variable real

Ahora es necesario definir f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(x) = a^x$, para lo que hay que dar un sentido a utilizar un número real como exponente de una potencia. Por ejemplo, ¿qué quiere decir $2^{\sqrt{3}}$? Si lo calculas con una calculadora, verás que hay una respuesta (3,321997085...), pero... ¿de dónde sale? Por desgracia, esto no se explica en la enseñanza secundaria por considerarse demasiado difícil, pero sí podemos acercarte a la idea fundamental:

El número $\sqrt{3}$ se puede aproximar mediante una serie de números racionales, tomando cada vez un decimal más de su expresión decimal $\sqrt{3} = 1{,}732050808\ldots$

Usamos los números racionales 1,7; 1,73; 1,732; etc. y calculamos 2 elevado a esos números: $2^{1{,}7} = 3{,}249\ldots$; $2^{1{,}73} = 3{,}317\ldots$; $2^{1{,}732} = 3{,}3219\ldots$ y vemos que los resultados están definiendo un número real, que será el resultado. Es decir, conforme nos vamos aproximando a $\sqrt{3}$, los resultados de las potencias nos están aproximando a $2^{\sqrt{3}}$.

Este método utilizado para poder establecer una definición tiene muchas ventajas: por un lado, se conservan todas las propiedades de las potencias y por otro lado la función real de variable real $y = a^x$ es una función continua, que es una propiedad fundamental para el análisis matemático.

La función exponencial real de variable real

- ✱ Si «a» es un número real positivo distinto de 1, definimos la función f: ℝ → ℝ como $f(x) = a^x$, de tal manera que sea **continua** y verifique todas las **propiedades** de las potencias. El número «a» es la **base** de la **función exponencial**.
- ✱ Para decir con símbolos que «a» es un número real positivo distinto de 1 escribimos $a \in (0,1) \cup (1,\rightarrow)$, lo que nos llevará a estudiar algunas propiedades distinguiendo los casos $a \in (0,1)$ y $a \in (1,\rightarrow)$.
- ✱ No se admite que «a» sea negativo porque entonces a^x no existiría para infinitos valores de «x». Por ejemplo, para $a = -1$ y $x = ½$, tendríamos $a^x = (-1)^{½} = \sqrt{-1}$, que no existe.
- ✱ No se admite que «a» sea 0 porque entonces la función $f(x) = a^x$ sería simplemente la función constante $f(x) = 0$, ya que 0^x siempre da como resultado 0.
- ✱ No se admite que «a» sea 1 porque entonces la función $f(x) = a^x$ sería simplemente la función constante $f(x) = 1$, ya que 1^x siempre da como resultado 1.

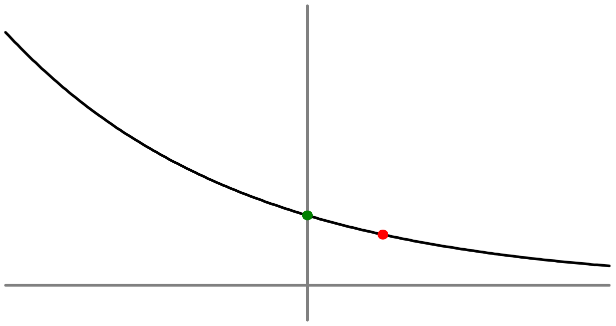
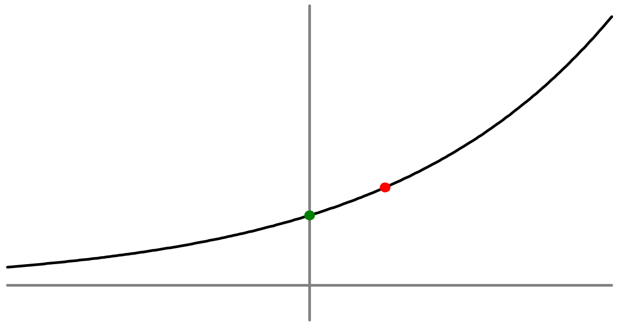
Propiedades de las potencias

La función exponencial hereda todas las propiedades de las potencias. Concretamente, si $a,b \in (0,1) \cup (1,\rightarrow)$, se verifica:

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
4. $a^{xy} = (a^x)^y$
5. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Representación gráfica de la función exponencial

El aspecto de la representación gráfica de la función exponencial depende de si $a \in (0,1)$ o bien $a \in (1,\rightarrow)$. Aquí vemos un ejemplo de cada caso.

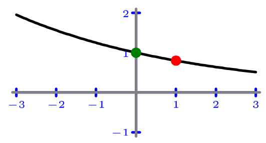
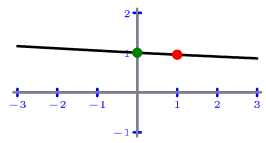
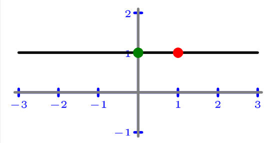
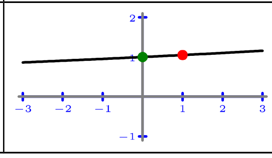
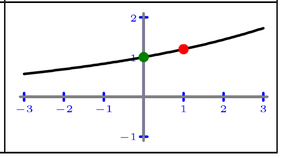
$a \in (0,1)$	$a \in (1,\rightarrow)$
	

Propiedades de la función exponencial

7. El dominio de la función exponencial es ℝ.
8. La función exponencial es continua.
9. La función exponencial es inyectiva.
10. La imagen de la función exponencial es $(0,\rightarrow)$. Esto también nos dice que $a^x > 0$.
11. $a^0 = 1$. Esto está mostrado en el punto verde de las gráficas, el punto (0,1).
12. $a^1 = a$. Esto está mostrado en el punto rojo de las gráficas, el punto (1,a).
13. Si $a \in (0,1)$, la función es decreciente; si $a \in (1,\rightarrow)$, la función es creciente.

Representación gráfica exacta de la función exponencial

Consideramos la función exponencial $y = a^x$. Cuando la base «a» es un número cercano a 1, es posible representar con bastante exactitud la función. Además de representar gráficamente los puntos (0,1) y (1,a), que siempre se encuentran en la gráfica, puedes calcular con la calculadora algún valor más y la representación te saldrá casi perfecta. Aquí te mostramos unos ejemplos, junto con la gráfica de la función $y = 1$, que nos sirve de comparación. El punto (0,1) lo mostramos en verde y el punto (1,a) en rojo.

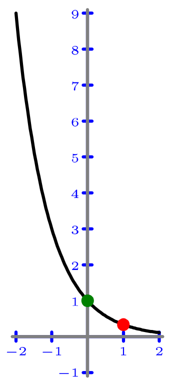
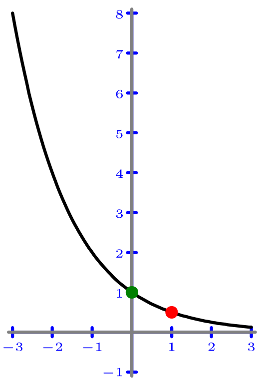
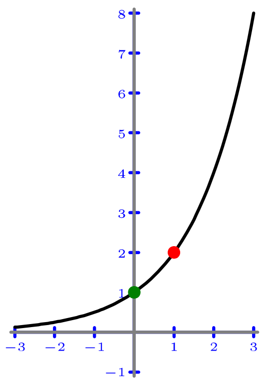
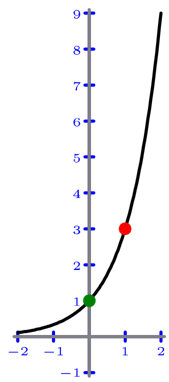
Ejemplo 1	Ejemplo 2		Ejemplo 3	Ejemplo 4
$y = 0{,}8^x$	$y = 0{,}95^x$	$y = 1$	$y = 1{,}05^x$	$y = 1{,}2^x$
				

El motivo de que estas gráficas sí se puedan representar con mucha exactitud es que los valores que toma la función son muy similares entre sí.

Representación gráfica aproximada de la función exponencial

Consideramos la función exponencial $y = a^x$. Cuando la base «a» no es un número cercano a 1, es imposible representar con exactitud la función, porque esta toma valores muy diferentes, que no pueden ser representados simultáneamente.

Para hacernos una idea podemos empezar por tratar cuatro funciones que ya empiezan a ser difíciles de representar, aunque no tomen valores demasiado altos:

Ejemplo 5	Ejemplo 6	Ejemplo 7	Ejemplo 8
$y = (⅓)^x$	$y = (½)^x$	$y = 2^x$	$y = 3^x$
			

El problema de estas gráficas es que en una parte la función toma rápidamente valores cada vez mayores mientras que en la otra parte toma valores que se acercan a 0 también con rápidez. Si se prepara una escala en el eje de ordenadas que permita ver bien una de las partes, la otra se verá mal.

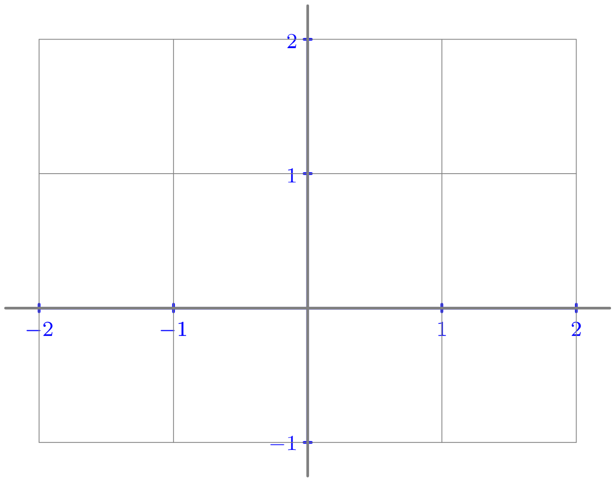
Consejo para una representación sin ordenador

Cuando necesites hacer la representación sobre el papel, dibuja primero los puntos (0,1) y (1,a) y luego únelos de la mejor manera que puedas de modo que se note que la función es creciente o decreciente, según corresponda, sin importarte que los valores de las ordenadas sean completamente exactos.

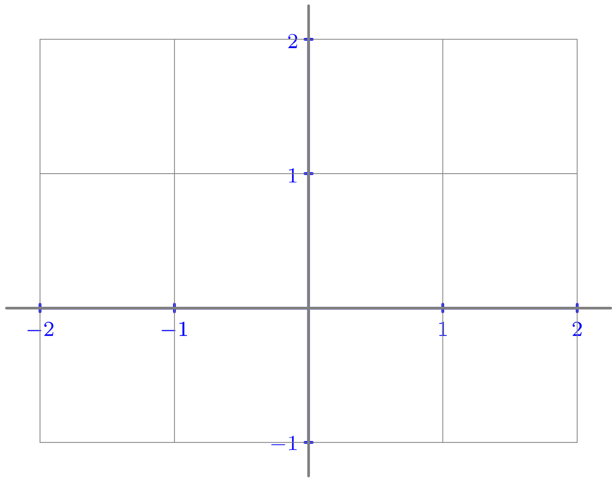
Enunciados

Representa gráficamente de modo aproximado las siguientes funciones utilizando el espacio proporcionado:

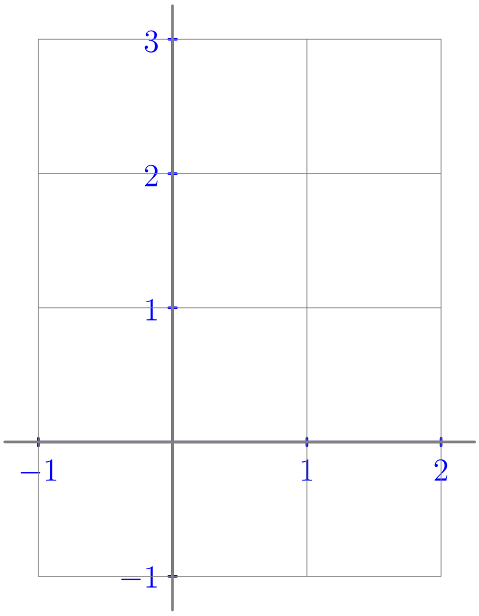
① $y = 0{,}75^x$



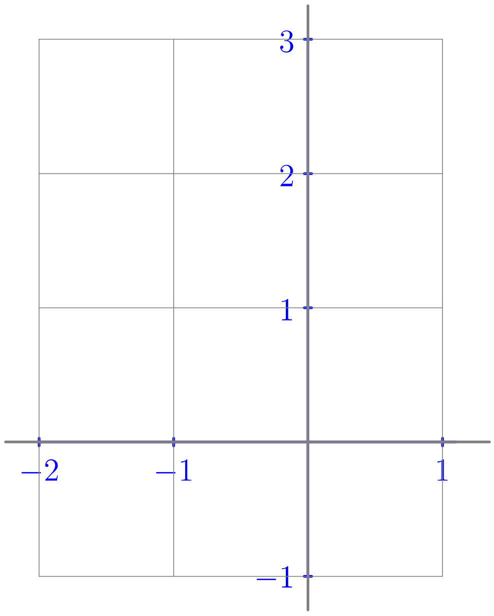
② $y = 1{,}25^x$



③ $y = 0{,}4^x$



④ $y = 2{,}5^x$



Funciones exponenciales en la vida real

En matemáticas estudiamos las funciones exponenciales porque en la vida real aparece en muchas situaciones, normalmente formando parte de una expresión analítica más compleja. Vemos los dos casos: el crecimiento exponencial y el decrecimiento exponencial.

Ejemplos de crecimiento exponencial

- Cuando una población de seres vivos dispone de recursos suficientes para reproducirse sin depredadores que frenen su expansión, el crecimiento de la población sigue una función exponencial.
  - Ejemplo 1. Hasta el año 1788 no había conejos en Australia, pero los primeros colonos europeos llevaron allí algunas parejas para su consumo como carne. Cuando se liberaron algunos ejemplares para ser cazados como deporte, se reprodujeron sin control porque no tenían depredadores naturales. Ahora se consideran una plaga.

  - Ejemplo 2. La expansión en humanos de un virus perjudicial para el que no exista vacuna ni tratamiento sigue un crecimiento exponencial si no se toman medidas de aislamiento. Las primeras fases de la pandemia de covid-19, que comenzó a finales de 2019, siguieron ese patrón.
- Cuando se invierte un capital con interés compuesto, el capital acumulado aumenta conforme a una función exponencial.
  - Ejemplo 3. Si se invierten 1000 euros al 2 % de interés anual, al cabo de «x» años el capital diponible, «y», se puede calcular como $y = 1000 \cdot 1{,}02^x$, según vimos en el nivel 3 del curso.

Ejemplos de decrecimiento exponencial

- Los elementos químicos radiactivos son aquellos que experimentan cambios en sus núcleos atómicos que los convierten en otro tipo de núcleo diferente, algunas veces incluso de otro elemento químico distinto. Este proceso se llama desintegración, y el ritmo al que se produce sigue un decrecimiento exponencial. Se llama vida media de un elemento al tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de su materia.
  - Ejemplo 4. El uranio es el elemento químico con número atómico 92. La mayor parte de los átomos de uranio que hay en el planeta Tierra tienen masa atómica 238; se llaman uranio-238 (simbólicamente, ^{238}U). Con una vida media de 4470 millones de años, se convierte en plomo, que tiene número atómico 82. Este proceso permite datar rocas formadas desde hace un millón de años hasta 4500 millones de años (la edad de la Tierra).

  - Ejemplo 5. El carbono-14 se convierte en carbono-12 con una vida media de 5730 años. Esto permite datar material de origen orgánico.
- Cuando un cuerpo está a mayor temperatura que su entorno, pierde calor. La cantidad de calor que pierde sigue un decrecimento exponencial, lo que significa que al principio pierde mucho más calor que cuando se va enfriando. Esta propiedad se conoce como ley del enfriamiento de Newton.

Enunciado

Una persona investiga cómo se comporta un tipo de bacteria. Ha comprobado que el número de bacterias aumenta un 50 % cada dos horas y media con las condiciones adecuadas. Comienza cierto experimento en una placa de Petri como la que se ve a la derecha con un número estimado de bacterias de $2{,}346 \cdot 10^7$. El experimento se va a desarrollar durante 24 horas. Se pide:

a) Describe la función que relaciona el tiempo trascurrido con el número de bacterias presentes en la placa.

b) Calcula con cuatro cifras significativas el número de bacterias que se espera que haya en la placa tras 14 horas de experimento.

c) Calcula con cuatro cifras significativas el número de bacterias que se espera que haya en la placa en el momento en que acabe el experimento.

d) Averigua el dominio y la imagen de la función descrita en el apartado (a).

Resolución

a)

Variable	Magnitud	Nombre	Unidad
Independiente	Tiempo trascurrido del experimento	x	hora
Dependiente	Número de bacterias	y	(sin unidad)

Para determinar la expresión analítica observamos que para aumentar una cantidad un 50 % hay que multiplicarla por 1,5. Así pues, necesitamos utilizar una función exponencial de base 1,5 en la que el exponente aumente una unidad cada 2,5 horas. Como la función exponencial valdrá 1 para $x = 0$, debemos multiplicarla por el valor con el que comienza el experimento. Por tanto:

Expresión analítica: $y = 2{,}346 \cdot 10^7 \cdot 1{,}5^{\frac{x}{2{,}5}}$

b) Tras 14 horas de experimento, el número de bacterias será:

$y = 2{,}346 \cdot 10^7 \cdot 1{,}5^{\frac{14}{2{,}5}} = 2{,}272 \cdot 10^8$

Calculadora: 2 . 3 4 6 EXP 7 × 1 . 5 y^x (1 4 ÷ 2 . 5) = ⇨ 227216077.6

c) Cuando acabe el experimento, el número de bacterias será:

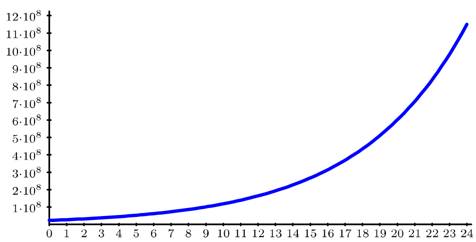
$y = 2{,}346 \cdot 10^7 \cdot 1{,}5^{\frac{24}{2{,}5}} = 1{,}150 \cdot 10^9$

Calculadora: 2 . 3 4 6 EXP 7 × 1 . 5 y^x (2 4 ÷ 2 . 5) = ⇨ 1150281393

d) Dominio = [0,24]; imagen = $[2{,}346 \cdot 10^7; 1{,}150 \cdot 10^9]$

Representación gráfica

A la derecha vemos la representación gráfica de la función que describe el experimento.



Enunciado

Un elemento radiactivo tiene una vida media de 28 años. Hoy se dispone de 6,85 gramos de material y se va a realizar durante cien años un seguimiento de la masa que vaya quedando de material radiactivo. Se pide:

a) Describe la función que relaciona el tiempo trascurrido con la masa de material radiactivo que queda.

b) Calcula con tres cifras significativas la masa de material radiactivo que quedará cuando hayan pasado cuarenta años.

c) Calcula con tres cifras significativas la masa de material radiactivo que quedará cuando termine el seguimiento.

d) Averigua el dominio y la imagen de la función descrita en el apartado (a).

Resolución

a)

Variable	Magnitud	Nombre	Unidad
Independiente	Tiempo trascurrido del seguimiento	x	año
Dependiente	Masa de material radiactivo	y	gramo

Para determinar la expresión analítica observamos que cada 28 años hay que dividir la cantidad de material entre dos. Así pues, necesitamos utilizar una función exponencial de base ½ en la que el exponente aumente una unidad cada 28 años. Como la función exponencial valdrá 1 para $x = 0$, debemos multiplicarla por el valor con el que comienza el seguimiento. Por tanto:

Expresión analítica: $y = 6{,}85 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{28}}$

b) Tras 40 años de seguimiento, la masa de material será:

$$y = 6{,}85 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{28}} = 2{,}54 \text{ g}$$

Calculadora: 6 . 8 5 × 0 . 5 y^x (4 0 ÷ 2 8) = ⇰ 2.54476522

c) Cuando acabe el seguimiento, la masa de material será:

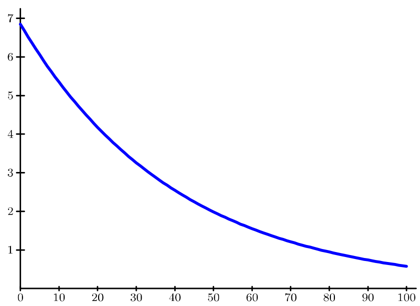
$$y = 6{,}85 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{28}} = 0{,}576 \text{ g}$$

Calculadora: 6 . 8 5 × 0 . 5 y^x (1 0 0 ÷ 2 8) = ⇰ 0.57621352

d) Dominio = [0,100]; imagen = [6,85;0,576]

Representación gráfica

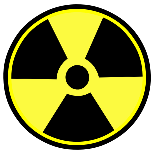
A la derecha vemos la representación gráfica de la función que describe el experimento.



Enunciados

① Una población de bacterias se encuentra en óptimas condiciones de reproducción en cierto biotopo y se duplica cada 17 días. Si se parte de una población estimada con una masa de 5,36 kilogramos, calcula en kilogramos con tres cifras significativas la masa que se estima que puede haber dentro de 100 días.

② Un elemento radiactivo tiene una vida media de 350 años. Si hoy se dispone de 18,3 gramos de material, calcula en gramos con tres cifras significativas la masa de material que se espera que quede dentro de mil años.



③ Un fondo de inversiones ha calculado que es capaz de aumentar su capital un 3 % cada seis meses. Si dispone de 1473 millones de euros, calcula en euros, redondeando al millón, qué capital podría tener dentro de tres años y nueve meses si siguiera aumentando al mismo ritmo.

④ Debido al cambio climático, una especie de anfibios está sufriendo una pérdida de individuos que se ha cifrado en un 10 % anual. Si ahora mismo se estima que la población tiene una masa total de 278 kilogramos, calcula en kilogramos, redondeando a la unidad, qué masa total de esta especie se espera que puede haber dentro de cuatro años y medio si sigue perdiendo individuos al mismo ritmo.

⑤ Un meteorito contiene un elemento radiactivo que tiene una vida media de 2600 años. Se mide cuidadosamente la cantidad de elemento presente en el meteorito y se obtiene que hay 0,78 gramos. Calcula en gramos con tres cifras significativas la cantidad de ese elemento que contenía el meteorito hace 10 000 años.

⑥ Calcula con tres cifras significativas el porcentaje de aumento anual que debe mantener una población animal para multiplicar por dos su número de individuos en cinco años.

⑦ Calcula con tres cifras significativas el porcentaje de disminución anual que ha mantenido una población animal que ha visto reducido su número de individuos a la mitad en siete años.

⑧ Una población de cierta especie de alga duplica su masa total en una laguna, en condiciones óptimas, cada 300 días. Si se estima que ahora hay una masa total de alga de 24,7 toneladas, calcula en toneladas con tres cifras significativas cuánto aumentará la masa de alga empezando a contar desde hace 85 días y terminando dentro de 95 días.

⑨ Un elemento radiactivo tiene una vida media de 820 años. Estudiamos una muestra que contiene 2,15 gramos de materia. Calcula en gramos con tres cifras significativas la masa de elemento radiactivo que se perdió empezando a contar hace 2000 años y terminando de contar hace 1000 años.

⑩ Sabiendo que «$3x-y=2$», calcula el valor de «$8^x:2^y$».

Elección de la base de la función exponencial

Hemos visto que según sea el problema que haya que resolver, usamos como base de una función exponencial una base u otra. Sin embargo, existen dos números que se usan muy habitualmente como base de la función exponencial porque tienen usos en gran variedad de problemas. Los números son el 10 (nuestra base de numeración habitual) y el e, un número irracional cuya expresión decimal comienza por 2,718 y que se define en el nivel 5 de este curso. Estas dos funciones exponenciales se usan tanto que tienen su propia tecla en las calculadoras científicas.

Función exponencial de base 10

Es la función «$y = 10^x$». Cuando «x» es un número entero, la expresión de la función exponencial es sencillamente la notación científica.

Ejemplo 1. $x = 3 \Rightarrow y = 10^3 = 1000$

Ejemplo 2. $x = -4 \Rightarrow y = 10^{-4} = 0{,}0001$

Ejemplo 3. $x = 25 \Rightarrow y = 10^{25}$

Ejemplo 4. $x = -17 \Rightarrow y = 10^{-17}$

La novedad aparece cuando «x» no es un número entero. Entonces recurrimos a la calculadora. La tecla que se usa es $\boxed{10^x}$.

Ejemplo 5. $x = 4{,}31 \Rightarrow y = 10^{4{,}31} = 20417{,}37945$. Calculadora: $\boxed{10^x}$ $\boxed{4}$ $\boxed{.}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

Ejemplo 6. $x = -1{,}3 \Rightarrow y = 10^{-1{,}3} = 0{,}050118723$. Calculadora: $\boxed{10^x}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{1}$ $\boxed{.}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

Ejemplo 7. $x = 15{,}2 \Rightarrow y = 10^{15{,}2} = 1{,}584893192 \cdot 10^{15}$. Calculadora: $\boxed{10^x}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{.}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

Ejemplo 8. $x = -9{,}6 \Rightarrow y = 10^{-9{,}6} = 2{,}51188643 \cdot 10^{-10}$. Calculadora: $\boxed{10^x}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{9}$ $\boxed{.}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$

Observa que no usamos ni la tecla genérica de potencia ni la tecla de introducción del exponente en notación científica, sino la tecla específica de esta función.

Función exponencial de base *e*

Es la función «$y = e^x$». Te puede parecer sorprendente usar esta función basada en un número del que acabas de aprender en este mismo nivel que existe; sin embargo, el prestigioso matemático austro-estadounidense Walter Rubin (1921-2010) declaraba que esta función exponencial es «la función más importante en matemáticas». Tal vez por eso, se la conoce también como la exponencial natural.

En muchos textos de matemáticas y lenguajes de programación nos referimos a ella como «$y = \exp(x)$». Para calcular sus valores en una calculadora científica usamos la tecla $\boxed{e^x}$.

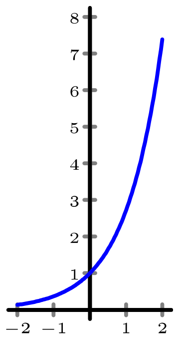
Ejemplo 9. $x = 2 \Rightarrow y = e^2 = 7{,}389056099$. Calculadora: $\boxed{e^x}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

Ejemplo 10. $x = -3 \Rightarrow y = e^{-3} = 0{,}049787068$. Calculadora: $\boxed{e^x}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

Ejemplo 11. $x = 35 \Rightarrow y = e^{32} = 1{,}586013452 \cdot 10^{15}$. Calculadora: $\boxed{e^x}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$

Ejemplo 12. $x = -29 \Rightarrow y = e^{-29} = 2{,}543665647 \cdot 10^{-13}$. Calculadora: $\boxed{e^x}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{2}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$

Su representación gráfica en el intervalo (–2,2) es:



Ecuaciones exponenciales

Son ecuaciones en las que la incógnita está en el exponente.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4	Ejemplo 5
$2^x = 32$	$9^x+3^x = 90$	$5^x = 83$	$4^x+2^x = 7$	$x+2^x = 0$

Las ecuaciones de los ejemplos (1) y (2) son las que vamos a resolver en esta sección del curso. Las ecuaciones de los ejemplos (3) y (4), pese a lo mucho que se parecen a las anteriores, las resolveremos en la sección siguiente, porque es necesario utilizar logaritmos. La ecuación del ejemplo (5) requiere técnicas más generales y avanzadas, que estudiaremos en el nivel 6 del curso.

Ecuaciones exponenciales simples

Aunque no existe una nomenclatura establecida para clasificar las ecuaciones exponenciales, en este curso llamaremos así a las ecuaciones que tienen el aspecto de los ejemplos (1) y (3), o bien se pueden trasformar fácilmente en ese aspecto.

Estas ecuaciones se resuelven escribiendo dos potencias de la misma base, una en cada miembro de la ecuación, e igualando los exponentes.

Ejemplo 6

Enunciado: resuelve la ecuación $3^x = 81$

Resolución: $3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$. Solución: $x = 4$

Comentario: como ves, ha sido necesario reconocer que $81 = 3^4$; esta es la mayor dificultad del método, ya que no siempre seremos capaces de averiguar cómo escribir un número como una potencia de cierta base. Para eso nos servirán más adelante los logaritmos.

Justificación del método explicado

El método que hemos explicado para resolver ecuaciones exponenciales simples se basa en que la función exponencial es inyectiva. Cuando una función es inyectiva, dos valores diferentes de la variable independiente tienen imágenes diferentes:

✱ Si la función f es inyectiva, se verifica: $p \neq q \Rightarrow f(p) \neq f(q)$

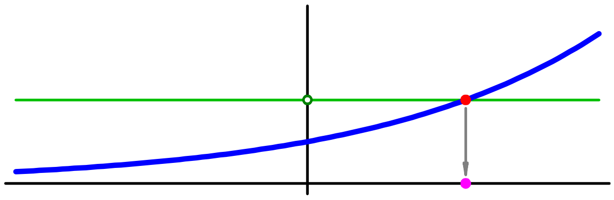
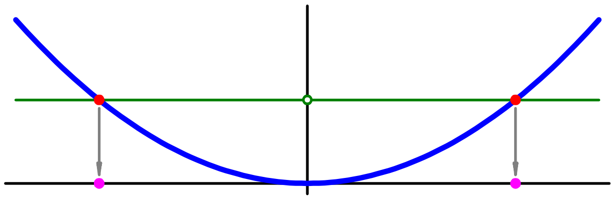
Y esta propiedad es lógicamente equivalente a esta:

✱ Si la función f es inyectiva, se verifica: $f(p) = f(q) \Rightarrow p = q$

En nuestro caso hemos deducido $3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$.

Si una función no es inyectiva, no podemos hacer la deducción. Por ejemplo, la función cuadrado «$g(x) = x^2$» no es inyectiva porque $g(3) = g(-3) = 9$, así que la siguiente deducción es **errónea**: $3^2=(-3)^2 \Rightarrow 3 = -3$.

Gráficamente se puede ver así: si una función es inyectiva, cada recta horizontal corta como máximo una vez a la gráfica de la función y si una función no es inyectiva, alguna recta horizontal corta más de una vez a la gráfica de la función.

	
Función inyectiva: dado un valor de «y» (○), solo puede haber un valor de «x» (●).	Función no inyectiva: dado un valor de «y» (○), puede haber más de un valor de «x» (●).

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $2^{2x-4}=64$ ② $3^{1-x^2}-\frac{1}{27}=0$ ③ $125^{\frac{x}{2}}=\sqrt[5]{25^{x-1}}$ ④ $61^{x^2-9}=1$ ⑤ $2^{x+8}=-1$

Resoluciones

Vemos que en las ecuaciones de (1) a (4) es sencillo conseguir que haya un término en cada miembro y escribirlos ambos como potencias de la misma base.

① Hay que escribir 64 como una potencia de 2: $64 = 2^6$

$$2^{2x-4}=64 \Rightarrow 2^{2x-4}=2^6 \Rightarrow 2x-4 = 6 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

Solución: $x = 5$

② Hay que pasar al segundo miembro la fracción $\frac{1}{27}$ y escribirla como una potencia de 3.

$$3^{1-x^2}-\frac{1}{27}=0 \Rightarrow 3^{1-x^2}=\frac{1}{27} \Rightarrow 3^{1-x^2}=3^{-3} \Rightarrow 1-x^2 = -3 \Rightarrow -x^2 = -4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \begin{cases}-2\\ 2\end{cases}$$

Solución: $x = \begin{cases}-2\\ 2\end{cases}$

③ Tanto 25 como 125 se pueden escribir como potencias de 5. Además, la raíz se puede escribir como potencia. Así que buscaremos escribir una potencia de 5 en cada miembro.

$$125^{\frac{x}{2}}=\sqrt[5]{25^{x-1}} \Rightarrow (5^3)^{\frac{x}{2}}=(5^2)^{\frac{x-1}{5}} \Rightarrow 5^{\frac{3x}{2}}=5^{\frac{2(x-1)}{5}} \Rightarrow \frac{3x}{2}=\frac{2(x-1)}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot 3x = 2\cdot 2(x-1) \Rightarrow 15x = 4x-4 \Rightarrow 11x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{11}$$

Solución: $x = -\frac{4}{11}$

④ Es posible escribir 1 como una potencia de cualquier base. Basta usar 0 como exponente: $1 = 61^0$.

$$61^{x^2-9}=1 \Rightarrow 61^{x^2-9}=61^0 \Rightarrow x^2-9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \begin{cases}-3\\ 3\end{cases}$$

Solución: $x = \begin{cases}-3\\ 3\end{cases}$

⑤ Sin solución, ya que es imposible que una potencia de base 2 dé como resultado un número negativo.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $3^{2x-6}=9$

② $2^{x+8}-\dfrac{1}{16}=0$

③ $9^{2x}=\sqrt{3}$

④ $57^{5x+30}=1$

⑤ $3^{4x+8}=-3$

⑥ $7^{x^2+x}=49$

⑦ $125-5^{3x^2}=0$

⑧ $\sqrt[3]{81^{x+1}}=(3^x)^2$

⑨ $11^{4x+5}=121$

⑩ $9^{x+1}=\sqrt{27}$

⑪ $625^{2x+4}=\sqrt{5^{x-3}}$

⑫ $5^{\frac{x+1}{3}}=\sqrt[3]{25^{x^2+\frac{9}{16}}}$

⑬ $4^{2x+3}=8^{\frac{1}{3}x^2-5}$

⑭ $2\cdot 4^x=8$

⑮ $3^x\cdot 9^{x+1}=27$

⑯ $\dfrac{8^{x+1}}{4}=16^x$

⑰ $49^{x+1}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

⑱ $\sqrt[5]{64^{x+1}}=\sqrt[7]{4^{12-x}}$

⑲ $\dfrac{1}{5^{x^2-7}}=125^{x+1}$

⑳ $10^{x^2}=\dfrac{100^x}{1000}$

㉑ $\dfrac{36^{4x+8}}{12}=2^x\cdot 3^{x+1}$

㉒ $2^x+3^x=0$

Resolución general de ecuaciones exponenciales

Cuando una ecuación exponencial no es simple, es decir, cuando tiene tres o más términos, se puede intentar resolver usando un cambio de variable.

Normalmente se elige como variable auxiliar la potencia que tenga incógnita en el exponente y como base el número menor. Una vez resuelta la ecuación obtenida tras el cambio de variable, habrá que resolver las ecuaciones exponenciales simples resultantes.

Ejemplo

Enunciado: resuelve la ecuación $4^x+5\cdot 2^{x+1}=144$

Resolución

Hay dos potencias con incógnita en el exponente: 4^x y 2^{x+1}. Como la menor base es 2, lo más sencillo será llamar $z=2^x$. (Podríamos usar cualquier otra letra para nombrar la incógnita auxiliar.) Para poder convertir la ecuación dada en una ecuación en la que z sea la única incógnita serán necesarias dos trasformaciones, ambas muy habituales:

Por un lado, 2^{x+1} hay que descomponerlo usando las propiedades de las potencias para que podamos separar z: $2^{x+1}=2^x\cdot 2=z\cdot 2=2z$.

Por otro lado, hay que escribir 4^x en función de z, también usando las propiedades de las potencias. Esta trasformación es importante y tendrás que hacerla muchas veces con estas ecuaciones. Se basa en que $4=2^2$. Atención:

$$4^x=(2^2)^x=2^{2x}=(2^x)^2=z^2$$

Ya estamos preparados para realizar el cambio de variable:

Llamando $z=2^x$, $4^x+5\cdot 2^{x+1}=144 \Rightarrow z^2+5\cdot 2z=144$.

Ahora debemos resolver la ecuación obtenida. En este ejemplo, la ecuación es de segundo grado, pero en general podríamos enfrentarnos a cualquier otro tipo de ecuación.

$$z^2+5\cdot 2z=144 \Rightarrow z^2+10z-144=0 \Rightarrow z=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 1\cdot(-144)}}{2\cdot 1}=\frac{-10\pm\sqrt{676}}{2}=$$

$$=\frac{-10\pm 26}{2}=\begin{cases}-18\\ 8\end{cases}$$

Como hemos obtenido dos soluciones para la z, tendremos que resolver dos ecuaciones exponenciales simples, una para cada valor. Pero en general podríamos obtener cualquier número de soluciones para la z y por tanto cualquier número de ecuaciones exponenciales simples.

Las resolvemos: $z=-18 \Rightarrow 2^x=-18 \rightarrow$ sin solución; $z=8 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow 2^x=2^3 \Rightarrow x=3$

También en general, las ecuaciones exponenciales simples podrán tener solución o no tenerla, con cualquier distribución.

Solución: $x=3$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $4\cdot 3^{x+1}-3^{x+2}+5\cdot 3^{x-1}=\frac{14}{9}$ ② $25^{x}-6\cdot 5^{x}=-5$ ③ $8^{x}-2^{x+1}=56$

Resoluciones

① Utilizamos la incógnita auxiliar $z = 3^x$

$$4\cdot 3^{x+1}-3^{x+2}+5\cdot 3^{x-1}=\frac{14}{9} \Rightarrow 4\cdot 3^{x}\cdot 3^{1}-3^{x}\cdot 3^{2}+5\cdot\frac{3^{x}}{3^{1}}=\frac{14}{9} \Rightarrow 4\cdot z\cdot 3-z\cdot 9+5\cdot\frac{z}{3}=\frac{14}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12z-9z+\frac{5}{3}z=\frac{14}{9} \Rightarrow 3z+\frac{5}{3}z=\frac{14}{9} \Rightarrow 27z+15z = 14 \Rightarrow 42z = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{14}{42} \Rightarrow z = \frac{1}{3}$$

Resolvemos la ecuación exponencial simple resultante:

$$z = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$$

Solución: $x = -1$

② Utilizamos la incógnita auxiliar $z = 5^x$

$$25^{x}-6\cdot 5^{x}=-5 \Rightarrow (5^{x})^{2}-6\cdot 5^{x}=-5 \Rightarrow z^2-6z = -5 \Rightarrow z^2-6z+5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^{2}-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{6\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{6\pm 4}{2} = \begin{cases}5\\1\end{cases}$$

Resolvemos las dos ecuaciones exponenciales simples resultantes:

$z = 5 \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow 5^x = 5^1 \Rightarrow x = 1$; $z = 1 \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0$

Solución: $x = \begin{cases}0\\1\end{cases}$

③ Utilizamos la incógnita auxiliar $z = 2^x$

Entonces, $8^x = (2^3)^x = 2^{3x} = (2^x)^3 = z^3$

$$8^{x}-2^{x+1}=56 \Rightarrow 8^{x}-2\cdot 2^{x}=56 \Rightarrow z^3-2z = 56 \Rightarrow z^3-2z-56 = 0$$

Para resolver esta ecuación de tercer grado, buscamos una raíz entre los divisores de 56. Encontramos que 4 es una raíz: $4^3-2\cdot 4-56 = 0$

Dividimos el polinomio «$z^3-2z-56$» entre el polinomio «$z-4$» y llegamos a:

$z^3-2z-56 = 0 \Rightarrow (z-4)(z^2+4z+14) = 0 \Rightarrow z = 4$, ya que $z^2+4z+14 = 0$ no tiene ninguna solución.

Resolvemos la ecuación exponencial simple resultante:

$$z = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

Solución: $x = 2$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da el resultado del modo más sencillo que sea posible (número entero o fracción irreducible).

① $2^{x+1}-2^{x+2}+3\cdot 2^{x-1}+\frac{1}{16}=0$

② $9^x-30\cdot 3^x=-81$

③ $8^x+2^{x+2}=5$

④ $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}=1984$

⑤ $4^x+2^{x-1}=68$

⑥ $9^x+3^{x-1}=84$

⑦ $3^x-7\cdot 3^{x-2}+2\cdot 3^{x-1}-2\cdot 3^2=54$

⑧ $4^x-\frac{5}{8}\cdot 2^{x+1}+\frac{1}{4}=0$

⑨ $16^x-4^{x+1}=192$

⑩ $2^{x+1}+4^{x-1}=48$

⑪ $4^x+2^{x+1}=-1$

⑫ $9^x-2\cdot 3^{x+2}+81=0$

⑬ $2^{x+4}-5\cdot 2^{x+3}+3\cdot 2^{x+5}=\frac{9}{2}$

⑭ $49^x-48\cdot 7^x=49$

⑮ $125^x-5^{x+2}=12500$

⑯ $9^x-82\cdot 3^{x-3}+\frac{1}{9}=0$

⑰ $9^x-3^{x+1}=648$

⑱ $125^x-5\cdot 25^x+5^x=5$

⑲ $\frac{8^x-2^x}{4^x-2^x}=33$

⑳ $2^x+2^{-x}=8{,}125$

㉑ $3^x-9^{1-x}=2$

㉒ $4^x+2^{x+\frac{1}{2}}=4$

Reflexión

Hemos visto que las funciones exponenciales permiten modelizar algunos aspectos de la realidad y, gracias a ello, resolver problemas prácticos interesantes. Por otro lado, hemos estudiado algunas ecuaciones exponenciales que se pueden resolver con técnicas simples y permiten calcular el valor de una incógnita situada en el exponente.

Pero, en cualquiera de los dos casos, observamos que nuestro estudio está incompleto, que necesitamos desarrollar algo más para poder resolver problemas muy obvios que se plantean en escenarios muy similares a aquellos en los que usamos funciones o ecuaciones exponenciales.

Ejemplo 1

Estudiamos que una población de bacterias se puede describir con esta función:

Variable	**Magnitud**	**Nombre**	**Unidad**
Independiente	Tiempo trascurrido del experimento	x	hora
Dependiente	Número de bacterias	y	(sin unidad)

Expresión analítica: $y = 10^8 \cdot 2^x$. Es decir: la población se duplica cada hora y la población inicial es 10^8 bacterias.

Con esta función ya sabemos calcular cuántas bacterias habrá cuando pase una cierta cantidad de tiempo, pero no sabemos contestar esta sencilla pregunta: ¿cuánto tiempo debe pasar para que la población sea 10^9 bacterias?

Veamos hasta dónde podemos llegar:

$y = 10^9 \Rightarrow 10^8 \cdot 2^x = 10^9 \Rightarrow 2^x = 10^9 : 10^8 \Rightarrow 2^x = 10$ y aquí a la máxima precisión a la que podemos llegar es afirmar que $x \in (3,4)$, ya que $2^3 = 8 < 10$ y $2^4 = 16 > 10$. Por tanto contestaríamos: «entre tres y cuatro horas», pero sin poder precisar más.

Ejemplo 2

Nos planteamos el siguiente enunciado: «resuelve con cuatro cifras significativas la ecuación exponencial $2^x = 0{,}1$».

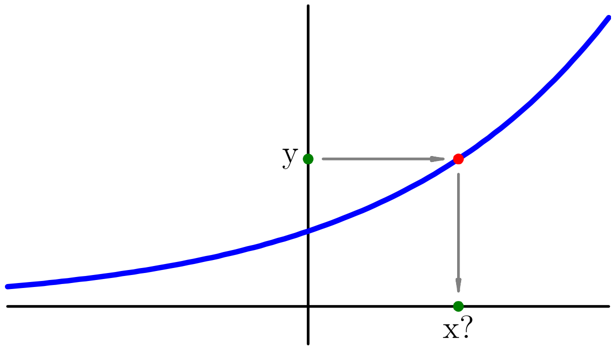
Con las herramientas que tenemos a nuestro alcance la única posibilidad es tantear:

$2^0=1>0{,}1$	$2^{-1}=0{,}5>0{,}1$	$2^{-2}=0{,}25>0{,}1$	$2^{-3}=0{,}125>0{,}1$	$2^{-4}=0{,}0625<0{,}1$

Así pues, solo podemos llegar a afirmar que $x \in (-4,-3)$, pero sin llegar a las cuatro cifras significativas que pide el enunciado.

Qué necesitamos

Para poder resolver los dos ejemplos mostrados, y muchos otros similares, necesitamos lo que en matemáticas llamamos **función inversa**. En este caso, la función inversa de la función exponencial. Dada la función exponencial $y = a^x$ (la vemos a la derecha) necesitamos definir y estudiar una función que nos permita calcular el valor de «x» conocido el valor de «y». Será la función **logarítmica**.



Definición de logaritmo

Sea «a» un número real positivo distinto de 1 y «r» un número real. Llamamos logaritmo en base «a» de «r» al número al que hay que elevar «a» para obtener «r». Se escribe «$\log_a r$».

Ejemplos

Ejemplo 1. El logaritmo en base 2 de 32 es 5 porque $2^5 = 32$. Es decir: $\log_2 32 = 5$.

Ejemplo 2. El logaritmo en base 3 de 81 es 4 porque $3^4 = 81$. Es decir: $\log_3 81 = 4$.

Ejemplo 3. El logaritmo en base 7 de $\frac{1}{7}$ es –1 porque $7^{-1} = \frac{1}{7}$.

Es decir: $\log_7 \frac{1}{7} = -1$.

Ejemplo 4. El logaritmo en base 5 de $\sqrt{5}$ es 0,5 porque $5^{0,5} = \sqrt{5}$.

Es decir: $\log_5 \sqrt{5} = 0{,}5$.

Definición de logaritmo usando símbolos

Sea $a \in (0,1) \cup (1,\rightarrow)$ y $r \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\boxed{\log_a r = x \Leftrightarrow a^x = r}$$

Se lee así: el logaritmo en base «a» de «r» es «x» cuando «a» elevado a «x» da «r».

Ejemplos

Ejemplo 5. Enunciado: calcula $\log_{0,2} 0{,}04$.

Resolución: llamamos $\log_{0,2} 0{,}2 = x$. Entonces, según la definición, $0{,}2^x = 0{,}04$.

Resolvemos la ecuación exponencial: $0{,}2^x = 0{,}04 \Rightarrow 0{,}2^x = 0{,}2^2 \Rightarrow x = 2$

Solución: $\log_{0,2} 0{,}04 = 2$

Ejemplo 6. Enunciado: calcula $\log_{31} 31$.

Resolución: llamamos $\log_{31} 31 = x$. Entonces, según la definición, $31^x = 31$.

Resolvemos la ecuación exponencial: $31^x = 31 \Rightarrow 31^x = 31^1 \Rightarrow x = 1$

Solución: $\log_{31} 31 = 1$

Ejemplo 7. Enunciado: calcula $\log_{29} 1$.

Resolución: llamamos $\log_{29} 1 = x$. Entonces, según la definición, $29^x = 1$.

Resolvemos la ecuación exponencial: $29^x = 1 \Rightarrow 29^x = 29^0 \Rightarrow x = 0$

Solución: $\log_{29} 1 = 0$

Ejemplo 8. Enunciado: calcula $\log_2 \frac{1}{\sqrt[5]{8}}$.

Resolución: llamamos $\log_2 \frac{1}{\sqrt[5]{8}} = x$. Entonces, según la definición, $2^x = \frac{1}{\sqrt[5]{8}}$.

Resolvemos la ecuación exponencial: $2^x = \frac{1}{\sqrt[5]{8}} \Rightarrow 2^x = 2^{-\frac{3}{5}} \Rightarrow x = -\frac{3}{5} \Rightarrow x = -0{,}6$

Solución: $\log_2 \frac{1}{\sqrt[5]{8}} = -0{,}6$

Enunciados

Calcula el valor de los siguientes logaritmos. Expresa todos los resultados del modo más sencillo posible (número entero o fracción irreducible).

① $\log_2 8$

② $\log_3 \frac{1}{9}$

③ $\log_5 5$

④ $\log_{13} 1$

⑤ $\log_2 \sqrt{2}$

⑥ $\log_7 \frac{1}{49}$

⑦ $\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$

⑧ $\log_5 \sqrt[3]{25}$

⑨ $\log_{11} 121$

⑩ $\log_{10} 1000$

⑪ $\log_{10} 0{,}1$

⑫ $\log_{10} \sqrt[5]{10}$

⑬ $\log_{0,5} 1$

⑭ $\log_{0,1} 10$

⑮ $\log_3 3^{22}$

⑯ $\log_7 7^{100}$

⑰ $\log_{13} \sqrt[7]{13^{41}}$

⑱ $\log_4 2$

⑲ $\log_4 0{,}25$

⑳ $\log_8 4$

㉑ $\log_4 8$

㉒ $\log_{11} 11^{-43}$

㉓ $\log_{0,2} 25$

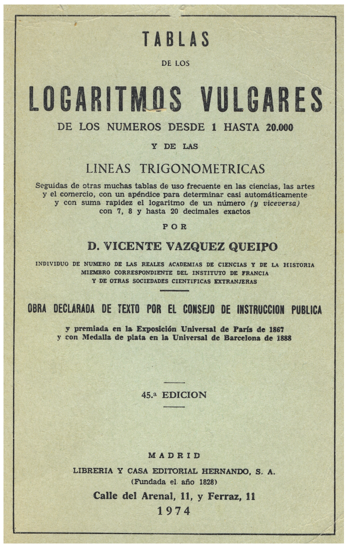
㉔ $\log_{\sqrt{2}} 2$

㉕ $\log_{\sqrt[3]{7}} 49$

Uso histórico de los logaritmos

- Los logaritmos se desarrollaron, en un principio, como una herramienta para facilitar los cálculos prácticos necesarios en física e ingeniería.
- La idea clave es que si se convierten los números de una operación en potencias de la misma base, entonces:
  - Los productos se convierten en sumas: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
  - Los cocientes se convierten en diferencias: $a^x : a^y = a^{x-y}$
  - Las potencias se convierten en productos sencillos: $(a^x)^n = a^{nx}$
  - Las raíces se convierten en cocientes sencillos: $\sqrt[n]{a^x} = a^{x:n}$

Ejemplo histórico



Aunque ahora mismo, rodeados de ordenadores (incluyendo teléfonos móviles con aplicaciones) y calculadoras científicas de bolsillo, sea difícil de imaginar, hubo un tiempo en que algunas operaciones se hacían como vamos a ver a continuación. Era imprescindible disponer de un libro llamado *Tablas de logaritmos*, como el que vemos a la derecha.

Vamos a calcular 365·75. Comenzamos por consultar en el libro cómo escribir los dos números como potencias de 10:

$365 = 10^{2,562293}$ y $75 = 10^{1,875061}$

Hacemos la operación sumando los exponentes:

$365 \cdot 75 = 10^{2,562293} \cdot 10^{1,875061} = 10^{2,562293+1,875061} = 10^{4,437354}$

Ahora buscamos en la tabla cuál es el resultado de esta potencia: $10^{4,437354} = 27\,375$.

Solución: $365 \cdot 75 = 27\,375$

Este ejemplo es particularmente sencillo, elegido para entender la idea básica, pero intenta valorar la importancia de otras posibilidades más avanzadas, como calcular una potencia quinta multiplicando por 5 o raíces cuadradas dividiendo entre 2. En su momento, supuso un gran avance. Se usó durante más de 300 años.

Origen de los logaritmos

- Este método de cálculo fue propuesto por el matemático escocés John Napier (1550-1617) en 1614, en un libro titulado (en latín) *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos). Napier utilizaba el número *e* como base de los logaritmos.
- El matemático inglés Henry Briggs (1561-1630) propuso utilizar el número 10 como base de los logaritmos, ya que eso hacía más fácil el uso de las tablas.

Importancia de los cálculos preestablecidos

Los libros de tablas de logaritmos contienen una gran cantidad de información precalculada. En muchos programas de ordenador también se precalculan tablas.

Uso moderno de los logaritmos

La aparición paulatina de mejores métodos de cálculo no relegó al olvido a los logaritmos, ya que estos encontraron un uso mucho más general como herramienta para modelar y medir algunos comportamientos de la naturaleza, como veremos cuando tratemos la función logarítmica.

Logaritmos más utilizados

Aunque se puede utilizar cualquier número real positivo distinto de 1 como base de logaritmos, hay dos números que se utilizan principalmente, el número *e* y el número 10.

- ✱ Cuando se utiliza el número *e*, el logaritmo se llama logaritmo neperiano o logaritmo natural.
- ✱ Cuando se utiliza el número 10, el logaritmo se llama logaritmo decimal o logaritmo de Briggs.

Logaritmo neperiano

Se llama así en honor al matemático escocés John Napier (1550-1617). También se llama logaritmo natural porque algunas propiedades matemáticas de los logaritmos se enuncian de modo más sencillo usando este; por ejemplo, las derivadas que veremos en el nivel 5. Es el logaritmo más usado en matemática pura.

Los logaritmos neperianos tienen su propio símbolo; es decir, en vez de escribir «$\log_e$», se puede escribir de un modo más sencillo. Se puede usar el símbolo «Ln» o el símbolo «ln». Por tanto:

$$\boxed{\log_e r = \operatorname{Ln} r = \ln r}$$

En las calculadoras científicas se dispone de la tecla `ln` o bien de la tecla `Ln`, según el diseño. No la confundas con `In`, ya que en algunos tipos de letra la ele minúscula se confunde fácilmente con la i mayúscula.

Ejemplo 1. Calcula con seis cifras significativas $\ln 13$.

Calculadora: `ln` `1` `3` `=` ⇰ 2.564949357 . Solución: $\ln 13 = 2{,}56495$.

Logaritmo decimal

También se denomina logaritmo de Briggs en honor del matemático inglés Henry Briggs (1561-1630). Sus propiedades hacen sencillo su uso para realizar algunas operaciones, por lo que es el logaritmo más utilizado en matemática aplicada.

En las calculadoras científicas se dispone de la tecla `log`.

Ejemplo 2. Calcula con seis cifras significativas $\log_{10} 352$.

Calculadora: `log` `3` `5` `2` `=` ⇰ 2.546542663 . Solución: $\log_{10} 352 = 2{,}54654$.

Logaritmo binario

Se llama así al logaritmo en base 2, que se utiliza frecuentemente en informática.

Otros logaritmos en la calculadora

Algunos modelos de calculadora (pocos) incluyen una tecla general para calcular logaritmos en cualquier base. La tecla podría estar rotulada como `log▫□` o similar. Aunque esta tecla te puede resultar cómoda, realmente no es imprescindible, porque veremos un método para calcular con logaritmos en cualquier base usando los logaritmos neperianos o los logaritmos decimales, que siempre tienen tecla.

Sobreentender la base de los logaritmos

Cuando en un texto es necesario utilizar a menudo una determinada base de logaritmos, es costumbre eliminar la base y escribir simplemente «log». Esto puede resultar confuso, porque en unos textos serán logaritmos neperianos, en otros decimales y en otros binarios, hay que estar atentos. En este curso escribiremos los logaritmos decimales como «log», en vez de «$\log_{10}$».

Significado de los símbolos

- ✱ El símbolo «ln» significa logaritmo neperiano.
- ✱ El símbolo «log» significa logaritmo decimal.

Enunciados

Calcula con seis cifras significativas el valor de las siguientes operaciones.

① $\ln 83500$

② $\log 0{,}25$

③ $\ln 1{,}5$

④ $\log (1{,}5\cdot 10^{15})$

⑤ $\ln 0{,}7$

⑥ $\log (8{,}3\cdot 10^{-47})$

⑦ $\ln 2$

⑧ $\log 2$

⑨ $\ln 3$

⑩ $\log 0{,}9$

Enunciados

Calcula con cuatro cifras significativas el valor de las siguientes operaciones.

⑪ $\ln(\log 7)$

⑫ $\log(\ln 7)$

⑬ $\log(\log 7)$

⑭ $\ln(\ln 7)$

⑮ $\log 5 + \ln 5$

Enunciados

Calcula el valor exacto de las siguientes operaciones.

⑯ $\ln 35 - (\ln 5 + \ln 7)$

⑰ $\log 2 + \log 13 - \log 26$

⑱ $2\cdot \ln 7 - \ln 49$

⑲ $\log 25 - 2\cdot \log 5$

⑳ $3\cdot \ln 2 - \ln 8$

Propiedades elementales de los logartimos

Los logaritmos tienen varias propiedades elementales, que se demuestran fácilmente usando la propia definición de logaritmo.

Solo tienen logaritmo los números reales positivos

* Si un número real es positivo, tiene logaritmo en cualquier base válida.
* Si un número real es negativo o nulo, no tiene logaritmo en ninguna base.

Demostramos por reducción al absurdo la segunda afirmación:

Supongamos que «a» es la base de logaritmos y «r» es un número real negativo o nulo. Si existiera el $\log_a r$, debería ser un número real que podemos llamar «x».

Entonces $\log_a r = x \Rightarrow a^x = r$ y hemos llegado a la contradicción de que $a^x \leqslant 0$, cuando sabemos que siempre debe ocurrir $a^x > 0$ porque es una propiedad de la función exponencial.

* **Ejemplo 1**. Si intentamos calcular $\log(-1)$ con la calculadora, obtenemos un error: `log` `(-)` `1` `=` ⇰ Error
* **Ejemplo 2**. Si intentamos calcular $\ln 0$ con la calculadora, obtenemos un error: `ln` `0` `=` ⇰ Error

El logaritmo de 1 es 0

Si «a» es la base de logaritmos, siempre se verifica $\log_a 1 = 0$

Demostración: $\log_a 1 = x \Rightarrow a^x = 1 \Rightarrow a^x = a^0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \log_a 1 = 0$

* **Ejemplo 3**. Calculamos $\ln 1$ con la calculadora: `ln` `1` `=` ⇰ 0

El logaritmo de la base es 1

Si «a» es la base de logaritmos, siempre se verifica $\log_a a = 1$

Demostración: $\log_a a = x \Rightarrow a^x = a \Rightarrow a^x = a^1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \log_a a = 1$

* **Ejemplo 4**. Calculamos $\log 10$ con la calculadora: `log` `1` `0` `=` ⇰ 1

El logaritmo en base «a» de a^x es «x»

Expresado con símbolos: $\log_a a^x = x$

Demostración. Como queremos calcular el $\log_a a^x$, usando la definición de logaritmo nos estamos preguntando: ¿a qué número hay que elevar «a» para obtener «a^x»? Visto así, la respuesta es evidente y obvia: a «x».

* **Ejemplo 5**. $\log_7 7^{45} = 45$

«a» elevado al logaritmo en base «a» de «x» es «x»

Expresado con símbolos: $a^{\log_a x} = x$

Demostración. Como el $\log_a x$, es el número al que hay que elevar «a» para que el resultado sea «x», está claro que cuando elevamos «a» ese número, debemos obtener «x», esa es la propia definición.

* **Ejemplo 6**. $7^{\log_7 45} = 45$

Resumen

$\log_a(-1)$ no existe	$\log_a 0$ no existe	$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log_a a^x = x$	$a^{\log_a x} = x$

Logaritmos de algunas operaciones

Las propiedades de los logaritmos que históricamente han sido más importantes son aquellas que permiten simplificar expresiones con productos, cocientes, potencias y raíces. Se siguen usando hoy en día porque son muy efectivas.

Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Expresado simbólicamente: $\log_a(rs) = \log_a r + \log_a s$

Demostración

Usamos la definición de logaritmo: elevamos «a» a «$\log_a r+\log_a s$» y comprobamos que obtenemos «rs»: $a^{\log_a r+\log_a s} = a^{\log_a r}\cdot a^{\log_a s} = rs$.

Ejemplo 1: $\log_5(13\cdot 57) = \log_5 13 + \log_5 57$

Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

Expresado simbólicamente: $\log_a(r:s) = \log_a r - \log_a s$

Demostración

Usamos la definición de logaritmo: elevamos «a» a «$\log_a r-\log_a s$» y comprobamos que obtenemos «r:s»: $a^{\log_a r-\log_a s} = a^{\log_a r}:a^{\log_a s} = r:s$.

Ejemplo 2: $\log_7(43:13) = \log_7 43 - \log_7 13$

Logaritmo de una potencia

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

Expresado simbólicamente: $\log_a(r^n) = n\cdot\log_a r$

Demostración

Usamos la definición de logaritmo: elevamos «a» a «$n\cdot\log_a r$» y comprobamos que obtenemos «r^n»: $a^{n\cdot\log_a r} = (a^{\log_a r})^n = r^n$.

Ejemplo 3: $\log_3(17^5) = 5\cdot\log_3 17$

Logaritmo de una raíz

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividida entre el índice.

Expresado simbólicamente: $\log_a \sqrt[n]{r} = \dfrac{\log_a r}{n}$

Demostración

Escribimos la raíz como una potencia y aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia: $\log_a \sqrt[n]{r} = \log_a r^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\cdot\log_a r = \dfrac{\log_a r}{n}$

Ejemplo 4: $\log_2 \sqrt[3]{11} = \dfrac{\log_2 11}{3}$

Ejemplo 5

Enunciado: simplifica al máximo la expresión $\log_2(p^3\cdot q^5)$

Resolución: $\log_2(p^3\cdot q^5) = \log_2 p^3 + \log_2 q^5 = 3\cdot\log_2 p + 5\cdot\log_2 q$

Explicación: primero aplicamos la fórmula del producto y luego la de la potencia.

Simplificación de expresiones con un logaritmo

Podemos usar una o más propiedades de los logaritmos para escribir de un modo más sencillo muchas expresiones. En este contexto, «más sencillo» significa «con operaciones más simples»; por ejemplo, una suma es más sencilla que un producto. Este proceso se llama a veces «desarrollar» el logaritmo o la expresión.

Es fundamental reconocer en qué orden hay que aplicar las propiedades: hay que hacerlo en el orden inverso al de cálculo.

Enunciados

Escribe del modo más sencillo posible las siguientes expresiones:

① $\log_a(p^2:q)$ ② $\log_a(pq)^3$ ③ $\log_a \dfrac{\sqrt{p}}{q^4}$ ④ $\log_a \dfrac{p}{qr}$ ⑤ $\log_a \sqrt[3]{p^4 \cdot q^5}$

Resoluciones

① Para calcular $p^2:q$ la primera operación es el cuadrado y la segunda es la división; por tanto, para desarrollar el logaritmo primero hay que aplicar la fórmula de la división y luego la de la potencia.

$$\log_a(p^2:q) = \log_a p^2 - \log_a q = 2\cdot\log_a p - \log_a q$$

② Para calcular $(pq)^3$ la primera operación es el producto y la segunda es el cubo; por tanto, para desarrollar el logaritmo primero hay que aplicar la fórmula de la potencia y luego la del producto.

$$\log_a(pq)^3 = 3\cdot\log_a(pq) = 3\cdot(\log_a p + \log_a q) = 3\cdot\log_a p + 3\cdot\log_a q$$

Podemos desarrollar el producto o dejar el paréntesis, según convenga.

③ Para calcular $\dfrac{\sqrt{p}}{q^4}$ las primeras operaciones son la raíz cuadrada y la potencia, que se pueden calcular a la vez, y la última es el cociente; por tanto, para desarrollar el logaritmo primero hay que aplicar la fórmula del cociente y luego las otras dos, que podemos realizar en el mismo paso.

$$\log_a \frac{\sqrt{p}}{q^4} = \log_a \sqrt{p} - \log_a q^4 = \frac{\log_a p}{2} - 4\cdot\log_a q$$

④ Para calcular $\dfrac{p}{qr}$ la primera operación es el producto que hay en el denominador y la segunda es el cociente; por tanto, para desarrollar el logaritmo primero hay que aplicar la fórmula del cociente y luego la del producto.

$$\log_a \frac{p}{qr} = \log_a p - \log_a(qr) = \log_a p - (\log_a q + \log_a r) = \log_a p - \log_a q - \log_a r$$

⑤ Para calcular $\sqrt[3]{p^4 \cdot q^5}$ las primeras operaciones son las potencias, luego el producto y por fin la raíz; así que para desarrollar el logaritmo primero hay que aplicar la fórmula de la raíz, luego la del producto y por último las potencias.

$$\log_a \sqrt[3]{p^4 \cdot q^5} = \frac{\log_a(p^4 \cdot q^5)}{3} = \frac{\log_a p^4 + \log_a q^5}{3} = \frac{4\cdot\log_a p + 5\cdot\log_a q}{3}$$

Nota: cuando tengas práctica, podrás saltarle pasos.

Enunciados

Escribe del modo más sencillo posible las siguientes expresiones. En tu solución no debe aparecer ningún paréntesis.

① $\log_a(p:q^3)$

② $\log_a(pq)^5$

③ $\log_a \dfrac{p^3}{\sqrt{q}}$

④ $\log_a \dfrac{pq}{rs}$

⑤ $\log_a \sqrt[5]{p^7\cdot q^8\cdot r}$

⑥ $\log_a(p^2\cdot(qr)^3)^5$

⑦ $\log_a \sqrt[7]{\dfrac{p^3}{q^4\cdot r^5}}$

⑧ $\log_a\left(\sqrt{p}\cdot\sqrt[3]{q}\right)$

⑨ $\log_a(p^5\cdot q:r^3)$

⑩ $\log_a \dfrac{p}{\sqrt{qr}}$

⑪ $\log_a \sqrt[5]{z^7}$

⑫ $\log_a\left(\sqrt[8]{p^3}:q\right)$

⑬ $\log_a\left(\sqrt[3]{p}:\sqrt{q}\right)$

⑭ $\log_a \dfrac{(pq)^2}{\sqrt[3]{rs}}$

⑮ $\log_a \sqrt{\sqrt{\sqrt{p}}}$

⑯ $\log_a \sqrt[3]{p^7\sqrt{q}}$

⑰ $\log_a \dfrac{\sqrt{p}\cdot\sqrt{q}}{\sqrt[3]{r}\cdot\sqrt[5]{s}}$

⑱ $\log_a(p^3\cdot q^4:r)$

⑲ $\log_a \sqrt{\dfrac{\sqrt{p}}{q^3\cdot r}}$

⑳ $\log_a\left(\dfrac{p}{q^2}\right)^5$

Ejercicios para practicar las propiedades de los logaritmos

Es importante manejar bien las distintas propiedades de los logaritmos. Para ello, es habitual plantear en la enseñanza secundaria algunos ejercicios específicos. Piensa en ellos como un buen entrenamiento.

Enunciados

Sabiendo que $\log_a p = 1{,}2$ y $\log_a q = -0{,}9$, calcula el resultado de las siguientes expresiones. Da el resultado final de modo exacto usando números decimales.

① $\log_a(a^3 \cdot p^2 : q)$

② $\log_a \dfrac{1}{\sqrt[3]{p \cdot q}}$

③ $\log_a \dfrac{\sqrt{a \cdot p^3}}{q}$

④ $\log_a(a^2 \cdot p^3 \cdot q^5)^7$

⑤ $\log_a \dfrac{\sqrt[6]{p} \cdot \sqrt[3]{q}}{a}$

⑥ $\log_a \dfrac{1}{p^2 \cdot q}$

Resoluciones

① Desarrollamos la expresión y sustituimos los valores dados:

$\log_a(a^3 \cdot p^2 : q) = \log_a a^3 + \log_a p^2 - \log_a q = 3 + 2 \cdot \log_a p - (-0{,}9) =$

$= 3 + 2 \cdot 1{,}2 + 0{,}9 = 6{,}3$. Solución: 6,3.

② Desarrollamos la expresión y sustituimos los valores dados:

$$\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{p \cdot q}} = \log_a 1 - \log_a \sqrt[3]{p \cdot q} = 0 - \frac{\log_a(p \cdot q)}{3} = -\frac{\log_a p + \log_a q}{3} =$$

$$= -\frac{1{,}2 + (-0{,}9)}{3} = -0{,}1.$$ Solución: –0,1.

③ Desarrollamos la expresión y sustituimos los valores dados:

$$\log_a \frac{\sqrt{a \cdot p^3}}{q} = \log_a \sqrt{a \cdot p^3} - \log_a q = \frac{\log_a(ap^3)}{2} - (-0{,}9) = \frac{\log_a a + \log_a p^3}{2} + 0{,}9 =$$

$$= \frac{1 + 3 \cdot \log_a p}{2} + 0{,}9 = \frac{1 + 3 \cdot 1{,}2}{2} + 0{,}9 = 3{,}2.$$ Solución: 3,2.

④ Desarrollamos la expresión y sustituimos los valores dados:

$\log_a(a^2 \cdot p^3 \cdot q^5)^7 = 7 \cdot \log_a(a^2 \cdot p^3 \cdot q^5) = 7(\log_a a^2 + \log_a p^3 + \log_a q^5) =$

$= 7(2 + 3 \cdot \log_a p + 5 \cdot \log_a q) = 7(2 + 3 \cdot 1{,}2 + 5(-0{,}9)) = 7{,}7$. Solución: 7,7.

⑤ Desarrollamos la expresión y sustituimos los valores dados:

$$\log_a \frac{\sqrt[6]{p} \cdot \sqrt[3]{q}}{a} = \log_a \left(\sqrt[6]{p} \cdot \sqrt[3]{q}\right) - \log_a a = \log_a \sqrt[6]{p} + \log_a \sqrt[3]{q} - 1 =$$

$$= \frac{\log_a p}{6} + \frac{\log_a q}{3} - 1 = \frac{1{,}2}{6} + \frac{-0{,}9}{3} - 1 = -1.$$ Solución: –1,1.

⑥ $\log_a \dfrac{1}{p^2 \cdot q} = \log_a 1 - 2 \cdot \log_a p - \log_a q = 0 - 2 \cdot 1{,}2 - (-0{,}9) = -1{,}5$. Solución: –1,5.

Enunciados

Sabiendo que $\log_a p = 3{,}6$ y $\log_a q = -0{,}35$, calcula el resultado de las siguientes expresiones. Da el resultado final de modo exacto usando números decimales.

① $\log_a(a^5 \cdot p^3 : q)$

② $\log_a \dfrac{1}{\sqrt[5]{p \cdot q}}$

③ $\log_a \dfrac{\sqrt{a \cdot p^4}}{q}$

④ $\log_a(p^2 \cdot a \cdot q^4)^6$

⑤ $\log_a \dfrac{\sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[7]{q}}{a^2}$

⑥ $\log_a \dfrac{1}{p \cdot q^2}$

Enunciados

Sabiendo que $\log_a r = 2{,}5$ y $\log_a s = 1{,}4$, calcula el resultado de las siguientes expresiones. Da el resultado final de modo exacto usando números decimales.

⑦ $\log_a \sqrt{r^3 \cdot a \cdot s^5}$

⑧ $\log_a \dfrac{1}{\sqrt[5]{r} \cdot \sqrt[7]{s}}$

⑨ $\log_a \dfrac{\sqrt{a^3}}{r \cdot s^3}$

⑩ $\log_a(r \cdot s^5)^7 : a$

⑪ $\log_a \dfrac{\sqrt{r} \cdot \sqrt[7]{s^3}}{a^{-2}}$

⑫ $\log_a \sqrt{\dfrac{1}{r \cdot s}}$

Enunciados

Sabiendo que $\log_a t = -1{,}2$ y $\log_a u = 4{,}5$, calcula el resultado de las siguientes expresiones. Da el resultado final de modo exacto usando números decimales.

⑬ $\log_a \dfrac{t^2 \cdot u}{\sqrt{a}}$

⑭ $\log_a \dfrac{\sqrt{t} \cdot \sqrt[3]{u}}{a}$

⑮ $\log_a \dfrac{1}{(t \cdot u)^2}$

Uso conjunto de diferentes tecnologías

Por un lado, tenemos el uso clásico de los logaritmos para realizar cálculos más rápidamente; por otro lado, tenemos la herramienta moderna de la calculadora científica. Vamos a explorar cómo unir ambas tecnologías para realizar cálculos usando lo mejor de los dos mundos.

Hay dos casos en los que la calculadora científica no puede dar la solución correcta por falta de capacidad:

- ✱ El resultado es mayor que el máximo número alcanzable por la calculadora o menor que el mínimo número alcanzable; en el primer caso el resultado es positivo y en el segundo caso es negativo. La calculadora puede responder con un mensaje de error (por ejemplo: «Math ERROR») o llenando de nueves la pantalla, dependiendo del diseño.
- ✱ El resultado es tan próximo a cero que la calculadora no puede distinguirlo de cero, por lo que escribe «0» en pantalla.

En cualquiera de los dos casos, sabemos que el resultado que da la calculadora es incorrecto. Pero, ¿es posible encontrar la manera de averiguar el resultado correcto? La respuesta es afirmativa, pero hay que unir las dos tecnologías que hemos mencionado.

Enunciados

Calcula con seis cifras significativas el resultado de las siguientes operaciones:

① 43^{75} ② 53^{-91}

Resoluciones

① Comenzamos intentando calcular el logaritmo decimal de 43^{75} usando las propiedades: $\log(43^{75}) = 75{\cdot}\log 43$.

Este número lo podemos calcular con la calculadora:

$75{\cdot}\log 43 = 122{,}5101342$. Calculadora: `7` `5` `×` `log` `4` `3` `=`

Sabemos, por la definición de logaritmo, que el logaritmo decimal de 43^{75} es el número al que hay que elevar 10 para obtener 43^{75}. Por tanto, elevaremos 10 al logaritmo que hemos calculado, y el resultado será 43^{75}. Esta operación la hacemos separándola en dos partes:

$43^{75} = 10^{122{,}5101342} = 10^{0{,}5101342+122} = 10^{0{,}5101342} \cdot 10^{122} = 3{,}23694{\cdot}10^{122}$

Calculadora: `10^x` `(` `Ans` `–` `1` `2` `2` `)` `=` ⇨ 3,236936416

Solución: $43^{75} = 3{,}23694{\cdot}10^{122}$

② Usamos el método de la resolución anterior, con un paso más:

$\log(53^{-91}) = -91{\cdot}\log 53 = -156{,}9091041$. Calculadora: `(-)` `9` `1` `×` `log` `5` `3` `=`

$53^{-91} = 10^{-156{,}9091041} = 10^{-0{,}9091041-156} = 10^{-0{,}9091041} \cdot 10^{-156} = 0{,}123281{\cdot}10^{-156}$

Calculadora: `10^x` `(` `Ans` `+` `1` `5` `6` `)` `=` ⇨ 0,1232809119

Convertimos a notación científica: $0{,}123281{\cdot}10^{-156} = 1{,}23281{\cdot}10^{-157}$

Solución: $53^{-91} = 1{,}23281{\cdot}10^{-157}$

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes operaciones. Da todas las soluciones en notación científica con cinco cifras significativas.

① 17^{83}

② 29^{-72}

③ 31^{104}

④ 19^{-123}

⑤ 45^{92}

⑥ 53^{-79}

⑦ 409^{41}

⑧ 339^{-67}

⑨ 2517^{42}

⑩ 3209^{-53}

⑪ $59^{84} \cdot 71^{92}$

⑫ $94^{-51} \cdot 88^{-70}$

⑬ $221^{47} \cdot 394^{41}$

⑭ $274^{-84} \cdot 413^{-91}$

⑮ $\dfrac{47^{83}}{81^{-92}}$

⑯ $\dfrac{37^{-121}}{44^{87}}$

⑰ $\dfrac{59^{92}}{73^{-82}}$

⑱ $\dfrac{83^{-54}}{48^{81}}$

⑲ $\sqrt{57^{257}}$

⑳ $\sqrt[3]{148^{-329}}$

㉑ $\sqrt[3]{215^{409}}$

㉒ $\sqrt{572^{-109}}$

Cambio de base de logaritmos

Es posible calcular logaritmos en una base conociendo algunos logaritmos en otra base diferente. Supongamos que «a» y «b» son dos bases válidas de logaritmos y «r» es un número real positivo. Entonces, se verifica

$$\boxed{\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}}$$

Demostración

Llamamos $\log_a r = x$. Entonces, $a^x = r$.

Igualamos los logaritmos en base «b» de los dos miembros de esta igualdad, aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia y despejamos:

$$a^x = r \Rightarrow \log_b(a^x) = \log_b r \Rightarrow x \cdot \log_b a = \log_b r \Rightarrow x = \frac{\log_b r}{\log_b a} \Rightarrow \log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

Ejemplo 1

Usando los logaritmos en base 5 podemos calcular fácilmente $\log_{25} 125$, siempre que sepamos que $125 = 5^3$ y $25 = 5^2$:

$$\log_{25} 125 = \frac{\log_5 125}{\log_5 25} = \frac{3}{2}$$

Uso con calculadora

Si nuestra calculadora no dispone de tecla general para calcular logarimos en cualquier base, podemos utilizar tanto los logaritmos decimales como los neperianos para calcular logaritmos en cualquier base.

Ejemplo 2a

Enunciado: usando logaritmos decimales, calcula con seis cifras significativas el valor de $\log_2 1734$.

Resolución

$$\log_2 1734 = \frac{\log 1734}{\log 2} = 10{,}7599$$

Calculadora: `log` `1` `7` `3` `4` `÷` `log` `2` `=` ⇨ 10.75988818

Solución: $\log_2 1734 = 10{,}7599$

Ejemplo 2b

Enunciado: usando logaritmos neperianos, calcula con seis cifras significativas el valor de $\log_2 1734$.

Resolución

$$\log_2 1734 = \frac{\ln 1734}{\ln 2} = 10{,}7599$$

Calculadora: `ln` `1` `7` `3` `4` `÷` `ln` `2` `=` ⇨ 10.75988818

Solución: $\log_2 1734 = 10{,}7599$

Ejemplo 3

$$\log_3 3486784401 = \frac{\log 3486784401}{\log 3} = 20$$

Enunciados

① Usando los logaritmos en base 3, calcula $\log_{27}81$ y da el resultado como fracción irreducible.

② Usando los logaritmos en base 2, calcula $\log_{16}32$ y da el resultado como número decimal.

③ Usando los logaritmos en base 7, calcula $\log_{49}\sqrt{7}$ y da el resultado como número decimal.

④ Usando los logaritmos en base 5, calcula $\log_{25}\sqrt[3]{5}$ y da el resultado como fracción irreducible.

⑤ Usando los logaritmos en base 3, calcula $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes operaciones. Da todas las soluciones con cinco cifras significativas.

⑥ $\log_7 100$

⑦ $\log_{13} 4$

⑧ $\log_{11} 99$

⑨ $\log_{0,22} 8$

⑩ $\log_{0,75} 1,5$

⑪ $\log_2 5792$

⑫ $\log_{1,1} 888$

⑬ $\log_{17}(1,4\cdot 10^{31})$

⑭ $\log_{34} 0,21$

⑮ $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{7}$

Enunciados

Calcula el resultado de las siguientes operaciones sabiendo que todos ellos son números enteros.

⑯ $\log_2 8\,589\,934\,592$

⑰ $\log_7 40\,353\,607$

⑱ $\log_5 0,0016$

⑲ $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{243}$

⑳ $\log_{1/7} 16\,807$

Resolución de ecuaciones exponenciales simples con logaritmos

Usando logaritmos, es muy sencillo resolver con precisión ecuaciones exponenciales sencillas. Te proponemos cuatro métodos equivalentes para hacerlo. Luego tú elegirás en cada caso el que desees usar.

Enunciado

Resuelve la siguiente ecuación y da su solución con cinco cifras significativas:

$3^x = 19$

Método 1

Aplicamos la definición de logaritmo y lo calculamos usando logaritmos decimales:

$3^x = 19 \Rightarrow x = \log_3 19 = \dfrac{\log 19}{\log 3} = 2{,}6801$

Calculadora: log 1 9 ÷ log 3 = ⇰ 2.680143859

Solución: $x = 2{,}6801$

Método 2

Aplicamos la definición de logaritmo y lo calculamos usando logaritmos neperianos:

$3^x = 19 \Rightarrow x = \log_3 19 = \dfrac{\ln 19}{\ln 3} = 2{,}6801$

Calculadora: ln 1 9 ÷ ln 3 = ⇰ 2.680143859

Solución: $x = 2{,}6801$

Método 3

Igualamos los logaritmos decimales de cada miembro, aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia y despejamos la incógnita:

$3^x = 19 \Rightarrow \log(3^x) = \log 19 \Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 19 \Rightarrow x = \dfrac{\log 19}{\log 3} = 2{,}6801$

Calculadora: log 1 9 ÷ log 3 = ⇰ 2.680143859

Solución: $x = 2{,}6801$

Método 4

Igualamos los logaritmos neperianos de cada miembro, aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia y despejamos la incógnita:

$3^x = 19 \Rightarrow \ln(3^x) = \ln 19 \Rightarrow x \cdot \ln 3 = \ln 19 \Rightarrow x = \dfrac{\ln 19}{\ln 3} = 2{,}6801$

Calculadora: ln 1 9 ÷ ln 3 = ⇰ 2.680143859

Solución: $x = 2{,}6801$

Tratamiento de exponentes más complicados

Los cuatro métodos expuestos permiten calcular la incógnita del exponente, pero este podría ser más complicado. Por ejemplo, resolvemos con cuatro cifras significativas la ecuación $5^{2x+1} = 4$.

$5^{2x+1} = 4 \Rightarrow 2x+1 = \log_5 4 \Rightarrow x = \dfrac{\log_5 4 - 1}{2} = -0{,}06932$. Solución: $x = -0{,}06932$

Calculadora: (ln 4 ÷ ln 5 – 1) ÷ 2 = ⇰ -0.069323441

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da todas las soluciones con cinco cifras significativas.

① $5^x = 17$

② $3^x = 914$

③ $11^x = 7$

④ $7^x = 0{,}26$

⑤ $2^x = 5{,}3$

⑥ $41^x = 13$

⑦ $0{,}31^x = 29$

⑧ $0{,}992^x = 1{,}13$

⑨ $81^x = 0{,}43$

⑩ $103^x = 99$

⑪ $17^{x-2} = 32$

⑫ $5^{x+1} = 8$

⑬ $5^{4x} = 7$

⑭ $0{,}21^{\frac{x}{7}} = 48$

⑮ $23^{5x+2} = 14$

⑯ $13^{7x-4} = 31$

⑰ $2^{\frac{x-1}{7}} = 115$

⑱ $52^{-x+\frac{1}{2}} = 17$

⑲ $13^{\frac{4x-3}{5}} = 15$

⑳ $31^{\frac{3x+4}{17}} = 9931$

㉑ $13^{\frac{4x-5}{7}} = 9$

㉒ $2^{\frac{-2x+7}{15}+8} = 13$

Resolución de ecuaciones exponenciales con logaritmos

En situaciones reales, casi siempre es necesario recurrir al uso de logaritmos para resolver las ecuaciones exponenciales. Además, esto abre un mayor abanico de técnicas de resolución. Vamos a explorar una técnica que ya usamos anteriormente y otra nueva, que requiere usar logaritmos desde los primeros pasos. Presta atención al uso correcto de la calculadora para obtener las soluciones con precisión.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones; da las soluciones con cinco cifras significativas:

① $9^x - 3^{x+1} = 27$

② $7^x = 5^{x+1}$

Resoluciones

① Tomamos como incógnita auxiliar $z = 3^x$.

$9^x - 3^{x+1} = 27 \Rightarrow (3^2)^x - 3^x \cdot 3^1 = 27 \Rightarrow (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x = 27 \Rightarrow z^2 - 3z = 27 \Rightarrow z^2 - 3z - 27 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{117}}{2} = \begin{cases} 6{,}91 \\ -3{,}91 \end{cases}$$

Calculadora: (3 + √ 1 1 7) ÷ 2 STO M = ⇨ 6.908326913

Guardamos la primera solución en una memoria para usarla más adelante con toda precisión, aunque en el papel la escribamos con menos precisión.

Calculadora: (3 – √ 1 1 7) ÷ 2 = ⇨ -3.908326913

Como la segunda solución es negativa, sabemos que no la usaremos más.

$z = 6{,}91 \Rightarrow 3^x = 6{,}91 \Rightarrow x = \log_3 6{,}91 = 1{,}7592$

Calculadora: log RCL M ÷ log 3 = ⇨ 1.759244369

$z = -3{,}91 \Rightarrow 3^x = -3{,}91 \rightarrow$ sin solución

Solución: $x = 1{,}7592$

② Te mostramos dos métodos distintos para resolver esta ecuación:

Método 1. Igualando los logaritmos decimales o neperianos de cada miembro, aplicando la propiedad de la potencia de un logaritmo y despejando la incógnita:

$7^x = 5^{x+1} \Rightarrow \ln(7^x) = \ln(5^{x+1}) \Rightarrow x \cdot \ln 7 = (x+1) \cdot \ln 5 \Rightarrow x \cdot \ln 7 = x \cdot \ln 5 + \ln 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \cdot \ln 7 - x \cdot \ln 5 = \ln 5 \Rightarrow x \cdot (\ln 7 - \ln 5) = \ln 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 7 - \ln 5} = 4{,}7833$$

Calculadora: ln 5 ÷ (ln 7 – ln 5) = ⇨ 4.783271062

Método 2. Como 5^x nunca es 0, podemos dividir los dos miembros entre 5^x:

$$7^x = 5^{x+1} \Rightarrow \frac{7^x}{5^x} = \frac{5^{x+1}}{5^x} \Rightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^x = 5 \Rightarrow x = \log_{\frac{7}{5}} 5 = \frac{\ln 5}{\ln \frac{7}{5}} = 4{,}7833$$

Calculadora: ln 5 ÷ ln (7 ÷ 5) = ⇨ 4.783271062

Solución: $x = 4{,}7833$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da todas las soluciones con cinco cifras significativas.

① $4^x - 2^{x+1} = 16$

② $3^x = 2^{x+1}$

③ $9^x + 3^{x+1} = 1$

④ $2^x = 3^{x-1}$

⑤ $49^x - 7^{x+1} = -10$

⑥ $25^x - 5^{x-1} = 2$

⑦ $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 14\,000$

⑧ $3^{2x} = 2^{x+2}$

⑨ $4^{x-1} - 2^{x+2} = -3$

⑩ $100^x - 10^{x+2} = -2500$

⑪ $e^{2x} - 5 \cdot e^x + 6 = 0$

⑫ $2^x \cdot 3^{x+1} = 17$

⑬ $17^x \cdot (4^x - 5) = 0$

⑭ $8^x - 2^{x+3} = 3$

⑮ $27^x - 2 \cdot 9^x + 3^x = 2$

⑯ $3 \cdot 25^x + 5^{x+1} = 22$

⑰ $6^{x+1} + 6^{1-x} = 15$

⑱ $7^x = 2^{x+2}$

⑲ $5^{x+1} = 13^{x-1}$

⑳ $\dfrac{3^{x+4}}{5^{x+1}} = 7^x$

㉑ $4^x - 5 \cdot 2^x = -5$

㉒ $\sqrt{7^{x+1}} = \sqrt[3]{11^x}$

㉓ $(2^{x-1} - 5)(3^{x+1} - 7) = 0$

㉔ $9^{-x} + 3^{-x} = 20$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da con cinco cifras significativas las soluciones que no sean números enteros.

① $2^x + 2^{x+3} = 5^x$

② $0{,}5^x + 2^x = 5$

③ $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{3}{2}$

④ $43 = 2^x \cdot 3^{x^2}$

⑤ $16^x + 20^x = 25^x$

⑥ $\dfrac{2^{9^x}}{8^{3^x}}=\dfrac{1}{4}$

⑦ $3^{5^x}=5^{3^x}$

⑧ $x^{\ln x} = 2$

⑨ $3^x-(\sqrt{3})^{x+4}+20=0$

⑩ $(\sqrt{2}+1)^x-(\sqrt{2}-1)^x=1{,}5$

⑪ $\dfrac{18^x+27^x}{12^x+18^x}=5$

Enunciados

⑫ Sabiendo que la única solución de la ecuación «$3^x - 2^x = 57$» es $x = 3{,}89066612$, resuelve la siguiente ecuación y da su solución con cuatro cifras significativas:

$$\frac{9^{\sqrt{x}}-4^{\sqrt{x}}}{3^{\sqrt{x}}+2^{\sqrt{x}}}=57$$

⑬ Sabiendo que la única solución de la ecuación «$3^x + 5^x = 20$» es $x = 1{,}6377365$, resuelve la siguiente ecuación y da todas sus soluciones con cinco cifras significativas:

$$\frac{2^{x^2}+6^{x^2}+10^{x^2}}{2^{x^2}}=21$$

⑭ Sabiendo que una de las soluciones de la ecuación «$30x^3-65x^2+42x-8=0$» es $x = 0{,}5$, resuelve la siguiente ecuación y da con cinco cifras significativas las soluciones que no sean números enteros:

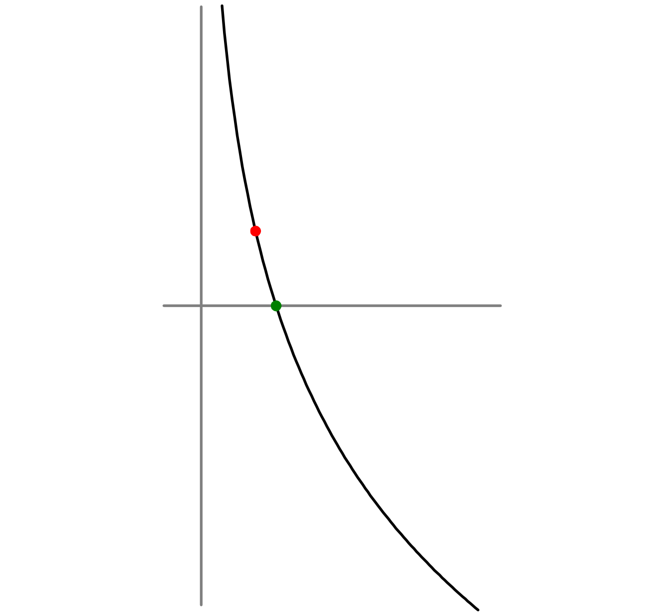
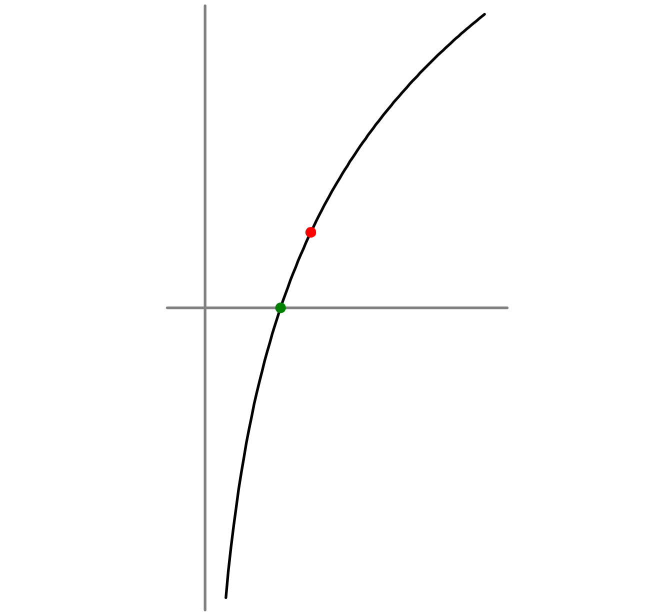
$$30\cdot 8^x - 67\cdot 4^x + 21\cdot 2^{x+1} = 8$$

La función logarítmica

- Si «a» es un número real positivo distinto de 1, definimos la función f: ℝ → ℝ como $f(x) = \log_a x$. El número «a» es la **base** de la **función logarítmica**.
- Para decir con símbolos que «a» es un número real positivo distinto de 1 escribimos $a \in (0,1) \cup (1,\rightarrow)$, lo que nos llevará a estudiar algunas propiedades distinguiendo los casos $a \in (0,1)$ y $a \in (1,\rightarrow)$.
- Solo se admiten para «a» valores positivos distintos de 1 porque son los admitidos en la definición de logaritmo, que a su vez provienen de que se usa la función exponencial para su definición.

Representación gráfica de la función logarítmica

El aspecto de la representación gráfica de la función logarítmica depende de si $a \in (0,1)$ o bien $a \in (1,\rightarrow)$. Aquí vemos un ejemplo de cada caso.

$a \in (0,1)$	$a \in (1,\rightarrow)$
	

Propiedades de la función logarítmica

1. El dominio de la función logarítmica es $(0,\rightarrow)$. Es decir, solo los números reales positivos tienen logaritmo.
2. La función logarítmica es continua.
3. La función logarítmica es inyectiva.
4. La imagen de la función logarítmica es ℝ.
5. $\log_a 1 = 0$. Esto está mostrado en el punto verde de las gráficas, el punto (1,0).
6. $\log_a a = 1$. Esto está mostrado en el punto rojo de las gráficas, el punto (a,1).
7. Si $a \in (0,1)$, la función es decreciente; si $a \in (1,\rightarrow)$, la función es creciente.

Dificultad de la representación gráfica de la función logarítmica

Consideramos la función logarítmica $y = \log_a x$.

✱ Cuando la base «a» es un número cercano a 1, es posible representar con bastante exactitud la función, pero en la práctica no se usan esas bases, por lo que no es de utilidad su representación.

✱ Para los valores de la base que sí se utilizan más, como $a = 10$, la representación exacta es imposible, porque la función toma valores muy diferentes, que no pueden ser representados simultáneamente. Por ejemplo, cuando intentamos representar gráficamente $y = \log x$ nos encontramos con que $\log 0{,}01 = -2$ y $\log 100 = 2$.

Consejo para una representación sin ordenador

Cuando necesites hacer la representación sobre el papel, dibuja primero los puntos (1,0) y (a,1) y luego únelos de la mejor manera que puedas de modo que se note que la función es creciente o decreciente, según corresponda, sin importarte que los valores de las ordenadas sean completamente exactos. Si deseas algo más de precisión, puedes calcular algún punto más, con calculadora o con valores simples.

Ejemplos

Ejemplo 1: representa gráficamente de modo aproximado la función $y = \log_2 x$.

Punto fundamental: $\log_2 1 = 0 \rightarrow$ punto (1,0) (en verde).

Punto fundamental: $\log_2 2 = 1 \rightarrow$ punto (2,1) (en rojo).

Punto auxiliar: $\log_2 4 = 2 \rightarrow$ punto (4,2) (en azul).

Punto auxiliar: $\log_2(½) = -1 \rightarrow$ punto (0,5;–1) (en naranja).

Más abajo vemos la representación.

Ejemplo 2: representa gráficamente de modo aproximado la función $y = \log_{½} x$.

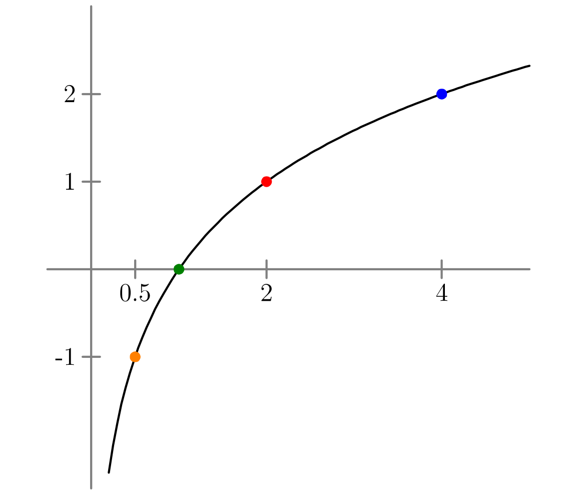
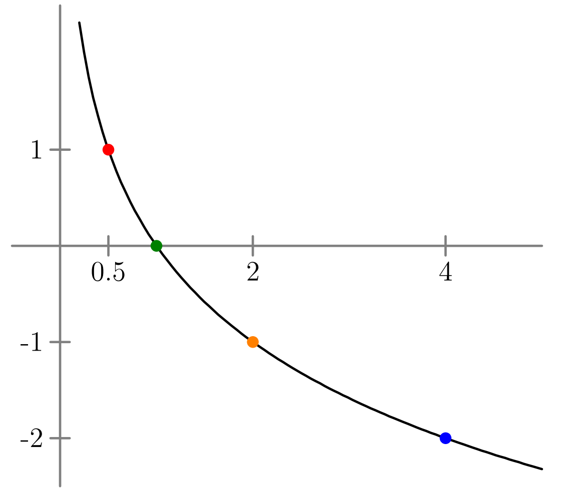
Punto fundamental: $\log_{½} 1 = 0 \rightarrow$ punto (1,0) (en verde).

Punto fundamental: $\log_{½}(½) = 1 \rightarrow$ punto (0,5;1) (en rojo).

Punto auxiliar: $\log_{½} 2 = -1 \rightarrow$ punto (2,–1) (en naranja).

Punto auxiliar: $\log_{½} 4 = -2 \rightarrow$ punto (4,–2) (en azul).

Más abajo vemos la representación.

Ejemplo 1: $y = \log_2 x$	Ejemplo 2: $y = \log_{½} x$
	

Funciones logarítmicas en la vida real

Es normal en la ciencia y en la técnica utilizar funciones logarítmicas para manejar con comodidad magnitudes que toman valores muy diferentes. Por tanto, verás la presencia de logaritmos en la definición de nuevas magnitudes, ya que su uso hace más natural el manejo de las magnitudes originales.

Ejemplo 1: el pH de una disolución

En química se estudia la concentración de iones de hidrógeno que presenta una disolución; su valor indica si la disolución tiene un carácter ácido (como el zumo de limón), alcalino (como una disolución de hidróxido de sodio) o neutro (como el agua pura). Los valores de la cantidad de iones de hidrógeno pueden variar desde 10^0 (extremadamente ácido) hasta 10^{-14} (extremadamente alcalino), pasando por 10^{-7} (neutro). Observa la gran variedad de valores posibles.

Por eso se define el pH de una disolución como **«el logaritmo decimal de la concentración de iones de hidrógeno, cambiado de signo»**; según esta definición, el pH puede valer desde 0 (extremadamente ácido) hasta 14 (extremadamente alcalino), pasando por 7 (neutro).

Ejemplo 2: la intensidad relativa de un sonido

La intensidad de un sonido se mide según la potencia que desarrolla en cada unidad de superficie. Por tanto, en el Sistema Internacional se mide en vatios entre metro cuadrado (W/m^2).

Los seres humanos somos capaces de detectar desde sonidos tan débiles como 10^{-12} W/m^2 (llamado umbral de audición) hasta tan intensos como 1 W/m^2 (que ya resulta doloroso y, por tanto, perjudicial) e incluso superiores. Observa otra vez el amplio margen de valores que hay que manejar.

Por eso se define la intensidad sonora relativa de un sonido como **«el logaritmo decimal del cociente entre esa intensidad sonora y el umbral de audición»**. Su unidad es el belio (símbolo B). Así pues, un sonido de 0 B es el mínimo que podemos detectar y otros ejemplos son: una conversación puede tener una intensidad de 4 B (es decir, 10 000 veces más intenso que el umbral) y un avión despegando 13 B (diez billones de veces más intenso que el umbral). Como habrás visto por ahí, se usa más la unidad llamada decibelio, que es la décima parte del belio.

Ejemplo 3: la magnitud aparente de una estrella

Es una medida del brillo de una estrella vista desde la Tierra, sea directamente o utilizando un telescopio. Como el brillo puede variar con una escala muy amplia, se utiliza un **logaritmo** para definir la magnitud aparente, tomando como base las primeras ideas de la antigua Grecia, según las cuales el aumento de una unidad de magnitud aparente representaba un brillo diez veces menor.

Ejemplo 4: la intensidad de un terremoto

Fue común durante muchos años medir la intensidad de un terremoto mediante la escala de Mercalli, que asigna subjetivamente números de 1 a 12 a los efectos de un terremoto que afectan a la actividad humana.

Sin embargo, fue sustituida por la escala de Richter y, posteriormente, por la escala sismológica de magnitud de momento, que se basan en medir objetivamente la cantidad de energía liberada por el terremoto. Para que los números de la escala se mantengan sencillos, se utilizan **logaritmos** en estas dos definiciones. Ritcher se inspiró en la definición de magnitud aparente de una estrella.

Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

Como la definición de logaritmo se basa en una potencia, está claro que la función logarítmica se basa en la función exponencial. Concretando:

Si «a» es un número real positivo distinto de 1, «x» es un número real positivo e «y» es un número real, la expresión «$y = \log_a x$» es equivalente a la expresión «$x = a^y$». Entre las funciones exponencial y logarítmica se intercambian las posiciones de la variable dependiente y la variable independiente.

Esto tiene un reflejo interesante en las gráficas de las funciones: si el punto (x,y) pertenece a la gráfica de una función, el punto (y,x) pertenece a la gráfica de la otra. Por lo tanto, las gráficas son simétricas respecto a la recta bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

Ejemplo

Vamos a comparar las gráficas de las funciones «$y = \log_2 x$» e «$y = 2^x$».

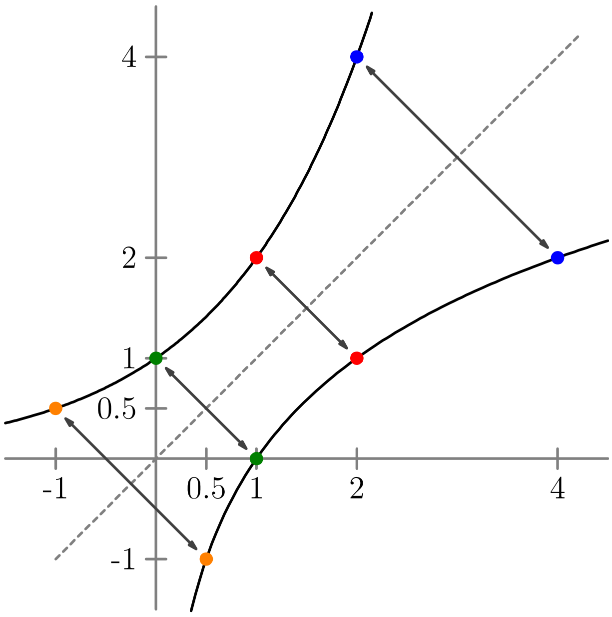
Calculamos cuatro puntos de la gráfica de «$y = \log_2 x$»:

$x = 1 \Rightarrow y = \log_2 0 = 0 \rightarrow$ punto (1,0)	$x = 2 \Rightarrow y = \log_2 2 = 1 \rightarrow$ punto (2,1)
$x = 4 \Rightarrow y = \log_2 4 = 2 \rightarrow$ punto (4,2)	$x = 0{,}5 \Rightarrow y = \log_2 0{,}5 = -1 \rightarrow$ punto (0,5;–1)

Calculamos cuatro puntos de la gráfica de «$y = 2^x$»:

$x = 0 \Rightarrow y = 2^0 = 1 \rightarrow$ punto (0,1)	$x = 1 \Rightarrow y = 2^1 = 2 \rightarrow$ punto (1,2)
$x = 2 \Rightarrow y = 2^2 = 4 \rightarrow$ punto (2,4)	$x = -1 \Rightarrow y = 2^{-1} = 0{,}5 \rightarrow$ punto (–1;0,5)

Representamos gráficamente las dos funciones usando el mismo color para los puntos que tienen intercambiadas las coordenadas. También mostramos con línea punteada la recta bisectriz del primer y tercer cuadrantes:



Funciones inversas

Como desarrollaremos con detalle en el nivel 5 de este curso, las funciones exponencial y logarítmica son una la inversa de la otra. Muchas de las propiedades que las relacionan son comunes a otras parejas de funciones una la inversa de la otra.

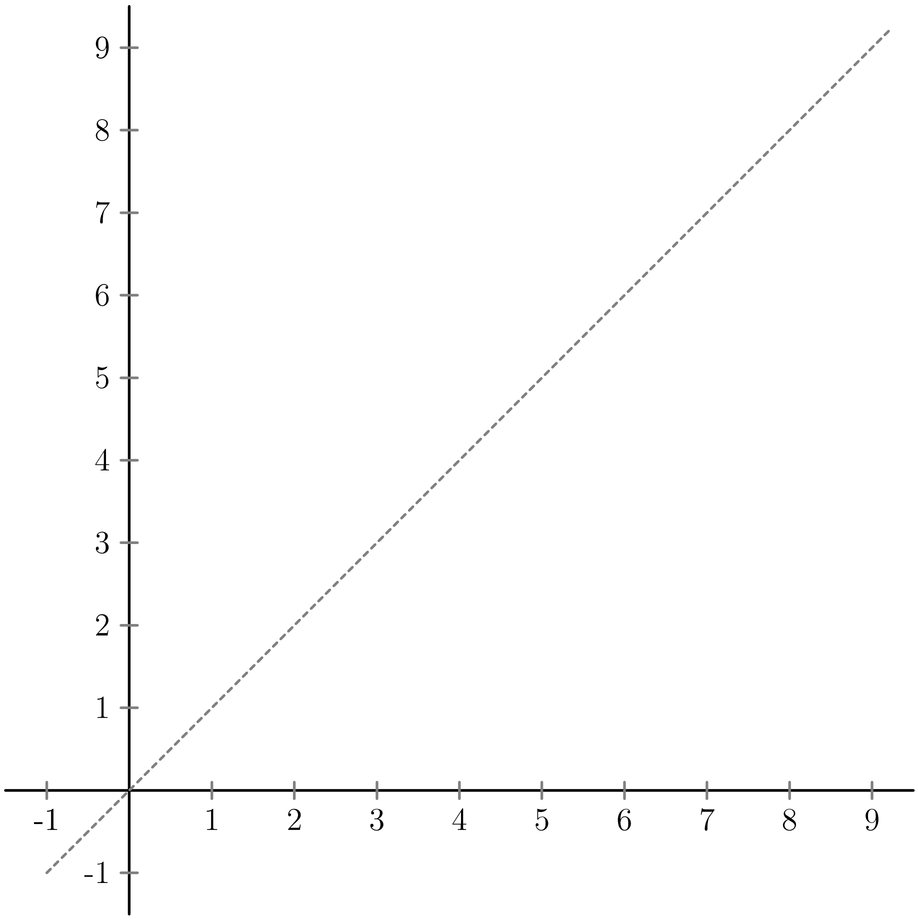
Enunciados

Consideramos las funciones «$y = \log_3 x$» e «$y = 3^x$». Se pide:

① Averigua cuatro puntos de la gráfica de cada función de modo que tengan las coordenadas cambiadas de orden. Todas las coordenadas deben pertenecer al intervalo $[-1,9]$. Si aparece algún número que no sea entero, escríbelo como fracción irreducible. Utiliza la tabla para escribir la solución.

$y = \log_3 x$	$y = 3^x$

② Utilizando los puntos calculados en el apartado anterior, representa gráficamente de modo aproximado las gráficas de las dos funciones utilizando el espacio disponible. Observa que los puntos que has calculado son simétricos respecto a la recta bisectriz del primer y tercer cuadrantes.



Aplicación de logaritmos en la función exponencial

El uso de logaritmos permite el cálculo preciso de valores de la variable independiente en una función exponencial conocido el valor correspondiente de la variable dependiente. Estamos aprovechando que las funciones exponencial y logarítmica son inversas una de la otra.

Enunciado

Un grupo de investigación biológica recibe el encargo de un gobierno de reintroducir una especie animal en una zona del país de la que se extinguió. El grupo consigue reunir un grupo viable de 400 ejemplares obtenidos en el extranjero y calculan que su población puede aumentar un 25 % cada dos años. Se pide:

a) Describe la función que relaciona el tiempo trascurrido con el número de ejemplares de la especie animal que viven en esa zona del país.

b) Calcula cuánto tiempo debe pasar para que la población de animales sea de 2000 ejemplares. Da el resultado en años redondeando a la unidad.

Resolución

a)

Variable	Magnitud	Nombre	Unidad
Independiente	Tiempo trascurrido	x	año
Dependiente	Número de animales	y	(sin unidad)

Para determinar la expresión analítica observamos que para aumentar una cantidad un 25 % hay que multiplicarla por 1,25. Así pues, necesitamos utilizar una función exponencial de base 1,5 en la que el exponente aumente una unidad cada 2 años. Como la función exponencial valdrá 1 para $x = 0$, debemos multiplicarla por el valor con el que comienza la actuación biológica. Por tanto:

Expresión analítica: $y = 400 \cdot 1{,}25^{\frac{x}{2}}$

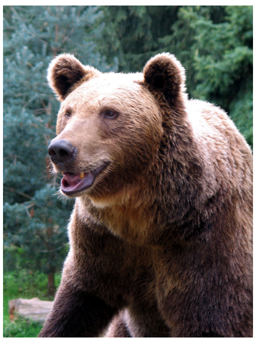
b) Tras «x» años, el número de animales será 2000: $2000 = 400 \cdot 1{,}25^{\frac{x}{2}}$

Resolvemos la ecuación exponencial:

$$2000 = 400 \cdot 1{,}25^{\frac{x}{2}} \Rightarrow 1{,}25^{\frac{x}{2}} = 500 \Rightarrow \frac{x}{2} = \log_{1,25} 500 \Rightarrow x = 2 \cdot \log_{1,25} 500 = 56$$

Calculadora: 2 × ln 5 0 0 ÷ ln 1 . 2 5 = ⇨ 55.70053951

Solución: 56 años

Lince ibérico	Oso pardo europeo	Bisonte americano
		

Enunciados

① Una población de bacterias se encuentra en óptimas condiciones de reproducción en cierto biotopo y se duplica cada hora. Si la población inicial es 10^8 bacterias, calcula cuánto tiempo ha de trascurrir para que la población sea 10^9 bacterias. Da el resultado en horas y minutos, redondeando al minuto.

② Un elemento radiactivo tiene una vida media de 350 años. Si hoy se dispone de 20 gramos de material, calcula cuánto tiempo debe trascurrir para que la masa sea 15 gramos. Da el resultado en años redondeando a la unidad.

③ Un fondo de inversiones ha calculado que es capaz de aumentar su capital un 10 % cada año. Si dispone de 2500 millones de euros, calcula cúanto tiempo deberán esperar los inversores para que el capital se trasforme en 4000 millones de euros, si siguiera aumentando al mismo ritmo. Da el resultado en años redondeando a la unidad.

④ Un objeto arqueológico contiene un elemento radiactivo que tiene una vida media de 2550 años. Se mide cuidadosamente la cantidad de elemento presente en él y se obtiene que hay 0,098 gramos. Calcula cuánto tiempo ha trascurrido desde que en el objeto había 0,415 gramos de elemento. Da el resultado en años redondeando a la decena.

⑤ Una especie animal aumenta el número de ejemplares un 23% anual. ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que la población se triplique? Da el resultado en años con dos cifras significativas.

⑥ Si una población de bacterias se triplica cada 40 minutos, ¿cuánto tiempo tarda en duplicarse? Da el resultado en minutos redondeando a la unidad.

⑦ En un país tropical hay una zona selvática que ocupa 25 000 kilómetros cuadrados. La actividad humana en la zona y su periferia hace que se pierda un 4 % de superficie de selva anualmente. Si la pérdida siguiera siempre al mismo ritmo, ¿en cuánto tiempo la zona quedaría reducida a 1 kilómetro cuadrado? Da el resultado en años redondeando a la unidad.

⑧ En biología se describen los vampiros como una subfamilia de murciélagos que se alimentan de sangre de mamíferos. Pero existen varias culturas que utilizan la palabra para designar a ciertos personajes humanos mitológicos (el más conocido es Drácula) que se alimentan de sangre de otras personas que no sean a su vez vampiros. Según esta descripción, vas a poder demostrar matemáticamente, asumiendo ciertas condiciones, que los vampiros no existen. Supongamos que un vampiro necesita alimentarse una vez al mes de la sangre de una persona que no sea aún vampiro. El problema es que una persona se convierte en vampiro cuando es mordida por uno. Tomando como dato que la población mundial es 8000 millones de personas y asumiendo que todos los vampiros consiguen alimentarse una vez al mes, calcula en cuántos meses (redondeando a la unidad) toda la población mundial sería vampira (y ya no podría alimentarse más), si partiéramos de la existencia de un solo vampiro.

Ecuación logarítmica

Llamamos ecuación logarítmica a una ecuación en la intervienen los logaritmos de las incógnitas o estas forman parte de la base de algún logarítmo.

Ejemplos

$\log_x 117649 = 6$	$\log x^2 - 2\cdot\log 5 = \log 2 + \log x$	$\log(8x^2) - \log 5 = 1 + \log(4x)$

Métodos de resolución

Hay dos métodos fundamentales de resolución:

✱ Dejar un solo logaritmo en un miembro, un número en el otro miembro y aplicar la definición de logaritmo; es decir, deducir:

$$\boxed{\log_a r = s \Rightarrow a^s = r}$$

✱ Dejar un solo logaritmo en cada miembro, que sean los dos de la misma base, y aplicar que la función logarítmica es inyectiva para deducir que las expresiones afectadas por los logaritmos deben ser las mismas; es decir, deducir:

$$\boxed{\log_a r = \log_a s \Rightarrow r = s}$$

A continuación, se resuelve la ecuación resultante, que ya no tendrá logarítmos. Pero es imprescindible comprobar, para cada solución de la ecuación resultante, si es aplicable como solución de la ecuación original, porque solo tienen logaritmo los números positivos y solo estos pueden ser base de un logaritmo. Es decir, si alguna solución de la ecuación resultante da lugar a una expresión que no existe, hay que desecharla. Puede ocurrir incluso que no sea válida ninguna.

Reunión de varios logaritmos en uno solo

En cualquiera de los dos métodos fundamentales suele ser necesario reunir en un solo logaritmo una expresión que tiene varios logaritmos. Esto se consigue aplicando las propiedades de los logaritmos, pero en el sentido inverso de como los hemos aplicado hasta ahora. Concretamente, lo haremos en este sentido:

① Una suma de logaritmos es igual al logaritmo de un producto:

$\log_a r + \log_a s = \log_a(rs)$. Ejemplo 1: $\log 2 + \log x = \log(2x)$

② Una diferencia de logaritmos es igual al logaritmo de un cociente:

$\log_a r - \log_a s = \log_a(r:s)$. Ejemplo 2: $\log x - \log 5 = \log(x:5)$

③ Un número por un logaritmo es igual al logaritmo de una potencia:

$n\cdot\log_a r = \log_a(r^n)$. Ejemplo 3: $3\cdot\log x = \log(x^3)$

④ Un logaritmo entre un número es igual al logaritmo de una raíz:

$\dfrac{\log_a r}{n} = \log_a \sqrt[n]{r}$. Ejemplo 4: $\dfrac{\log x}{4} = \log \sqrt[4]{x}$

⑤ Además, cualquier número se puede escribir como un logaritmo:

$r = \log_a a^r$. Ejemplo 5: $5 = \log_3 3^5$. Ejemplo 6: $2 = \log 100$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones:

① $\log_x 117649 = 6$

② $\log x^2 - 2\cdot\log 5 = \log 2 + \log x$

③ $\log(8x^2) - \log 5 = 1 + \log(4x)$

Resoluciones

① Aplicamos la definición de logaritmo y resolvemos la ecuación resultante:

$$\log_x 117649 = 6 \Rightarrow x^6 = 117649 \Rightarrow x = \pm\sqrt[6]{117649} \Rightarrow x = \begin{cases} -7 \\ 7 \end{cases}$$

La solución $x = -7$ no es válida porque no existen logaritmos en base -7.

Solución: $x = 7$

② Convertimos en un solo logaritmo cada miembro, igualamos las expresiones afectadas por el logaritmo y resolvemos la ecuación resultante:

$$\log x^2 - 2\cdot\log 5 = \log 2 + \log x \Rightarrow \log x^2 - \log 5^2 = \log(2x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\frac{x^2}{25} = \log(2x) \Rightarrow \frac{x^2}{25} = 2x \Rightarrow x^2 = 50x \Rightarrow x^2 - 50x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 50 \end{cases}$$

La solución $x = 0$ no es válida porque al sustituir «x» por 0 en la ecuación aparece dos veces $\log 0$, que no existe.

Solución: $x = 50$

③ Podríamos convertir 1 en el $\log 10$ y resolver la ecuación igual que el ejercicio (2), pero elegimos otro método, para estudiarlo también.

Dejamos el 1 en el segundo miembro, enviamos todos los logaritmos al primer miembro, los unimos en uno solo, aplicamos la definición de logaritmo y resolvemos la ecuación resultante. Observa lo que ocurre con los dos logartimos que llevan signo negativo: ambas cantidades acaban en el denominador.

$$\log(8x^2) - \log 5 = 1 + \log(4x) \Rightarrow \log(8x^2) - \log 5 - \log(4x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(8x^2) - (\log 5 + \log(4x)) = 1 \Rightarrow \log(8x^2) - \log(5\cdot 4x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\frac{8x^2}{5\cdot 4x} = 1 \Rightarrow \log\frac{2x^2}{5x} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2}{5x} = 10 \Rightarrow 2x^2 = 10\cdot 5x \Rightarrow x^2 = 5\cdot 5x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 25x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 25 \end{cases}$$

La solución $x = 0$ no es válida porque al sustituir «x» por 0 en la ecuación aparece dos veces $\log 0$, que no existe.

Solución: $x = 25$

Observación

Cuando tengas que unir varios logartimos en uno solo, puedes hacerlo en menos pasos de los mostrados aquí, si realmente sabes hacerlo bien.

Significado de los símbolos

✱ El símbolo «ln» significa logaritmo neperiano.

✱ El símbolo «log» significa logaritmo decimal.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Escribe como número decimal exacto las soluciones que no sean números enteros.

① $\log_x 390625 = 8$

② $\log x^2 - 2\cdot\log 3 = \log 5 + \log x$

③ $\log(9x^2) - \log 6 = 2 + \log(3x)$

④ $\log 3 + \log(x+4) = \log(x+8)$

⑤ a) $\log x^2 = 1 + \log 4$ b) $2\cdot\log x = 1 + \log 4$

⑥ $\log x + \log(x+5) = \log(2x+10)$

⑦ $\log(x+3) - \log 3 = \log(x-1) - \log 5$

⑧ $\log_{x+3}(9x+13) = 2$

⑨ $\log x + \log(x-2) = \log(x+10)$

⑩ $\log(3x) = \log(4x+1) + \log(1-x)$

⑪ $2\cdot\log x - \log(x-16) = 2$

⑫ $2\cdot\log x = \log(6-5x)$

⑬ $\log_{x-1}(7x-1) = 3$

⑭ $\log(x-1) - \log(x-4) - \log(x-3) = \log 2$

⑮ $\log(4x) + 4\cdot\log 5 = \log x^2 + 1$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da todas las soluciones con cinco cifras significativas.

⑯ $\log(3x+1) - \log(5x-1) = \log 9$

⑰ $\log(x^2+1) - \log(x+3) = \log 7$

⑱ $\ln(x+1) = 2$

⑲ $\log(3x-4) = 1{,}2$

⑳ $\log_{x+5}(x+3) = -1$

Significado de los símbolos

- ✱ El símbolo «ln» significa logaritmo neperiano.
- ✱ El símbolo «log» significa logaritmo decimal.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Escribe como número decimal exacto las soluciones que no sean números enteros.

① $\log(\log x) = 2$

② $(\log_2 x)^2 - 4\cdot\log_2 x = -3$

③ $\log(x^2) = (\log x)^2$

④ $\log x = \dfrac{2-\log x}{\log x}$

⑤ $\log_2(x-5) = \log_4(x-3)$

⑥ $\log_3(x-2) = \log_{27}(4x+27)$

⑦ $\log_x 8 + \log_{x^2} 16 = 5$

⑧ $\log\sqrt{2x} = \sqrt{\log(2x)}$

⑨ $5^{\log x} = 50 - x^{\log 5}$

⑩ $\log(x^4-1) - \log(x^2-1) = \log 1{,}01$

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da todas las soluciones con cinco cifras significativas.

⑪ $\log(x^2) + \log(x^3) + \log(x^4) = 34$

⑫ $\ln(x+1) - \ln(x-1) = 2$

⑬ $25^{\log_5(x-3)} - 3^{\log_3(5x)} + 10^{\log 6} = 0$

⑭ $2^{\log x} + 4^{\log x} = 5$

⑮ $\log_x 2 + \log_2 x = 3$

⑯ $\log_3 x + \log_4 x = 1$

Enunciado

Resuelve las siguiente ecuación. Escribe como número decimal con cinco cifras significativas las soluciones que no sean números enteros.

⑰ $\log x = \sqrt{\log x^{\frac{30}{9}} - 1}$

Funciones definidas a trozos

Llamamos de esta manera a aquellas funciones que requieren más de una expresión analítica en su definición. Hay que aplicar una u otra de las distintas expresiones analíticas según el valor que tome la variable independiente.

Ejemplo

Se define la función real de variable real f: ℝ → ℝ del siguiente modo:

(Las dos definiciones que escribimos a continuación son completamente equivalentes; podrás ver en distintos textos cualquiera de los dos modos de expresión.)

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x\in(-3,-1) \\ -x+1 & \text{si} \quad x\in(-1,2] \\ x-1 & \text{si} \quad x\in(2,\rightarrow) \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad -3<x<-1 \\ -x+1 & \text{si} \quad -1<x\leqslant 2 \\ x-1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

En esta función definida a trozos se utilizan tres expresiones analíticas diferentes, que vamos a distinguir con subíndices para facilitar la explicación:

$f_1(x) = x+2$	$f_2(x) = -x+1$	$f_3(x) = x-1$

Para averiguar el valor de f(x) primero hay que fijarse bien en cuál de las tres condiciones verifica «x». Puede no verificar ninguna, y en ese caso ese valor de «x» no pertenecerá al dominio de la función y f(x) no existirá. Pero no puede verificar más de una, porque en ese caso «f» no sería una función.

Vamos a detallar cómo se calculan algunos valores de f(x). Para trabajar con estas funciones has de prestar especial atención a los valores de «x» en los que cambia la expresión analítica que hay que aplicar, que podemos llamar «valores fontera». En este ejemplo, son los valores $x = -1$ y $x = 2$.

$x = -4$. Como -4 no cumple ninguna de las condiciones, $-4\notin D(f)$.

$x = -3$. Como -3 no cumple ninguna de las condiciones, $-3\notin D(f)$.

$x = -2{,}99$. Como $-2{,}99\in(-3,-1)$, $f(-2{,}99) = f_1(-2{,}99) = -2{,}99+2 = -0{,}99$

$x = -2$. Como $-2\in(-3,-1)$, $f(-2) = f_1(-2) = -2+2 = 0$

$x = -1{,}01$. Como $-1{,}01\in(-3,-1)$, $f(-1{,}01) = f_1(-2) = -1{,}01+2 = 0{,}99$

$x = -1$. Como -1 no cumple ninguna de las condiciones, $-1\notin D(f)$.

$x = -0{,}99$. Como $-0{,}99\in(-1,2]$, $f(-0{,}99) = f_2(-0{,}99) = -(-0{,}99)+1= 1{,}99$

$x = 0$. Como $0\in(-1,2]$, $f(0) = f_2(0) = -0+1= 1$

$x = 1$. Como $1\in(-1,2]$, $f(1) = f_2(1) = -1+1= 0$

$x = 2$. Como $2\in(-1,2]$, $f(2) = f_2(2) = -2+1= -1$

$x = 2{,}01$. Como $2{,}01\in(2,\rightarrow)$, $f(2{,}01) = f_3(2{,}01) = 2{,}01-1 = 1{,}01$

$x = 3$. Como $3\in(2,\rightarrow)$, $f(3) = f_3(3) = 3-1 = 2$

$x = 4$. Como $4\in(2,\rightarrow)$, $f(4) = f_3(4) = 4-1 = 3$

Podemos resumir nuestros cálculos en esta tabla de valores (el símbolo ∄ significa «no existe»):

x	–4	–3	–2,99	–2	–1,01	–1	–0,99	0	1	2	2,01	3	4
f(x)	∄	∄	–0,99	0	0,99	∄	1,99	1	0	–1	1,01	2	3

Enunciados

Dadas las siguientes funciones reales de variable real, rellena la tabla de valores solicitada. Usa el símbolo ∄ para indicar que un valor no está definido.

① $g(x)=\begin{cases} -2x & \text{si } x\in(\leftarrow,-2) \\ 2x & \text{si } x\in(-2,2) \\ x-3 & \text{si } x\in(2,\rightarrow) \end{cases}$

x	−4	−3	−2,01	−2	−1,99	−1	0	1	1,99	2	2,01	3	4
g(x)													

② $h(x)=\begin{cases} -x+5 & \text{si } x\in(\leftarrow,-2] \\ x & \text{si } x\in(-2,3) \\ 2x+1 & \text{si } x\in[3,\rightarrow) \end{cases}$

x	−4	−3	−2,01	−2	−1,99	−1	0	1	2	2,99	3	3,01	4
h(x)													

③ $m(x)=\begin{cases} |x| & \text{si } x\in(\leftarrow,-3) \\ x+1 & \text{si } x\in(-3,1) \\ |x-4| & \text{si } x\in(1,\rightarrow) \end{cases}$

x	−4	−3,01	−3	−2,99	−2	−1	0	0,99	1	1,01	2	3	4
m(x)													

④ $p(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x\in[-3,-1) \\ 3x+1 & \text{si } x\in[-1,1] \\ 2x+2 & \text{si } x\in(1,3) \end{cases}$

x	−4	−3	−2	−1,01	−1	−0,99	0	0,99	1	1,01	2	3	4
p(x)													

⑤ $r(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\in[-4,-2) \\ x^2 & \text{si } x\in[-2,2] \\ 1-x & \text{si } x\in(2,4) \end{cases}$

x	−4	−3	−2,01	−2	−1,9	−1	0	1	1,9	2	2,01	3	4
r(x)													

⑥ $s(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in(\leftarrow,0) \\ x+0,1 & \text{si } x\in(0,\rightarrow)\cap\mathbb{N} \\ x-0,1 & \text{si } x\in(0,\rightarrow)-\mathbb{N} \end{cases}$

x	−2	−1	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
s(x)													

Representación gráfica de funciones definidas a trozos

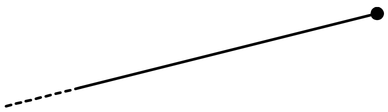
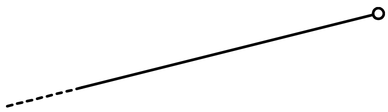
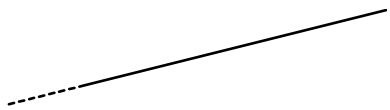
Cuando hacemos la representación gráfica de una función definida a trozos se nos presenta un problema nuevo: cómo expresar gráficamente lo que ocurre en los puntos en los que se cambia de expresión analítica. Hasta ahora, cuando hacemos la representación gráfica de una función, en los puntos en que dejamos de dibujar la línea entendemos que la esta continúa indefinidamente. Ahora no podemos hacer eso, porque la línea acaba. Pero hay que indicar de alguna manera si el «último» punto de la línea pertenece a la gráfica o no.

Convenio

El convenio más aceptado (no el único) para resolver el problema es este:

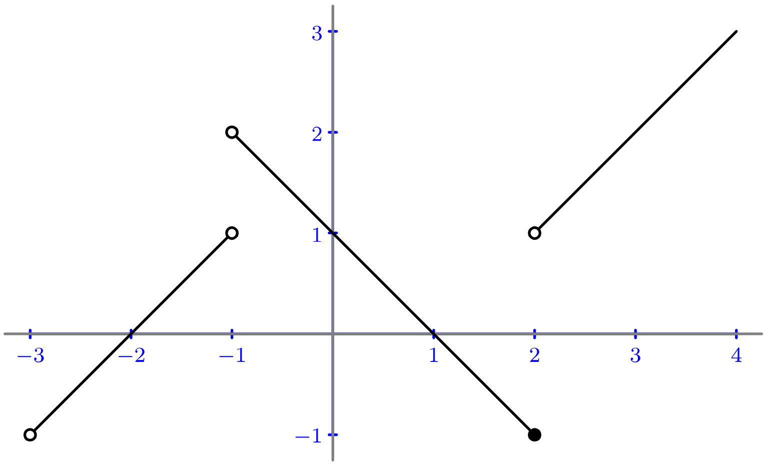
- ✱ Si el final de la línea se marca más grueso y relleno, el último punto pertenece a la gráfica.
- ✱ Si el final de la línea se marca más grueso y hueco, el último punto no pertenece a la gráfica.
- ✱ Como siempre, si el final de la línea no se marca de ninguna manera se entiende que la línea continúa.

Lo ilustramos aquí; fíjate en el extremo derecho de las líneas dibujadas (en el extremo izquierdo no mostramos nada).

El punto derecho pertenece a la gráfica	El punto derecho no pertenece a la gráfica	La gráfica continúa por la derecha
		

Ejemplo

La representación gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x\in(-3,-1) \\ -x+1 & \text{si} \quad x\in(-1,2] \\ x-1 & \text{si} \quad x\in(2,\rightarrow) \end{cases}$ es:



- ✱ Los puntos (–3,–1), (–1,1), (–1,2) y (2,1) no pertenecen a la gráfica.
- ✱ El punto (2,–1) sí pertenece a la gráfica.
- ✱ La gráfica acaba por la izquierda en el punto (–3,–1), excluido.
- ✱ La gráfica continúa indefinidamente por la derecha.

Enunciado

Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} \frac{x+3}{2} & \text{si } x\in(\leftarrow,-1] \\ -2x+1 & \text{si } x\in(-1,1) \\ x-2 & \text{si } x\in(1,3) \\ -x+4 & \text{si } x\in[3,5] \end{cases}$

Explicación

Para calcular valores de la función es necesario utilizar cuatro expresiones analíticas, a las que asignamos diferentes subíndices para facilitar las explicaciones:

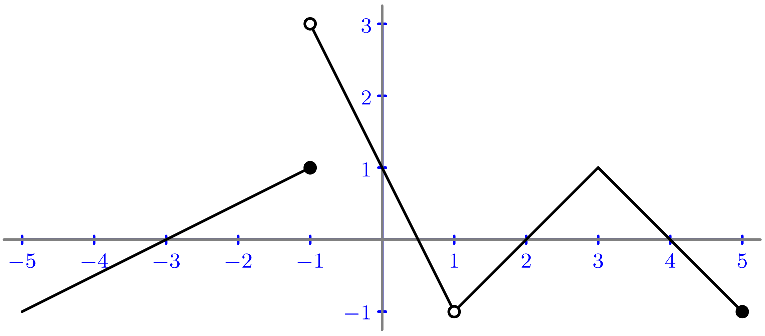
$f_1(x) = \frac{x+3}{2}$	$f_2(x) = -2x+1$	$f_3(x) = x-2$	$f_4(x) = -x+4$

Los valores de «x» más importantes para realizar la gráfica son los puntos de cambio de expresión analítica: –1, 1 y 3. En ellos calcularemos los valores de las dos expresiones analíticas que tienen a los lados, aunque la función no esté definida en alguno de ellos, ya que así sabremos hasta dónde llega la línea de la gráfica de la función. Otros puntos importantes son algunos a la izquierda del primer intervalo de definición (usaremos el valor –5) y el último punto del último intervalo, 5.

* $f(-5) = f_1(-5) = -1 \rightarrow$ el punto $(-5,-1) \in Gr(f)$, aunque no hay que señalarlo de ninguna manera especial, porque la gráfica continúa indefinidamente hacia la izquierda.
* $f_1(-1) = 1$ y $f_2(-1) = 3 \rightarrow$ marcaremos el punto (–1,1) grueso relleno y marcaremos grueso hueco el punto (–1,3). Observa que $f(-1) = 1$, así que $(-1,1) \in Gr(f)$, pero $(-1,3) \notin Gr(f)$.
* $f_2(1) = -1$ y $f_3(-1) = -1 \rightarrow$ Las gráficas de f_2 y f_3 coinciden en el punto (–1,–1), pero este no pertenece a la gráfica, así que lo marcaremos grueso hueco.
* $f_3(3) = 1$ y $f_4(3) = 1 \rightarrow$ Las gráficas de f_3 y f_4 coinciden en el punto (3,1), que pertenece a la gráfica, así que no se marca de ninguna manera, puesto que no hay ninguna duda; simplemente, será un punto «con un pico», por así decir.
* $f(5) = f_4(5) = -1 \rightarrow$ el punto $(5,-1) \in Gr(f)$ y lo marcaremos grueso relleno para indicar que la gráfica ya no continúa hacia la derecha.

Como las cuatro expresiones analíticas son funciones lineales, sus gráficas son líneas rectas, así que podemos terminar la gráfica sencillamente uniendo los extremos de cada uno de los cuatro segmentos. Si alguna expresión analítica fuera más complicada, habría que estudiarla en particular, como haremos más adelante.

Solución

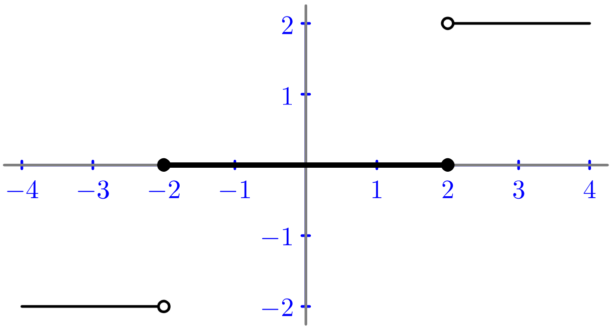


Variedad de posibilidades

Cuando se representan gráficamente funciones definidas a trozos pueden aparecer gran cantidad de posibilidades, con algunos casos muy interesantes desde el punto de vista de la matemática pura. En esta página te mostramos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

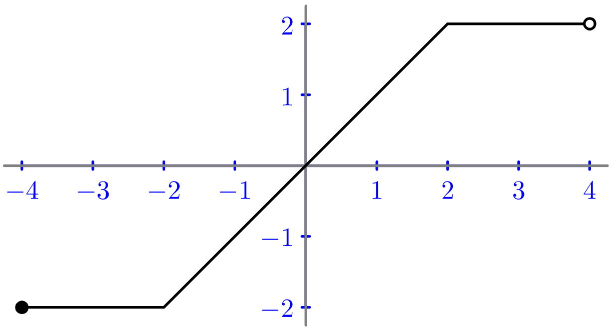
$$p(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad x\in(\leftarrow,-2) \\ 0 & \text{si} \quad x\in[-2,2] \\ 2 & \text{si} \quad x\in(2,\rightarrow) \end{cases}$$



Son muy comunes las funciones definidas a trozos que tienen como expresión analítica una función constante en cada tramo. Observa la dificultad de representar la función cuando su gráfica coincide con el eje de abscisas.

Ejemplo 2

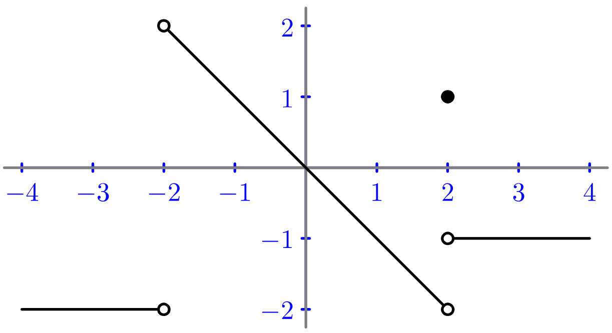
$$q(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad x\in[-4,-2] \\ x & \text{si} \quad x\in(-2,2) \\ 2 & \text{si} \quad x\in[2,4) \end{cases}$$



Solo es necesario indicar con símbolos especiales los puntos extremos de la gráfica, porque el dominio de esta función es el intervalo $[-4,4)$ y en los puntos de cambio de expresión analítica ambas toman el mismo valor. Consideramos que esta función es continua.

Ejemplo 3

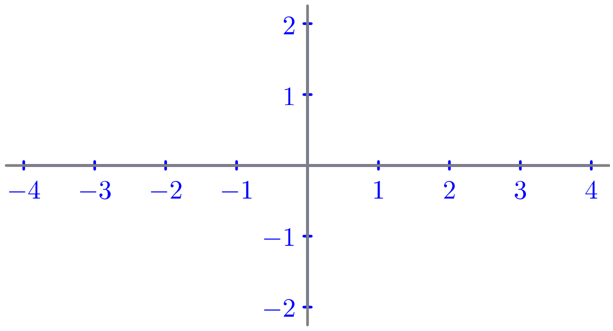
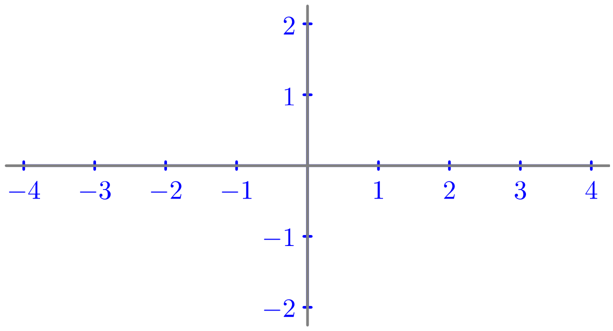
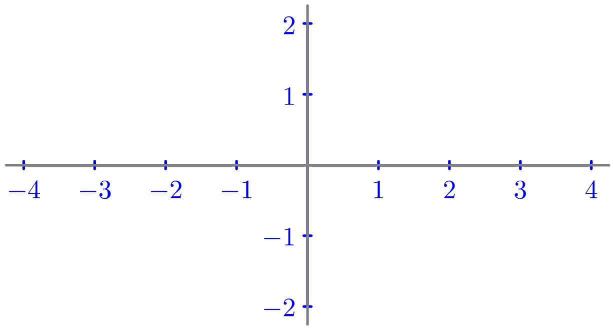
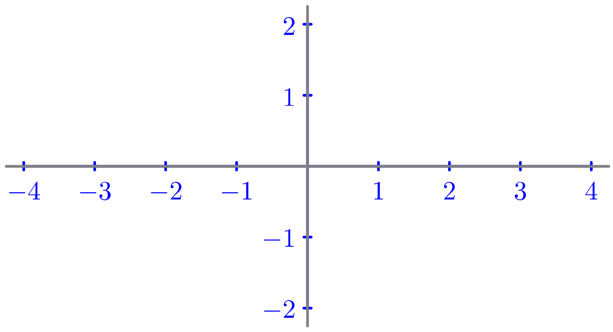
$$r(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad x\in(\leftarrow,-2) \\ -x & \text{si} \quad x\in(-2,2) \\ 1 & \text{si} \quad x=2 \\ -1 & \text{si} \quad x\in(2,\rightarrow) \end{cases}$$



Observa que para $x=-2$ la función no está definida, luego no hay ningún punto de la gráfica con abscisa -2, pero para $x=2$ sí que está definida y el punto $(2,1)$ pertenece a la gráfica, pero ya ves que es algo peculiar, porque no está conectado con el resto de la gráfica. Se llama un **punto aislado**.

Enunciados

Representa gráficamente las siguientes funciones utilizando el espacio asignado.

①	$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\in[-4,-2) \\ x & \text{si} \quad x\in(-2,1) \\ 1 & \text{si} \quad x\in[1,2) \\ -1 & \text{si} \quad x\in[2,\rightarrow) \end{cases}$	
②	$g(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x\in(\leftarrow,-1) \\ -x & \text{si} \quad x\in[-1,1) \\ -1 & \text{si} \quad x\in[1,3) \\ x-2 & \text{si} \quad x\in[3,\rightarrow) \end{cases}$	
③	$h(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in(-4,-1) \\ -2 & \text{si} \quad x=-1 \\ -2x & \text{si} \quad x\in(-1,1) \\ -1 & \text{si} \quad x=1 \\ -2 & \text{si} \quad x\in(1,4] \end{cases}$	
④	$m(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x\in(\leftarrow,-3) \\ -x-1 & \text{si} \quad x\in(-3,-1] \\ 0 & \text{si} \quad x\in(-1,1) \\ x-1 & \text{si} \quad x\in[1,3) \\ 5-x & \text{si} \quad x\in(3,\rightarrow) \end{cases}$	

Funciones definidas a trozos en la vida real

Se usan funciones definidas a trozos en la vida real cuando se desea dar tratamientos diferentes a un dato según sea su valor, pero de un modo muy sencillo de entender, casi siempre usando funciones constantes en cada intervalo de definición.

Ejemplo 1: precio según la cantidad

En muchas situaciones el precio de un servicio depende de la cantidad de material que se desea usar o comprar; la idea del que ofrece el servicio es ofrecer descuentos cuando se usan cantidades mayores del servicio; por ejemplo: dejar un vehículo en un aparcamiento, solicitar copias impresas de un documento o fabricar placas de circuitos impresos.

Por concretar, vemos un ejemplo de las tarifas por página que aplica una empresa por enviar a domicilio copias impresas de un documento enviado por internet, según sea el número de páginas solicitado:

De 1 a 99: 0,15 €	De 100 a 399: 0,10 €	400 o más: 0,075 €

Definimos matemáticamente esta función racional de variable natural:

f: ℕ → ℚ, definida como $f(x)=\begin{cases} 0{,}15 & \text{si} \quad x\in[1{,}99] \\ 0{,}1 & \text{si} \quad x\in[100{,}399] \\ 0{,}075 & \text{si} \quad x\in[400{,}\rightarrow) \end{cases}$

Resulta muy curioso observar cómo, con muchas de estas tarifas, puede resultar más barato en la factura final pedir más cantidad que menos. Con los datos anteriores, pedir 350 páginas cuesta $350\cdot 0{,}1=35$ € pero pedir 400 páginas cuesta $400\cdot 0{,}075=30$ €.

Ejemplo 2: impuestos según las ganancias

Casi todos los países democráticos aplican una política de recaudación de impuestos orientada a que quienes ganan más paguen más, pero no solo considerando la cantidad final que pagan, algo que sería obvio, sino que paguen un porcentaje mayor de sus ganancias. Esto se conoce como progresividad en los impuestos.

Por poner un ejemplo concreto, mostramos (de modo simplificado) la tabla correspondiente al porcentaje de cada euro que había que pagar en España en 2025 por el impuesto sobre la renta de las personas físicas (IRPF):

De 0 € a 12 450 €: 19 %	De 20 200 € a 35 200 €: 30 %	De 60 000 € a 300 000 €: 45 %
De 12 450 € a 20 200 €: 24 %	De 35 200 € a 60 000 €: 37 %	Más de 300 000 €: 47 %

Vemos claramente que es una función definida a trozos, aunque resulta un poco confusa de aplicar para saber cuánto se paga realmente, porque en casi todos los casos hace falta aplicar varios tramos.

Por ejemplo, si una persona ganara 34 200 euros en el año 2025, pagaría:

Por los primeros 12 450 €: 12 450 · 19 % = 2365,5 €
Por los siguientes 7750 € (obtenidos de 20 200 – 12 450): 7750 · 24 % = 1860 €
Por los últimos 14 000 € (obtenidos de 34 200 – 20 200): 14 000 · 30 % = 4200 €

Lo que suma un total de 2365,5+1860+4200 = 8425,5 €

Funciones definidas a trozos importantes en matemáticas

Algunas funciones comunes en matemáticas se definen correctamente como funciones definidas a trozos.

La función valor absoluto

Te mostramos varias maneras, completamente equivalentes, de definir la función real de variable real valor absoluto:

$$|x|=\begin{cases}-x & \text{si} \quad x\in(-\infty,0) \\ x & \text{si} \quad x\in[0,\infty)\end{cases}$$

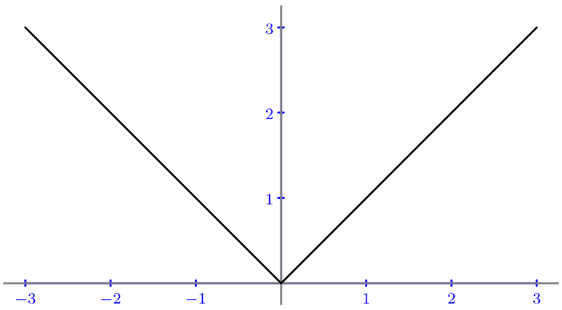
$$|x|=\begin{cases}-x & \text{si} \quad x\in(-\infty,0] \\ x & \text{si} \quad x\in(0,\infty)\end{cases}$$

$$|x|=\begin{cases}-x & \text{si} \quad x<0 \\ x & \text{si} \quad x\geqslant 0\end{cases}$$

La diferencia entre la primera y la segunda definición estriba solamente en cómo se define la función para x=0. Es indiferente usar una y otra porque –0=0.

Esta definición suele sorprender al principio, porque parece extraño usar la expresión analítica «–x» para los números negativos, pero tiene perfecto sentido. Lo vemos calculando con ella el valor absoluto de –5: |–5| = –(–5) = 5.

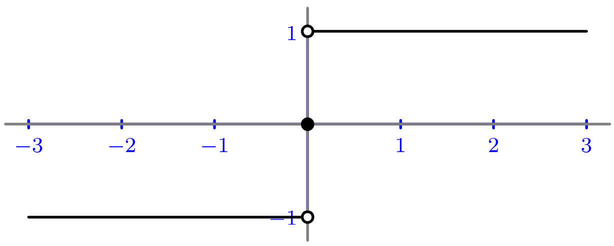
Esta función se utiliza a menudo para estudiar propiedades de las funciones debido al hecho de que presenta un «pico» en el punto (0,0):



La función signo

Sabemos que un número real puede ser positivo, negativo o nulo. Pero muchas veces resulta necesario asignar un número concreto a esa característica, por eso se define la función signo (abajo a la izquierda):

$$sg(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x\in(-\infty,0) \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ 1 & \text{si} \quad x\in(0,\infty)\end{cases}$$

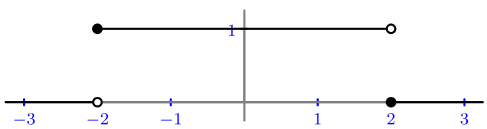


Vemos arriba a la derecha la representación gráfica de esta función, que presenta un punto aislado en el punto (0,0).

Función característica de un subconjunto de números reales

Es la función que vale 1 cuando un número real pertenece al subconjunto y 0 cuando no pertenece. Como ejemplo, vemos la definición y la representación gráfica de la función característica del intervalo [–2,2):

$$C(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in[-2,2) \\ 0 & \text{si} \quad x\notin[-2,2)\end{cases}$$



Expresiones cuadráticas en funciones definidas a trozos

Cuando alguna de las expresiones analíticas de una función definida a trozos es una función cuadrática, su representación gráfica exige un estudio adicional al cálculo de los valores de la función en los extremos de definición. Es necesario, además, calcular los aspectos fundamentales de la función cuadrática (orientación, puntos de corte con los ejes y coordenadas del vértice), aunque pueda ocurrir que esa información al final no se refleje que la representación; por ejemplo, el vértice de la función cuadrática puede estar fuera del intervalo de definición.

Ejemplo

Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad x\in[-3,-1] \\ x^2-2x & \text{si} \quad x\in(-1,2) \\ 1 & \text{si} \quad x\in[2,\rightarrow) \end{cases}$

Resolución

En esta función definida a trozos se utilizan tres expresiones analíticas diferentes, que vamos a distinguir con subíndices para facilitar la explicación:

$f_1(x) = -x-1$	$f_2(x) = x^2-2x$	$f_3(x) = 1$

En el intervalo $[-3,-1]$ la función es lineal, así que basta con calcular los valores en los extremos y unirlos en línea recta:

$f(-3) = f_1(-3) = 2 \rightarrow$ punto $(-3,2)$; $f(-1) = f_1(-1) = 0 \rightarrow$ punto $(-1,0)$

En el intervalo $(-1,2)$ la función es cuadrática. Calculamos los valores en los extremos del intervalo de definición (aunque no pertenezcan a la gráfica):

$f_2(-1) = 3 \rightarrow$ punto $(-1,3)$; $f_2(2) = 0 \rightarrow$ punto $(2,0)$

Continuamos con la orientación de la función: como el coeficiente de x^2 es positivo, el vértice en un mínimo.

Averiguamos los puntos de corte con los ejes:

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = f_2(0) = 0 \rightarrow$ punto $(0,0)$

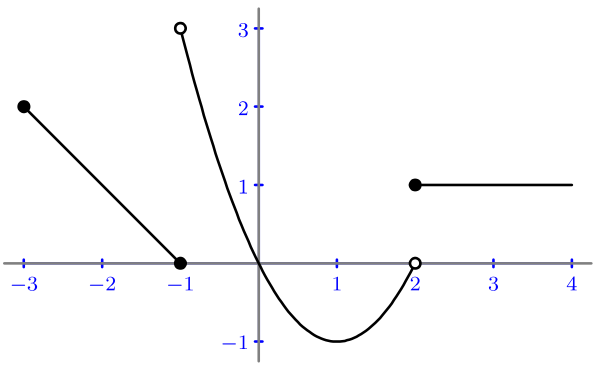
$y = 0 \Rightarrow x^2-2x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \rightarrow$ puntos $(0,0)$ y $(2,0)$, que ya conocíamos.

Terminamos calculando el vértice $V = (v_x,v_y)$

$v_x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2\cdot 1} = 1$; $v_y = f(1) = f_2(1) = -1 \rightarrow V = (1,-1)$

En el intervalo $[2,\rightarrow)$ la función es constante: $f_3(x) = 1$. Utilizaremos el punto $(2,1)$ como comienzo de su representación.

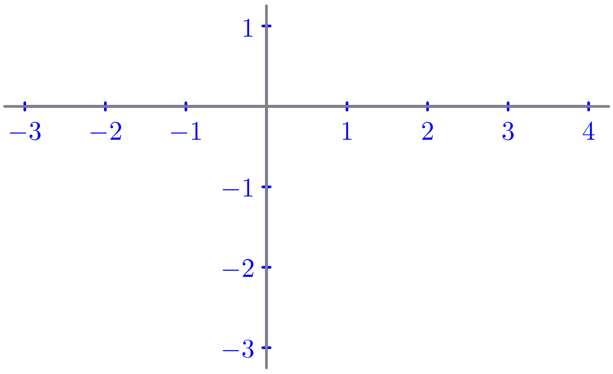
Solución:



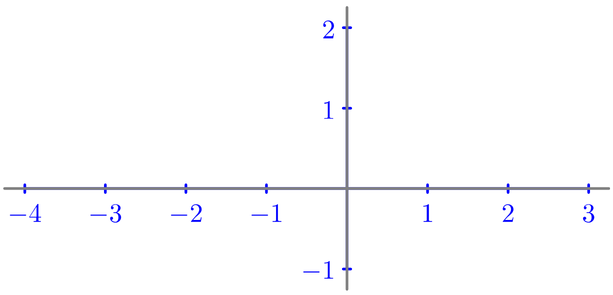
Enunciados

Representa gráficamente las siguientes funciones utilizando el espacio asignado.

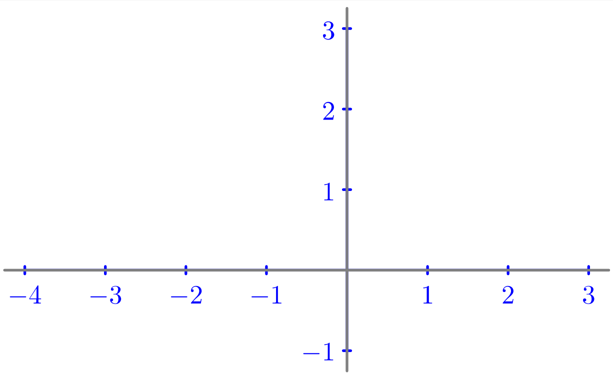
① $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in(-3,-1) \\ 1-x^2 & \text{si } x\in[-1,2) \\ x-3 & \text{si } x\in[2,\rightarrow) \end{cases}$



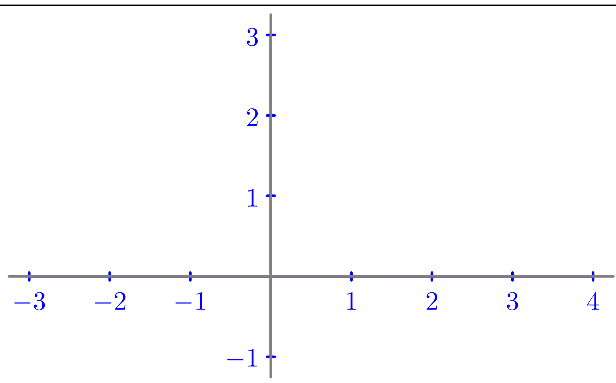
② $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+2x+2 & \text{si } x\in[-4,0] \\ -x+2 & \text{si } x\in(0,3) \end{cases}$



③ $h(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x\in(-\infty,-2) \\ -x^2-2x & \text{si } x\in[-2,0] \\ x^2-2x & \text{si } x\in(0,3) \end{cases}$



④ $m(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x\in(-3,-1) \\ x^2 & \text{si } x\in[-1,1) \\ -x^2+4x-1 & \text{si } x\in[1,3) \\ 1 & \text{si } x\in[3,4) \end{cases}$

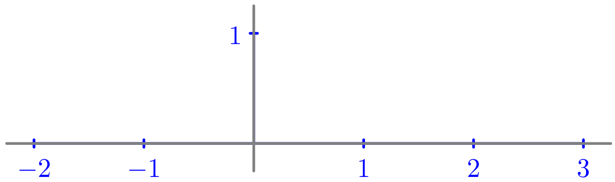


Enunciados

Representa gráficamente las siguientes funciones utilizando el espacio asignado.

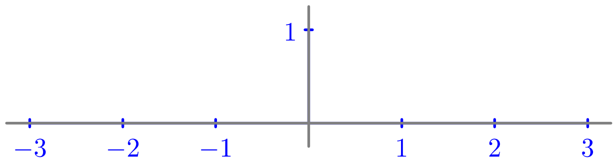
①

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad x\in(-2,-1) \\ 1-x^2 & \text{si} \quad x\in[-1,1] \\ \ln(x) & \text{si} \quad x\in(1,\rightarrow) \end{cases}$$



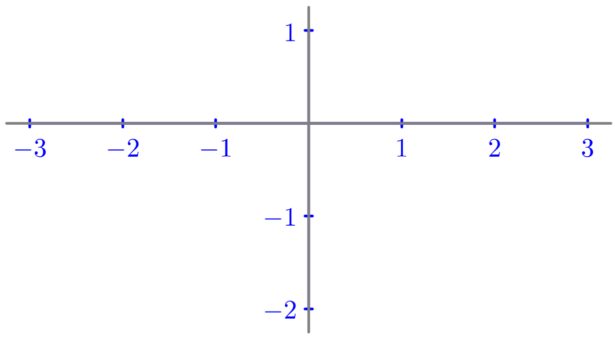
②

$$g(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x\in(\leftarrow,0) \\ e^{-x} & \text{si} \quad x\in(0,\rightarrow) \end{cases}$$



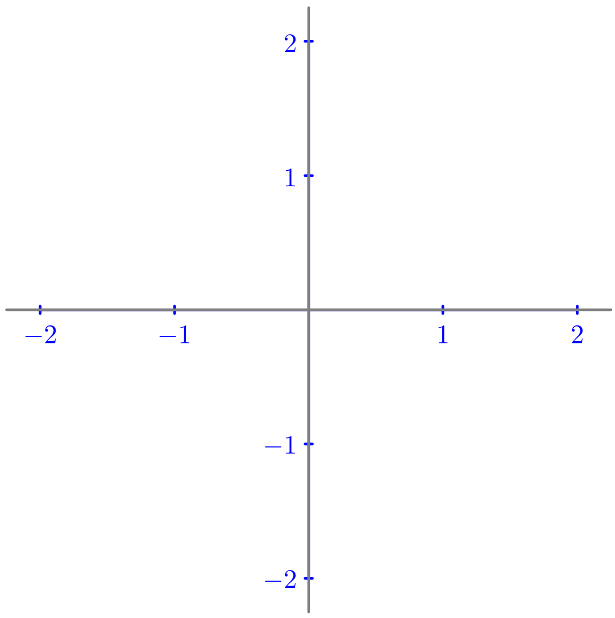
③

$$h(x)=\begin{cases} \ln|x| & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$



④

$$m(x)=\frac{sg(x)\cdot x^2}{2}$$



Razones trigonométricas de un ángulo agudo

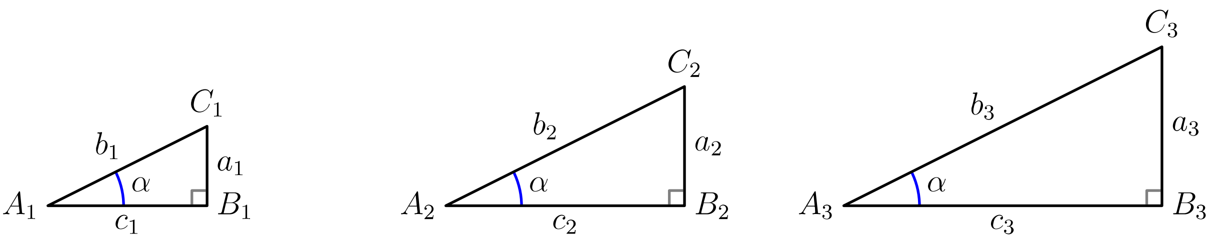
- Llamamos **razones trigonométricas** de un ángulo agudo a los cocientes de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo que tenga ese ángulo.
- Se llaman **razones** porque razón en matemáticas significa cociente.
- Se llaman **trigonométricas** porque permiten medir (-métricas) triángulos (trigono-).

Las razones trigonométricas no dependen del triángulo

Todos los triángulos rectángulos que tienen igual uno de los ángulos agudos son semejantes entre sí, por lo que el cociente de las longitudes de sus lados correspondientes siempre dan el mismo resultado.

Ejemplo

Consideramos el ángulo agudo α y tres triángulos rectángulos en los que aparece: los triángulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ y $A_3B_3C_3$, como vemos en esta figura:



Podemos dividir las longitudes de los lados de seis maneras diferentes; cada una de ellas es una razón trigonométrica distinta, con su propio nombre. Obtendremos siempre el mismo resultado en cualquiera de los tres triángulos, porque, al ser triángulos semejantes, se verifica:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},\quad \frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}=\frac{c_3}{b_3}\quad \frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2}=\frac{a_3}{c_3},\quad \frac{b_1}{c_1}=\frac{b_2}{c_2}=\frac{b_3}{c_3},\quad \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}\ \text{y}\ \frac{c_1}{a_1}=\frac{c_2}{a_2}=\frac{c_3}{a_3}$$

Nombres de las razones trigonométricas

Cada uno de los seis posibles cocientes de longitudes de los lados recibe un nombre, por lo que existen seis razones trigonométricas:

seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente

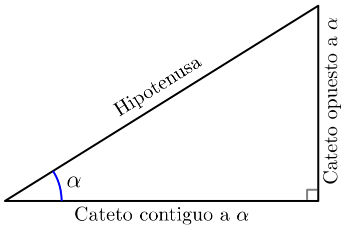
Utilización práctica

Las razones trigonométricas permiten calcular cualquier lado desconocido de un triángulo rectángulo sin más que saber la longitud de uno de los lados y la amplitud de uno de los ángulos, por lo que se pueden aplicar fácilmente a resolver muchos problemas prácticos.

Pero para hacerlo es necesario que previamente se hayan calculado los valores de las razones trigonométricas de los ángulos. Por eso, muchos matemáticos muy importantes, como el griego Hiparco de Nicea (nacido en 190 a. e. c, fallecido en 120 a. e. c.) dedicaron muchos esfuerzos para confeccionar tablas con esos valores, listos para usar.

Hoy en día, todas las calculadoras científicas permiten consultar fácilmente los valores de estas razones, como veremos.

Definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo



Consideramos un triángulo rectángulo en el que uno de sus ángulos agudos tenga una amplitud α. Respecto a este ángulo, los catetos reciben los nombres de cateto opuesto y cateto contiguo o adyacente, como vemos en la figura.

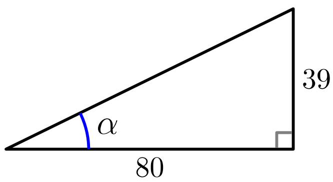
Se definen así las seis razones trigonométricas:

- Seno: $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$
- Coseno: $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}$
- Tangente: $\text{tg}(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$
- Secante: $\sec(\alpha) = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto contiguo}}$
- Cosecante: $\csc(\alpha) = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}}$
- Cotangente: $\text{ctg}(\alpha) = \dfrac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Cateto opuesto}}$

Obervaciones sobre la notación

- Los paréntesis alrededor del ángulo se suelen suprimir cuando no haya duda sobre de qué ángulo se calcula la razón trigonométrica. Por tanto, escribiremos más sencillamente sen α, cos α, tg α, sec α, csc α y ctg α.
- La tangente también se puede abreviar como «tan».
- La cosecante también se puede abreviar como «cosec».
- La cotangente también se puede abreviar como «cot» o «cta».
- En inglés el seno de un ángulo se llama *sinus* y se abrevia como «sin».

Ejemplo



Enunciado. Calcula con cuatro cifras significativas las razones trigonométricas del ángulo α de la figura de la derecha.

Observación. La unidad de longitud es la misma para los dos catetos, pero es indiferente cuál se use, porque los cocientes no varían.

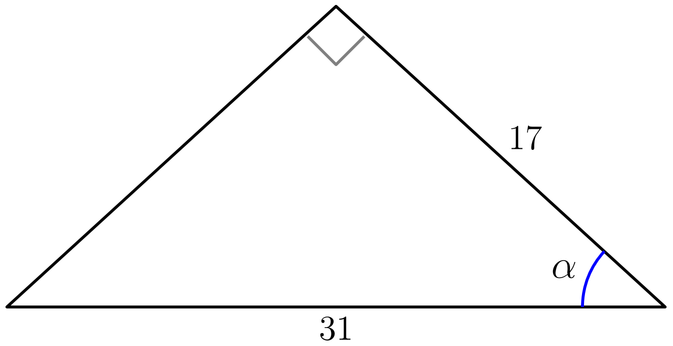
Resolución. Calculamos la longitud de la hipotenusa: $\sqrt{80^2+39^2} = 89$

- Seno: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{39}{89} = 0{,}4382$
- Coseno: $\cos\alpha = \dfrac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{80}{89} = 0{,}8989$
- Tangente: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \dfrac{39}{80} = 0{,}4875$
- Secante: $\sec\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto contiguo}} = \dfrac{89}{80} = 1{,}113$
- Cosecante: $\csc\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} = \dfrac{89}{39} = 2{,}282$
- Cotangente: $\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Cateto opuesto}} = \dfrac{80}{39} = 2{,}051$

Enunciado

Calcula con cuatro cifras significativas las razones trigonométricas del ángulo α de la figura que se ve a continuación.

Observación: la unidad de longitud es la misma para los dos datos, pero es indiferente cuál se use, porque los cocientes no varían.



Resolución

A partir del enunciado sabemos las longitudes de dos lados:

- La hipotenusa mide 31.
- El cateto contiguo al ángulo α mide 17.

Con esos dos datos solo podríamos calcular el coseno y la secante, por lo que es necesario calcular la longitud de cateto opuesto al ángulo α. Lo hacemos aplicando el teorema de Pitágoras:

$\sqrt{31^2-17^2} = \sqrt{672}$

Como la raíz no es exacta, es mejor dejarla indicada para no aumentar los errores de los cálculos.

- Seno: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{\sqrt{672}}{31} = 0{,}8362$

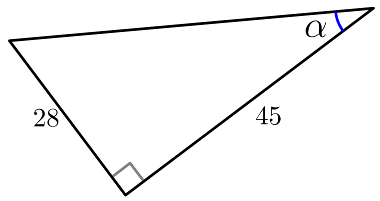
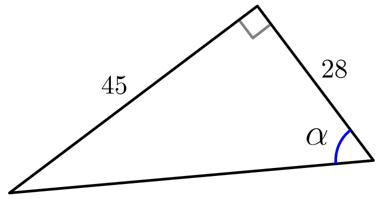
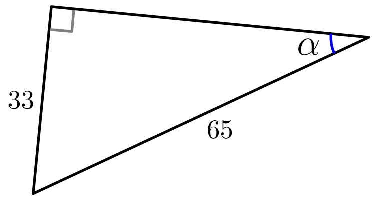
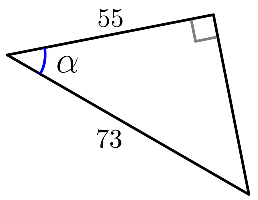
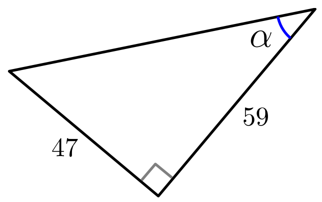
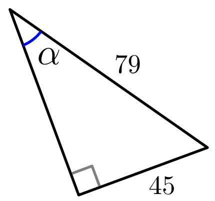
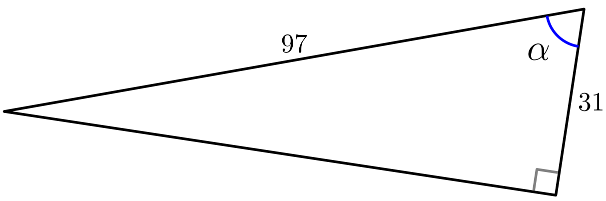
  Calculadora: √ 6 7 2 ÷ 3 1 = ⇰ 0,836224606

- Coseno: $\cos\alpha = \dfrac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{17}{31} = 0{,}5484$
- Tangente: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \dfrac{\sqrt{672}}{17} = 1{,}525$
- Secante: $\sec\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto contiguo}} = \dfrac{31}{17} = 1{,}824$
- Cosecante: $\csc\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} = \dfrac{31}{\sqrt{672}} = 1{,}196$
- Cotangente: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Cateto opuesto}} = \dfrac{17}{\sqrt{672}} = 0{,}6558$

  Calculadora: 1 7 ÷ √ 6 7 2 = ⇰ 0,655789237

Enunciados

Calcula con cuatro cifras significativas todas las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de los siguientes triángulos.

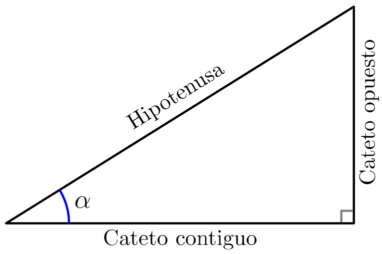
<table>
<tr><td rowspan="2">①</td><td rowspan="2"></td><td>Seno</td><td>Coseno</td><td>Tangente</td></tr>
<tr><td>Secante</td><td>Cosecante</td><td>Cotangente</td></tr>
<tr><td rowspan="2">②</td><td rowspan="2"></td><td>Seno</td><td>Coseno</td><td>Tangente</td></tr>
<tr><td>Secante</td><td>Cosecante</td><td>Cotangente</td></tr>
<tr><td rowspan="2">③</td><td rowspan="2"></td><td>Seno</td><td>Coseno</td><td>Tangente</td></tr>
<tr><td>Secante</td><td>Cosecante</td><td>Cotangente</td></tr>
<tr><td rowspan="2">④</td><td rowspan="2"></td><td>Seno</td><td>Coseno</td><td>Tangente</td></tr>
<tr><td>Secante</td><td>Cosecante</td><td>Cotangente</td></tr>
<tr><td rowspan="2">⑤</td><td rowspan="2"></td><td>Seno</td><td>Coseno</td><td>Tangente</td></tr>
<tr><td>Secante</td><td>Cosecante</td><td>Cotangente</td></tr>
<tr><td rowspan="2">⑥</td><td rowspan="2"></td><td>Seno</td><td>Coseno</td><td>Tangente</td></tr>
<tr><td>Secante</td><td>Cosecante</td><td>Cotangente</td></tr>
<tr><td rowspan="2">⑦</td><td rowspan="2"></td><td>Seno</td><td>Coseno</td><td>Tangente</td></tr>
<tr><td>Secante</td><td>Cosecante</td><td>Cotangente</td></tr>
</table>

Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo

Como las seis razones trigonométricas provienen de dividir entre sí dos de los tres lados de un triángulo rectángulo, están relacionadas entre ellas de muchas formas. Algunas son bastante obvias, como las que vemos ahora, otras no lo son tanto, como las que veremos más adelante.

Notación

En todas las relaciones de esta hoja denotamos como α a un ángulo agudo cualquiera, que formará parte de un triángulo rectángulo como el de la figura de la derecha.



Relación entre seno, coseno y tangente

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Demostración

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}:\frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}=\frac{(\text{Cateto opuesto})\cdot\text{Hipotenusa}}{\text{Hipotenusa}\cdot(\text{Cateto contiguo})}=$$

$$=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}=\operatorname{tg}\alpha$$

Relación entre seno y cosecante

$(\operatorname{sen}\alpha)\cdot(\csc\alpha)=1$ y por tanto $\csc\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ y $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{\csc\alpha}$

Demostración

$$(\operatorname{sen}\alpha)\cdot(\csc\alpha)=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}\cdot\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}}=1$$

Relación entre coseno y secante

$(\cos\alpha)\cdot(\sec\alpha)=1$ y por tanto $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ y $\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}$

Demostración

$$(\cos\alpha)\cdot(\sec\alpha)=\frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}\cdot\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto contiguo}}=1$$

Relación entre tangente y cotangente

$(\operatorname{tg}\alpha)\cdot(\operatorname{ctg}\alpha)=1$ y por tanto $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ y $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$

Demostración

$$(\operatorname{tg}\alpha)\cdot(\operatorname{ctg}\alpha)=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}\cdot\frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Cateto opuesto}}=1$$

Relación entre seno, coseno y cotangente

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Demostración

Te animamos a que la desarrolles tú mismo (lo puedes hacer de varias formas). Te vendrá bien, porque más adelante te propondremos que demuestres la veracidad de identidades más complicadas que esta con razones trigonométricas.

Unidades de medida de ángulos

Existen tres unidades de medida de ángulos:

* **Grados sexagesimales**. Son los que hemos usado en este curso desde el nivel 1, y seguiremos usando en este y otros niveles.
* **Radianes**. Los definiremos y usaremos en el nivel 5.
* **Grados centesimales**. Se basan en dividir el ángulo completo en 400 partes iguales llamadas grados centesimales. Apenas se usan.

Modos angulares de la calculadora científica

Si escribimos en una calculadora un número que represente la amplitud de un ángulo, la calculadora interpretará en qué unidad lo estamos midiendo según esté configurada. Casi todas las calculadoras científicas admiten tres configuraciones, llamadas **modos angulares**:

* DEG: grados sexagesimales. Es el que usaremos siempre en este nivel 4.
* RAD: radianes.
* GRAD o GRA: grados centesimales.

Para establecer el modo angular se suele usar la tecla `MODE` o similar y el modo angular seleccionado suele aparecer en la pantalla. Debes comprobarlo siempre antes de empezar a usar razones trigonométricas.

Teclas para las razones trigonométricas

Las calculadoras científicas disponen de tres teclas para calcular tres razones trigonométricas:

* `SIN` para calcular el seno. Podría estar rotulada como `sin` o incluso `sen`.
* `COS` para calcular el coseno. Podría estar rotulada como `cos`.
* `TAN` para calcular la tangente. Podría estar rotulada como `tan`.

No existen teclas para calcular las otras tres razones trigonométricas, porque se usan muy poco, pero siempre se pueden calcular como una división.

Ejemplos

Calcula con cuatro cifras significativas las siguientes razones trigonométricas.

Para la resolución seleccionamos en la calculadora el modo DEG.

① sen 55° = 0,8192. Calculadora: `SIN` `5` `5` `=` ⇨ 0,819152044

② cos 13° = 0,9744. Calculadora: `COS` `1` `3` `=` ⇨ 0,974370064

③ tg 89° = 57,29. Calculadora: `TAN` `8` `9` `=` ⇨ 57,28996163

④ sec 86° = 14,36. Calculadora: `1` `÷` `COS` `8` `6` `=` ⇨ 14,33558703

⑤ csc 21° = 2,790. Calculadora: `1` `÷` `SIN` `2` `1` `=` ⇨ 2,79042811

⑥ ctg 88° = 0,03492. Calculadora: `1` `÷` `TAN` `8` `8` `=` ⇨ 0,034920769

⑦ sen 25° 36′ = 0,4321. Calculadora: `SIN` `2` `5` `° ′ ″` `3` `6` `° ′ ″` `=` ⇨ 0,432085748

⑧ cos 85° 39′ = 0,07585. Calculadora: `COS` `8` `5` `° ′ ″` `3` `9` `° ′ ″` `=` ⇨ 0,075848906

⑨ tg 89° 45′ = 229,2. Calculadora: `TAN` `8` `9` `° ′ ″` `4` `5` `° ′ ″` `=` ⇨ 229,1816636

⑩ tg 89° 59′ = 3438. Calculadora: `TAN` `8` `9` `° ′ ″` `5` `9` `° ′ ″` `=` ⇨ 3437,74674

Enunciados

Usando la calculadora, escribe con cuatro cifras significativas todas las razones trigonométricas de cada ángulo solicitado.

①	$51°$	Seno	Coseno	Tangente
		Secante	Cosecante	Cotangente

②	$39°$	Seno	Coseno	Tangente
		Secante	Cosecante	Cotangente

③	$2°$	Seno	Coseno	Tangente
		Secante	Cosecante	Cotangente

④	$15°\,12'$	Seno	Coseno	Tangente
		Secante	Cosecante	Cotangente

⑤	$74°\,48'$	Seno	Coseno	Tangente
		Secante	Cosecante	Cotangente

⑥	$46°$	Seno	Coseno	Tangente
		Secante	Cosecante	Cotangente

⑦	$88°\,52'$	Seno	Coseno	Tangente
		Secante	Cosecante	Cotangente

Idea de las funciones arco

Sabemos que las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo dan como resultado un número sin unidad, porque provienen de dividir dos longitudes medidas en la misma unidad, que se simplifica. Por tanto, tiene sentido preguntarse, dado un número, cuál es el ángulo que tiene por seno, coseno o tangente ese número. Esas asignaciones de número a ángulo son lo que llamamos las funciones arco.

Valores del seno y el coseno

- ✱ Tanto el seno como el coseno provienen de dividir dos longitudes, que son positivas, luego el seno y el coseno de un ángulo agudo siempre son positivos.
- ✱ Tanto el seno como el coseno provienen de dividir la longitud de un cateto entre la longitud de la hipotenusa; como los catetos siempre son más cortos que la hipotenusa, tanto el seno y el coseno de un ángulo agudo siempre son menores que 1.

Podemos resumir las dos propiedades anteriores usando intervalos:

$$\boxed{\alpha \in (0°,90°) \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha,\ \cos\alpha \in (0,1)}$$

Valores de la tangente

- ✱ La tangente proviene de dividir dos longitudes, que son positivas, luego la tangente de un ángulo agudo siempre es positiva.
- ✱ La tangente proviene de dividir las longitudes de dos catetos, luego puede tomar valores mayores que cualquier número que pensemos.

Podemos resumir las dos propiedades anteriores usando intervalos:

$$\boxed{\alpha \in (0°,90°) \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \in (0,\rightarrow)}$$

La función arco seno

Si $a \in (0,1)$, llamamos arco seno de a (escrito abreviadamente $\operatorname{arcsen} a$) al único ángulo $\alpha \in (0°,90°)$ que verifica $\operatorname{sen}\alpha = a$. Podemos escribir:

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = a \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen} a}$$

La función arco coseno

Si $a \in (0,1)$, llamamos arco coseno de a (escrito abreviadamente $\arccos a$) al único ángulo $\alpha \in (0°,90°)$ que verifica $\cos\alpha = a$. Podemos escribir:

$$\boxed{\cos\alpha = a \Rightarrow \alpha = \arccos a}$$

La función arco tangente

Si $a \in (0,\rightarrow)$, llamamos arco tangente de a (escrito abreviadamente $\operatorname{arctg} a$) al único ángulo $\alpha \in (0°,90°)$ que verifica $\operatorname{tg}\alpha = a$. Podemos escribir:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = a \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} a}$$

Utilización práctica

Las funciones arco nos permiten calcular el valor de un ángulo a partir de los valores de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo.

Teclas para las funciones arco

Las calculadoras científicas disponen de tres teclas para calcular las tres funciones arco:

- ✱ [SIN^{-1}] para calcular el arco seno. Podría estar rotulada como [sin^{-1}].
- ✱ [COS^{-1}] para calcular el arco coseno. Podría estar rotulada como [cos^{-1}].
- ✱ [TAN^{-1}] para calcular el arco tangente. Podría estar rotulada como [tan^{-1}].

El ángulo obtenido vendrá dado en la unidad angular seleccionada en ese momento en la calculadora. Por eso, es muy importante comprobar que esté activado el modo angular que nos interese. En este nivel, deberá estar en modo DEG, para obtener los resultados en grados sexagesimales.

Ejemplos

Calcula con cuatro cifras significativas los siguientes ángulos.

Para la resolución seleccionamos en la calculadora el modo DEG.

① $\operatorname{arcsen} 0{,}23 = 13{,}30°$. Calculadora: [SIN^{-1}] [0] [.] [2] [3] [=] ⇰ 13.29707175

② $\arccos 0{,}39 = 67{,}05°$. Calculadora: [COS^{-1}] [0] [.] [3] [9] [=] ⇰ 67.0455006

③ $\operatorname{arctg} 0{,}88 = 41{,}35°$. Calculadora: [TAN^{-1}] [0] [.] [8] [8] [=] ⇰ 41.34777722

④ $\operatorname{arcsen} 1{,}39$ no existe. Calculadora: [SIN^{-1}] [1] [.] [3] [9] [=] ⇰ Error

⑤ $\arccos 2{,}73$ no existe. Calculadora: [COS^{-1}] [2] [.] [7] [3] [=] ⇰ Error

⑥ $\operatorname{arctg} 5{,}62 = 79{,}91°$. Calculadora: [TAN^{-1}] [5] [.] [6] [2] [=] ⇰ 79.91061768

Resultados en grados, minutos y segundos

Para utilizar el ángulo obtenido con una función arco en otras operaciones que haya que hacer a continuación podemos dejarlo en grados con decimales: por ejemplo, almacenándolo en alguna memoria de la calculadora. Sin embargo, cuando queremos dar el resultado final del ángulo, lo más habitual es escribirlo en grados, minutos y segundos, para lo que podemos usar la calculadora.

Ejemplos

Calcula los siguientes ángulos. Da el resultado en grados, minutos y segundos, redondeando al segundo.

Para la resolución seleccionamos en la calculadora el modo DEG.

⑦ $\operatorname{arcsen} 0{,}92 = 66°\,55'\,34''$

Calculadora: [SIN^{-1}] [0] [.] [9] [2] [=] [°′″] ⇰ 66°55°33.89

⑧ $\arccos 0{,}015 = 89°\,8'\,26''$

Calculadora: [COS^{-1}] [0] [.] [0] [1] [5] [°′″] [=] ⇰ 89°8°25.91

⑨ $\operatorname{arctg} 1{,}5 = 56°\,18'\,36''$

Calculadora: [TAN^{-1}] [1] [.] [5] [°′″] [=] ⇰ 56°18°35.76

Enunciados

Usando la calculadora, escribe en grados sexagesimales con cuatro cifras significativas los siguientes ángulos.

① $\arcsen 0{,}73$

② $\arccos 0{,}82$

③ $\operatorname{arctg} 2{,}5$

④ $\arcsen 1{,}03$

⑤ $\arccos 3{,}2$

⑥ $\operatorname{arctg} 0{,}22$

⑦ $\arcsen 0{,}015$

⑧ $\arccos 0{,}995$

Enunciados

Usando la calculadora, escribe en grados, minutos y segundos sexagesimales, redondeando al segundo, los siguientes ángulos.

⑨ $\operatorname{arctg} 3{,}29$

⑩ $\arccos 0{,}023$

⑪ $\arcsen 0{,}783$

⑫ $\operatorname{arctg} 1{,}09$

⑬ $\arcsen 0{,}505$

⑭ $\arccos 0{,}407001$

⑮ $\operatorname{arctg} 0{,}505$

⑯ $\arcsen 0{,}002$

Enunciados

Usando la calculadora, escribe en grados y minutos sexagesimales, redondeando al minuto, los siguientes ángulos.

⑰ $\arccos 0{,}97$

⑱ $\arcsen 0{,}3422$

⑲ $\operatorname{arctg} 1{,}4779$

⑳ $\arcsen 0{,}15658$

㉑ $\arccos 0{,}6$

㉒ $\operatorname{arctg} 4820$

Consejos para resolver problemas usando razones trigonométricas

1. Tras leer el enunciado del problema, dibuja un esquema (no tiene por qué ser exacto, pero intenta hacerlo bien) en el que aparezcan los datos y la incógnita.

2a. Si en el problema ya dispones de un triángulo rectángulo en el que aparezcan los datos y la incógnita, intenta usarlo.

2b. Si en el problema no aparece ningún triángulo rectángulo que te sea útil, puedes dibujar alguna línea auxiliar para definir uno que te interese; por ejemplo, puedes trazar algún segmento perpendicular a otro.

3. En el triángulo rectángulo en el que aparecen los datos y la incógnita, decide entre seno, coseno o tangente cuál de esas razones trigonométricas relaciona un ángulo agudo y dos lados.

4. Aplica la definición correspondiente y despeja lo que necesites calcular.

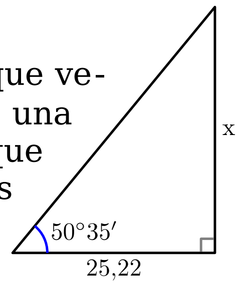
Enunciados

① Cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50° 35′ con el suelo, una torre proyecta una sombra que mide 25,22 metros. Calcula la altura de la torre y da el resultado en metros con dos decimales.

② En una circunferencia cuyo radio mide 5 metros, dibujamos una cuerda que mide 7 metros. Calcula en grados, minutos y segundos, redondeando al segundo, la amplitud del ángulo central correspondiente a la cuerda.

Resoluciones

① Llamamos x a la altura de la sombra y dibujamos un esquema, que vemos a la derecha. Como la altura de una torre se mide trazando una perpendicular, disponemos de un triángulo restángulo en el que conocemos un ángulo agudo y su cateto contiguo y queremos calcular el cateto opuesto. Por tanto, usamos la tangente:



$$\operatorname{tg} 50°\,35' = \frac{x}{25{,}22} \Rightarrow x = 25{,}22 \cdot \operatorname{tg} 50°\,35' = 30{,}69$$

Calculadora: 2 5 . 2 2 × TAN 5 0 °′″ 3 5 °′″ = ⇨ 30.685 12768

Solución: 30,69 m

② Llamamos α al ángulo pedido. En la figura 1 dibujamos el esquema; como no hay ningún triángulo rectángulo, trazamos un segmento perpendicular a la cuerda que pase por el centro de la circunferencia, como vemos en la figura 2. Nos aparece el triángulo rectángulo de la figura 3, en el que usamos el seno.

Figura 1:

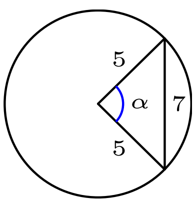


Figura 2:

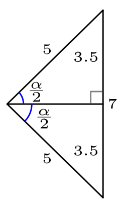
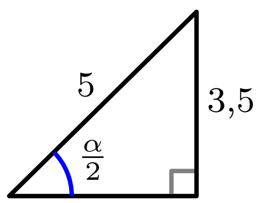


Figura 3:



$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{3{,}5}{5} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=\operatorname{arcsen}\frac{3{,}5}{5} \Rightarrow \alpha=2\cdot\operatorname{arcsen}\frac{3{,}5}{5} = 88°\,51'\,14''$$

Calculadora: 2 × SIN⁻¹ (3 . 5 ÷ 5) = °′″ ⇨ 88°51°14.43

Solución: 88° 51′ 14″

Enunciados

① Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 17 metros y forman un ángulo de 54°. Calcula con cinco cifras significativas la longitud del tercer lado.

② Las longitudes de los lados de un rectángulo son 59 metros y 37 metros. Calcula en grados, minutos y segundos redondeando al segundo el mayor de los dos ángulos que forma una diagonal del rectángulo con los lados.

③ Calcula con cinco cifras significativas la longitud del radio de un octógono regular cuyo lado mide 23 metros.

④ Para sujetar un poste de 15 metros de altura utilizamos varios cables de acero que miden 45 metros de longitud, bien atados a la parte superior del poste y al suelo. Calcula en grados y minutos, redondeando al minuto, el ángulo que forma cada cable con el suelo.

⑤ Calcula con cinco cifras significativas la longitud de la apotema de un pentágono regular cuyo radio mide 1,33 metros.

⑥ En una circunferencia cuyo radio mide 7,1 metros, trazamos una cuerda que dista 4,2 metros del centro. Calcula en grados, minutos y segundos redondeando al segundo la amplitud del ángulo central correspondiente a la cuerda.

⑦ Si apoyamos una escalera de dos metros de altura en una pared de modo que la escalera forme un ángulo de 64° con el suelo, ¿cuál será la distancia entre la pared y el pie de la base de la escalera? Da el resultado en metros con tres cifras significativas.

⑧ Calcula en grados, minutos y segundos redondeando al segundo la amplitud del menor de los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 56 metros y 39 metros.

⑨ Encajamos una circunferencia cuyo radio mide 3,4 metros en un ángulo de amplitud 33°. Calcula en metros con cinco cifras significativas la distancia entre la circunferencia y el vértice del ángulo.

⑩ A la derecha vemos la señal de tráfico utilizada en España para informar del peligro de una carretera con pendiente de 6 %. La pendiente se calcula escribiendo como porcentaje el cociente entre cuánta distancia asciende la carretera y cuánta distancia se avanza en horizontal por ella. Calcula en grados y minutos, redondeando al minuto, el ángulo que forma la carretera con la horizontal cuando la pendiente es del 21 %.

⑪ Calcula con cuatro cifras significativas la longitud del lado de un pentágono regular sabiendo que la diagonal mide una unidad.

⑫ Si vemos una pantalla de 3 metros de anchura desde una distancia de 8 metros, ¿cuál es el ángulo de visión? Da el resultado en grados, minutos y segundos redondeando al segundo.

Enunciados

① Calcula en metros con cinco cifras significativas la longitud de la menor de las diagonales de un heptágono regular cuyo lado mide un metro.

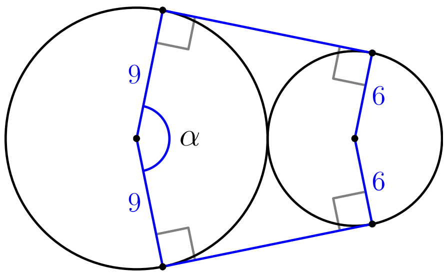
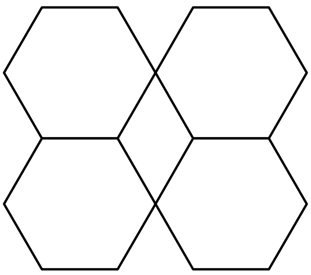
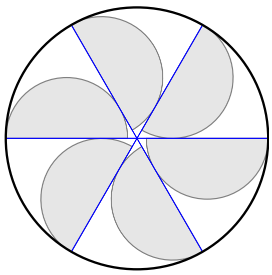
② Calcula en grados, minutos y segundos redondeando al segundo la amplitud del ángulo α de la figura 2.

③ Calcula en metros con cinco cifras significativas la longitud de la mayor de las diagonales de un heptágono regular cuyo lado mide un metro.

④ Dada una circunferencia cuyo radio mide 7 metros se trazan desde un punto que dista 11 metros del centro los dos segmentos tangentes a la circunferencia. Calcula en metros cuadrados con cuatro cifras significativas el área delimitada por la circunferencia y los dos segmentos.

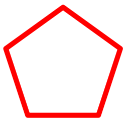
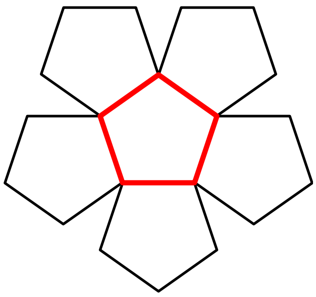
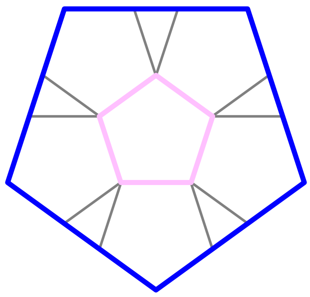
⑤ Se dibujan cuatro hexágonos regulares iguales, como en la figura 5, que determinan un rombo. Sabiendo que el lado de los hexágonos mide un metro, calcula con cinco cifras significativas la longitud de la diagonal mayor del rombo.

⑥ En la figura 6 hay seis semicírculos (iguales y tangentes cada dos consecutivos) inscritos en una circunferencia. Si el radio de los semicírculos mide un metro, calcula con cinco cifras significativas el radio de la circunferencia.

Figura 2	Figura 5	Figura 6
		

⑦ Calcula en metros cuadrados de manera exacta el área de un dodecágono regular inscrito en una circunferencia cuyo radio mide un metro.

⑧ Partimos del pentágono regular de la figura 8a, cuyo lado mide un metro. A partir de él, dibujamos un pentágono regular apoyado en cada lado, como se muestra en la figura 8b. Uniendo lados de los cinco pentágonos añadidos, formamos un pentágono mucho mayor, como se ve en la figura 8c. Calcula en metros cuadrados con cinco cifras significativas el área de este último pentágono.

Figura 8a	Figura 8b	Figura 8c
		

Enunciado clásico

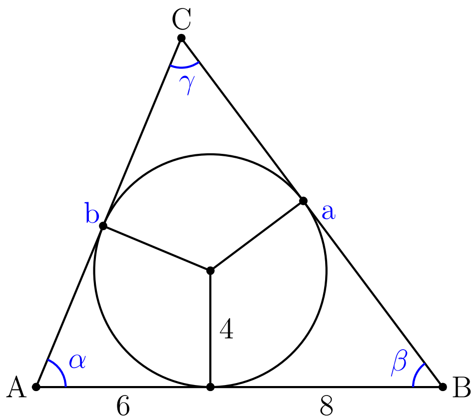
En su libro *Summa* el matemático italiano Luca Pacioli (aprox. 1445-1517) recopiló muchos conocimientos de su época. En la parte de geometría propone este problema: «halla los lados de un triángulo sabiendo que el radio de la circunferencia inscrita es cuatro y que los segmentos en que divide a uno de los lados el punto de tangencia miden seis y ocho».

Justificación

Para poder extraer varias enseñanzas de este problema, vamos a pedir más magnitudes del triángulo, lo que permitirá afrontar su resolución con varias estrategias diferentes. También vamos a darte el triángulo representado con exactitud para poder nombrar y pedir fácilmente sus elementos.

Enunciado

Dado el triángulo de la figura, se pide:



① La longitud del lado a

② La longitud del lado b

③ La amplitud del ángulo α

④ La amplitud del ángulo β

⑤ La amplitud del ángulo γ

⑥ El área

Da los ángulos en grados, minutos y segundos, redondeando al segundo. Observa que las longitudes se dan sin unidad, así que también se piden sin unidad.

Tu estrategia

Sabes que cuando afrontas la resolución de un problema, lo más importante para ti es la estrategia que se te ocurra; por tanto, en este caso busca tu inspiración y tu modo particular de atacarlo, sin sentirte presionado por usar unas técnicas u otras. Recuerda que no tienes por qué calcular lo que te pide el enunciado en el orden propuesto. Tras tu trabajo particular, te invitamos a que estudies también las dos estrategias que te presentaremos a continuación.

Trabajo preparatorio

Para las dos estrategias que usaremos necesitamos un trabajo común inicial sobre este triángulo: dibujar en él seis triángulos rectángulos, iguales dos a dos, y deducir inmediatamente las longitudes de dos segmentos.

Estrategia algebraica

Se pueden igualar dos expresiones del área para plantear una ecuación con radicales; con la solución de la ecuación se pasa a calcular las longitudes de los lados.

Estrategia trigonométrica

Empezar por calcular las amplitudes de los ángulos α y β, con ellas calcular la amplitud del ángulo γ y con ella las longitudes de los dos segmentos desconocidos.

Triángulos heronianos

El triángulo de este problema es un ejemplo de triángulo heroniano. Busca... ☺

Uso simultáneo de dos triángulos rectángulos

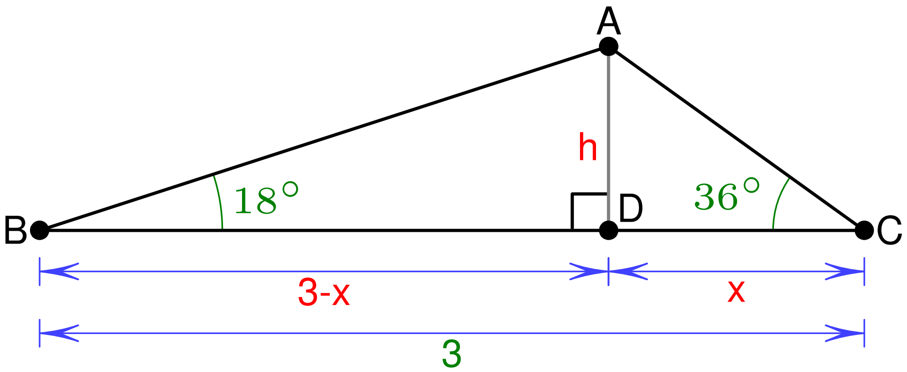
Cuando dos triángulos rectángulos comparten algún lado y conocemos suficientes ángulos de ellos, es posible utilizar un sistema de ecuaciones para averiguar longitudes desconocidas. Podemos usar esta técnica en muchos problemas; ahora la aplicamos para calcular la altura de un triángulo conocidos la base y dos ángulos.

Enunciado

Calcula con cinco cifras significativas la longitud de la altura de un triángulo sabiendo que la base mide 3 y los ángulos opuestos a la altura miden 18° y 36°.

Resolución

Llamamos «h» a la longitud pedida y «x» a la longitud del segmento que une la base de la altura con el vértice que corresponde al ángulo de 36°, como vemos en esta figura:



En el triángulo rectángulo ABD se verifica: $\operatorname{tg} 18° = \dfrac{h}{3-x}$

En el triángulo rectángulo ACD se verifica: $\operatorname{tg} 36° = \dfrac{h}{x}$

Planteamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resolvemos cómodamente por igualación despejando «h»:

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} 18° = \dfrac{h}{3-x} \\ \operatorname{tg} 36° = \dfrac{h}{x} \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} h = (3-x)\operatorname{tg} 18° \\ h = x\cdot\operatorname{tg} 36° \end{array}\right| \quad (3-x)\operatorname{tg} 18° = x\cdot\operatorname{tg} 36° \Rightarrow 3\cdot\operatorname{tg} 18° - x\cdot\operatorname{tg} 18° = x\cdot\operatorname{tg} 36° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot\operatorname{tg} 18° = x\cdot\operatorname{tg} 36° + x\cdot\operatorname{tg} 18° \Rightarrow 3\cdot\operatorname{tg} 18° = x\cdot(\operatorname{tg} 36° + \operatorname{tg} 18°) \Rightarrow x = \frac{3\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 36° + \operatorname{tg} 18°}$$

En este problema no nos preguntan por el valor de «x» (en otros problemas sí podrían hacerlo), así que no calculamos explícitamente el valor numérico de la expresión obtenida y pasamos a calcular «h», que sí nos preguntan:

$$h = x\cdot\operatorname{tg} 36° = \frac{3\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 36° + \operatorname{tg} 18°}\cdot\operatorname{tg} 36° = 0{,}67354$$

Calculadora en modo angular DEG:

3 × TAN 1 8 × TAN 3 6 ÷ (TAN 3 6 + TAN 1 8) = ⇨ 0.673541964

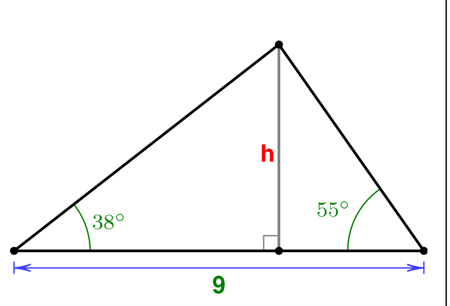
Solución: 0,67354

Observa que en el problema las longitudes no tienen unidad.

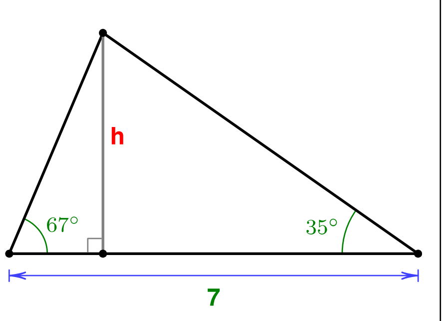
Enunciados

Calcula con cinco cifras significativas la longitud de la altura señalada en cada una de las siguientes figuras:

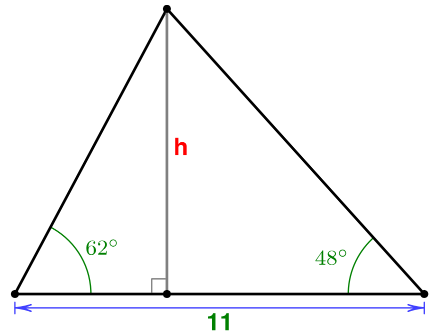
①



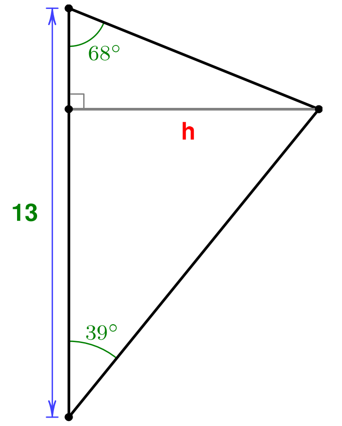
②



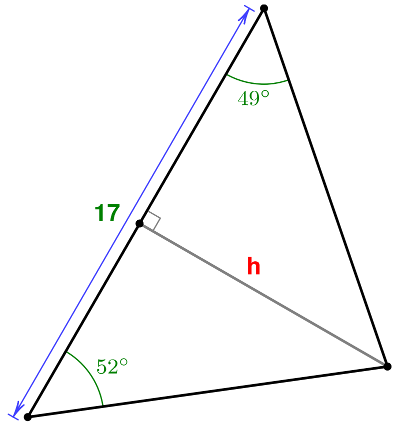
③



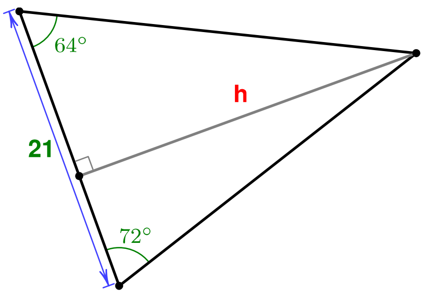
④



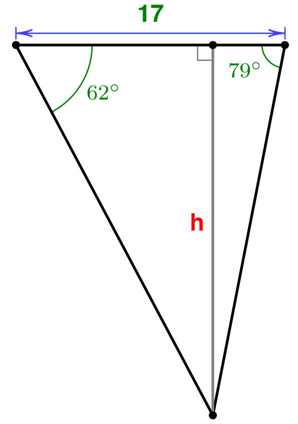
⑤



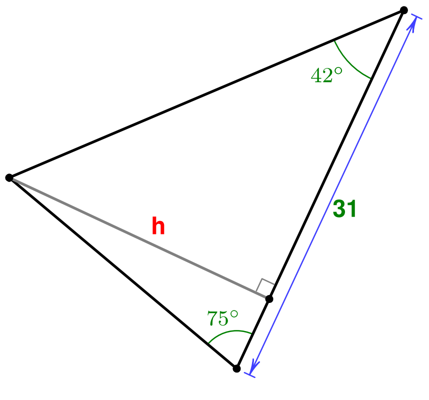
⑥



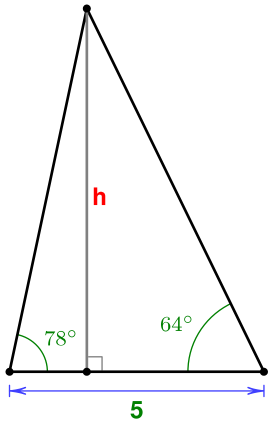
⑦



⑧

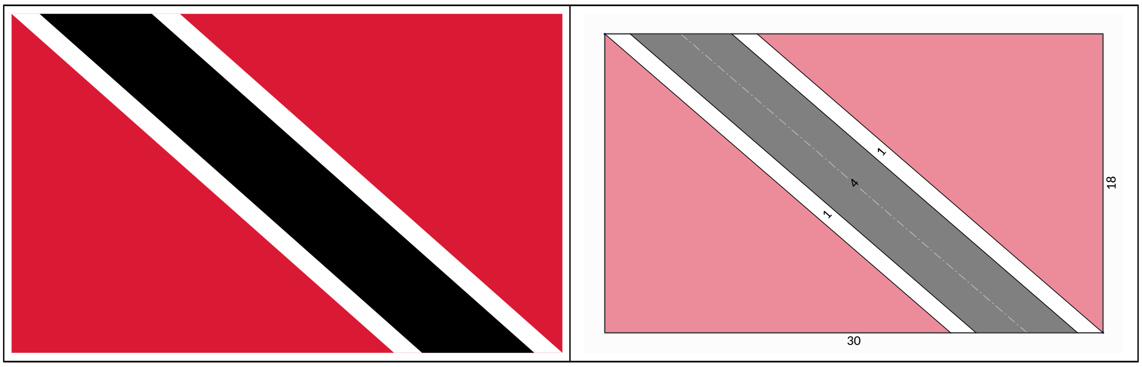


⑨

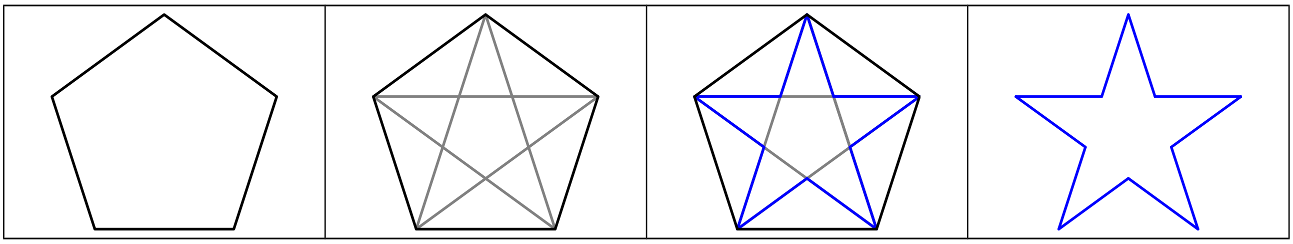


Enunciados

① En la figura de la izquierda ves la bandera de Trinidad y Tobago y en la figura de la derecha las claves de su definición. Calcula con cuatro cifras significativas el porcentaje de color rojo respecto al total.

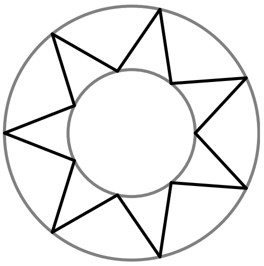


② Existen varias maneras de generar un polígono que popularmente se conoce como estrella. Una de las más utilizadas es la que parte de un pentágono regular y usa segmentos de sus diagonales, como se ve en las figuras siguientes:

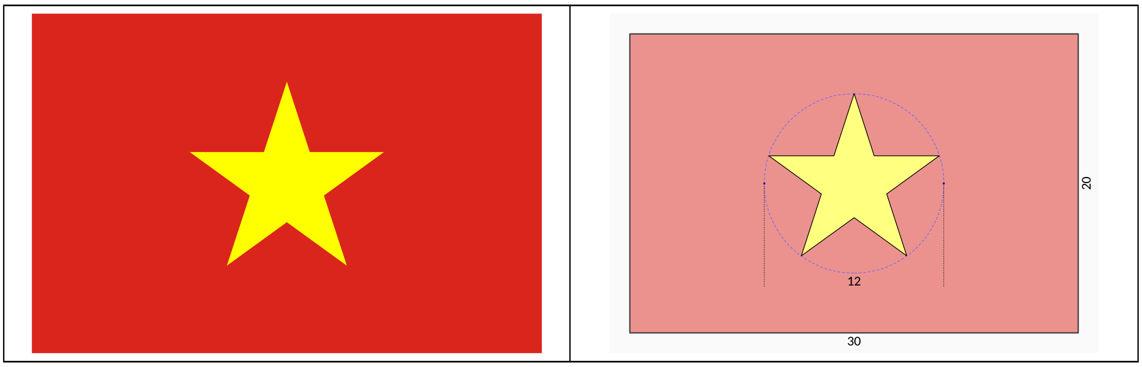


Si el lado del pentágono original mide un metro, calcula en metros cuadrados con cinco cifras significativas el área de la estrella de cinco puntas obtenida.

③ Es posible dibujar un polígono con forma de estrella de n puntas colocando sus n vértices exteriores uniformemente distribuidos en una circunferencia y sus n vértices interiores en otra circunferencia más pequeña. A la derecha se ve una estrella de siete puntas dibujada a partir de dos circunferencias de radios dos metros y un metro. Calcula su área en metros cuadrados con cinco cifras significativas.



④ En la figura de la izquierda ves la bandera de Vietnam y en la figura de la derecha algunas claves de su definición. Calcula con cuatro cifras significativas el porcentaje de color rojo respecto al total.

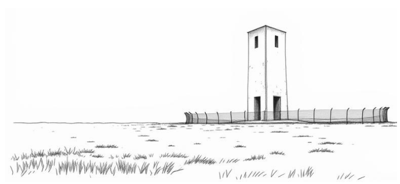


Uso simultáneo de dos triángulos rectángulos

Cuando dos triángulos rectángulos comparten algún lado y conocemos suficientes ángulos de ellos, es posible utilizar un sistema de ecuaciones para averiguar longitudes desconocidas. Podemos usar esta técnica en muchos problemas; aquí la aplicamos para calcular la altura de un punto inaccesible y la distancia hasta su base.

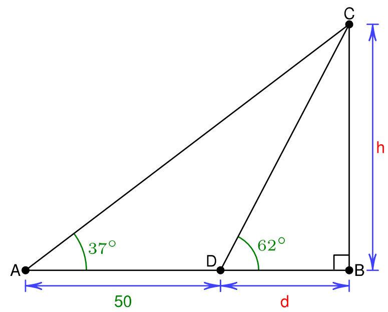
Problema

Nos encontramos en un campo y vemos una torre. Queremos calcular su altura y la distancia a la que nos encontramos de su base, pero no podemos acceder a los alrededores de la torre. Disponemos de instrumentos para medir distancias en el campo y para medir ángulos.



Plan de resolución

Desde donde nos encontramos medimos el ángulo que forma la horizontal con una visual hasta el extremo de la torre. Retrasamos nuestra posición una distancia que determinamos y repetimos la medición del ángulo. Dibujamos el esquema de la derecha.



Los cálculos

En el triángulo rectángulo CDB se verifica: $\operatorname{tg} 62° = \dfrac{h}{d}$

En el triángulo rectángulo CAB se verifica: $\operatorname{tg} 37° = \dfrac{h}{d+50}$

Planteamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resolvemos cómodamente por igualación despejando «h»:

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} 62° = \dfrac{h}{d} \\ \operatorname{tg} 37° = \dfrac{h}{d+50} \end{array}\right. \quad \left| \begin{array}{l} h = d\cdot\operatorname{tg} 62° \\ h = (d+50)\operatorname{tg} 37° \end{array} \right| \quad d\cdot\operatorname{tg} 62° = (d+50)\operatorname{tg} 37° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\cdot\operatorname{tg} 62° = d\cdot\operatorname{tg} 37° + 50\cdot\operatorname{tg} 37° \Rightarrow d\cdot\operatorname{tg} 62° - d\cdot\operatorname{tg} 37° = 50\cdot\operatorname{tg} 37° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\cdot(\operatorname{tg} 62° - \operatorname{tg} 37°) = 50\cdot\operatorname{tg} 37° \Rightarrow d = \frac{50\cdot\operatorname{tg} 37°}{\operatorname{tg} 62° - \operatorname{tg} 37°} = 33{,}43$$

Calculadora en modo angular DEG:

5 0 × TAN 3 7 ÷ (TAN 6 2 – TAN 3 7) = ⇰ 33.42674288

$h = d\cdot\operatorname{tg} 62° = 62{,}87$

Calculadora en modo angular DEG: Ans × TAN 6 2 = ⇰ 62.86655998

Solución

(Nos parece razonable dar la solución en metros con dos decimales.)

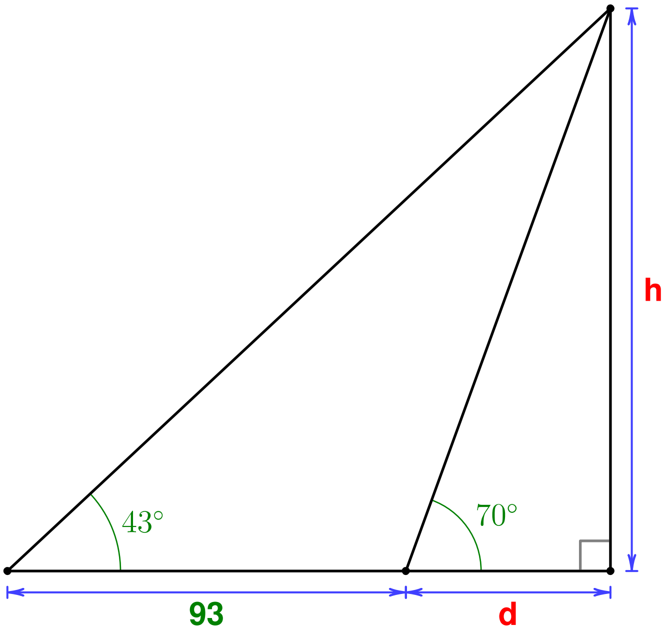
La altura de la torre es 62,87 metros.

Nos encontramos a una distancia de la base de la torre de 33,43 metros.

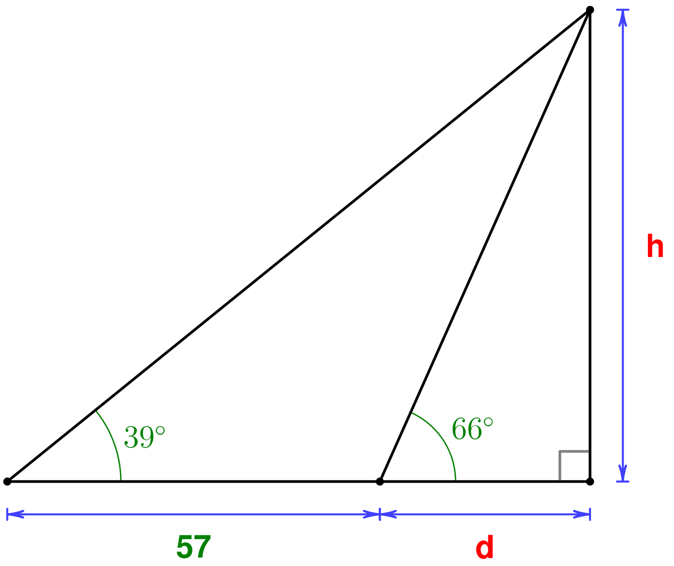
Enunciados

Calcula con dos decimales la longitud de la altura (h) y la distancia (d) señaladas en cada una de las siguientes figuras:

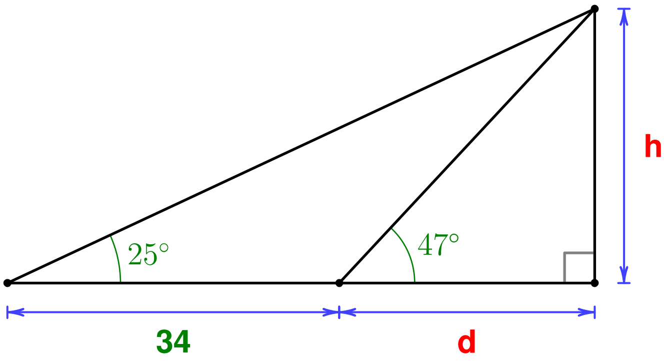
①



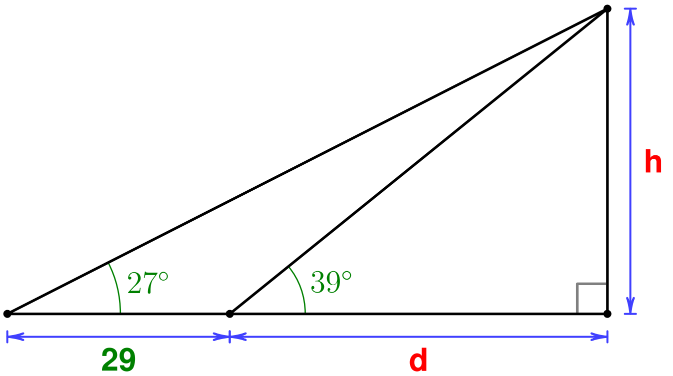
②



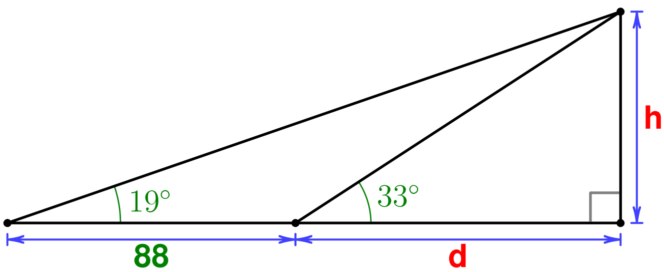
③



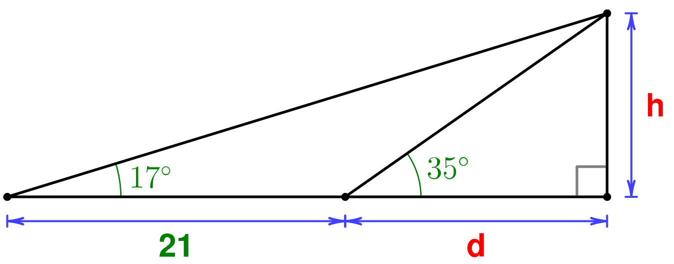
④



⑤



⑥

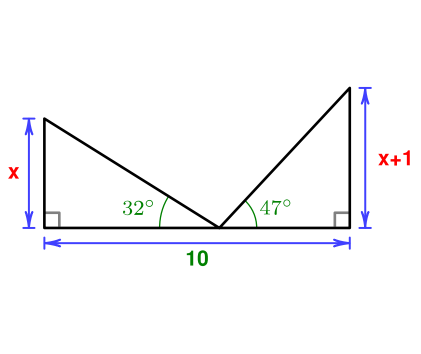
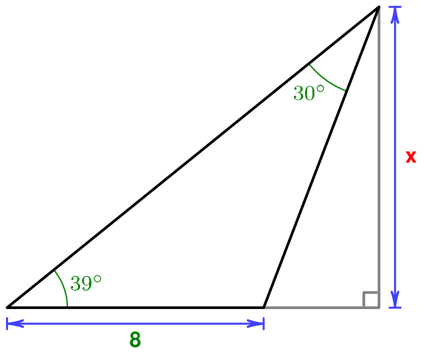
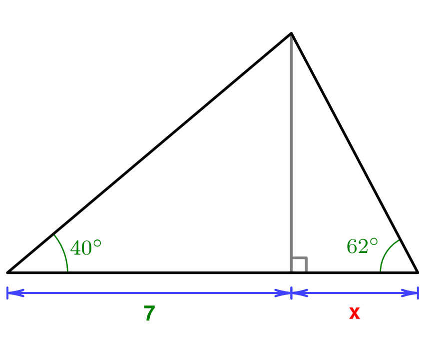


Enunciados

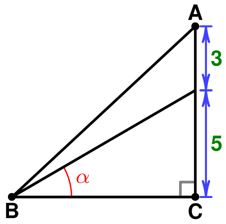
① Calcula con cinco cifras significativas el valor de la longitud «x» de la figura 1.

② Calcula con cinco cifras significativas el valor de la longitud «x» de la figura 2.

③ Calcula con cinco cifras significativas el valor de la longitud «x» de la figura 3.

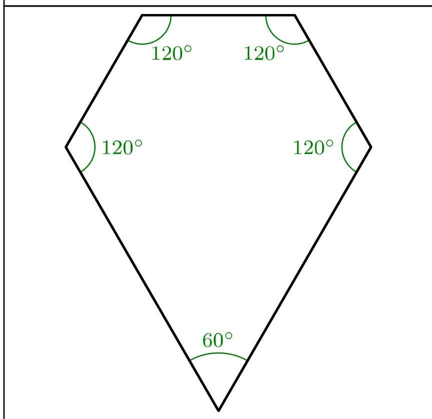
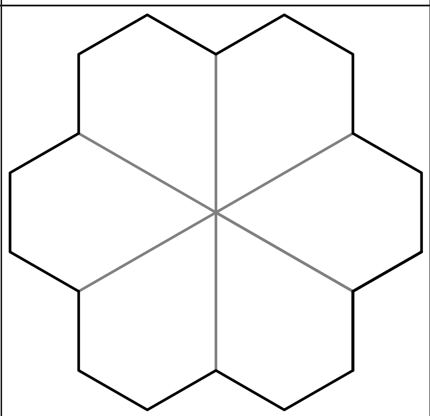
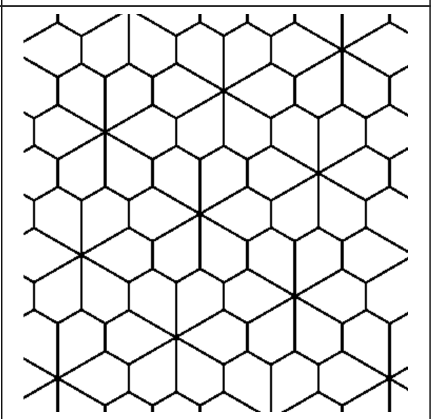
Figura 1	Figura 2	Figura 3
		

④ Calcula con cinco cifras significativas el perímetro y el área de un segmento circular sabiendo que su radio mide 5 y su sagita mide 3.



⑤ Calcula la amplitud del ángulo α de la figura de la derecha sabiendo que el ángulo ABC tiene una amplitud de 43°. Da el resultado en grados, minutos y segundos, redondeando al segundo.

⑥ Hay quince pentágonos convexos con los que es posible teselar el plano; es decir, cubrirlo completamente sin huecos ni solapamientos. Uno de ellos está representado en la figura 6a. Con seis, se puede formar la «flor» de la figura 6b y con ella se tesela el plano, como se ve en la figura 6c.

Figura 6a	Figura 6b	Figura 6c
		

Si el lado corto más corto del pentágono de la figura 6a mide uno, calcula con cinco cifras significativas el área de la flor de la figura 6b.

Resolución de un triángulo

- Resolver un triángulo consiste en averiguar las longitudes de sus tres lados y las amplitudes de sus tres ángulos.
- Para poder resolver un triángulo es necesario conocer tres de los seis valores, pero los tres valores conocidos no deben estar relacionados entre sí con ninguna fórmula.
  - Por ejemplo, no podemos resolver un triángulo conocidos los tres ángulos, porque sabemos que su suma debe ser 180° (podemos decir que nos «sobra» un ángulo).

Resolución de un triángulo rectángulo

- Como en un triángulo rectángulo ya se conoce uno de los datos (el ángulo recto), solo hay que averiguar los valores de los lados y de los ángulos agudos.
- Para resolver un triángulo rectángulo es necesario conocer dos datos más.

Método de resolución de un triángulo rectángulo

Para resolver un triángulo rectángulo contamos con estas herramientas:

- Los ángulos agudos son complementarios.
- El teorema de Pitágoras.
- Las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Las funciones arco seno, arco coseno y arco tangente.

Como norma general, usaremos siempre los datos originales para calcular las incógnitas; así conseguiremos minimizar los errores de cálculo. Solo hay una excepción: para calcular un ángulo agudo conocido el otro, bastará restar 90° menos el ángulo conocido, ya que esta operación no añade ningún error de cálculo.

Casos en la resolución de un triángulo rectángulo

Realmente, solo hay dos casos que sean fundamentalmente diferentes.

Conocidos dos lados

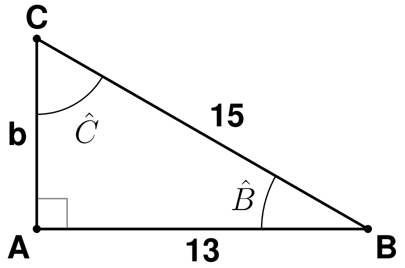
- Calculamos un ángulo agudo (cualquiera de los dos) aplicando la razón trigonométrica (seno, coseno o tangente) que lo relaciona con los lados conocidos y usando luego la función arco correspondiente.
- Calculamos el otro ángulo agudo como el complementario del ya calculado.
- Calculamos el tercer lado con el teorema de Pitágoras.
  - Para calcular el tercer lado no es una buena idea utilizar alguno de los ángulos calculados, porque casi siempre tendrán algún error de cálculo.

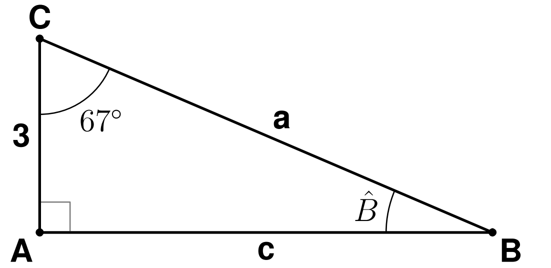
Conocidos un ángulo y un lado

- Calculamos uno de los lados desconocidos aplicando la razón trigonométrica (seno, coseno o tangente) que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos y luego despejándolo.
- Calculamos el otro lado desconocido aplicando la razón trigonométrica (seno, coseno o tangente) que lo relaciona con el lado y el ángulo dados como datos y luego despejándolo.
  - Para calcular el tercer lado no es una buena idea utilizar el teorema de Pitágoras, porque el lado ya calculado puede tener algún error de cálculo.
- Calculamos el otro ángulo agudo como el complementario del ángulo dado.

Enunciados

Resuelve los siguientes triángulos rectángulos. Da los lados con cinco cifras significativas y los ángulos que no sean exactos en grados, minutos y segundos, redondeando al segundo.

① 

② 

Resolución

① Conocemos dos lados. Hay que calcular el tercero y los dos ángulos agudos.

Comenzamos por calcular uno cualquiera de los ángulos; por ejemplo, el $\hat{C}$. Lo relacionamos con los lados conocidos mediante el seno:

$$\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{13}{15} \Rightarrow \hat{C}=\operatorname{arcsen}\frac{13}{15}=60°\,4'\,25''$$

Calculadora en modo DEG: SIN⁻¹ (1 3 ÷ 1 5) = °’” ⇰ 60°4°24.83

El otro ángulo agudo es el complementario del que acabamos de calcular:

$\hat{B}=90°-\hat{C}=90°-60°\,4'\,25''=29°\,55'\,35''$

Calculadora: 9 0 − Ans = °’” ⇰ 29°55°35.17

El lado desconocido lo calculamos mediante el teorema de Pitágoras:

$b^2+13^2=15^2 \Rightarrow b=\sqrt{15^2-13^2}=7{,}4833$

Calculadora: √ (1 5 x^2 − 1 3 x^2) = ⇰ 7.483314774

Solución: $\hat{B}=29°\,55'\,35''$; $\hat{C}=60°\,4'\,25''$; $b=7{,}4833$

② Conocemos un ángulo y un lado. Hay que calcular el otro ángulo y los otros dos lados.

Comenzamos por calcular uno cualquiera de los lados; por ejemplo, el «c». Lo relacionamos con los datos conocidos mediante la tangente:

$$\operatorname{tg}67°=\frac{c}{3} \Rightarrow c=3\cdot\operatorname{tg}67°=7{,}0676$$

Calculadora en modo DEG: 3 × TAN 6 7 = ⇰ 7.067557097

Calculamos el lado «a» relacionándolo con los datos conocidos mediante el coseno:

$$\cos 67°=\frac{3}{a} \Rightarrow a=\frac{3}{\cos 67°}=7{,}6779$$

Calculadora en modo DEG: 3 ÷ COS 6 7 = ⇰ 7.677913996

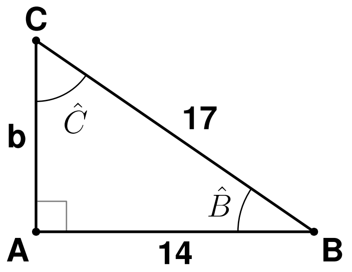
El ángulo desconocido es el complementario del dado:

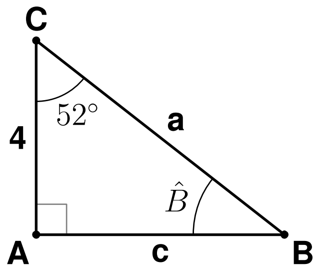
$\hat{B}=90°-\hat{C}=90°-67°=23°$

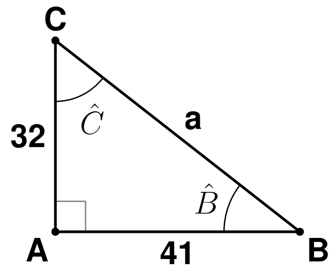
Solución: $\hat{B}=23°$; $a=7{,}6779$; $c=7{,}0676$

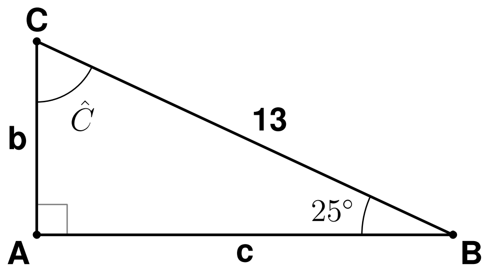
Enunciados

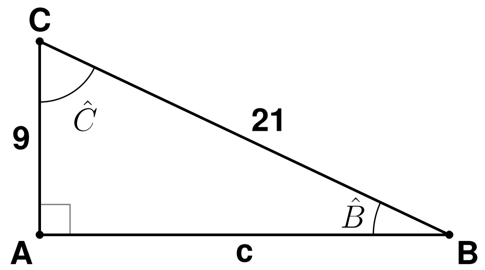
Resuelve los siguientes triángulos rectángulos. Da los lados con cinco cifras significativas y los ángulos que no sean exactos en grados, minutos y segundos, redondeando al segundo.

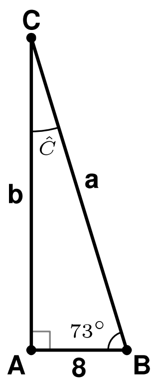
①


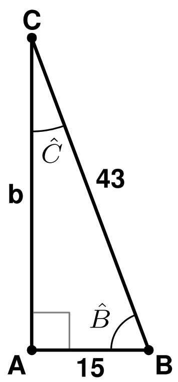
②


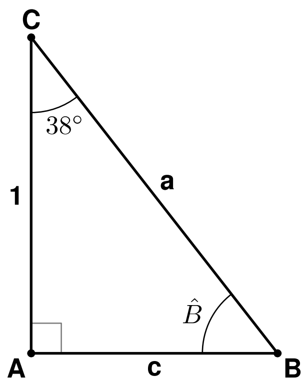
③


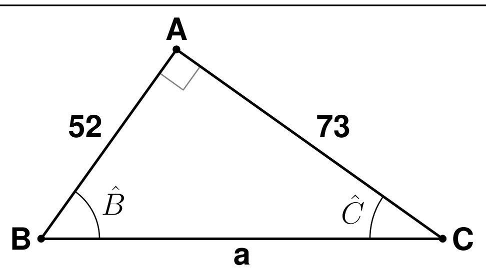
④


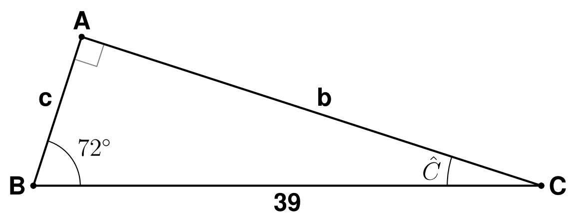
⑤


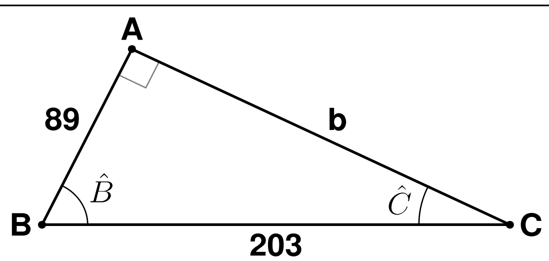
⑥


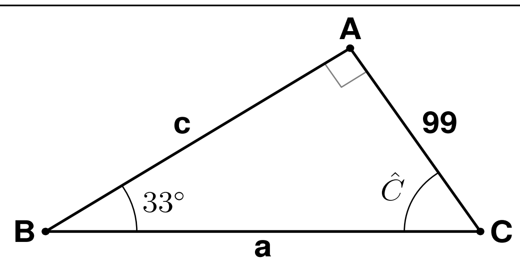
⑦


⑧


⑨


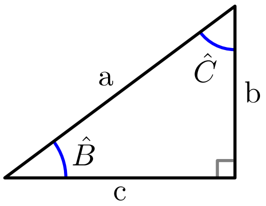
⑩


⑪


⑫


Enunciados

Usando la notación del triángulo de la figura de la derecha, resuelve los siguientes triángulos rectángulos. Da los lados con cinco cifras significativas y los ángulos que no sean exactos en grados, minutos y segundos, redondeando al segundo.



① a = 12,7; c = 7,5

② $\hat{C}$ = 27°; b = 67,3

③ b = 0,17; c = 0,22

④ $\hat{B}$ = 51°; a = 152

⑤ a = 115; b = 99

⑥ $\hat{C}$ = 79°; c = 0,113

⑦ a = 89; c = 31

⑧ $\hat{B}$ = 8°; b = 2

⑨ a = 57; b = 32

⑩ $\hat{C}$ = 49°; a = 100

⑪ b = 89; c = 94

⑫ $\hat{B}$ = 58°; c = 1,38

⑬ a = 1220; c = 892

⑭ $\hat{C}$ = 33°; b = 39

⑮ a = 1028; b = 921

⑯ $\hat{C}$ = 19°; a = 15

⑰ b = 92; c = 97

⑱ $\hat{B}$ = 67°; a = 114

⑲ a = 1104; b = 408

⑳ $\hat{C}$ = 84°; c = 124

㉑ a = 1,13; c = 0,72

㉒ $\hat{B}$ = 57°; c = 555

㉓ b = 85; c = 92

㉔ $\hat{C}$ = 87°; b = 12

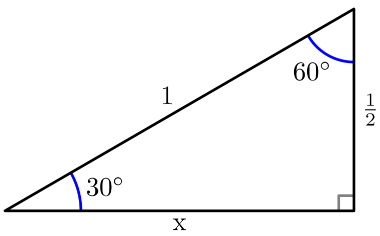
㉕ a = 17; b = 3

Razones trigonométricas exactas

Algunos ángulos comunes tienen razones trigonométricas que se pueden expresar fácilmente con radicales y fracciones. Se puede averiguar su valor usando triángulos de uso muy habitual

Razones trigonométricas exactas de 30° y 60°

Para averiguarlas necesitamos un triángulo rectángulo con algún ángulo de esa medida. Si en un triángulo equilátero trazamos una altura, obtenemos un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden precisamente 30° y 60°. Como para averiguar las razones trigonométricas no influye la longitud de los lados, partiremos de un triángulo equilátero cuyo lado mida la unidad. A la derecha vemos el triángulo rectángulo que vamos a usar.



Calculamos el valor de «x» usando el teorema de Pitágoras:

$$x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1^2 \Rightarrow x^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

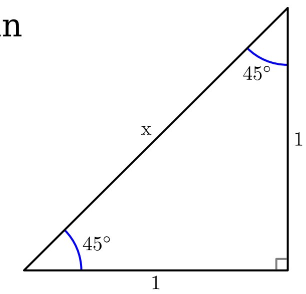
Y ahora, las razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}:1=\frac{1}{2}\ ;\ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}:1=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}:1=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \cos 60° = \frac{1}{2}:1=\frac{1}{2}\ ;\ \operatorname{tg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}$$

Razones trigonométricas exactas de 45°

Utilizamos un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan la unidad. Lo vemos a la derecha.



Calculamos el valor de «x» usando el teorema de Pitágoras:

$$x^2=1^2+1^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}$$

Y ahora, las razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \operatorname{tg} 45° = 1:1=1$$

Resumen

En estas tablas ves el resumen de los valores exactos de seno, coseno y tangente de 30°, 45° y 60°. A la izquierda, sin racionalizar; a la derecha, racionalizadas. Utilizarás en cada caso la expresión que más te interese.

	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

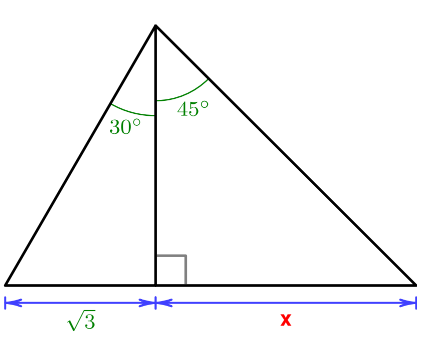
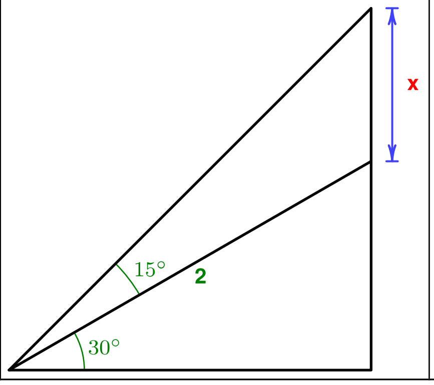
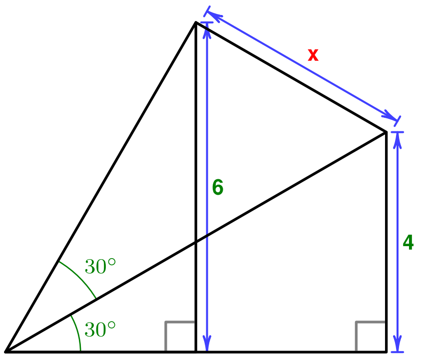
Enunciados

Para los siguientes problemas no debes utilizar la calculadora, sino trabajar simbólicamente con radicales y fracciones irreducibles.

① Calcula el valor exacto de la longitud «x» de la figura 1.

② Calcula el valor exacto de la longitud «x» de la figura 2.

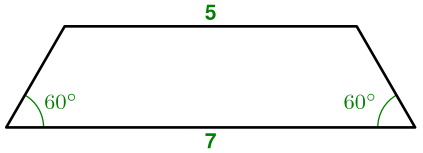
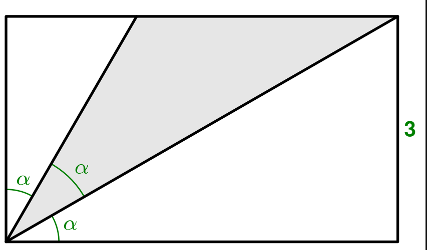
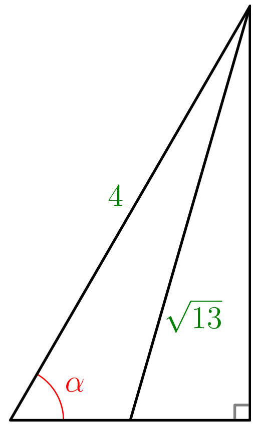
③ Calcula el valor exacto de la longitud «x» de la figura 3.

Figura 1	Figura 2	Figura 3
		

④ Calcula el valor exacto del área del trapecio isósceles de la figura 4.

⑤ Calcula el valor exacto del área del triángulo marcado en gris de la figura 5.

⑥ Calcula el valor exacto de la amplitud del ángulo α de la figura 6.

Figura 4	Figura 5	Figura 6
		

⑦ Calcula el valor exacto del área de un triángulo isósceles que tiene dos lados que miden 4 metros y definen un ángulo de 135°.

⑧ En una circunferencia dibujamos un ángulo central de 120°, su cuerda y su sagita correspondientes. Sabiendo que la sagita mide 3 metros, calcula el valor exacto de la longitud del radio de la circunferencia.

Explicación

Como sabes, algunas razones trigonométricas se pueden expresar de manera exacta usando radicales y fracciones irreducibles, lo que permite hacer algunos cálculos exactos sin utilizar calculadora. Una razón trigonométrica particularmente interesante es $\cos 36°$, porque se puede demostrar que

$$\boxed{\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

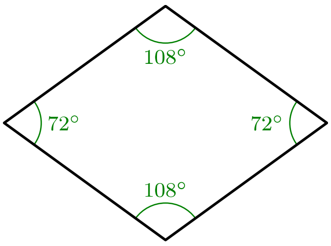
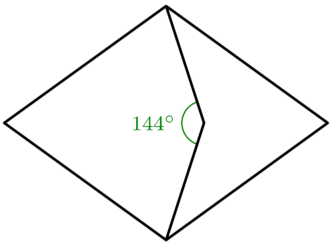
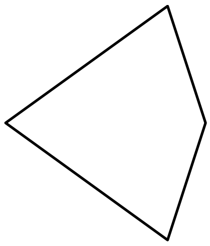
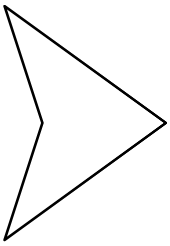
Enunciado

① Utiliza la calculadora para comprobar que la expresión numérica de $\cos 36°$ coincide con la de $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ hasta donde alcanza la calculadora.

Explicación

El matemático británico Roger Penrose (nacido en 1931) ha desarrollado en su larga y exitosa carrera numerosas investigaciones en diferentes campos de la ciencia. Uno de sus hallazgos más curiosos es la llamada teselación P2: es un conjunto de dos cuadriláteros obtenidos a partir de un rombo con los que es posible teselar el plano (es decir: cubrirlo completamente sin huecos ni solapamientos) tanto de manera periódica (siempre la misma disposición) como aperiódica (siempre cambiando la disposición).

En la figura 1 vemos el **rombo** original. En la figura 2 vemos cómo se descompone en dos cuadriláteros. En la figura 3 vemos el cuadrilátero de la izquierda, llamado en español **cometa** (en inglés, *kite*). En la figura 4 vemos el cuadrilátero de la derecha, llamado en español **flecha** (en inglés, *dart*).

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
			

Enunciados

Para los siguientes problemas no debes utilizar la calculadora, sino trabajar simbólicamente con radicales y fracciones irreducibles. Los resultados solicitados no dependen de la longitud del lado del rombo, de modo que tú eliges qué número o letra utilizar para resolver los problemas.

② Calcula de manera exacta el cociente de la división del área del rombo entre el área de la cometa.

③ Identifica el número real obtenido como resultado del problema anterior.

④ Calcula de manera exacta el cociente de la división del área de la cometa entre el área de la flecha.

⑤ Identifica el número real obtenido como resultado del problema anterior.

Identidades trigonométricas

- Son identidades (es decir, igualdades ciertas para cualquier valor) en las que intervienen razones trigonométricas.
- Tienen una gran importancia teórica y práctica para poder desarrollar teorías matemáticas más avanzadas y poder resolver algunos problemas.

Identidades trigonométricas sencillas

En este curso ya han aparecido las identidades trigonométricas más simples, que repetimos aquí:

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$	$(\operatorname{sen}\alpha)\cdot(\csc\alpha)=1$	$(\cos\alpha)\cdot(\sec\alpha)=1$	$(\operatorname{tg}\alpha)\cdot(\operatorname{ctg}\alpha)=1$	$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

Las tres identidades centrales permiten escribir también estas útiles identidades:

$\csc\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{1}{\csc\alpha}$	$\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sec\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$

Notación para las potencias de las razones trigonométricas

Existen muchas expresiones trigonométricas en las que aparecen potencias de razones trigonométricas. Por eso, se utiliza una manera de escribirlas sin paréntesis. Por ejemplo, en vez de escribir $(\operatorname{sen}\alpha)^2$, se escribe $\operatorname{sen}^2\alpha$.

Relación pitagórica

Es una de las identidades trigonométricas más utilizadas. Establece que dado un ángulo agudo α, la suma del cuadrado de su seno y el cuadrado de su coseno es 1.

$$\boxed{\alpha\in(0°,90°)\Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

Comprobación 1

$$\operatorname{sen}^2 30°+\cos^2 30°=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

Comprobación 2

$$\operatorname{sen}^2 45°+\cos^2 45°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{4}{4}=1$$

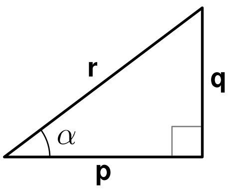
Comprobación 3

$\operatorname{sen}^2 37°+\cos^2 37°=1$

Calculadora en modo DEG: (SIN 3 7) x^2 + (COS 3 7) x^2 = ⇨ 1

Demostración

Utilizando el triángulo rectángulo de la derecha:



$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{p}{r}\right)^2+\left(\frac{q}{r}\right)^2=\frac{p^2}{r^2}+\frac{q^2}{r^2}=\frac{p^2+q^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1$$

Como ves, en la demostración se usa el teorema de Pitágoras, lo que da nombre a la relación.

Utilización

La relación pitagórica se usa para calcular el seno (o el coseno) de un ángulo cuando se conoce su coseno (o su seno) y para demostrar otras identidades.

Consecuencias de la relación pitagórica

A partir de la relación pitagórica se deducen varias expresiones útiles, de uso muy común. Vemos algunas.

Obtener sen²α conocido cos²α

$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$

Obtener cos²α conocido sen²α

$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha$

Relacionar tg²α y sec²α

$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha+1 = \sec^2\alpha$

Demostración

Dividimos la relación pitagórica entre cos²α:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha+1 = \sec^2\alpha$$

Observación

Te desarrollamos detenidamente las divisiones con potencias de razones trigonométricas que hemos realizado porque es algo que se hace muy a menudo y conviene hacerlo con rapidez:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{(\operatorname{sen}\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2} = \frac{(\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\alpha)}{(\cos\alpha)(\cos\alpha)} = (\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha) = (\operatorname{tg}\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{(\cos\alpha)(\cos\alpha)} = (\sec\alpha)(\sec\alpha) = (\sec\alpha)^2 = \sec^2\alpha$$

Relacionar ctg²α y csc²α

$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha$

Demostración

Dividimos la relación pitagórica entre sen²α:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Resumen

Hemos obtenido a partir de la relación pitagórica cuatro identidades trigonométricas más:

$\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$	$\cos^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha$	$\operatorname{tg}^2\alpha+1 = \sec^2\alpha$	$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha$

De todas ellas, la más importante es la tercera, ya que las dos primeras son muy obvias y la cuarta se usa menos.

Técnicas

También hemos aprendido dos técnicas importantes:

- Si α es un ángulo agudo, cualquier identidad trigonométrica se puede dividir entre $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ o alguna de sus potencias puesto que $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ y $\cos\alpha \neq 0$
- Se pueden dividir potencias de razones trigonométricas expresadas con notación abreviada de una manera muy simple, sin desarrollarlas.

Complejidad de la trigonometría

La parte teórica de la trigonometría puede parecer complicada, puesto que hay una enorme cantidad de fórmulas e identidades, como verás con amplitud en el nivel 5 de este curso. Pero también hay que saber que como todas las razones trigonométricas se definen a partir de muy pocos componentes, están muy relacionadas entre sí y eso facilita las cosas.

Por eso, te animamos a que te vayas familiarizando con las identidades trigonométricas y sus demostraciones poco a poco. Cuanto más las trabajes, mejor las conocerás y más fácil te resultará demostrar las nuevas. No pierdas de vista que cuando se estudian algunos niveles más avanzados de matemáticas, el correcto manejo de las fórmulas e identidades trigonométricas resulta esencial.

Técnicas de demostración de identidades

Cuando afontas la demostración de una identidad, puedes intentar varias técnicas; con que te funcione una de ellas, tienes suficiente.

Comenzar por un miembro y terminar en el otro

Eliges uno de los dos miembros de la identidad (no tiene por qué ser el primero, perfectamente puedes arrancar del segundo) y vas haciendo trasformaciones usando cualquiera de las identidades que ya conoces (tanto trigonométricas como algebraicas) hasta llegar exactamente al otro miembro.

Ejemplo 1. Demuestra que $\dfrac{\operatorname{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha}=1$

Comenzamos por el primer miembro y terminamos en el segundo:

$$\frac{\operatorname{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha} = \frac{(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha} = \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$$

Hemos utilizado $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ y la relación pitagórica.

Ejemplo 2. Demuestra que $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sec\alpha}{\csc\alpha}$

Comenzamos por el segundo miembro y terminamos en el primero:

$$\frac{\sec\alpha}{\csc\alpha} = \frac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

Desarrollar cada miembro independientemente hasta llegar a lo mismo

Desarrollas un miembro hasta llegar a una expresión que te parezca sencilla. A continuación, desarrollas el otro miembro hasta llegar a la misma expresión que antes. Dos expresiones iguales a una tercera son iguales entre sí, con lo que queda demostrada la identidad.

Ejemplo 3. Demuestra que $\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

$$\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha} = \frac{(\cos\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)}{(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)} = \frac{(\cos\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{(\cos\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Enunciados

Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

① $(1-\cos^2\alpha)\cdot\csc^2\alpha = 1$

② $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{(\cos\alpha)\cdot(\sec\alpha)}{\csc\alpha}$

③ $(\operatorname{tg}\alpha)\cdot(\operatorname{sen}\alpha)+\cos\alpha = \sec\alpha$

④ $\dfrac{\sec^2\alpha-1}{\sec^2\alpha}=\operatorname{sen}^2\alpha$

⑤ $(\sec^2\alpha)\cdot(\csc^2\alpha) = \sec^2\alpha+\csc^2\alpha$

⑥ $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha = (\sec\alpha)\cdot(\csc\alpha)$

⑦ $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\alpha}=2\cdot\sec^2\alpha$

⑧ $\dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}=(\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha)^2$

⑨ $\dfrac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-1}$

⑩ $\dfrac{\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha$

Enunciados

Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

① $\text{ctg}^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}\cdot\dfrac{1}{\sec^2\alpha}$

② $\dfrac{\cos\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}=2\cdot\text{tg}\,\alpha$

③ $\dfrac{\csc\alpha}{\text{sen}\,\alpha}-\dfrac{\text{ctg}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha}=1$

④ $\text{tg}^4\alpha+\text{tg}^2\alpha=\sec^4\alpha-\sec^2\alpha$

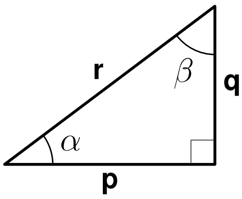
⑤ $(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)\cdot(1+\text{ctg}^2\alpha)=(1+\text{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$

Enunciados

Te proponemos que consideres los dos siguientes problemas como relacionados.

⑥ Usando el triángulo rectángulo de la figura de la derecha, compueba que $\text{sen}\,\alpha=\cos\beta$.

⑦ Demuestra que si los ángulos α y β son complementarios, entonces se verifica: $\text{sen}^2\alpha+\text{sen}^2\beta=\cos^2\alpha+\cos^2\beta$



Enunciados

Estudiaremos en profundidad las ecuaciones trigonométricas en el nivel 5 de este curso, pero los siguientes problemas te orientan hacia el trabajo que haremos.

Averigua la amplitud de todos los ángulos agudos α que verifican cada una de las siguientes expresiones:

⑧ $\text{tg}^2\alpha-2{,}225\cdot\text{tg}\,\alpha+1=0$

⑨ $\text{sen}^2\alpha-2{,}05\cdot\text{sen}\,\alpha+1=0$

Enunciados

Con los siguientes problemas puedes ir constatando que el uso de identidades trigonométricas facilita la resolución de algunas ecuaciones trigonométricas.

Averigua la amplitud de todos los ángulos agudos α que verifican cada una de las siguientes expresiones:

⑩ $\text{tg}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha=3$

⑪ $\text{sen}\,\alpha-\cos^2\alpha=0{,}715$

⑫ $\sec^2\alpha=5\cdot\text{tg}\,\alpha$

Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo

Las seis razones trigonométricas de un ángulo agudo están tan relacionadas entre sí que, conocida cualquiera de ellas, es posible averiguar las otras cinco. Esto es importante tanto a nivel práctico, para resolver problemas, como a nivel teórico, para desarrollar nuevas teorías.

Valores aproximados con la calculadora

Supongamos que conocemos una razón trigonométrica de un ángulo agudo. Podemos utilizar la calculadora para averiguar el valor aproximado de otra.

En todos los ejemplos supondremos que α es un ángulo agudo y nos piden los resultados con cuatro cifras significativas.

Si el producto es la unidad

Si el producto de la que conocemos y la que necesitamos es la unidad, bastará hacer una división. Sabes que hay tres parejas de razones trigonométricas cuyo producto es la unidad: coseno y secante, seno y cosecante, y tangente y cotangente.

Ejemplo 1. Si $\sec\alpha = 3{,}7$, calcula $\cos\alpha$.

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha} = \dfrac{1}{3{,}7} = 0{,}2703$. Calculadora: `1` `÷` `3` `.` `7` `=` ⇰ 0,27027027

También podemos usar la tecla de número inverso: `3` `.` `7` `x⁻¹` `=`

Pasando por el valor del ángulo

Hay muchos casos en los que el método más rápido es averiguar el valor del ángulo y a partir de él la razón que nos piden. Podemos hacer la operación completamente con la calculadora, sin anotar resultados intermedios.

Ejemplo 2. Si $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}3$, calcula $\operatorname{sen}\alpha$.

$\operatorname{tg}\alpha = 2{,}3 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\operatorname{arctg} 2{,}3 = 0{,}9171$.

Calculadora en modo DEG: `SIN` `TAN⁻¹` `2` `.` `3` `=` ⇰ 0,917070056

Si nos piden varias razones trigonométricas, podemos almacenar el valor del ángulo en una memoria de la calculadora y luego usarlo cuantas veces necesitemos.

Ejemplo 3. Si $\cos\alpha = 0{,}87$, calcula $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{ctg}\alpha$.

$\cos\alpha = 0{,}87 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}87 = 29{,}54°$ (lo escribimos aquí con la precisión que nos parezca; no importa cuánta, porque usaremos el valor exacto en la calculadora).

Calculadora en modo DEG: `COS⁻¹` `0` `.` `3` `STO` `A` `=` ⇰ 29,5413605

Y ahora: $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}4931$ y $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}765$

Calculadora en modo DEG:

Primer paso: `SIN` `Ans` `=` ⇰ 0,493051721

Segundo paso: `1` `÷` `TAN` `RCL` `A` `=` ⇰ 1,764520764

El caso más difícil aparece cuando para calcular el ángulo hay que averiguar primero seno, coseno o tangente.

Ejemplo 4. Si $\csc\alpha = 1{,}57$, calcula $\operatorname{tg}\alpha$.

$\csc\alpha = 1{,}57 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\operatorname{arcsen}(1:1{,}57) = 0{,}8262$.

Calculadora en modo DEG: `TAN` `SIN⁻¹` `(` `1` `÷` `1` `.` `5` `7` `)` `=` ⇰ 0,826220583

Enunciados

En los siguientes ejercicios se da una razón trigonométrica de un ángulo agudo y se piden uno o más valores de otras razones trigonométricas. Usando exclusivamente la calculadora, escribe los valores pedidos con cuatro cifras significativas.

①		②		③	
sen	csc	ctg	tg	sec	cos
0,157		9,31		1,9	

④		⑤		⑥	
tg	ctg	cos	sec	csc	sen
1,98		0,117		3,07	

⑦			⑧		
sen	cos	tg	tg	sen	cos
0,575			2,77		

⑨			⑩		
cos	sec	ctg	tg	cos	sec
0,842			3,82		

⑪			⑫		
ctg	sen	tg	csc	tg	cos
0,119			2,45		

⑬					
sen	cos	tg	sec	csc	ctg
0,477					

⑭					
tg	sen	cos	sec	csc	ctg
0,885					

⑮					
sec	sen	cos	tg	csc	ctg
1,29					

Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo

Las seis razones trigonométricas de un ángulo agudo están tan relacionadas entre sí que, conocida cualquiera de ellas, es posible averiguar las otras cinco. Esto es importante tanto a nivel práctico, para resolver problemas, como a nivel teórico, para desarrollar nuevas teorías.

Valores exactos con fracciones y radicales

Conocemos de modo exacto el valor de una razón trigonométrica utilizando radicales o fracciones irreducibles y necesitamos averiguar el valor de otra razón trigonométrica, también usando radicales y fracciones irreducibles si es necesario.

Para conseguirlo, utilizaremos las identidades trigonométricas que relacionan unas razones con otras, en el orden que mejor nos parezca. Es costumbre en estos problemas dar el resultado final del modo más sencillo posible y sin que aparezcan radicales en el denominador, luego puede ser necesario simplificar radicales y racionalizar.

Enunciado

Si α es un ángulo agudo y $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, calcula de modo exacto las demás razones trigonométricas.

Resolución

El cálculo de la cosecante es inmediato, pero exige una racionalización:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Usamos la relación pitagórica para calcular el coseno:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Como α es un ángulo agudo, todas sus razones trigonométricas son positivas, de modo que continuamos la operación con el signo «más»:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{5}{25}} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Calculamos la cosecante a partir de alguna de las expresiones del coseno, la que más nos convenga:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

La tangente se puede calcular ahora que conocemos el seno y el coseno:

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{1}{2}$. Por tanto, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Solución

$\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\sec\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $\csc\alpha = \sqrt{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 2$

Valores exactos de razones trigonométricas con fracciones y radicales

Conocemos de modo exacto el valor de una razón trigonométrica utilizando radicales o fracciones irreducibles y necesitamos averiguar el valor de otra razón trigonométrica, también usando radicales y fracciones irreducibles si es necesario.

Para conseguirlo, utilizaremos las identidades trigonométricas que relacionan unas razones con otras, en el orden que mejor nos parezca. Suele haber varias posibilidades para llegar correctamente al resultado, así que procuramos buscar la que parezca más sencilla. Y, desde luego, se pueden hacer las operaciones en muchos órdenes diferentes, será tu gusto el que determine cómo hacerlo.

Es costumbre en estos problemas dar el resultado final del modo más sencillo posible y sin que aparezcan radicales en el denominador, luego puede ser necesario simplificar radicales y racionalizar.

Enunciado

Si α es un ángulo agudo y $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, calcula de modo exacto las demás razones trigonométricas.

Resolución

El cálculo de la cotangente es inmediato, pero exige una racionalización:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

La tangente y la secante están relacionadas:

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1 = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = \pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$$

Como α es un ángulo agudo, todas sus razones trigonométricas son positivas, de modo que continuamos la operación con el signo «más»:

$\sec\alpha = \sqrt{(2\sqrt{2})^2+1} = \sqrt{4\cdot 2+1} = 3$. Por tanto, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha} = \dfrac{1}{3}$.

Hay varias posibilidades para calcular ahora el valor del seno. Mostramos la que nos parece más sencilla:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = (\operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha) = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Solo falta la cosecante:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Solución

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$; $\sec\alpha = 3$; $\csc\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Enunciados

Calcula de modo exacto todas las razones trigonométricas del ángulo agudo α usando el dato de cada enunciado. Escribe los resultados del modo más sencillo que sea posible, con radicales y fracciones irreducibles si es necesario, y sin que aparezcan radicales en el denominador.

① $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$

② $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$

③ $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$

④ $\sec\alpha = \sqrt{3}$

⑤ $\csc\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

⑥ $\operatorname{ctg}\alpha = 3$

⑦ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

⑧ $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$

⑨ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$

⑩ $\sec\alpha = 5$

⑪ $\csc\alpha = \dfrac{85}{13}$

⑫ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

⑬ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{24}}{7}$

⑭ $\cos\alpha = \dfrac{5}{8}$

⑮ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{51}}{7}$

⑯ $\sec\alpha = 9$

⑰ $\csc\alpha = \dfrac{4}{3}$

⑱ $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{6}$

Números y formas

Ya desde el nivel 1 de este curso llevas viendo la utilidad de utilizar números para manejar formas; es decir: unir aritmética y geometría. Ahora verás de una manera más profunda cómo utilizar esa relación.

Geometría analítica

Llamamos geometría analítica a la parte de la geometría que se apoya en métodos numéricos para resolver problemas. Los métodos pueden ser desde simple aritmética hasta avanzado análisis matemático, pasando por técnicas algebraicas.

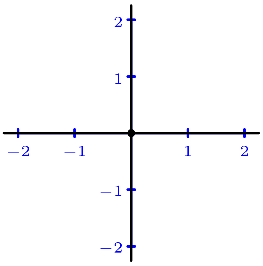
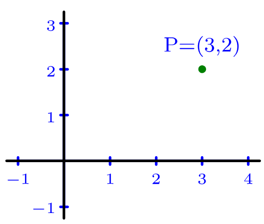
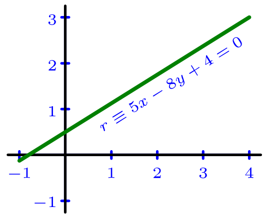
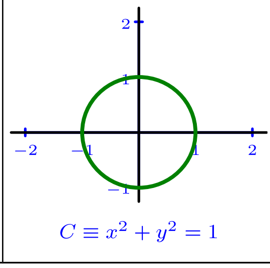
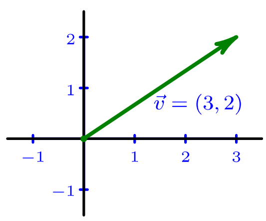
Creadores de la geometría analítica

Es muy difícil encontrar en la historia de las creaciones humanas, tanto científicas como técnicas, humanísticas o artísticas algún desarrollo que se pueda considerar completamente original. Casi todas las ideas se basan, aunque sea ligeramente, en ideas anteriores. Lo que no quita ningún mérito, porque a partir de una idea básica hay que realizar un intenso trabajo para obtener provecho.

En el caso de la geometría analítica, aunque hay muchos antecedentes, la idea principal se atribuye al matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650). El nombre «coordenadas cartesianas», que aprendiste en el nivel 1 de este curso, proviene precisamente del apellido Descartes, que el propio René latinizó como *Cartesius*.

Ideas básicas de la geometría analítica plana

- ✱ Se utiliza como referencia dos rectas perpendiculares llamadas **ejes de coordenadas** que se cortan en el **origen de coordenadas**.
- ✱ Los **puntos** del plano se representan mediante un par de números reales llamados **coordenadas** del punto.
- ✱ Algunas figuras geométricas se representan mediante expresiones algebraicas que se denominan ecuaciones de la figura.
- ✱ El conjunto de los puntos de una **recta** se representa mediante una expresión algebraica lineal que se denomina **ecuación** de la recta.
- ✱ El conjunto de puntos de una **circunferencia** se representa mediante una expresión algebraica cuadrática que se denomina ecuación de la circunferencia.
- ✱ En el siglo XIX se desarrolla el concepto de **vector**, que facilita enormemente el trabajo en geometría analítica. Un vector del plano se representa mediante un par de números reales llamados **componentes** del vector.

Los ejes de coordenadas, con el origen (0,0)	Punto P=(3,2), de coordenadas 3 y 2	La recta r, de ecuación $r \equiv 5x-8y+4=0$	La circunferencia C, de ecuación $C \equiv x^2+y^2=1$	Vector $\vec{v}=(3,2)$, de componentes 3 y 2
				

Producto cartesiano de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, llamamos producto cartesiano de A y B, escrito simbólicamente A×B, al conjunto de pares de elementos formados por un elemento de A y un elemento de B, en ese orden. Definido abreviadamente:

$$\boxed{A\times B = \{(a,b) \mid a\in A \wedge b\in B\}}$$

Ejemplo 1. Consideramos los conjuntos A = {α,β,γ,δ} y B = {★,■,♣,▲}. Mostramos en dos tablas todos los elementos de los conjuntos A×B y A×A:

A×B	α	β	γ	δ
★	(α,★)	(β,★)	(γ,★)	(δ,★)
■	(α,■)	(β,■)	(γ,■)	(δ,■)
♣	(α,♣)	(β,♣)	(γ,♣)	(δ,♣)
▲	(α,▲)	(β,▲)	(γ,▲)	(δ,▲)

A×A	α	β	γ	δ
α	(α,α)	(β,α)	(γ,α)	(δ,α)
β	(α,β)	(β,β)	(γ,β)	(δ,β)
γ	(α,γ)	(β,γ)	(γ,γ)	(δ,γ)
δ	(α,δ)	(β,δ)	(γ,δ)	(δ,δ)

Ejemplo 2. Si C={♥,✿} y D={♜,♞}, C×D={(♥,♜),(♥,♞),(✿,♜),(✿,♞)}

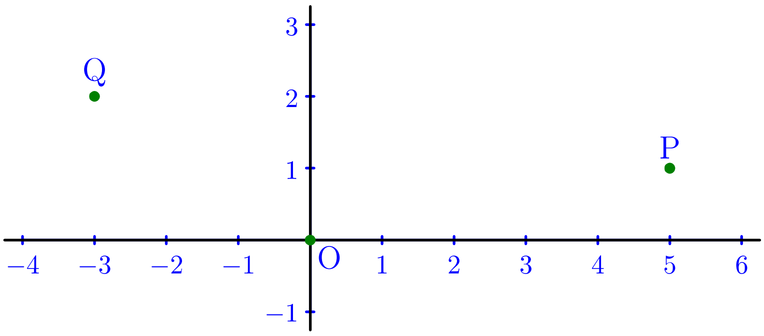
Conjunto de puntos del plano

En geometría analítica definimos el conjunto de puntos del plano como el producto cartesiano del conjunto de los números reales por él mismo. En vez de escribirlo como ℝ×ℝ, se escribe ℝ². Definido abreviadamente:

$$\boxed{\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}}$$

Naturalmente, con este conjunto nos vamos a referir al mismo conjunto que llevas utilizando desde que empezarte a dibujar en un papel. La diferencia es que ahora utilizaremos otras técnicas para manejarlo.

- ✱ Los números reales que forman un punto se llaman **coordenadas** del punto.
- ✱ Es costumbre nombrar los puntos con letras mayúsculas.
  - ■ Ejemplo 3. Punto P=(5,1); punto Q=(–3,2)
- ✱ Llamamos **abscisa** de un punto al primer elemento del par.
  - ■ Ejemplo 4. abscisa(P)=5, abscisa(Q)=–3
- ✱ Llamamos **ordenada** de un punto al segundo elemento del par.
  - ■ Ejemplo 5. ordenada(P)=1, ordenada(Q)=2.
- ✱ Llamamos **origen de coordenadas** al punto (0,0), que se suele denotar como «O» (la letra o mayúscula). Es decir, O=(0,0).



¿Operaciones con puntos?

En muchos textos de matemáticas se consideran dos operaciones con puntos del plano: la suma de dos puntos y el producto de un número real y un punto. Sin embargo, en este curso pensamos que ninguna de las dos operaciones tiene significado geométrico alguno, por lo que no las vamos a desarrollar. No obstante, cuando definamos el **vector de posición** de un punto del plano, llegaremos a un consenso que permitirá poner de acuerdo las dos maneras de ver esta cuestión.

Trasformaciones del plano

Una de las áreas más fructíferas de la matemática es el estudio de funciones que se aplican a puntos del plano y los relacionan con otros puntos del plano. Por ejemplo, giros, traslaciones, simetrías, etcétera. Además de su aplicación científica, es notable su uso en el desarrollo de videojuegos: todo lo que ocurre en la pantalla de un videojuego 2D se calcula como trasformaciones del plano.

Es decir, una trasformación del plano es cualquier función así:

$$\boxed{f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$$

Ejemplo 1

Consideramos la trasformación del plano dada como **S(x,y) = (16−x,y)** y vamos a comprobar que se trata de una simetría respecto a una recta vertical aplicándola a los cuatro vértices A, B, C y D de un cuadrado:

A=(1,3) ⇒ S(A)=(15,3)	B=(3,7) ⇒ S(B)=(13,7)	C=(7,5) ⇒ S(C)=(9,5)	D=(5,1) ⇒ S(D)=(11,1)

Vemos el resultado en la figura 1.

Ejemplo 2

Consideramos la trasformación del plano dada como **T(x,y) = (x+8,y)** y vamos a comprobar que se trata de una traslación hacia la derecha aplicándola a los cuatro vértices A, B, C y D de un cuadrado:

A=(1,3) ⇒ T(A)=(9,3)	B=(3,7) ⇒ T(B)=(11,7)	C=(7,5) ⇒ T(C)=(15,5)	D=(5,1) ⇒ T(D)=(13,1)

Vemos el resultado en la figura 2.

Las figuras

Figura 1

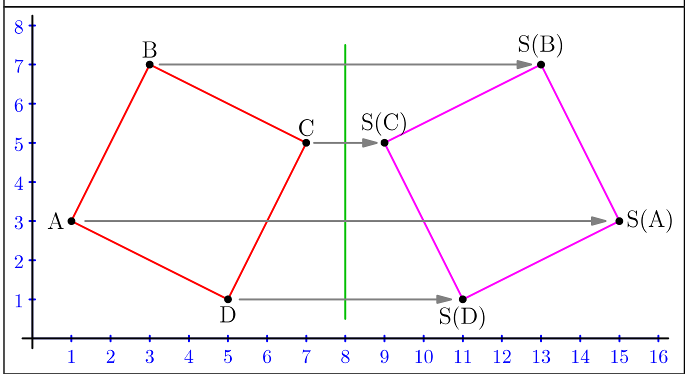
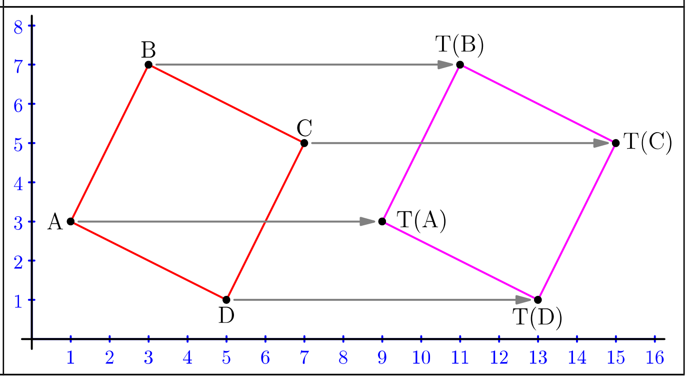


Figura 2



Magnitudes escalares y magnitudes vectoriales

Hasta el momento en este curso solo has utilizado magnitudes escalares, como la masa, el tiempo y la longitud; son magnitudes que solo necesitan un número para ser expresadas, normalmente acompañado de una unidad de medida. Sin embargo, hay magnitudes que necesitan más información para ser comprendidas; son las magnitudes que llamamos vectoriales.

Ejemplo de magnitud vectorial

Supongamos que manejas dos imanes; cada uno tiene dos polos, que se suelen denominar norte y sur. Sabes que los imanes se atraen por los polos diferentes pero se repelen por polos iguales. Pues bien, la fuerza que se establece entre dos imanes es un ejemplo de magnitud vectorial, ya que es necesario saber tres valores para determinar completamente la fuerza que ejerce un polo de un imán sobre un polo del otro:

- El **módulo** de la fuerza, que es su valor numérico; en unidades del sistema internacional, se mide en newtons.
- La **dirección** de la fuerza, que será la de la línea que une los polos.
- El **sentido** de la fuerza, que será de alejamiento o acercamiento, según sean los polos iguales o diferentes.

Características de una magnitud vectorial

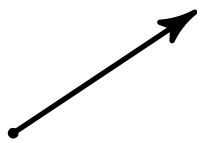
Una magnitud vectorial tiene tres características:

- El **módulo**. Es un valor numérico que nunca es negativo. Puede tener asociado una unidad de medida.
- La **dirección**. En matemáticas la palabra dirección significa «conjunto de rectas paralelas»; por tanto, la dirección de una magnitud vectorial vendrá dada por una recta.
- El **sentido**. Cada dirección tiene dos sentidos: hacia un lado y hacia el otro. La magnitud presentará uno de los dos.

Representación de una magnitud vectorial

Las magnitudes vectoriales se representan con una flecha (segmento orientado):

- El **módulo** se representa con la longitud del segmento.
- La **dirección** viene dada por la dirección de la recta en la que se apoya el segmento.
- El **sentido** viene dado por la punta de la flecha.



El caso de la velocidad

La velocidad es una magnitud que hasta el momento hemos considerado escalar; por ejemplo, decimos que un automóvil circula a 85 km/h. Pero, en realidad, es una magnitud vectorial, porque para conocer completamente la velocidad del automóvil hace falta, además del número que hemos indicado, la **dirección** (no es lo mismo ir por una carretera que por otra) y el **sentido** (no es lo mismo salir de una población que dirigirse a ella). El contexto de la situación nos indicará si necesitamos usar la velocidad como magnitud escalar o vectorial.

- Si consideramos la velocidad como magnitud vectorial, su **módulo** recibe el nombre de celeridad.
- En la vida real, a menudo se confunden los significados de dirección y sentido.

Conjunto de vectores del plano

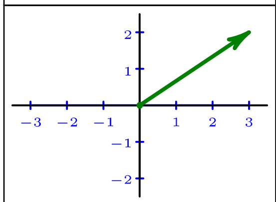
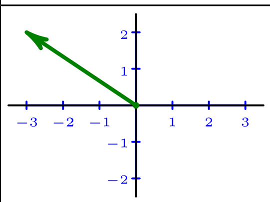
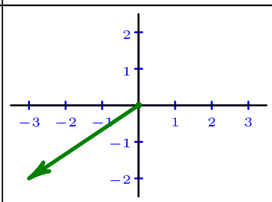
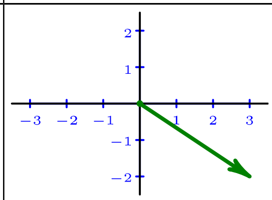
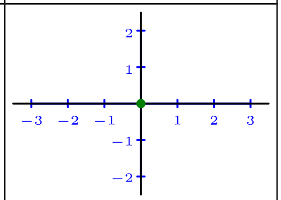
En geometría analítica definimos el conjunto de vectores del plano como el producto cartesiano del conjunto de los números reales por él mismo. En vez de escribirlo como $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, se escribe $\mathbb{R}^2$. Definido abreviadamente:

$$\boxed{\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}}$$

- ✱ Los números reales que forman un vector se llaman **componentes** del vector; son, por tanto, la primera componente y la segunda componente.
- ✱ Es costumbre nombrar los vectores con letras minúsculas. Además, en la enseñanza secundaria es habitual colocar una pequeña flecha sobre la letra para facilitar su reconocimento como un vector.
  - ■ Ejemplo 1. Vector $\vec{v}=(5,1)$; vector $\vec{w}=(-7,3)$
- ✱ Una notación habitual para las componentes de un vector es usar la misma letra que el nombre del vector con diferentes subíndices.
  - ■ Ejemplo 2. Vector $\vec{u}=(u_1,u_2)$.
- ✱ Llamamos **vector nulo** o **vector cero** al vector (0,0), que se suele denotar como $\vec{o}$ (el número 0 con una flecha sobre él). Es decir, $\vec{o}=(0,0)$.

Representación gráfica de los vectores del plano

- ✱ Para representar gráficamente los vectores de $\mathbb{R}^2$ se utilizan los mismos ejes de coordenadas que para representar gráficamente los puntos de $\mathbb{R}^2$.
- ✱ Cada vector no nulo se representa como una **flecha** (es decir, un segmento orientado) que comienza en el origen de coordenadas y finaliza en el punto que tiene como coordenadas las componentes del vector.
- ✱ El vector nulo se representa como el punto origen de coordenadas.

Ejemplo 3	Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 6	Ejemplo 7
				
Vector (3,2)	Vector (–3,2)	Vector (–3,–2)	Vector (3,–2)	Vector (0,0)

Diferencia entre $\mathbb{R}^2$ puntos y $\mathbb{R}^2$ vectores

Usamos el mismo conjunto $\mathbb{R}^2$ tanto para definir puntos del plano como para definir vectores del plano. Si solo viéramos un par de números reales, no sabríamos decir si corresponden a un punto o a un vector. Para distinguirlos, nos hace falta contexto: que nos digan explícitamente qué es o lo señalen implícitamente con el tipo de notación que se usa habitualmente.

Pero la diferencia más importante es qué operaciones podemos definir con puntos y qué operaciones podemos definir con vectores. En matemáticas no solo nos interesan los elementos de un conjunto, sino sus **relaciones**. Un conjunto junto con las relaciones forman una **estructura**, que es lo más importante.

Resumiendo: aunque $\mathbb{R}^2$ puntos y $\mathbb{R}^2$ vectores sean el mismo conjunto, tienen diferentes estructuras porque definimos con ellos diferentes operaciones.

Dos modelos de vectores del plano

Suele sorprender que en la educación secundaria se utilicen dos modelos diferentes de vectores del plano:

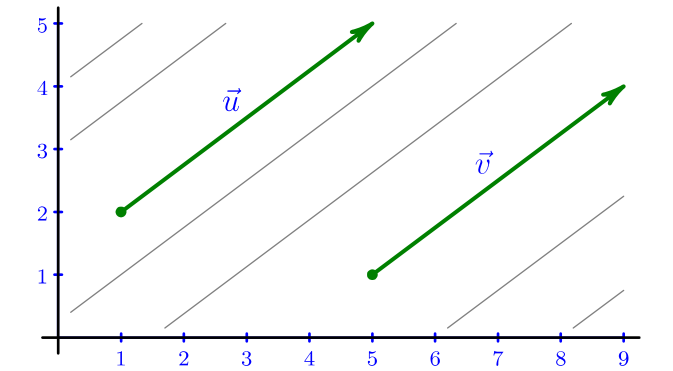
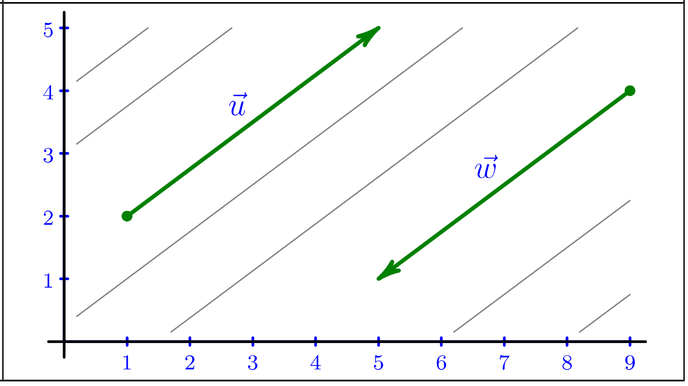
* Por un lado, un vector es una flecha (dicho más apropiadamente, un segmento orientado), que tiene asociados módulo, dirección y sentido.
* Por otro lado, un vector es un par de números reales.

Podría parecer que son dos conceptos distintos, cuando solo son dos maneras diferentes de tratar el mismo concepto; es decir, hay dos modelos de la misma idea.

* Cuando necesitamos entender cómo actúa un vector, lo más natural es examinar su módulo, dirección y sentido, como se hace en física y haremos en geometría analítica.
* Cuando tenemos que operar con vectores, es mucho más cómodo usar sus componentes.

Ejemplos

En la figura 1 vemos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que tienen el mismo módulo (lo podemos calcular con el teorema de Pitágoras), la misma dirección (representada por el conjunto de rectas dibujadas en gris) y el mismo sentido (representado por la punta de flecha). En algunos textos se diría que los vectores son **equivalentes**, pero nosotros diremos que son **iguales**, ya que tienen las mismas componentes: $\vec{u} = \vec{v}$.

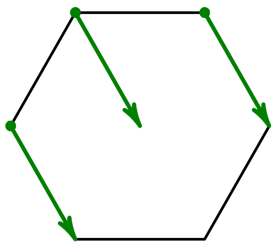
Figura 1	Figura 2
	

En la figura 2 vemos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$, que tienen el mismo módulo y la misma dirección, pero distinto sentido.

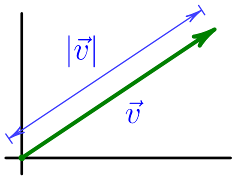
Pronto veremos que $\vec{u} = \vec{v} = (4,3)$ y $\vec{w} = (-4,-3)$, pero tú ya puedes ir intentando comprender de dónde vienen esos números.

Ejemplo

En un hexágono regular todos los lados tienen la misma longitud y, además, son paralelos dos a dos. Esto nos dará la oportunidad de aprovechar la igualdad de vectores. A la derecha ves tres vectores iguales que pueden ser interesantes para resolver problemas. Deberás estar atento a buscar este tipo de relaciones en los problemas que te propondremos.



Módulo de un vector del plano



- El módulo de un vector del plano es la distancia entre el origen de coordenadas y el extremo del vector.
- Se nombra escribiendo entre barras el nombre del vector; es la misma notación que el valor absoluto de un número, porque el concepto es el mismo: distancia al origen, que en el caso de los números es el número 0.
  - Ejemplo 1: el módulo del vector $\vec{v}$ se escribe $|\vec{v}|$
- El módulo del vector cero es cero.
- El módulo de cualquier vector que no sea cero es un número real positivo.

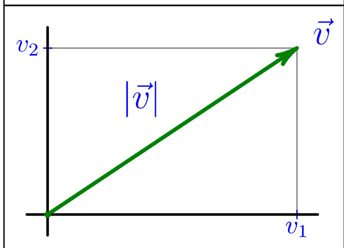
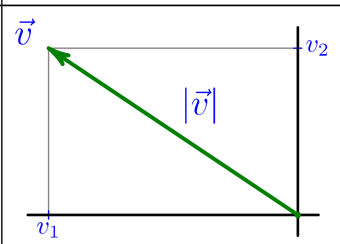
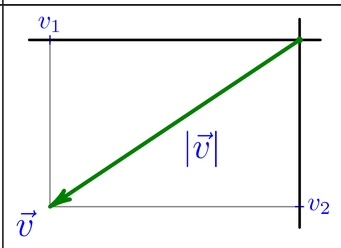
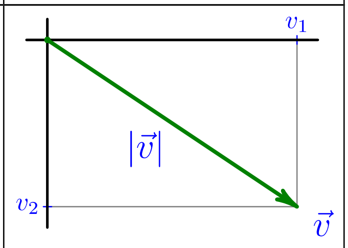
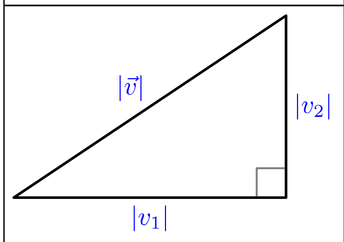
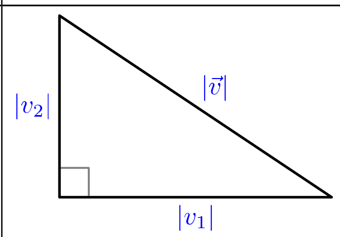
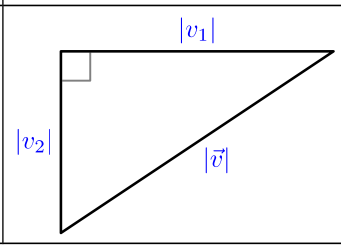
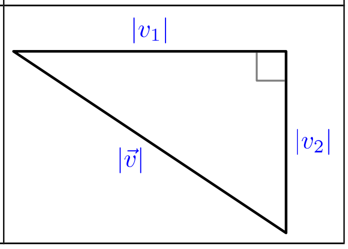
Cálculo del módulo de un vector del plano

Conocidas las componentes del vector, su módulo se calcula como

$$\boxed{\vec{v} = (v_1,v_2) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

Demostración

Las componentes de un vector pueden ser positivas o negativas, pero siempre forman con el vector un triángulo rectángulo en el que las longitudes de los catetos son los valores absolutos de las componentes y la longitud de la hipotenusa es el módulo del vector, como vemos aquí:

$v_1>0 \wedge v_2>0$	$v_1<0 \wedge v_2>0$	$v_1<0 \wedge v_2<0$	$v_1>0 \wedge v_2<0$
			
			

Tras aplicar el teorema de Pitágoras, utilizaremos que el cuadrado del valor absoluto de un número real es igual al cuadrado del número: $|x|^2 = x^2$.

$|\vec{v}|^2=|v_1|^2+|v_2|^2=v_1^2+v_2^2 \Rightarrow |\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ (el módulo debe ser positivo).

Ejemplo 2

Calcula con cuatro cifras significativas el módulo del vector $\vec{a} = (7,-22)$.

$|\vec{a}| = \sqrt{7^2+(-22)^2} = 23{,}09$

Calculadora: √ (7 x² + 2 2 x²) = ⇨ 23.08679276

(Observa que no es necesario usar el signo menos en la calculadora).

Solución: $|\vec{a}| = 23{,}09$

Suma de dos vectores del plano

Si $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ son dos vectores del plano, definimos la suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como el vector que tiene componentes (u_1+v_1,u_2+v_2). Se escribe $\vec{u}+\vec{v}$. Es decir:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2)\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2)}$$

Ejemplos

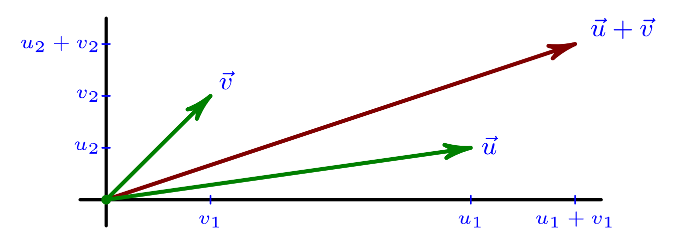
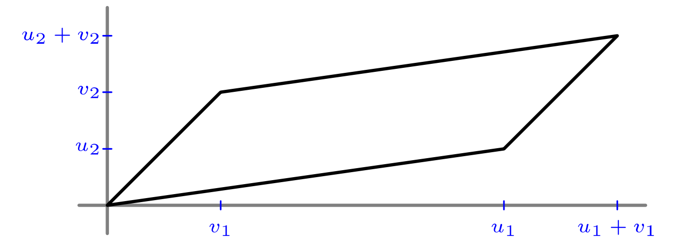
① La suma de los vectores $\vec{a}=(5,2)$ y $\vec{c}=(3,7)$ es $\vec{a}+\vec{c}=(5+3,2+7)=(8,9)$

② La suma de los vectores $\vec{e}=(2,-5)$ y $\vec{m}=(-2,-3)$ es $\vec{e}+\vec{m}=(2-2,-5-3)=(0,-8)$

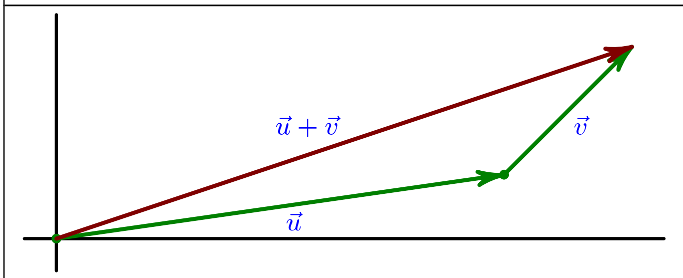
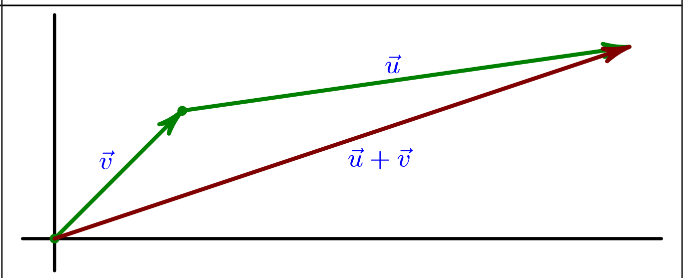
③ La suma de los vectores $\vec{n}=(4,7)$ y $\vec{s}=(-9,-4)$ es $\vec{n}+\vec{s}=(4-9,7-4)=(-5,3)$

Representación gráfica

En la figura 1 mostramos un ejemplo de la representación gráfica de la suma de dos vectores. Esta representación se conoce como «regla del paralelogramo», debido a la figura geométrica que se forma, como vemos en la figura 2.

Figura 1	Figura 2
	

Será muy útil para resolver problemas tener en cuenta que es posible considerar la suma de vectores como el resultado de dibujarlos **uno a continuación del otro**, en cualquier orden, como vemos en las figuras 3 y 4.

Figura 3	Figura 4
	

Propiedades de la suma de vectores del plano

La suma de vectores del plano tiene varias propiedades que son muy comunes:

✱ Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{u}+\vec{v}$

✱ Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

Ejemplo 4

Como la suma es asociativa, no es necesario usar paréntesis cuando se suman más de dos vectores: $(1,7)+(2,8)+(3,9)=(1+2+3,7+8+9)=(6,24)$

Suma de vectores del plano en la vida real

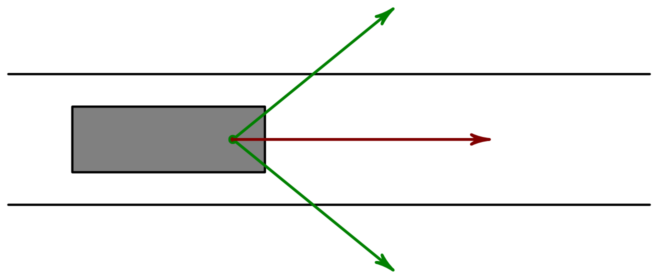
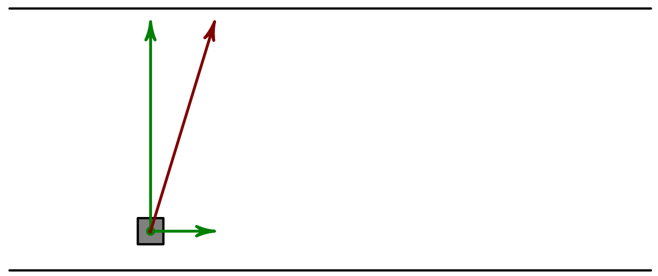
Una buena manera de ver cómo actúa la suma de vectores del plano en la vida real es considerar qué ocurre cuando varias fuerzas actúan a la vez sobre un objeto. Cada fuerza se representa con un vector y la fuerza llamada **resultante** es la suma de todos los vectores.

Dos caballos arrastrando un barco

Antes de la revolución industrial y la generalización del uso del ferrocarril para el trasporte de mercancías, se usaban canales artificiales navegables para el traslado de bienes en barcazas. En muchas ocasiones la barcaza era arrastrada por dos caballos, uno a cada lado del canal. La suma de las fuerzas de los caballos da una fuerza resultante en la dirección del canal y el sentido del avance.

Nadar atravesando un río

Si intentas atravesar un río nadando en dirección perpendicular a la orilla verás que no llegas al punto que tienes enfrente, sino más adelante según el sentido de avance del río. Es porque a tu fuerza hay que sumarle la de la corriente.

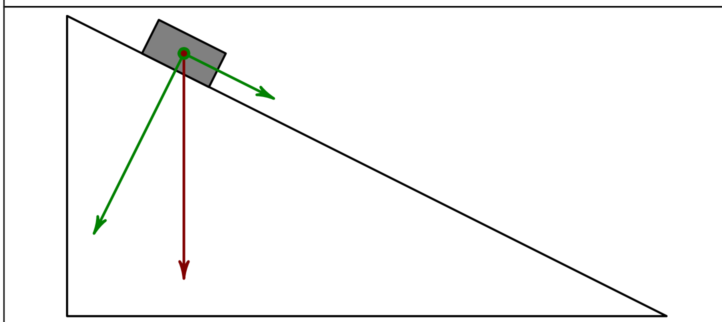
Dos caballos arrastrando un barco	Nadar atravesando un río
	

Caída de un cuerpo en un plano inclinado

Cuando situamos un cuerpo en un plano inclinado para que caiga por él según la acción de la gravedad, para estudiar lo que ocurre necesitamos descomponer la fuerza de la gravedad en dos fuerzas diferentes: una paralela al plano inclinado, que es la que hace descender el cuerpo, y otra perpendicular al plano, que es la que provoca rozamiento.

Sogatira

El sogatira es un juego en el que dos equipos tiran de una cuerda en la misma dirección pero en sentidos distintos. Cuando el módulo de las fuerzas es el mismo, la cuerda no se mueve porque la resultante de las dos fuerzas es el vector nulo.

Caída de un cuerpo en un plano inclinado	Sogatira
	

Producto de un número real y un vector del plano

Si α es un número real y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ es un vector del plano, definimos el producto del número α y el vector $\vec{v}$ como el vector que tiene componentes $(\alpha v_1,\alpha v_2)$. Se escribe $\alpha\cdot\vec{u}$ o sencillamente $\alpha\vec{u}$ (y nunca se escribe $\vec{u}\cdot\alpha$ ni $\vec{u}\,\alpha$).

$$\left.\begin{array}{c}\alpha\in\mathbb{R}\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\vec{v}=(\alpha v_1,\alpha v_2)$$

Ejemplos

① El producto del número 2 y el vector $\vec{a}=(3,-7)$ es
$2\vec{a}=2(3,-7)=(2\cdot3,2(-7))=(6,-14)$

② El producto del número −3 y el vector $\vec{c}=(2,-5)$ es
$-3\vec{c}=-3(2,-5)=(-3\cdot2,-3(-5))=(-6,15)$

Propiedades del producto de número y vector

Suponemos que α es un número real distinto de cero y $\vec{v}$ es un vector del plano distinto del vector nulo. Entonces:

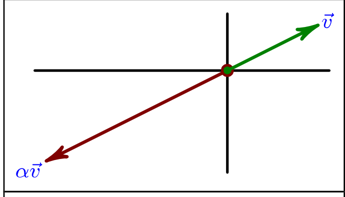
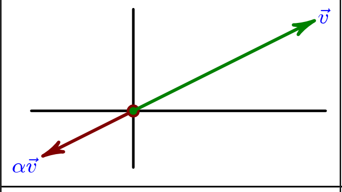
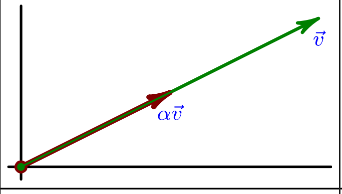
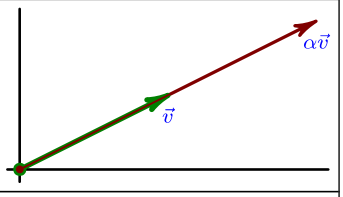
✱ Propiedades sobre el **módulo**:
- Si $|\alpha|<1$, entonces $|\alpha\vec{v}|<|\vec{v}|$
- Si $|\alpha|>1$, entonces $|\alpha\vec{v}|>|\vec{v}|$

✱ Propiedad sobre la **dirección**:
- Los vectores $\alpha\vec{v}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

✱ Propiedades sobre el **sentido**:
- Si $\alpha>0$, entonces $\alpha\vec{v}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo sentido.
- Si $\alpha<0$, entonces $\alpha\vec{v}$ y $\vec{v}$ tienen distinto sentido.

Ejemplos

En los siguientes ejemplos usamos el color verde para representar un vector $\vec{v}$ y el color rojo para representar el vector $\alpha\vec{v}$, según distintos valores de α.

③ $\alpha\in(\leftarrow,-1)$	④ $\alpha\in(-1,0)$	⑤ $\alpha\in(0,1)$	⑥ $\alpha\in(1,\rightarrow)$
			
$\lvert\alpha\vec{v}\rvert>\lvert\vec{v}\rvert$ Distinto sentido	$\lvert\alpha\vec{v}\rvert<\lvert\vec{v}\rvert$ Distinto sentido	$\lvert\alpha\vec{v}\rvert<\lvert\vec{v}\rvert$ Mismo sentido	$\lvert\alpha\vec{v}\rvert>\lvert\vec{v}\rvert$ Mismo sentido

Casos triviales

✱ Si $\alpha=-1$, el producto $-1\vec{v}$ se escribe $-\vec{v}$ y se llama **vector opuesto** a $\vec{v}$.
- Se verifica $-\vec{v}+\vec{v}=\vec{o}$.
- También se escribe $\vec{v}-\vec{v}=\vec{o}$ y se dice que restar es sumar el opuesto.

✱ Si α es un número real, entonces $\alpha\vec{o}=\vec{o}$

✱ Si $\vec{v}$ es un vector del plano, entonces $0\vec{v}=\vec{o}$ y $1\vec{v}=\vec{v}$

Vectores múltiplos entre sí

- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no nulos del plano, se dice que son múltiplos entre sí (o proporcionales) cuando se puede encontrar un número real α que verifique $\vec{v}=\alpha\,\vec{u}$.
- Dos vectores son múltiplos entre sí solo cuando tienen la misma dirección.
- El vector nulo se excluye de esta definición porque, multiplicado por cualquier número, siempre se obtiene otra vez el vector nulo.

Ejemplos

① Los vectores (1,3) y (5,15) son múltiplos entre sí porque (5,15)=5(1,3).

② Los vectores (9,–6) y (–33,22) son múltiplos entre sí: (–33,22)= $\frac{-11}{3}$ (9,–6).

Obtención de vectores múltiplos

Dado un vector no nulo del plano, se pueden obtener infinitos múltiplos multiplicándolo por cualquier número distinto de cero. Esto suele ser útil para obtener un vector que tenga la misma dirección que otro, pero componentes más sencillas.

Ejemplo

③ **Enunciado**: averigua un vector múltiplo del $\left(\frac{3}{5},-\frac{1}{3}\right)$ que tenga componentes enteras lo más sencillas que sea posible.

Resolución: multiplicamos el vector por el mínimo común múltiplo de los dos denominadores, mcm(5,3)=15.

$15\left(\frac{3}{5},-\frac{1}{3}\right)=\left(15\cdot\frac{3}{5},-15\cdot\frac{1}{3}\right)$ =(9,–5). Solución: (9,–5).

También valdría como solución el vector opuesto, el (–9,5).

Averiguar si dos vectores del plano son múltiplos

Es conveniente poder averiguar con rapidez si dos vectores del plano son múltiplos entre sí o no. Para ello, distinguiremos entre dos casos: si alguna componente es cero o si ninguna lo es (no pueden ser las dos de un vector cero a la vez porque el vector nulo se excluye de este estudio).

Alguna componente es cero

Si una de las dos componentes de un vector es cero, los vectores solo serán múltiplos cuando la misma componente del otro vector sea también cero.

④ Los vectores (**0**,5) y (**0**,7) son múltiplos.

⑤ Los vectores (3,**0**) y (7,**1**) no son múltiplos.

Ninguna componente es cero

Entonces, para que los vectores sean múltiplos sus componentes deben ser directamente proporcionales, algo que averiguaremos con los productos cruzados. Es decir, los vectores (u_1,u_2) y (v_1,v_2) serán múltiplos solo cuando $u_1v_2 = u_2v_1$.

⑥ Los vectores (2,–8) y (–3,12) son múltiplos porque $2\cdot 12 = -8(-3)$

⑦ Los vectores (5,7) y (2,3) no son múltiplos porque $5\cdot 3 \neq 7\cdot 2$

Producto escalar de dos vectores

- ✱ El producto escalar de dos vectores es un número real.
- ✱ Existe otro producto de dos vectores llamado producto vectorial, que estudiaremos en el nivel 6 de este curso; por eso, siempre hay que decir «producto escalar» y no basta decir «producto».
- ✱ El producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se escribe $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Como la notación del punto permite eliminarlo cuando no hay duda, se suele escribir simplemente $\vec{u}\vec{v}$.
- ✱ El producto escalar se define como la suma de los productos de las componentes de los vectores. Es decir, si $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ son dos vectores del plano, su producto escalar se calcula así:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2)\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u}\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2}$$

Ejemplos

① El producto escalar de los vectores $\vec{a}=(2,3)$ y $\vec{c}=(5,7)$ es

$\vec{a}\vec{c}=(2,3)(5,7)=2\cdot 5+3\cdot 7=10+21=31$

② El producto escalar de los vectores $\vec{e}=(1,-4)$ y $\vec{m}=(-6,2)$ es

$\vec{e}\vec{m}=(1,-4)(-6,2)=1(-6)-4\cdot 2=-6-8=-14$

③ El producto escalar de los vectores $\vec{n}=(4,-6)$ y $\vec{r}=(3,2)$ es

$\vec{n}\vec{r}=(4,-6)(3,2)=4\cdot 3-6\cdot 2=12-12=0$

④ El producto escalar de los vectores $\vec{s}=(0,7)$ y $\vec{u}=(15,0)$ es

$\vec{s}\vec{u}=(0,7)(15,0)=0\cdot 7+15\cdot 0=0+0=0$

Utilidad del producto escalar

A pesar de su aparente sencillez, el producto escalar tiene importantes propiedades que iremos estudiando en este curso.

- ✱ En este nivel 4 vamos a utilizar el producto escalar para detectar si dos vectores son perpendiculares o no y también para obtener con rapidez las componentes de un vector perpendicular a uno dado.
- ✱ El el nivel 5 utilizaremos el producto escalar para calcular el ángulo que forman dos vectores.

Propiedad

Si $\vec{v}$ es un vector del plano, se verifica $\vec{v}\vec{v}=|\vec{v}|^2$

Demostración

Suponemos que $\vec{v}=(v_1,v_2)$. Entonces:

$\vec{v}\vec{v}=(v_1,v_2)(v_1,v_2)=v_1v_1+v_2v_2=v_1^2+v_2^2$

$|\vec{v}|^2=\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^2=v_1^2+v_2^2$

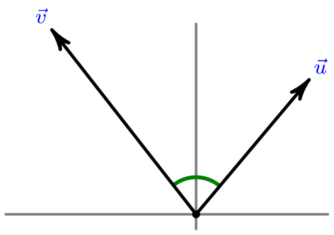
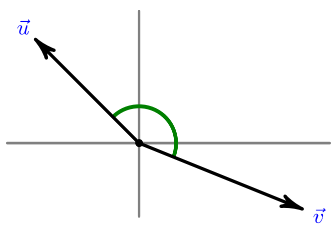
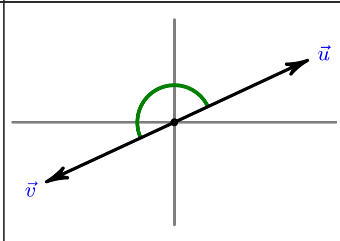
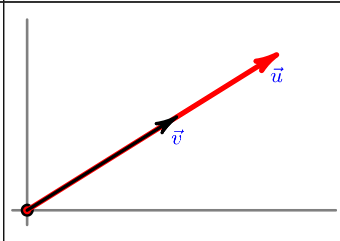
Vemos que las dos expresiones tienen el mismo valor.

Ángulo entre dos vectores del plano

* El ángulo entre dos vectores no nulos del plano se define como el menor de los ángulos determinados por la representación gráfica de los vectores.
* El ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede escribir $\angle(\vec{u},\vec{v})$ o bien $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$.
* Siempre se verifica que $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} \in [0°,180°]$.
* Si dos vectores no nulos tienen la misma dirección y el mismo sentido, el ángulo entre ellos es 0°.
* Si dos vectores no nulos tienen la misma dirección y distinto sentido, el ángulo entre ellos es 180°.

Ejemplos

Hemos señalado el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuando es mayor que 0°.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
			
$\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=78°$	$\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=157°$	$\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=180°$	$\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=0°$

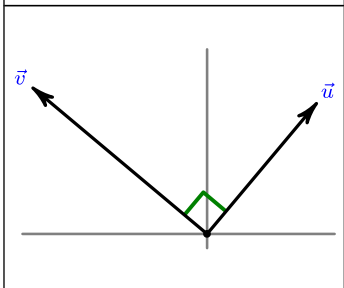
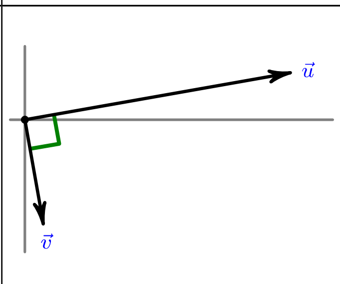
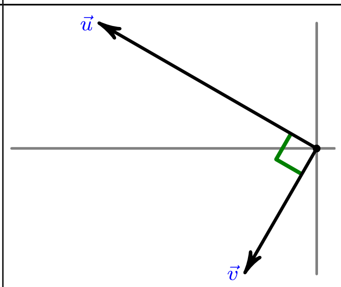
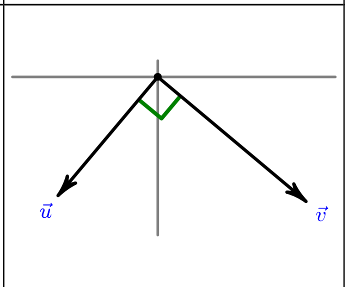
Vectores perpendiculares

* Dos vectores son perpendiculares cuando determinan un ángulo de 90°.
* Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, se escribe $\vec{u} \perp \vec{v}$.
* Por tanto, simbólicamente, definimos:

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \widehat{(\vec{u},\vec{v})}=90°}$$

* Dos vectores perpendiculares también se denominan **ortogonales**. El prefijo «orto-» significa «recto» en griego.
* Para facilitar la comprensión a primera vista, señalamos gráficamente los ángulos rectos con un símbolo anguloso en vez de con un arco.

Ejemplos

Ejemplo 5	Ejemplo 6	Ejemplo 7	Ejemplo 8
			
$\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=90°$	$\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=90°$	$\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=90°$	$\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=90°$

Producto escalar y perpendicularidad

Existe una importante propiedad que relaciona estos dos conceptos:

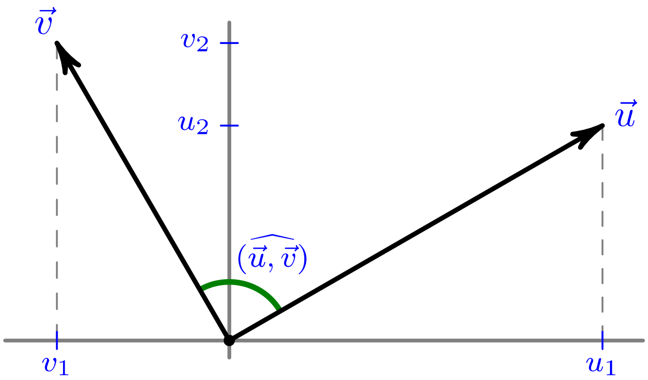
Dados dos vectores no nulos, su producto escalar es cero si y solo si son perpendiculares. Expresado simbólicamente:

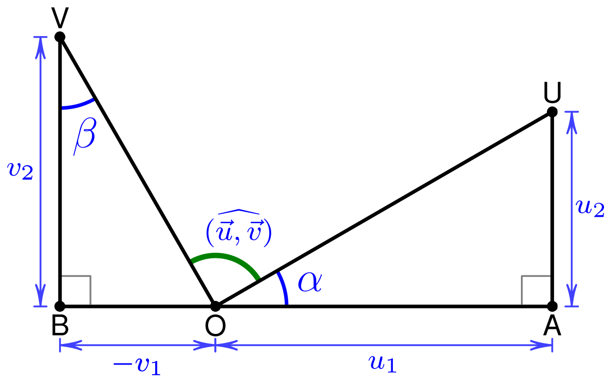
$$\boxed{\text{Siendo } \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{o},\ \vec{u}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}}$$

Demostración

Se pueden dar muchos casos, así que, para no recargar la explicación, elegimos solamente uno, pero muy representativo.

Supongamos que $\vec{u}=(u_1,u_2)$ es un vector del primer cuadrante (con lo que $u_1,u_2>0$) y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ es un vector del segundo cuadrante (con lo que $v_1<0$ y $v_2>0$) y vamos a demostrar que $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=90°$. Abajo a la izquierda vemos un esquema de la situación y abajo a la derecha señalamos los triángulos rectángulos OUA y OVB:





$$\vec{u}\vec{v}=0 \Rightarrow (u_1,u_2)(v_1,v_2)=0 \Rightarrow u_1v_1+u_2v_2=0 \Rightarrow u_2v_2=-u_1v_1 \Rightarrow \frac{u_2}{-v_1}=\frac{u_1}{v_2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ los triángulos rectángulos OUA y OVB son semejantes $\Rightarrow \alpha=\beta$

$$\angle(BOA)=180° \Rightarrow \angle(BOV)+\widehat{(\vec{u},\vec{v})}+\alpha=180° \Rightarrow (90°-\beta)+\widehat{(\vec{u},\vec{v})}+\alpha=180° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90°-\alpha+\widehat{(\vec{u},\vec{v})}+\alpha=180° \Rightarrow 90°+\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=180° \Rightarrow \widehat{(\vec{u},\vec{v})}=90°$$

Ejemplos

① Enunciado: estudia si los vectores $\vec{a}=(5,3)$ y $\vec{c}=(-2,3)$ son perpendiculares.

Comentario: en casos como este, en que la representación gráfica no es suficientemente precisa, el uso de esta propiedad es muy conveniente.

Resolución: $\vec{a}\vec{c}=(5,3)(-2,3)=-10+9=-1\neq 0 \Rightarrow$ no son perpendiculares.

② Enunciado: estudia si los vectores $\vec{e}=(-8,5)$ y $\vec{m}=(5,8)$ son perpendiculares.

Resolución: $\vec{e}\vec{m}=(-8,5)(5,8)=-40+40=0 \Rightarrow$ sí son perpendiculares.

③ Enunciado: estudia si los vectores $\vec{r}=(0,7)$ y $\vec{s}=(4,0)$ son perpendiculares.

Comentario: este es el caso trivial, porque cada vector está en un eje de coordenadas distinto, que son perpendiculares; aún así, podemos comprobarlo calculando el producto escalar:

Resolución: $\vec{r}\vec{s}=(0,7)(4,0)=0·7+4·0=0+0=0 \Rightarrow$ sí son perpendiculares.

Obtención de vectores perpendiculares a uno dado

Pronto verás que hay bastantes problemas de geometría analítica en los que es muy conveniente encontrar un vector que sea perpendicular a un vector conocido. Aprovechamos que dos vectores no nulos son perpendiculares si y solo si su producto escalar es cero para resolver esta cuestión con mucha rapidez. Distinguiremos dos casos.

Cuando alguna componente es cero

Si el vector que conocemos tiene una de las componentes cero (no pueden ser las dos cero, porque sería el vector nulo), el método para obtener un vector perpendicular es escribir un uno en la posición donde está el cero y un cero en la otra. En estos casos, cada vector tiene la dirección de un eje de coordenadas.

Ejemplos

① Enunciado. Averigua un vector perpendicular al vector (0,–7).

Resolución. Como hay un cero en la primera componente, ponemos un uno en la primera componente y un cero en la segunda: (1,0).

Comprobación: (0,–7)(1,0) = 0·1–7·0 = 0+0 = 0

② Enunciado. Averigua un vector perpendicular al vector (13,0).

Resolución. Como hay un cero en la segunda componente, ponemos un uno en la segunda componente y un cero en la primera: (0,1).

Comprobación: (13,0)(0,1) = 13·0+0·1 = 0+0 = 0

Cuando ninguna componente es cero

Si ninguna de las componentes del vector que conocemos es cero, el método para obtener un vector perpendicular es intercambiar las dos componentes y cambiar el signo a una de ellas.

Ejemplos

③ Enunciado. Averigua un vector perpendicular al vector (8,5).

Resolución 1. Intercambiamos las componentes y cambiamos el signo a la primera componente: (8,5) ⇢ (5,8) ⇢ (–5,8). Solución: (–5,8).

Comprobación 1: (8,5)(–5,8) = 8·5–5·8 = 40–40 = 0

Resolución 2. Intercambiamos las componentes y cambiamos el signo a la segunda componente: (8,5) ⇢ (5,8) ⇢ (5,–8). Solución: (5,–8).

Comprobación 2: (8,5)(5,–8) = 8·5+5·(–8) = 40–40 = 0

④ Enunciado. Averigua un vector perpendicular al vector (4,–3).

Resolución. Intercambiamos las componentes y cambiamos el signo a la primera componente: (4,–3) ⇢ (–3,4) ⇢ (3,4). Solución: (3,4).

Comprobación: (4,–3)(3,4) = 4·3–3·4 = 12–12 = 0

⑤ Enunciado. Averigua un vector perpendicular al vector (–7,–1).

Resolución. Intercambiamos las componentes y cambiamos el signo a la primera componente: (–7,–1) ⇢ (–1,–7) ⇢ (1,–7). Solución: (1,–7).

Comprobación: (–7,–1)(1,–7) = –7·1–1(–7) = –7+7 = 0

Enunciados

Dados los vectores $\vec{a}=(-1,2)$, $\vec{c}=(3,-1)$, $\vec{e}=(6,4)$, $\vec{m}=(5,3)$, $\vec{n}=(-9,5)$, $\vec{r}=(3,-2)$, $\vec{s}=(-4,-5)$, $\vec{u}=(3,10)$, $\vec{v}=(0,-5)$, $\vec{w}=(7,9)$ y $\vec{z}=(4,-3)$, se pide:

① Calcula y representa gráficamente $2\vec{a}+3\vec{c}$

② Calcula y representa gráficamente $\frac{1}{2}\vec{e}-\vec{m}$

③ Calcula con cuatro cifras significativas $|\vec{n}+\vec{r}|$

④ Calcula $\vec{s}(\vec{u}+\vec{v})$

⑤ Averigua dos vectores perpendiculares a $\vec{w}$ que tengan su mismo módulo.

⑥ Averigua un vector múltiplo de $\vec{z}$ que tenga módulo 15 y su mismo sentido.

Resoluciones

① $2\vec{a}+3\vec{c} = 2(-1,2)+3(3,-1) = (-2,4)+(9,-3) = (7,1)$. Véase el gráfico 1.

② $\frac{1}{2}\vec{e}-\vec{m} = \frac{1}{2}(6,4)-(5,3) = (3,2)-(5,3) = (3-5,2-3) = (-2,-1)$. Véase el gráfico 2.

Gráfico 1

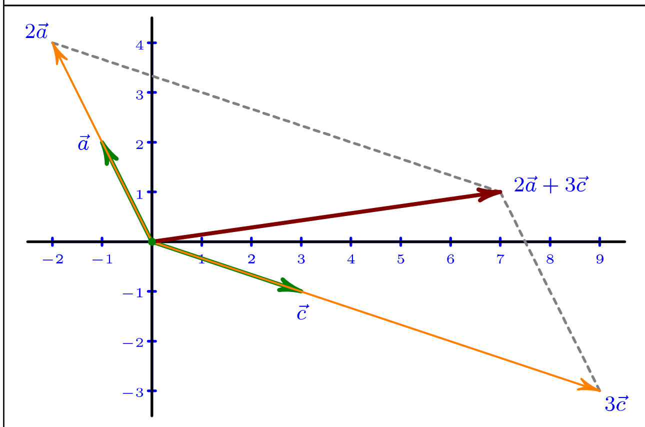
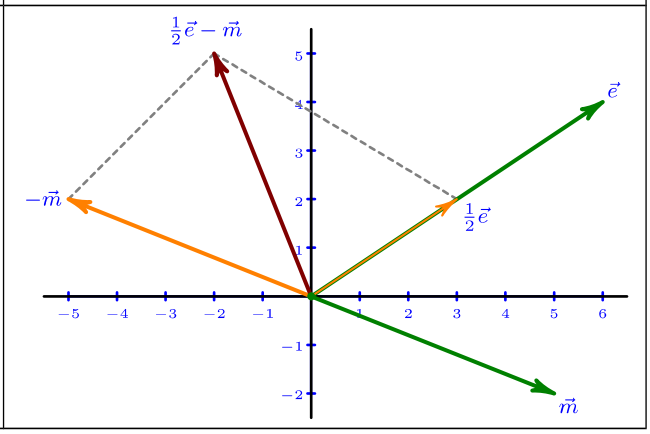


Gráfico 2



③ $|\vec{n}+\vec{r}| = |(-9,5)+(3,-2)| = |(-6,3)|\ \sqrt{(-6)^2+3^2} = 6{,}708$

Calculadora: √ (6 x² + 3 x²) = ⇨ 6.708203933

④ $\vec{s}(\vec{u}+\vec{v}) = (-4,-5)((3,10)+(0,-5)) = (-4,-5)(3,5) = -12-25 = -37$

⑤ $\vec{w} = (7,9) \rightsquigarrow (9,7) \rightsquigarrow (-9,7)$ y $(9,-7)$

Los tres tienen el mismo módulo: $\sqrt{7^2+9^2} = \sqrt{(-7)^2+9^2} = \sqrt{9^2+(-7)^2}$

⑥ Averiguamos el valor de un número real α que verifique $|\alpha\vec{z}| = 15$

$$|\alpha\vec{z}| = |\alpha(4,-3)| = |(4\alpha,-3\alpha)| = \sqrt{(4\alpha)^2+(-3\alpha)^2} = \sqrt{16\alpha^2+9\alpha^2} =$$

$$= \sqrt{25\alpha^2} = \sqrt{25}\sqrt{\alpha^2} = 5|\alpha| = 15 \Rightarrow |\alpha| = 3 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}$$

Para que $\vec{z}$ y $\alpha\vec{z}$ tengan el mismo sentido, α debe ser positivo, luego su único valor válido es $\alpha = 3$.

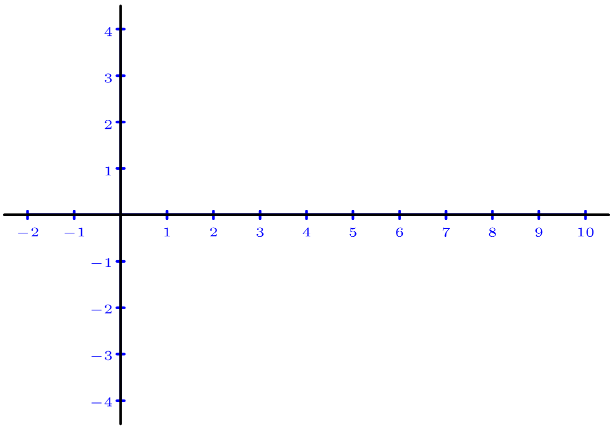
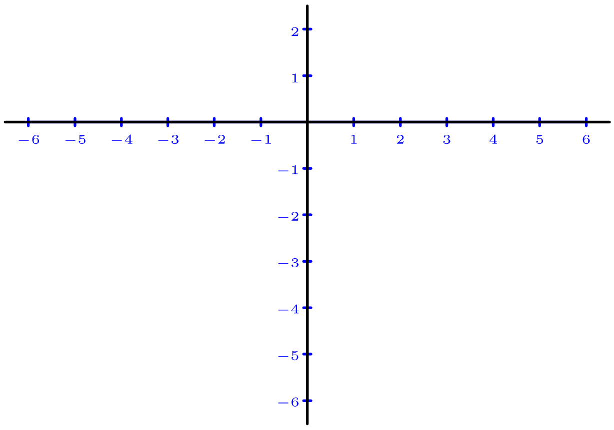
Por tanto, $\alpha\vec{z} = 3(4,-3) = (12,-9)$

Enunciados

Dados los vectores $\vec{a}=(2,1)$, $\vec{c}=(-2,2)$, $\vec{e}=(6,-6)$, $\vec{m}=(-2,-2)$, $\vec{n}=(8,1)$, $\vec{r}=(1,9)$, $\vec{s}=(5,2)$, $\vec{u}=(3,-5)$, $\vec{v}=(7,-2)$, $\vec{w}=(4,-1)$ y $\vec{z}=(5,12)$, se pide:

① Calcula y representa gráficamente $3\vec{a}-2\vec{c}$. Usa el espacio 1.

② Calcula y representa gráficamente $2\vec{m}-\frac{1}{3}\vec{e}$. Usa el espacio 2.

Espacio 1	Espacio 2
	

③ Calcula con cuatro cifras significativas $|\vec{n}-\vec{r}|$

④ Calcula $\vec{s}(\vec{u}+\vec{v})$

⑤ Averigua dos vectores perpendiculares a $\vec{w}$ que tengan su mismo módulo.

⑥ Averigua un vector múltiplo de $\vec{z}$ que tenga módulo 26 y su mismo sentido.

⑦ Calcula $4\vec{n}+3\vec{r}-\vec{z}$

⑧ Calcula con cuatro cifras significativas $|\vec{v}+\vec{w}|$

⑨ Calcula $(\vec{z}-\vec{m})(\vec{a}+\vec{e})$

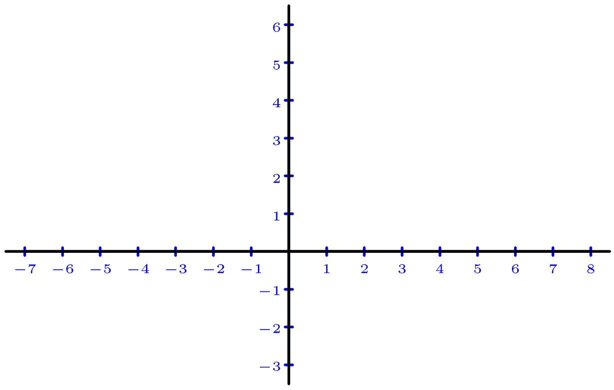
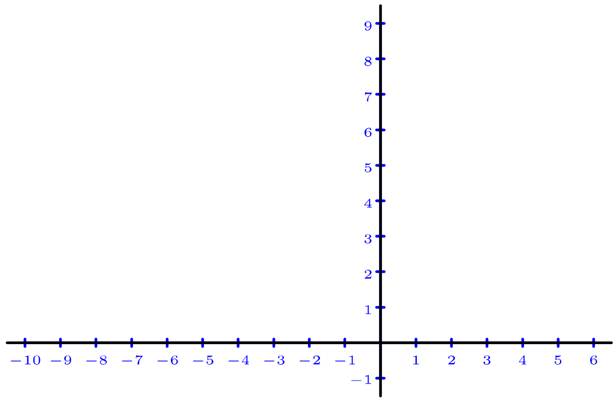
⑩ Averigua dos vectores perpendiculares a $\vec{z}-\vec{e}$ que tengan su mismo módulo.

Enunciados

Dados los vectores $\vec{a}=(8,4)$, $\vec{c}=(-6,6)$, $\vec{e}=(-5,1)$, $\vec{m}=(2,2)$, $\vec{n}=(5,1)$, $\vec{r}=(2,-1)$, $\vec{s}=(10,5)$, $\vec{u}=(6,-3)$, $\vec{v}=(11,3)$, $\vec{w}=(-9,7)$ y $\vec{z}=\left(\sqrt{2},\sqrt{18}\right)$, se pide:

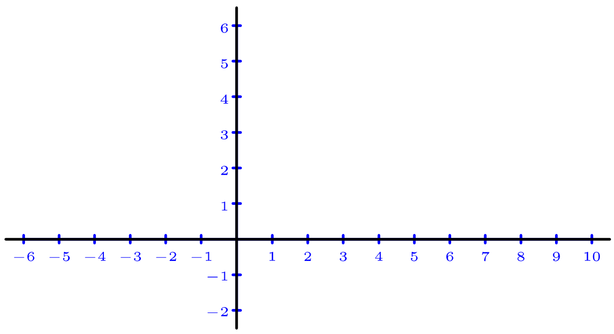
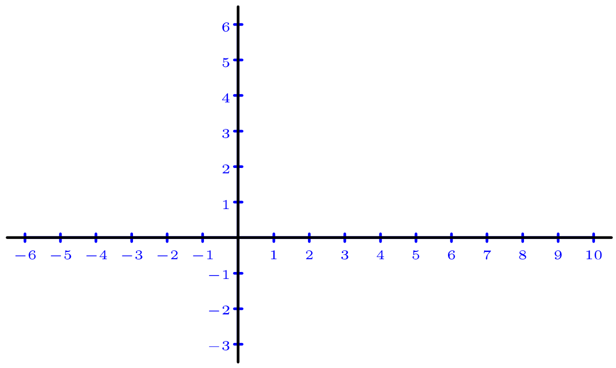
① Calcula y representa gráficamente $\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}$. Usa el espacio 1.

② Calcula y representa gráficamente $2\vec{e}+3\vec{m}$. Usa el espacio 2.

Espacio 1	Espacio 2
	

③ Calcula y representa gráficamente $3\vec{n}+2\vec{r}$. Usa el espacio 3.

④ Calcula y representa gráficamente $\frac{3}{5}\vec{s}-\vec{u}$. Usa el espacio 4.

Espacio 3	Espacio 4
	

⑤ Calcula con cuatro cifras significativas $|2\vec{v}+\vec{w}|$

⑥ Calcula $(\vec{a}-\vec{s})(2\vec{u}+3\vec{v})$

⑦ Averigua dos vectores perpendiculares a $\vec{v}$ que tengan su mismo módulo.

⑧ Averigua un vector múltiplo de $\vec{z}$ que tenga módulo $\sqrt{40}$ y su mismo sentido.

⑨ Calcula $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{3}{2}m-\frac{1}{5}\vec{s}\right)$

⑩ Calcula con cuatro cifras significativas $\vec{a}\,\vec{n}+|\vec{a}+\vec{n}|$

Relación entre puntos y vectores

La importancia práctica del uso de vectores en geometría analítica se pone de manifiesto cuando se empiezan a relacionar los conceptos de puntos y vectores; aunque los dos se representan con un par de números reales, les damos diferentes significados y ahora empezaremos a relacionar esos significados. En este nivel estudiaremos varias relaciones:

✱ Suma de punto y vector.

✱ Vector que une dos puntos.

✱ Vector de posición de un punto.

Todas ellas se pueden ir desarrollando a partir de la idea clave que vemos a continuación:

Traslación asociada a un vector

✱ Si $\vec{v}$ es un vector del plano de componentes (v_1,v_2), llamamos traslación asociada a $\vec{v}$ (o traslación de vector $\vec{v}$) a la trasformación del plano que relaciona el punto P del plano de coordenadas (p_1,p_2) con el punto de coordenadas (p_1+v_1,p_2+v_2).

✱ Designaremos $T_{\vec{v}}$ a la traslación de vector $\vec{v}$.

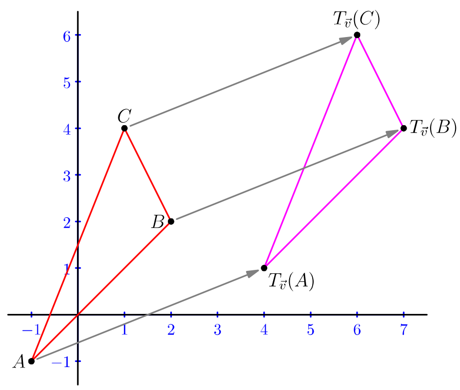
✱ Por tanto, $T_{\vec{v}}$ asocia el punto P con el punto $T_{\vec{v}}(P)$

✱ Expresado simbólicamente:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} P=(p_1,p_2) \\ \vec{v}=(v_1,v_2) \end{array}\right\} \Rightarrow T_{\vec{v}}(P)=(p_1+v_1,p_2+v_2)}$$

Ejemplo

Consideramos el vector $\vec{v}=(\mathbf{5},\mathbf{2})$ y el triángulo de vértices $A=(\mathbf{-1},\mathbf{-1})$, $B=(\mathbf{2},\mathbf{2})$ y $C=(\mathbf{1},\mathbf{4})$. Aplicamos la traslación de vector $\vec{v}$ a los vértices del triángulo y, a partir de ellos, al resto de puntos del triángulo, como vemos a la derecha:



✱ $A=(\mathbf{-1},\mathbf{-1}) \Rightarrow T_{\vec{v}}(A)=(\mathbf{-1}+\mathbf{5},\mathbf{-1}+\mathbf{2})=(4,1)$

✱ $B=(\mathbf{2},\mathbf{2}) \Rightarrow T_{\vec{v}}(B)=(\mathbf{2}+\mathbf{5},\mathbf{2}+\mathbf{2})=(7,4)$

✱ $C=(\mathbf{1},\mathbf{4}) \Rightarrow T_{\vec{v}}(A)=(\mathbf{1}+\mathbf{5},\mathbf{4}+\mathbf{2})=(6,6)$

Consideración interesante

En la ilustración hemos utilizado la representación gráfica de los puntos del plano; pero, además, hemos marcado en color gris tres flechas que relacionan los vértices del triángulo con el punto resultado de su traslación. Observa que las tres flechas consisten en desplazarse **5** unidades a la derecha y **2** unidades hacia arriba, que es exactamente lo que representa el vector $\vec{v}$.

Por tanto, podemos pensar que el vector $\vec{v}$ ha «aparecido» tres veces en el «mundo» de los puntos. Esto nos invita a mezclar puntos y vectores en la misma ilustración, que será precisamente lo que iremos haciendo a partir de ahora.

¿Suma de punto y vector?

Sabemos desde pequeños que no se pueden sumar «cosas» que sean de diferentes tipos: ¿dos elefantes más tres llaves? No tiene sentido. ¿Tres peras más cuatro manzanas? No podemos hacerlo, habría que buscar una categoría superior a las peras y a las manzanas, como «tres frutas más cuatro frutas igual a siete frutas».

Igualmente, no se pueden sumar un punto y un vector, porque pertenecen a categorías diferentes. Una pena, porque hay una operación que tiene mucho sentido e involucra un punto y un vector.

Ponemos un ejemplo: si estás en el punto A de una ciudad y tomas el autobús que lleva de A a B, llegas al punto B (lo que es obvio, por otra parte). Podemos decir, retorciendo un poco el lenguaje, que has **sumado** el punto donde estás con un vector para llegar a otro punto.

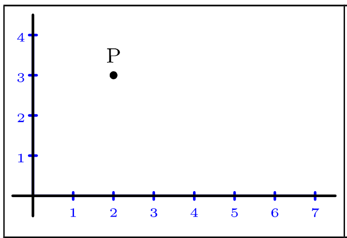
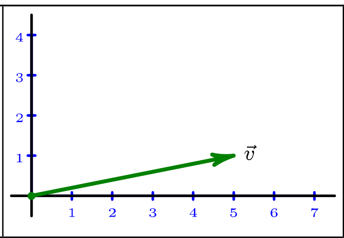
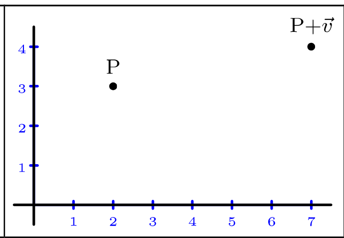
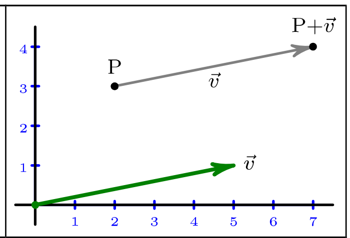
Definición de suma de punto y vector

- ✱ Si P es un punto del plano y $\vec{v}$ es un vector del plano, llamamos suma de P y $\vec{v}$ al punto $T_{\vec{v}}(P)$. Llamamos «suma» a lo realmente es una traslación por comodidad de uso y porque tiene una gran utilidad, aunque se considera un abuso del lenguaje (es decir, un uso impropio).
- ✱ La suma de P y $\vec{v}$ se escribe «P+$\vec{v}$», y nunca al revés.
- ✱ Las coordenadas del punto suma de un punto y un vector se calculan sumando las coordenadas del punto y las componentes del vector.
- ✱ Si P tiene coordenadas (p_1,p_2) y $\vec{v}$ tiene componentes (v_1,v_2), el punto P+$\vec{v}$ tiene coordenadas (p_1+v_1,p_2+v_2).
- ✱ Expresado simbólicamente:

$$\left.\begin{array}{l} P=(p_1,p_2) \\ \vec{v}=(v_1,v_2) \end{array}\right\} \Rightarrow P+\vec{v}=(p_1+v_1,p_2+v_2)$$

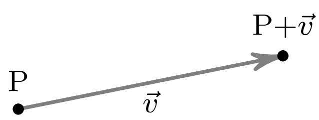
Ejemplo

Si P = (2,3) y $\vec{v}$ = (5,1), entonces P+ $\vec{v}$ = (2,3)+(5,1) = (2+5,3+1) = (7,4)

			
$\mathbb{R}^2$ puntos	$\mathbb{R}^2$ vectores	$\mathbb{R}^2$ puntos	$\mathbb{R}^2$ puntos y vectores

Consecuencia

En la figura de arriba a la derecha vemos una de las claves de la suma de punto y vector: interpretamos que la operación se comporta como si apoyáramos el vector en el punto y así calculamos el nuevo punto final del vector, que es exactamente el sentido intuitivo que le queríamos dar a la operación.



Como consecuencia, podremos mover libremente los vectores a través del conjunto de puntos siempre que lo hagamos de forma paralela, sin cambiar ni su módulo ni su sentido y sin olvidar que realmente están apoyados en el origen.

Definición de vector que une dos puntos

Si P y Q son dos puntos del plano, llamamos vector que une P y Q al único vector $\vec{v}$ del plano que verifica $P+\vec{v}=Q$.

Demostración

Para que la definición sea correcta, hay que demostrar que ese vector existe y es único; pero es muy sencillo. Nombramos las coordenadas de los puntos y las componentes del vector: $P=(p_1,p_2)$, $Q=(q_1,q_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$. Entonces:

$$P+\vec{v}=Q \Rightarrow (p_1,p_2)+(v_1,v_2)=(q_1,q_2) \Rightarrow (p_1+v_1,p_2+v_2)=(q_1,q_2) \Rightarrow \begin{cases} p_1+v_1=q_1 \\ p_2+v_2=q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=q_1-p_1 \\ v_2=q_2-p_2 \end{cases}$$

Notaciones del vector que une dos puntos

- ✱ El vector que une P y Q se denota $\overrightarrow{PQ}$.
- ✱ El punto P se llama **origen** del vector $\overrightarrow{PQ}$.
- ✱ El punto Q se llama **extremo** del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Cálculo del vector que une dos puntos

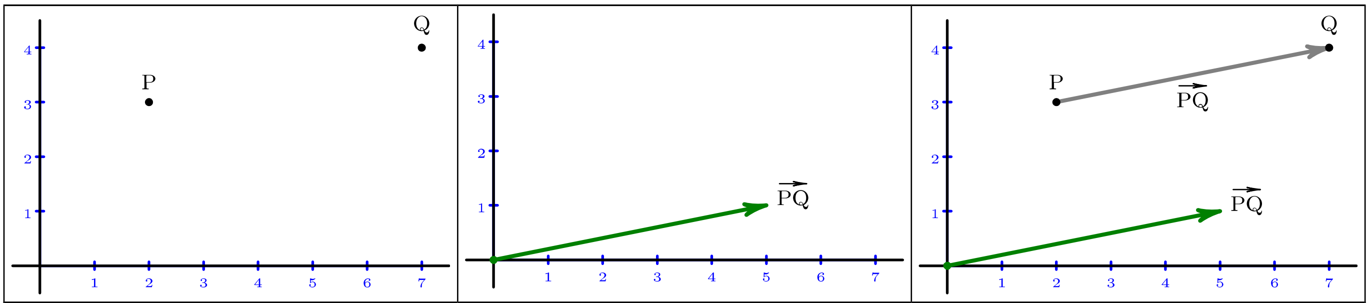
- ✱ Las componentes del vector que une dos puntos se calculan restando las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen.
- ✱ Si P tiene coordenadas (p_1,p_2) y Q tiene coordenadas (q_1,q_2), el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene componentes (q_1-p_1,q_2-p_2).
- ✱ Expresado simbólicamente:

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} P=(p_1,p_2) \\ Q=(q_1,q_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(q_1-p_1,q_2-p_2)}$$

Ejemplo

Si $P=(2,3)$ y $Q=(7,4)$, entonces $\overrightarrow{PQ}=(7-2,4-3)=(5,1)$

Podemos entenderlo de esta manera: para ir desde el punto P hasta el punto Q hay que desplazarse cinco unidades hacia la derecha y una unidad hacia arriba.



$\mathbb{R}^2$ puntos	$\mathbb{R}^2$ vectores	$\mathbb{R}^2$ puntos y vectores

Podremos representar gráficamente el vector que une dos puntos de varias maneras distintas, según nos interese:

- ✱ Situado en la representación general de todos los vectores (figura del centro).
- ✱ Apoyado en el punto origen (figura de la derecha).
- ✱ Apoyado en algún otro punto que nos permita resolver un problema.

Vector de posición de un punto

Si un punto del plano tiene coordenadas (x,y), llamamos vector de posición del punto al vector que tiene componentes (x,y).

Ejemplo 1

El vector de posición del punto (3,2) es el vector (3,2).

Propiedad

El vector de posición del punto P es el vector $\overrightarrow{OP}$.

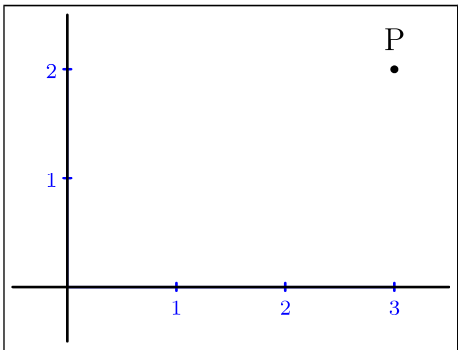
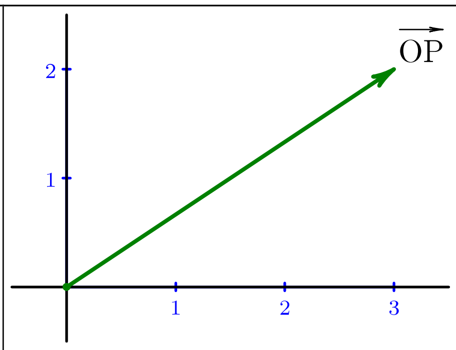
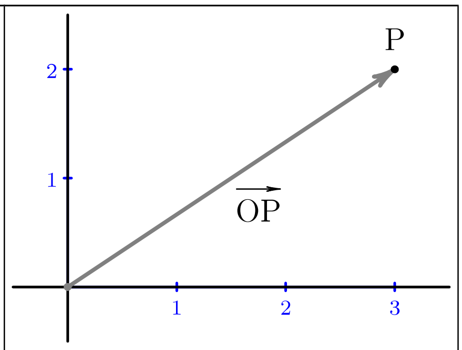
Demostración

Suponemos que P = (x,y) y sabemos que O = (0,0). Por tanto:

$\overrightarrow{OP} = (x-0, y-0) = (x,y)$

Ejemplo 2

$P = (3,2) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = (3,2)$

		
$\mathbb{R}^2$ puntos	$\mathbb{R}^2$ vectores	$\mathbb{R}^2$ puntos y vectores

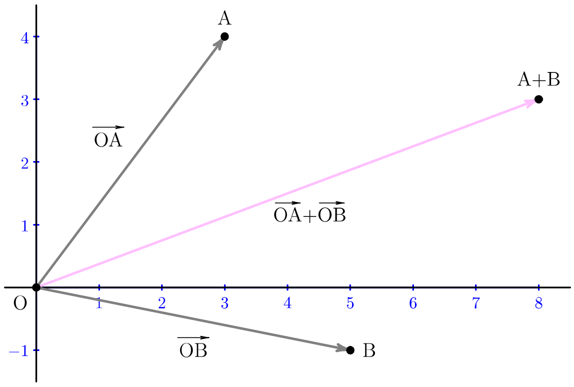
Interpretación de la suma de puntos

En algunos textos de matemáticas se define la suma de puntos. Aunque en este curso no usaremos ese concepto, podemos definirlo usando los vectores de posición, la suma de vectores y la suma de punto y vector. Vemos cómo:

Si A y B son dos puntos, definimos el punto $A+B = O + \left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

Ejemplo 3

Si A = (3,4) y B = (5,–1), entonces A+B = O+((3,4)+(5,–1)) = (0,0)+(8,3) = (8,3)



Interpretación del producto de un número y un punto

Análogamente a la definición de suma de dos puntos, se puede definir el producto de un número real y un punto: $\alpha P = O + \alpha\,\overrightarrow{OP}$

Enunciados

Utilizando los puntos A = (–1,2), B = (5,–1) y C = (3,–2), calcula el resultado final de las siguientes operaciones y represéntalas gráficamente.

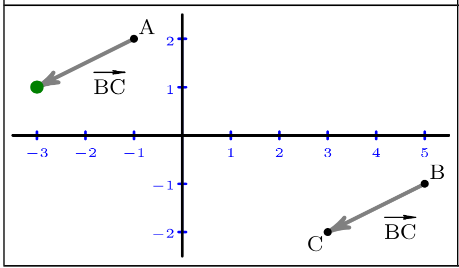
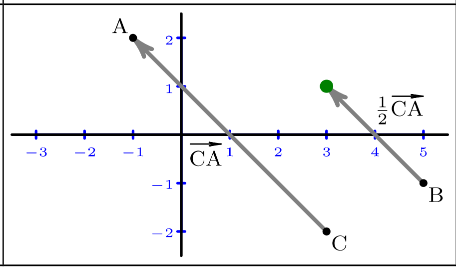
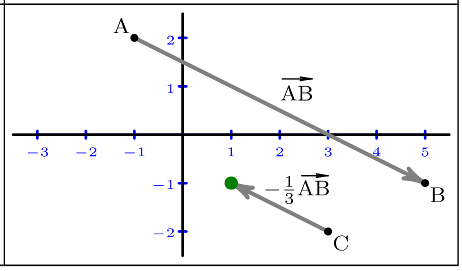
① $A+\overrightarrow{BC}$ ② $B+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ ③ $C-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Resoluciones

① $A+\overrightarrow{BC} = (-1,2)+(3-5,-2-(-1)) = (-1,2)+(-2,-1) = (-3,1).$

② $B+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = (5,-1)+\frac{1}{2}(-1-3,2-(-2)) = (5,-1)+\frac{1}{2}(-4,4) = (5,-1)+(-2,2) = (3,1).$

③ $C-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (3,-2)-\frac{1}{3}(5-(-1),-1-2) = (3,-2)-\frac{1}{3}(6,-3) = (3,-2)-(2,-1) = (1,-1).$

Gráfico de la resolución 1	Gráfico de la resolución 2	Gráfico de la resolución 3
		

Enunciados

Utilizando los puntos F = (–1,2), G = (3,1) y H = (–3,–2), averigua si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares y represéntalas gráficamente.

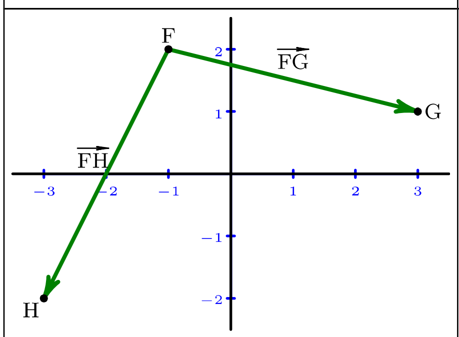
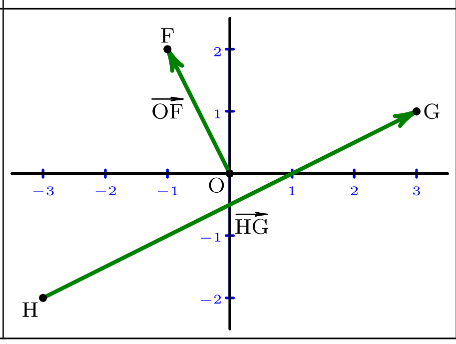
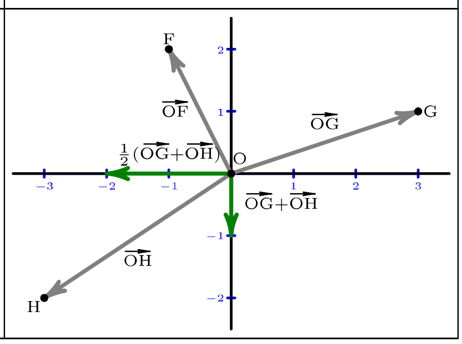
④ $\overrightarrow{FG}$ y $\overrightarrow{FH}$ ⑤ $\overrightarrow{HG}$ y $\overrightarrow{OF}$ ⑥ $\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}$ y $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OH})$

Resoluciones

④ $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{FH} = (4,-1)\cdot(-2,-4) = -8+4 = -4 \Rightarrow$ no son perpendiculares.

⑤ $\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{OF} = (6,3)\cdot(-1,2) = -6+6 = 0 \Rightarrow$ son perpendiculares.

⑥ $\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OH}\right) = (0,-1)\cdot(-2,0) = 0+0 = 0 \Rightarrow$ son perpendiculares.

Gráfico de la resolución 4	Gráfico de la resolución 5	Gráfico de la resolución 6
		

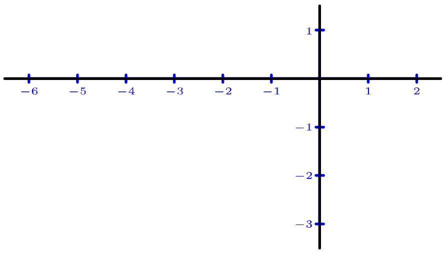
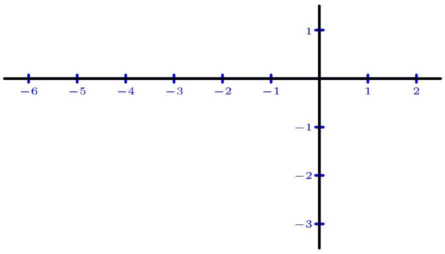
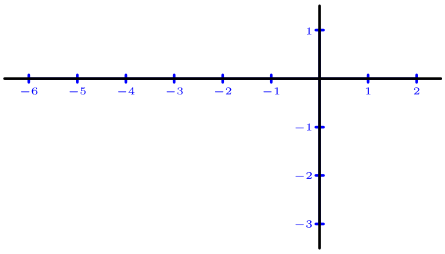
Enunciados

Dados los puntos $A=(-2,1)$, $B=(-4,-1)$ y $C=(2,-1)$, calcula el resultado final de las siguientes operaciones y represéntalas gráficamente en el espacio asignado.

① $B+\overrightarrow{AC}$

② $C+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

③ $A-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Espacio 1	Espacio 2	Espacio 3
		

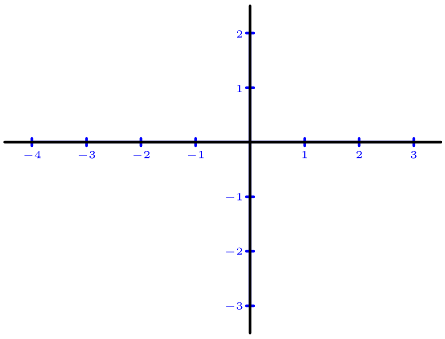
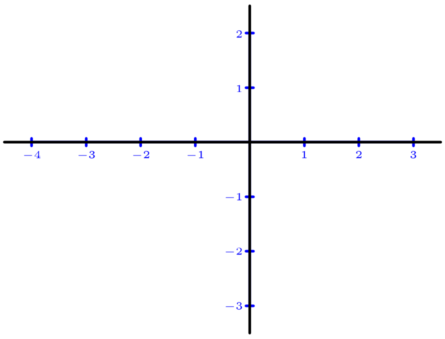
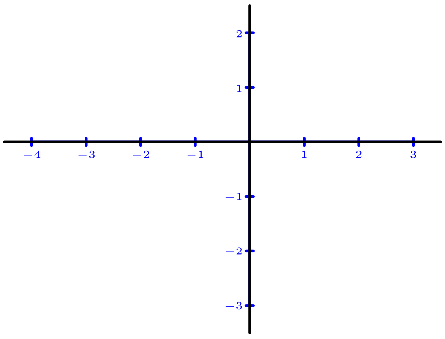
Enunciados

Utilizando los puntos $F=(-1,2)$, $G=(3,1)$ y $H=(-3,-2)$, averigua si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares y represéntalas gráficamente en el espacio asignado.

④ $\overrightarrow{HF}$ y $\overrightarrow{HG}$

⑤ $\overrightarrow{FG}$ y $\overrightarrow{OH}$

⑥ $\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}$ y $\frac{2}{3}\overrightarrow{OF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$

Espacio 4	Espacio 5	Espacio 6
		

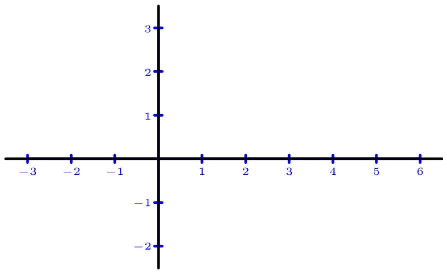
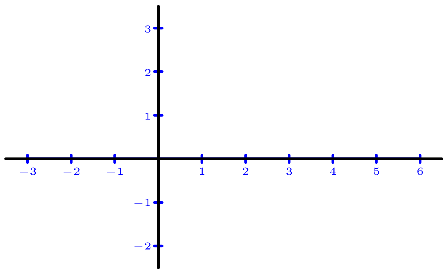
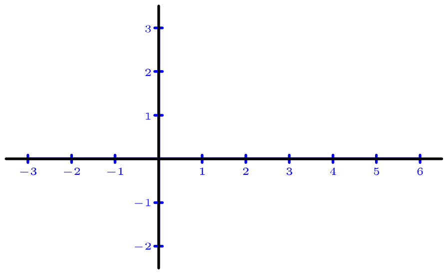
Enunciados

Dados los puntos $M=(6,3)$, $Q=(-2,-2)$ y $R=(-3,0)$, calcula el resultado final de las siguientes operaciones y represéntalas gráficamente en el espacio asignado.

① $M+\frac{2}{3}\overrightarrow{OR}$

② $Q+\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$

③ $R-\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$

Espacio 1	Espacio 2	Espacio 3
		

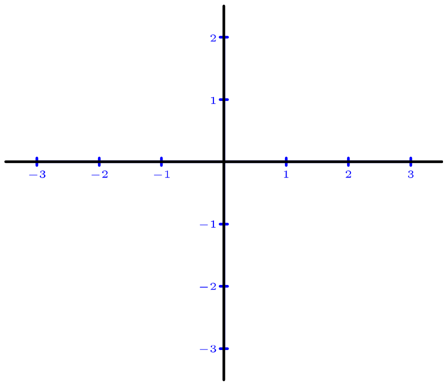
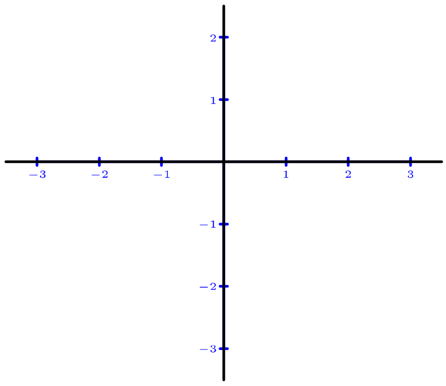
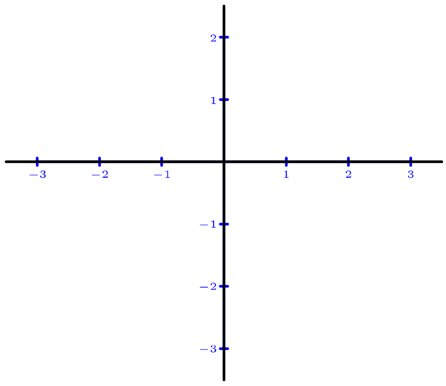
Enunciados

Utilizando los puntos $T=(3,2)$, $U=(-3,-2)$ y $Z=(2,-3)$, averigua si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares y represéntalas gráficamente en el espacio asignado.

④ $\overrightarrow{ZU}$ y $\overrightarrow{TZ}$

⑤ $\overrightarrow{TU}$ y $\overrightarrow{OZ}$

⑥ $\overrightarrow{OU}$ y $\frac{2}{5}(\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OZ})$

Espacio 4	Espacio 5	Espacio 6
		

Resolución de problemas usando suma de punto y vector

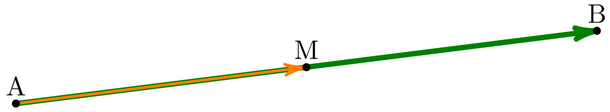
La operación de suma de punto y vector resulta ser de gran utilidad para resolver de una manera bastante sencilla muchos problemas de geometría. La idea clave es que para averiguar un punto desconocido podemos sumar un punto conocido y un vector que sabemos calcular a partir de otras propiedades. Suele ser necesario recordar o deducir propiedades que relacionen unos vectores con otros. Vamos a ver un ejemplo de esta técnica que, además, nos proporcionará una fórmula útil.

Punto medio de un segmento

Conocemos las coordenadas de los extremos de un segmento y queremos calcular las coordenadas de su punto medio.

Ponemos nombres: los extremos son $A=(a_1,a_2)$ y $B=(b_1,b_2)$; el punto medio del segmento AB es $M=(m_1,m_2)$.

Observamos dos relaciones que nos permitirán calcular M:



- $M=A+\overrightarrow{AM}$, por definición de vector que une dos puntos.
- $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, ya que los vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{AB}$ tienen estas relaciones:
  - El módulo de $\overrightarrow{AM}$ es la mitad del módulo de $\overrightarrow{AB}$ porque M es el punto medio del segmento AB.
  - Tienen la misma dirección y el mismo sentido.

Por tanto, $M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Hacemos las operaciones:

$$M = A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (a_1,a_2)+\frac{1}{2}(b_1-a_1,b_2-a_2) = (a_1,a_2)+\left(\frac{b_1-a_1}{2},\frac{b_2-a_2}{2}\right) =$$

$$= \left(a_1+\frac{b_1-a_1}{2},a_2+\frac{b_2-a_2}{2}\right) = \left(\frac{2a_1+b_1-a_1}{2},\frac{2a_2+b_2-a_2}{2}\right) = \left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right).$$

Llegamos a esta fórmula final:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}A=(a_1,a_2)\\B=(b_1,b_2)\end{array}\right\}\Rightarrow M=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)}$$

Observación: hubiéramos llegado a la misma fórmula usando $M = B+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

Ejemplo

Enunciado: calcula las coordenadas del punto M, que es el punto medio del segmento de extremos los puntos (2,–8) y (4,0).

Resolución

$M=\left(\frac{2+4}{2},\frac{-8+0}{2}\right)=\left(\frac{6}{2},\frac{-8}{2}\right)=(3,-4)$. Solución: $M=(3,-4)$.

Enunciados

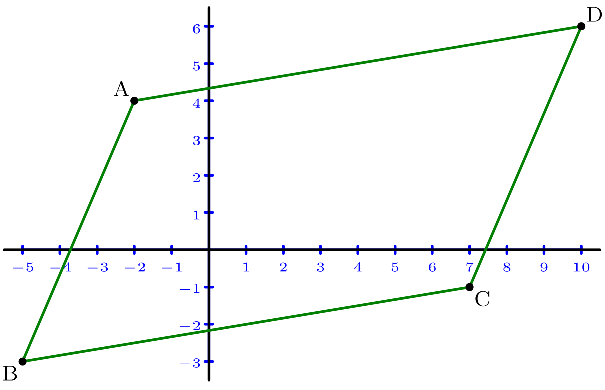
① Del paralelogramo ABCD conocemos tres vértices: A = (–2,4), B = (–5,–3) y C = (7,–1). Averigua las coordenadas del vértice D.

② Conocemos los tres vértices del triángulo HJK: H = (–1,2), J = (3,–2) y K = (10,6). Averigua las coordenadas del baricentro G.

Resoluciones

Es aconsejable realizar un dibujo de la situación; al fin y al cabo, estamos resolviendo problemas de geometría. Si el problema no utiliza letras, puedes ponerlas tú. A veces es conveniente dibujar los ejes de coordenadas y colocar cuidadosamente los puntos y otras veces es suficiente con representar aproximadamente los puntos, incluso sin ejes. Tendrás que decidir tú.

① A la derecha vemos el dibujo. Como ABCD es un paralelogramo, sabemos que los lados opuestos son paralelos y de la misma longitud, lo que nos proporciona varias igualdades entre los vectores que unen los vértices. Disponemos de dos estrategias sencillas para calcular el punto D:



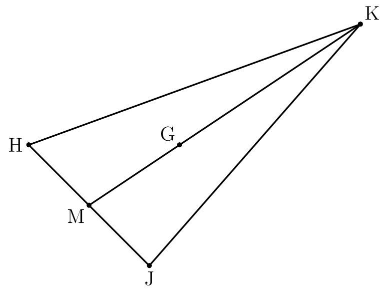
- $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC}$
- $D = C + \overrightarrow{CD} = C + \overrightarrow{BA}$

Usamos la primera, sin ningún motivo en especial:

$D = A + \overrightarrow{BC} = (-2,4)+(7-(-5),-1-(-3)) = (-2,4)+(12,2) = (10,6)$.

Solución: D = (10,6).

② A la derecha vemos el dibujo. Hemos representado la mediana que une el vértice K con M, el punto medio del lado HJ, para utilizar la propiedad de que el baricentro dista dos tercios del vértice y un tercio del lado. Disponemos de dos estrategias para calcular el punto G, aunque usaremos la primera:



- $G = M + \overrightarrow{MG} = M + \frac{1}{3}\overrightarrow{MK}$
- $G = K + \overrightarrow{KG} = K + \frac{2}{3}\overrightarrow{KM}$

Comenzamos por calcular el punto $M = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (1,0)$

Y por último, $G = M + \frac{1}{3}\overrightarrow{MK} = (1,0) + \frac{1}{3}(9,6) = (1,0)+(3,2) = (4,2)$

Solución: G = (4,2).

Observación: podíamos haber usado cualquier otra mediana, pero hemos elegido la única que tiene en sus extremos dos puntos con las dos coordenadas enteras.

Enunciados

① Los puntos (–2,–2), (0,3) y (3,–1) son los vértices de tres paralelogramos diferentes. Averigua el cuarto vértice de cada uno de los tres paralelogramos.

② Calcula los cuatro puntos que dividen en cinco partes iguales el segmento que tiene los extremos en los puntos (3,–5) y (–2,10).

③ Calcula el punto simétrico del punto (–3,2) respecto al punto (4,–5).

④ Dado el triángulo de vértices (11,12), (–13,2) y (5,–8), se pide:

a) Calcular su baricentro. b) Calcular el baricentro del triángulo formado por los puntos medios de los lados.

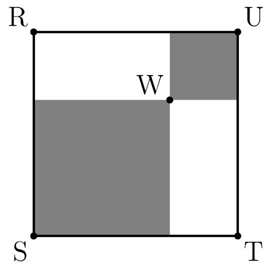
⑤ Calcula los dos vértices desconocidos del paralelogramo ABCD sabiendo que A = (–2,1), B = (1,–3) y el centro del paralelogramo es el punto Q = (4,5).

⑥ Calcula los tres vértices desconocidos de un cuadrado que tiene un vértice en el punto (7,3) y el centro en el punto (2,–1).

⑦ El triángulo HJK tiene el baricentro en el punto G = (8,–3) y el punto medio del lado HJ es el punto M = (–5,2). Averigua el vértice K.

⑧ El segmento CD tiene los extremos en los puntos C = (26,21) y D = (–4,6). Calcula todos los puntos situados en la recta que une C y D que disten de C el cuádruple que de D.

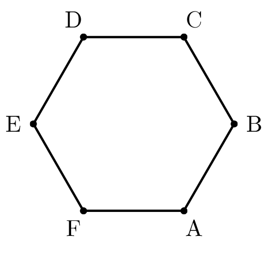
⑨ Los puntos medios de los lados de un triángulo son los puntos (–3,2), (7,–1) y (1,8). Averigua los tres vértices del triángulo.



⑩ Del cuadrado RSTU de la figura de la derecha conocemos tres vértices: R = (–17,7), S = (–8,–5) y T = (4,4). Sabemos que el área del cuadrado relleno de gris de mayor tamaño es cuatro veces mayor que el área del cuadrado relleno de gris de menor tamaño. Calcula el punto W.

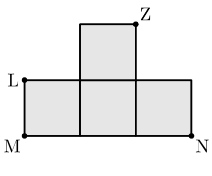
⑪ Sabemos que los puntos (25,9) y (11,–1) son los vértices de la diagonal menor de un rombo. También sabemos que la diagonal mayor mide el triple que la diagonal menor del rombo. Calcula los otros dos vértices.

⑫ Los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrado son (3,8) y (11,–6). Calcula los vértices del cuadrado.

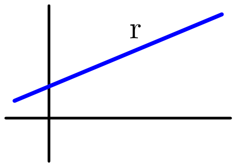


⑬ Del hexágono regular de la figura de la derecha se sabe que la abscisa del punto A vale «a», la abscisa del punto B vale «b» y la abscisa del punto C vale «c». Calcula la abscisa del punto E y da el resultado usando «a», «b» y «c».

⑭ La figura de la derecha es una de las piezas del Tetris. Como ves, está formada por cuatro cuadrados. Sabiendo que L = (0,4), M = (2,1) y N = (11,7), calcula Z.

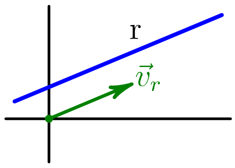


Elementos de una recta en el plano

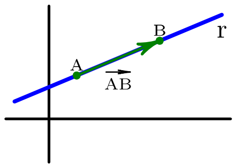


Consideramos una recta del plano, que en la ilustración llamamos «r», y vamos a ir mostrado los elementos relativos a la recta que utilizamos en geometría analítica.

Vector de dirección



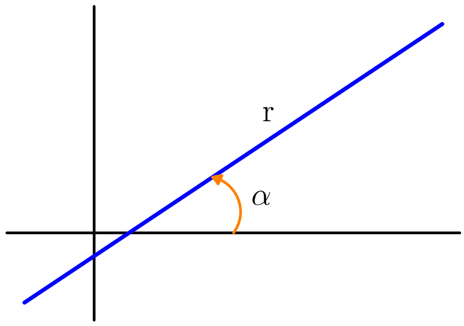
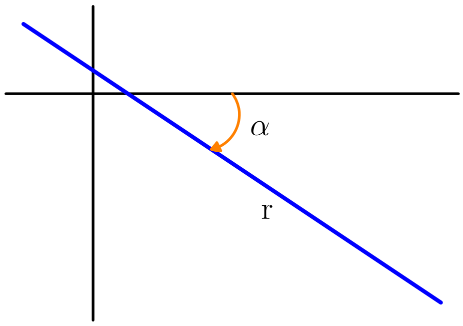
- ✱ El vector de dirección de una recta es cualquier vector que tenga la misma dirección que la recta.
- ✱ Un vector múltiplo de un vector de dirección de una recta también es vector de dirección de la recta.
- ✱ Llamaremos $\vec{v}_r$ a cualquier vector de dirección de la recta r.
- ✱ Si A y B son dos puntos distintos de una recta, el vector que los une es un vector de dirección de la recta. Simbólicamente:



$$\boxed{A,B \in r \wedge A \neq B \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{v}_r}$$

Pendiente

- ✱ La pendiente de una recta es un número real que expresa la inclinación de la recta respecto a la dirección horizontal y el sentido positivo (hacia la derecha).
- ✱ Se define como la tangente del ángulo que forma el eje positivo de abscisas con la recta (en las ilustraciones lo hemos llamado α). El ángulo se suele tomar en el intervalo (–90°,90°). En el nivel 5 estudiaremos la tangente de ángulos negativos.
- ✱ La pendiente de una recta se suele representar con la letra «m». Si es necesario, añadimos como subíndice el nombre de la recta: m_r.

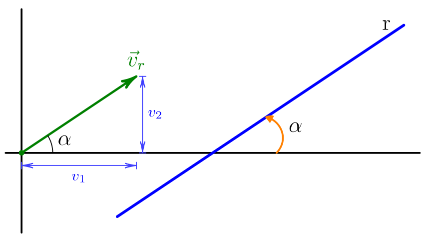
	
α∈(0°,90°). Pendiente positiva.	α∈(–90°,0°). Pendiente negativa.

- ✱ La pendiente se puede calcular como el cociente entre la segunda componente y la primera de cualquier vector de dirección. Simbólicamente:

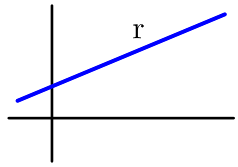
$$\boxed{\vec{v}_r = (v_1, v_2) \Rightarrow m_r = \frac{v_2}{v_1}}$$

- ■ Podemos ver el motivo en la ilustración de la derecha, que muestra el caso en que las dos componentes del vector de dirección son positivas; los demás casos son similares.

  $m = \text{tg}\,\alpha = v_2 : v_1$

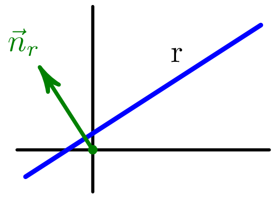


Elementos de una recta en el plano



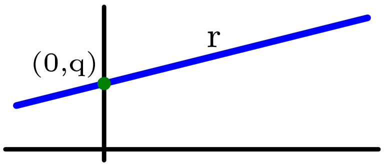
Consideramos una recta del plano, que en la ilustración llamamos «r», y vamos a ir mostrado los elementos relativos a la recta que utilizamos en geometría analítica.

Vector normal



- ✱ El vector normal a una recta es cualquier vector que tenga la dirección perpendicular a la recta.
- ✱ Un vector múltiplo de un vector normal de una recta también es un vector normal a la recta.
- ✱ Llamaremos $\vec{n}_r$ a cualquier vector normal a la recta r.
- ✱ El vector normal también se puede llamar vector perpendicular.

Ordenada en el origen



- ✱ Ordenada en el origen de una recta es la ordenada del punto de corte de la recta y el eje de ordenadas.
- ✱ En la ilustración de la derecha hemos llamado «q» a la ordenada en el origen de la recta r.

Ecuaciones de una recta

La ecuación de una recta es una expresión algebraica que permite:

- ✱ Decidir si un punto cualquiera pertenece o no a la recta.
- ✱ Averiguar puntos de la recta.

Por tanto, cualquier ecuación de una recta es una manera de determinar todos los puntos de una recta.

Hay varias ecuaciones de la recta, cada una con distintas utilidades. Veremos que, conocida una de ellas, podríamos averiguar todas las demás.

Vamos a escribir las ecuaciones más usadas de una recta en el plano; más adelante las describiremos con detalle.

Suponemos que la recta se llama r y asumiremos que:

- ✱ El punto (x,y) es un punto genérico de la recta.
- ✱ El punto (h_1,h_2) es un punto conocido de la recta.
- ✱ El vector (v_1,v_2) es un vector de dirección de la recta.
- ✱ El vector (a,b) es un vector normal a la recta y c es un número real.
- ✱ m es la pendiente y q es la ordenada en el origen.
- ✱ Además, usaremos λ (la letra griega lambda minúscula) para referirnos a un número real (podríamos haber usado cualquier otra letra, pero esta es la «clásica».

Se usa el símbolo «≡» para indicar «tiene como ecuación».

Ecuación **vectorial**: $r \equiv (x,y) = (h_1,h_2)+\lambda(v_1,v_2)$	
Ecuaciones **paramétricas**: $r \equiv \begin{cases} x=h_1+\lambda v_1 \\ y=h_2+\lambda v_2 \end{cases}$	Ecuación **continua**: $r \equiv \dfrac{x-h_1}{v_1}=\dfrac{y-h_2}{v_2}$
Ecuación **implícita**: $r \equiv ax+by+c=0$	Ecuación **explícita**: $r \equiv y=mx+q$

Ecuación vectorial de la recta

Tomamos una recta llamada r y consideramos estos elementos:

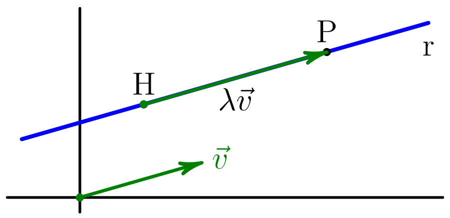
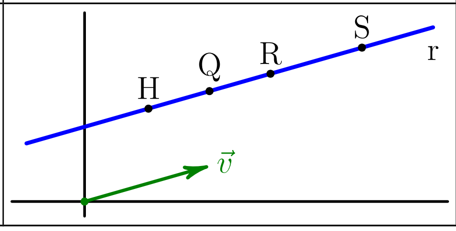
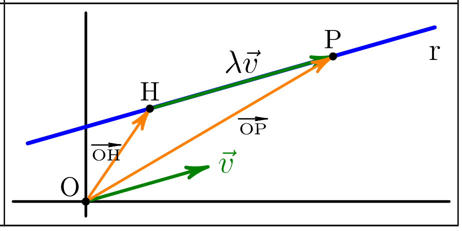
- ✱ El punto $P = (x,y)$ es un punto cualquiera del plano.
- ✱ El punto $H = (h_1,h_2)$ es un punto conocido de la recta.
- ✱ El vector $\vec{v} = (v_1,v_2)$ es un vector de dirección de la recta.
- ✱ Un número real λ, por determinar, que se denomina **parámetro**.

Buscamos una manera de caracterizar a los puntos de la recta, es decir, deducir una expresión que únicamente verifiquen los puntos que pertenezcan a la recta.

Atención ahora, esta es la clave: un punto P del plano pertenece a la recta r solamente cuando existe un número real λ de modo que $P = H+\lambda\,\vec{v}$. **Piénsalo**.

Expresado simbólicamente: $P \in r \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid P = H+\lambda\,\vec{v}$

En la figura 1 vemos la situación general; en la figura 2 mostramos los puntos Q, R y S, obtenidos con los valores λ=0,5, λ=1 y λ=1,75, respectivamente.

Figura 1	Figura 2	Figura 3
		

También podíamos haber expresado la situación como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \lambda\,\vec{v}$, como se muestra en la figura 3. O, incluso, usar que $\overrightarrow{HP} = \lambda\,\vec{v}$.

Si en cualquiera de las tres expresiones que hemos razonado sustituimos los puntos y los vectores por sus coordenadas y componentes, llegaremos a la expresión final. Lo vemos con la primera: $P = H+\lambda\,\vec{v} \Rightarrow (x,y) = (h_1,h_2)+\lambda(v_1,v_2)$

Y ya hemos llegado a la expresión denominada **ecuación vectorial de r**:

$$\boxed{r \equiv (x,y) = (h_1,h_2)+\lambda(v_1,v_2)}$$

Ejemplo 1

La ecuación vectorial de la recta «s» que pasa por el punto $W = (-4,1)$ y tiene vector de dirección $\vec{v}_s = (3,-2)$ es: $s \equiv (x,y) = (-4,1)+\lambda(3,-2)$.

Ejemplo 2

Enunciado: obtén tres puntos de la recta $t \equiv (x,y) = (5,-3)+\lambda(-2,7)$.

Resolución

Basta dar tres valores al parámetro λ; los que queramos, puesto que el enunciado no impone ninguna condición adicional. Por sencillez, suele ser aconsejable usar el valor $\lambda = 0$.

$\lambda = 0 \Rightarrow (x,y) = (5,-3)+0(-2,7) = (5,-3)+(0,0) = (5,-3)$

$\lambda = 1 \Rightarrow (x,y) = (5,-3)+1(-2,7) = (5,-3)+(-2,7) = (3,4)$

$\lambda = -1 \Rightarrow (x,y) = (5,-3)-1(-2,7) = (5,-3)-(-2,7) = (7,-10)$

Solución: (5,–3), (3,4) y (7,–10).

Nota: naturalmente, se pueden hacer las operaciones sin tantos pasos.

Ecuaciones paramétricas de la recta

Supongamos que una recta tiene ecuación vectorial $r \equiv (x,y) = (h_1,h_2)+\lambda(v_1,v_2)$.

Hacemos las operaciones indicadas en el segundo miembro:

$(x,y) = (h_1,h_2)+\lambda(v_1,v_2) \Rightarrow (x,y) = (h_1+\lambda v_1,h_2+\lambda v_2)$

Como los dos puntos son iguales, sus coordenadas deben ser iguales: $\begin{cases} x=h_1+\lambda v_1 \\ y=h_2+\lambda v_2 \end{cases}$

Llamamos **ecuaciones paramétricas** de la recta a estas dos expresiones consideredas conjuntamente: $r \equiv \begin{cases} x=h_1+\lambda v_1 \\ y=h_2+\lambda v_2 \end{cases}$

Ejemplo 1

Las ecuaciones paramétricas de la recta «s» que pasa por el punto $W = (8,-4)$ y tiene vector de dirección $\vec{v}_s = (-3,5)$ son: $s \equiv \begin{cases} x=8-3\lambda \\ y=-4+5\lambda \end{cases}$

Observa que ahora hemos escrito el parámetro λ tras el número. Es la costumbre.

Ejemplo 2

Enunciado: obtén tres puntos de la recta $t \equiv \begin{cases} x=2+4\lambda \\ y=1-3\lambda \end{cases}$ y el vector de dirección.

Resolución

Los números que no llevan parámetro forman las coordenadas de un punto: (2,1).

Los coeficientes del parámetro forman las componentes del vector de dirección: (4,–3).

Para obtener más puntos basta dar dos valores al parámetro λ; los que queramos, puesto que el enunciado no impone ninguna condición adicional, salvo el valor $\lambda = 0$, porque nos daría otra vez el punto que ya sabemos.

$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=2+4\cdot 1 \\ y=1-3\cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow$ punto (6,–2)

$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x=2+4(-1) \\ y=1-3(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow$ punto (–2,2)

Solución: Puntos (2,1), (6,–2) y (–2,2), vector de dirección (4,–3).

Ejemplo 3

Enunciado: decide si los puntos $A = (-5,31)$ y $B = (22,-19)$ pertenecen a la recta $w \equiv \begin{cases} x=7-3\lambda \\ y=11+5\lambda \end{cases}$

Resolución

Sustituimos los puntos en las ecuaciones e intentamos calcular λ:

$A = (-5,31) \Rightarrow \begin{cases} -5=7-3\lambda \Rightarrow \lambda=4 \\ 31=11+5\lambda \Rightarrow \lambda=4 \end{cases} \Rightarrow \lambda=4 \Rightarrow A \in w$

$B = (22,-19) \Rightarrow \begin{cases} 22=7-3\lambda \Rightarrow \lambda=-5 \\ -19=11+5\lambda \Rightarrow \lambda=-6 \end{cases} \Rightarrow$ sin solución $\Rightarrow B \notin w$

Ecuación continua de la recta

Supongamos que una recta tiene ecuaciones paramétricas $r \equiv \begin{cases} x=h_1+\lambda v_1 \\ y=h_2+\lambda v_2 \end{cases}$

Para que un punto (x,y) pertenezca a la recta, el valor de λ en cada una de las dos igualdades debe ser el mismo, por lo que para caracterizar los puntos de la recta podemos despejar λ en las dos igualdades e igualar las expresiones:

$$\begin{cases} x=h_1+\lambda v_1 \\ y=h_2+\lambda v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-h_1=\lambda v_1 \\ y-h_2=\lambda v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-h_1}{v_1}=\lambda \\ \dfrac{y-h_2}{v_2}=\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-h_1}{v_1}=\frac{y-h_2}{v_2}$$

Así llegamos a la llamada **ecuación continua** de r: $r \equiv \dfrac{x-h_1}{v_1}=\dfrac{y-h_2}{v_2}$

Observa que en esta ecuación ya no hay parámetro.

Ejemplo 1

La ecuación continua de la recta «s» que pasa por el punto W = (2,–3) y tiene vector de dirección $\vec{v}_s = (4,5)$ es: $s \equiv \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{5}$

Ejemplo 2

Enunciado: obtén dos puntos de la recta $t \equiv \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-5}{7}$ y el vector de dirección.

Resolución

Los números que están restando a «x» y a «y» forman las coordenadas de un punto: (–1,5).

Los denominadores son las componentes del vector de dirección: (–2,7).

Para obtener más puntos podemos sumar el punto y algún múltiplo del vector de dirección: (–1,5)+(–2,7) = (–3,12).

Solución: Puntos (–1,5) y (–3,12), vector de dirección (–2,7).

Ejemplo 3

Enunciado: decide si los puntos A = (–4,3) y B = (23,–37) pertenecen a la recta $w \equiv \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{-4}$

Resolución

Sustituimos los puntos en la ecuación y comprobamos si se verifica la igualdad:

$$A=(-4,3) \to \frac{-4-2}{3}=\frac{3+5}{-4} \Rightarrow \frac{-6}{3}=\frac{8}{-4} \Rightarrow (-6)(-4)=3\cdot 8 \Rightarrow 24=24 \checkmark \Rightarrow A\in w$$

$$B=(23,-37) \to \frac{23-2}{3}=\frac{-37+5}{-4} \Rightarrow \frac{21}{3}=\frac{-32}{-4} \Rightarrow 21(-4)=3\cdot(-32) \Rightarrow -48=-96 \text{ ✘} \Rightarrow B\notin w$$

Nota: en este caso particular podíamos haber efectuado las divisiones, puesto que dan resultados enteros, pero en general es más sencillo hacer las multiplicaciones.

Ecuación implícita de la recta

Supongamos que una recta tiene ecuación continua $r \equiv \frac{x-h_1}{v_1}=\frac{y-h_2}{v_2}$

Si hacemos todas las operaciones necesarias para simplificar al máximo esta igualdad, llegaremos a otra igualdad que tendrá este aspecto: $ax+by+c=0$, siendo «a», «b» y «c» tres números reales que habrá que determinar. Esta igualdad se llama **ecuación implícita** o **ecuación general** de la recta «r»: $r \equiv ax+by+c=0$.

Ejemplo 1

Enunciado: averigua la ecuación implícita de la recta $s \equiv \frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{5}$

Resolución

$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{5} \Rightarrow 5(x-2)=4(y+3) \Rightarrow 5x-10=4y+12 \Rightarrow 5x-4y-22=0$

Solución: $s \equiv 5x-4y-22=0$

Ejemplo 2

Enunciado: obtén dos puntos de la recta $t \equiv 2x+3y-8=0$ y el vector de dirección.

Resolución

Para obtener puntos de la recta hay que dar a «x» o a «y» un valor cualquiera y calcular el valor de la otra variable resolviendo la ecuación resultante. Lo que más nos interesa es dar un valor entero de modo que la otra variable también tenga un valor entero. No siempre se puede, y a veces es difícil, pero si se practica, se puede conseguir y eso nos ayuda con las operaciones.

$y=0 \Rightarrow 2x+3\cdot 0-8=0 \Rightarrow x=4 \rightarrow$ punto $A=(4,0)$.

$x=-5 \Rightarrow 2(-5)+3y-8=0 \Rightarrow y=6 \rightarrow$ punto $B=(-5,6)$.

El vector que une esos dos puntos será un vector de dirección:

$\overrightarrow{AB}=(-5-4,6-0)=(-9,6)$.

Pero se suele simplificar si es posible porque eso facilitará las operaciones que haya que hacer con él: $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}(-9,6)=(3,-2)$.

Solución: Puntos (4,0) y (–5,6), vector de dirección (3,–2).

Ejemplo 3

Enunciado: decide si los puntos $A=(-6,-2)$ y $B=(6,5)$ pertenecen a la recta $w \equiv 5x-8y+14=0$

Resolución

Sustituimos los puntos en la ecuación y comprobamos si se verifica la igualdad:

$A=(-6,-2) \rightarrow 5(-6)-8(-2)+14=-30+16+14=0$ ✔ $\Rightarrow A \in w$

$B=(6,5) \rightarrow 5\cdot 6-8\cdot 5+14=30-40+14=4$ ✘ $\Rightarrow B \notin w$

Ecuación implícita de la recta y vector normal

Supongamos que una recta tiene ecuación implícita $r \equiv ax+by+c=0$.

Entonces, el vector (a,b) es un vector normal a la recta.

Demostración

Vamos a demostrar que el vector (a,b) es perpendicular a un vector de dirección de la recta «r».

Consideramos dos puntos diferentes de la recta: $P=(p_1,p_2)$ y $Q=(q_1,q_2)$.

$P=(p_1,p_2)\in r \Rightarrow ap_1+bp_2+c=0$; $Q=(q_1,q_2)\in r \Rightarrow aq_1+bq_2+c=0$

Restamos miembro a miembro las dos igualdades:

$(aq_1+bq_2+c)-(ap_1+bp_2+c)=0-0 \Rightarrow a(q_1-p_1)+b(q_2-p_2)+c-c=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b)(q_1-p_1,q_2-p_2)=0 \Rightarrow (a,b)\overrightarrow{PQ}=0 \Rightarrow (a,b)\perp\overrightarrow{PQ} \Rightarrow (a,b)\perp\vec{v}_r$

Ejemplo 1

Enunciado: di un vector perpendicular a la recta $s \equiv 10x-14y+5=0$ que sea lo más sencillo que sea posible.

Resolución

Los coeficientes de «x» e «y» en la ecuación implícita ya nos dan un primer vector normal: (10,–14). Pero en algunas ocasiones, como ahora, es posible simplificarlo.

$\vec{n}_s=\frac{1}{2}(10,-14)=(5,-7)$. Solución: $\vec{n}_s=(5,-7)$.

Ejemplo 2

Enunciado: escribe la ecuación implícita de la recta «t» que pasa por el punto $H=(5,-9)$ y tiene vector normal $\vec{n}_t=(4,-1)$.

Resolución

Con el vector normal ya podemos escribir parcialmente la ecuación implícita:

$\vec{n}_t=(4,-1) \Rightarrow t \equiv 4x-y+c=0$

Para averiguar el valor de «c» usamos que el punto H pertenece a la recta y, por lo tanto, debe verificar su ecuación:

$H=(5,-9)\in t \Rightarrow 4\cdot5-(-9)+c=0 \Rightarrow c=-29$.

Solución: $t \equiv 4x-y-29=0$

Ejemplo 3

Enunciado: escribe la ecuación implícita de la recta «w» que pasa por el punto $R=(3,4)$ y tiene vector de dirección $\vec{v}_w=(2,-5)$.

Resolución

Obtenemos el vector normal de la recta como un vector cualquiera que sea perpendicular al vector de dirección: $\vec{v}_w=(2,-5) \Rightarrow \vec{n}_w=(5,2)$.

Con el vector normal ya podemos escribir parcialmente la ecuación implícita:

$\vec{n}_w=(5,2) \Rightarrow w \equiv 5x+2y+c=0$

Para averiguar el valor de «c» usamos que el punto R pertenece a la recta y por lo tanto, debe verificar su ecuación:

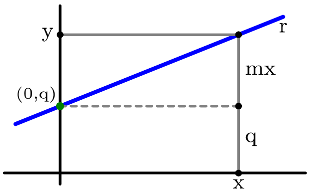
$R=(3,4)\in w \Rightarrow 5\cdot3+2\cdot4+c=0 \Rightarrow c=-23$.

Solución: $w \equiv 5x+2y-23=0$

Ecuación explícita de la recta

Supongamos que una recta tiene ecuación implícita $r \equiv ax+by+c = 0$.

Si hacemos todas las operaciones necesarias para despejar «y», llegaremos a otra igualdad que tendrá este aspecto: $y = mx+q$, siendo «m» la pendiente de la recta y «q» la ordenada en el origen. A la derecha vemos la justificación gráfica de por qué deben ser esos precisamente los valores.



✱ Esta igualdad se llama **ecuación explícita** de la recta «r»: $r \equiv y = mx+q$.

✱ La ecuación explícita de una recta coincide con la expresión analítica de una función lineal que estudiamos en el nivel 3.

Ejemplo 1

Enunciado: averigua la ecuación explícita de la recta $s \equiv 3x+6y-8 = 0$.

Resolución

$$3x+6y-8 = 0 \Rightarrow 6y = -3x+8 \Rightarrow y = -\frac{3}{6}x+\frac{8}{6} = -\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}$$

Solución: $s \equiv y = -\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}$

Nota: en la ecuación explícita preferimos escribir dos fracciones (si es necesario) para poder observar fácilmente la pendiente y la ordenada en el origen.

Ejemplo 2

Enunciado: obtén dos puntos de la recta $t \equiv y = 3x-4$ y el vector de dirección.

Resolución

Para obtener puntos de la recta hay que dar a «x» un valor cualquiera y calcular el valor de «y». Lo que más nos interesa es dar un valor entero a «x» de modo que la «y» también tenga un valor entero. No siempre se puede, y a veces es difícil, pero si se practica, se puede conseguir y eso nos ayuda con las operaciones.

$x = 0 \Rightarrow y = 3\cdot0-4 \Rightarrow y = -4 \rightarrow$ punto $A = (0,-4)$.

$x = 1 \Rightarrow y = 3\cdot1-4 \Rightarrow y = -1 \rightarrow$ punto $B = (1,-1)$.

El vector que une esos dos puntos será un vector de dirección:

$\overrightarrow{AB} = (1-0,-1-(-4)) = (1,3)$.

Si hubiéramos averiguado otros puntos, puede ser que hubiéramos obtenido un vector de dirección que admitiera ser simplificado.

También podemos obtener el vector de dirección directamente a partir de la pendiente: $t \equiv y = 3x-4 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow \vec{v}_r = (1,3)$.

Solución: Puntos $(0,-4)$ y $(1,-1)$, vector de dirección $(1,3)$.

Ejemplo 3

Enunciado: decide si los puntos $A = (4,30)$ y $B = (-2,-11)$ pertenecen a la recta $w \equiv y = 7x+2$.

Resolución

Sustituimos el valor de «x» de cada punto en la ecuación y comprobamos si obtenemos el correspondinente valor de «y»:

$A = (4,30) \rightarrow y = 7\cdot4+2 = 30$ ✔ $\Rightarrow A \in w$

$B = (-2,-11) \rightarrow y = 7(-2)+2 = -12$ ✘ $\Rightarrow B \notin w$

Fórmula punto-pendiente

Si una recta tiene pendiente «m» y pasa por el punto de coordenadas (x_0,y_0), entonces se verifica que

$$\boxed{y-y_0 = m(x-x_0)}$$

Esta expresión se llama **fórmula punto-pendiente**.

Demostración

Si el punto $P=(x,y)$ pertenece a la recta que también pasa por el punto $H=(x_0,y_0)$, el vector $\overrightarrow{HP}$ es un vector de dirección de la recta y por tanto la pendiente de la recta es el cociente de la segunda componente entre la primera:

$$\overrightarrow{HP} = (x-x_0,y-y_0) \Rightarrow m = \frac{y-y_0}{x-x_0} \Rightarrow y-y_0 = m(x-x_0)$$

Utilidad

La fórmula punto-pendiente resulta muy útil para averiguar la ecuación implícita o la ecuación explícita de una recta de la que se conocen un punto y la pendiente.

Ejemplo 1

Enunciado

Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que pasa por el punto (4,–5) y tiene pendiente $\frac{2}{3}$.

Resolución

Usamos la fórmula punto-pendiente con $(x_0,y_0)=(4,-5)$ y $m=\frac{2}{3}$ y desarrollamos la expresión hasta llegar a la ecuación implícita:

$$y-(-5)= \frac{2}{3}(x-4) \Rightarrow 3(y+5)=2(x-4) \Rightarrow 3y+15=2x-8 \Rightarrow -2x+3y+23=0$$

Solución: $s \equiv -2x+3y+23=0$

Nota: también podríamos haber dado como solución $s \equiv 2x-3y-23=0$.

Ejemplo 2

Enunciado

Averigua la ecuación explícita de la recta «t» que pasa por el punto (–2,7) y tiene pendiente $\frac{5}{4}$.

Resolución

Usamos la fórmula punto-pendiente con $(x_0,y_0)=(-2,7)$ y $m=\frac{2}{3}$ y desarrollamos la expresión hasta llegar a la ecuación explícita:

$$y-7=\frac{2}{3}(x-(-2)) \Rightarrow y-7=\frac{2}{3}(x+2) \Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}+7 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{25}{3}$$

Solución: $t \equiv y=\frac{2}{3}x+\frac{25}{3}$

Relación entre las ecuaciones de una recta

Todas las ecuaciones de la recta están relacionadas entre sí. Conocida una cualquiera de ellas, podemos averiguar cualquier otra que necesitemos y habrá muchos caminos diferentes para conseguirlo. Te vamos a dar varios ejemplos de cómo hacerlo, pero cuando sea tu turno podrás utilizar tus propias ideas, no tienes por qué hacerlo exactamente como te presentamos.

Enunciados

① Averigua la ecuación implícita de la recta $r \equiv (x,y) = (1,3)+\lambda(2,-5)$

② Averigua las ecuaciones paramétricas de la recta $s \equiv y = \frac{4}{7}x+2$

③ Averigua la ecuación continua de la recta $t \equiv 5x+3y+4 = 0$

④ Averigua la ecuación explícita de la recta $w \equiv \begin{cases} x=1-3\lambda \\ y=5+6\lambda \end{cases}$

⑤ Averigua la ecuación implícita de la recta $z \equiv y = -\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$

Resoluciones

① Averiguamos un vector normal: $\vec{v}_r = (2,-5) \Rightarrow \vec{n}_r = (5,2) \Rightarrow r \equiv 5x+2y+c = 0$

Utilizamos un punto para calcular «c»: $(1,3) \in r \Rightarrow 5\cdot 1+2\cdot 3+c = 0 \Rightarrow c = -11$

Solución: $r \equiv 5x+2y-11 = 0$

② Averiguamos un vector de dirección: $m_s = \frac{4}{7} \Rightarrow \vec{v}_s = (4,7)$

Averiguamos un punto: $x = 0 \Rightarrow y = 2$, luego $(0,2) \in s$

Solución: $s \equiv \begin{cases} x=4\lambda \\ y=2+7\lambda \end{cases}$

③ Averiguamos un vector de dirección: $\vec{n}_t = (5,3) \Rightarrow \vec{v}_t = (3,-5)$

Averiguamos un punto: $x = 1 \Rightarrow y = -3$, luego $(1,-3) \in t$

Solución: $t \equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-5}$

④ Calculamos la pendiente: $\vec{v}_w = (-3,6) \Rightarrow m_w = \frac{6}{-3} = -2 \Rightarrow y = -2x+q$

Utilizamos un punto para calcular «q»: $(1,5) \in w \Rightarrow 5 = -2\cdot 1+q \Rightarrow q = 7$

Solución: $r \equiv y = -2x+7$

⑤ Multiplicamos toda la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores y pasamos todos los términos a un miembro, colocándolos en el orden de la ecuación implícita:

$y = -\frac{1}{2}x+\frac{2}{3} \Rightarrow 6y=-3x+4 \Rightarrow 3x+6y-4 = 0$

Solución: $z \equiv 3x+6y-4 = 0$

Enunciados

① Averigua la ecuación implícita de la recta $r \equiv (x,y) = (-2,5)+\lambda(-4,7)$

② Averigua las ecuaciones paramétricas de la recta $s \equiv y = \frac{3}{5}x-4$

③ Averigua la ecuación continua de la recta $t \equiv 2x+5y+1 = 0$

④ Averigua la ecuación explícita de la recta $w \equiv \begin{cases} x=4+\lambda \\ y=-1+3\lambda \end{cases}$

⑤ Averigua la ecuación implícita de la recta $z \equiv y = \frac{2}{3}x-\frac{1}{5}$

⑥ Averigua la ecuación implícita de la recta $d \equiv \begin{cases} x=-7+2\lambda \\ y=9-3\lambda \end{cases}$

⑦ Averigua las ecuaciones paramétricas de la recta $f \equiv x-3y+2 = 0$

⑧ Averigua la ecuación continua de la recta $g \equiv y = -\frac{5}{9}x+\frac{4}{9}$

⑨ Averigua la ecuación explícita de la recta $h \equiv \frac{x+4}{5}=\frac{y-3}{4}$

⑩ Averigua la ecuación implícita de la recta $m \equiv \frac{x}{6}=\frac{y+3}{5}$

⑪ Averigua las ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv \frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}$

⑫ Averigua la ecuación vectorial de la recta $s \equiv 4x-3y+2 = 0$

⑬ Averigua la ecuación implícita de la recta $t \equiv (x,y) = (4,7)+\lambda(1,-2)$

⑭ Averigua la ecuación explícita de la recta $w \equiv (x,y) = (0,9)+\lambda(3,5)$

⑮ Averigua la ecuación continua de la recta $z \equiv y = \frac{8}{3}x-\frac{1}{3}$

⑯ Averigua la ecuación implícita de la recta $d \equiv \begin{cases} x=4-\lambda \\ y=5-\lambda \end{cases}$

⑰ Averigua la ecuación explícita de la recta $f \equiv \frac{x+8}{-3}=\frac{y-4}{5}$

⑱ Averigua la ecuación continua de la recta $g \equiv (x,y) = (-5,3)+\lambda(1,-1)$

⑲ Averigua la ecuación implícita de la recta $h \equiv y = -4x+\frac{1}{2}$

⑳ Averigua la ecuación vectorial de la recta $m \equiv -5x-y+8=0$

Recta que pasa por dos puntos

Un paso muy común en geometría es dibujar la recta que pasa por dos puntos. Si traducimos este paso a geometría analítica, debemos preguntarnos cómo obtener alguna ecuación de una recta si conocemos las coordenadas de dos de sus puntos. Según la ecuación que queramos obtener, los pasos serán algo diferentes.

Enunciados

① Averigua la ecuación vectorial de la recta «r» que pasa por los puntos $A = (2,-5)$ y $B = (-6,-1)$.

② Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que pasa por los puntos $C = (-2,-1)$ y $D = (-17,19)$.

Resoluciones

① El vector que une los dos puntos conocidos es un vector de dirección: $\overrightarrow{AB} = (-6-2,-1-(-5)) = (-8,4)$.

Para que las operaciones sean más sencillas, es conveniente simplificarlo:

$$\vec{v}_r = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}(-8,4) = (2,-1).$$

Conocidos ya un vector de dirección y un punto, podemos escribir la ecuación vectorial, igual que también podríamos escribir las ecuaciones paramétricas o la ecuación continua si nos las pidieran. Como punto podemos elegir cualquiera de los dos que nos han dado en el enunciado.

Solución: $r \equiv (x,y) = (2,-5)+\lambda(2,-1)$

② El vector que une los dos puntos conocidos es un vector de dirección: $\overrightarrow{CD} = (-17-(-2),19-(-1)) = (-15,20)$.

Para que las operaciones sean más sencillas, es conveniente simplificarlo:

$$\vec{v}_s = -\frac{1}{5}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{5}(-15,20) = (3,-4).$$

A partir de un vector de dirección obtenemos un vector normal y parte de la ecuación implícita:

$$\vec{v}_s = (3,-4) \Rightarrow \vec{n}_s = (4,3) \Rightarrow s \equiv 4x+3y+c = 0$$

Para calcular «c» sustituimos en la ecuación cualquiera de los dos puntos del enunciado; con ambos se obtiene el mismo valor, así que se suele elegir el que nos parezca más sencillo:

$$C = (-2,-1) \in s \Rightarrow 4\cdot(-2)+3\cdot(-1)+c = 0 \Rightarrow c = 11$$

Observa qué ocurre si sustituimos el punto D:

$$D = (-17,19) \in s \Rightarrow 4\cdot(-17)+3\cdot 19+c = 0 \Rightarrow -68+57+c = 0 \Rightarrow c = 11$$

Solución: $s \equiv 4x+3y+11 = 0$

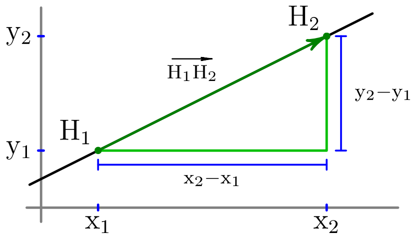
Pendiente de una recta conocidos dos puntos

Si una recta pasa por los puntos de coordenadas (x_1,y_1) y (x_2,y_2), entonces su pendiente es:

$$\boxed{m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

Demostración

Si la recta pasa por los puntos $H_1 = (x_1,y_1)$ y $H_2 = (x_2,y_2)$, el vector $\overrightarrow{H_1H_2}$ es un vector de dirección de la recta y por tanto la pendiente de la recta es el cociente de la segunda componente entre la primera:



$$\overrightarrow{H_1H_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1) \Rightarrow m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Fórmula punto-pendiente conocidos dos puntos

A los amantes de las fórmulas les suele gustar saber que si una recta pasa por los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2), entonces la fórmula punto-pendiente se puede escribir así, tomando como (x_0,y_0) cualquiera de los dos puntos conocidos:

$$\boxed{y-y_0 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_0)}$$

Ejemplo 1

Enunciado

Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que pasa por los puntos (7,–4) y (1,5)

Resolución

Partimos de la fórmula, simplificamos si podemos y desarrollamos la expresión hasta llegar a la ecuación implícita:

$$y-5 = \frac{5-(-4)}{1-7}(x-1) \Rightarrow y-1 = \frac{9}{6}(x-1) \Rightarrow y-1 = \frac{3}{2}(x-1) \Rightarrow 2y-2 = 3x-3 \Rightarrow 3x-2y-1 = 0$$

Solución: $s \equiv 3x-2y-1 = 0$

Ejemplo 2

Enunciado

Averigua la ecuación explícita de la recta «t» que pasa por los puntos (4,1) y (7,9)

Resolución

Partimos de la fórmula, simplificamos si podemos y desarrollamos la expresión hasta llegar a la ecuación implícita:

$$y-1 = \frac{9-1}{7-4}(x-4) \Rightarrow y-1 = \frac{8}{3}(x-4) \Rightarrow y = \frac{8}{3}x - \frac{32}{3} + 1 \Rightarrow y = \frac{8}{3}x - \frac{29}{3}$$

Solución: $t \equiv y = \frac{8}{3}x - \frac{29}{3}$

Observación

Puedes hacer notado que este método es muy similar al de encontrar la expresión analítica de una función lineal conocidas dos parejas de valores.

Rectas paralelas a los ejes de coordenadas

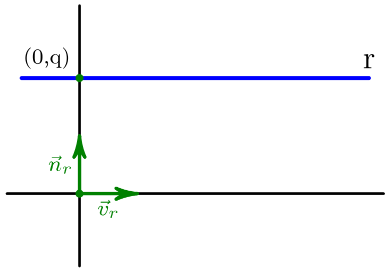
Las rectas paralelas a los ejes son especialmente sencillas de manejar en geometría analítica porque se pueden caracterizar con una ecuación que es más sencilla que cualquier otra. Por tanto, esa será la única que usemos.

Rectas paralelas al eje de abscisas

Si «r» es una recta paralela al eje de abscisas, todos sus puntos tienen la misma ordenada, que coincidirá con la ordenada en el origen y podemos denominar «q». Por tanto, un punto (x,y) pertenecerá a la recta «r» cuando «y = q», y esta expresión será la ecuación de la recta:

$$\boxed{r \equiv y = q}$$

Otros datos de interés de las rectas paralelas al eje de abscisas:



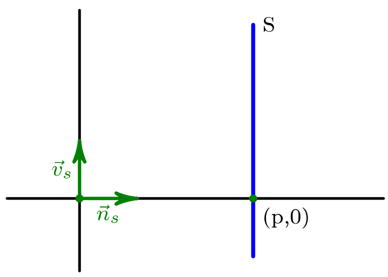
- ✱ El vector de dirección más sencillo es el (1,0).
- ✱ Tienen pendiente $m_r = 0$.
- ✱ El vector normal más sencillo es el (0,1).
- ✱ La ecuación vectorial es $r \equiv (x,y) = (0,q)+\lambda(1,0)$.
- ✱ Las ecuaciones paramétricas son $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=q \end{cases}$.
- ✱ La ecuación continua no tiene sentido porque habría que dividir entre 0.
- ✱ La ecuación implícita es $r \equiv y-q = 0$.
- ✱ La ecuación explícita es $r \equiv y = q$.

Rectas paralelas al eje de ordenadas

Si «s» es una recta paralela al eje de ordenadas, todos sus puntos tienen la misma abscisa, que podemos denominar «p». Por tanto, un punto (x,y) pertenecerá a la recta «s» cuando «x = p», y esta expresión será la ecuación de la recta:

$$\boxed{s \equiv x = p}$$

Otros datos de interés de las rectas paralelas al eje de ordenadas:



- ✱ El vector de dirección más sencillo es el (0,1).
- ✱ No tienen pendiente, aunque a veces se dice que tienen pendiente infinita.
- ✱ El vector normal más sencillo es el (1,0).
- ✱ La ecuación vectorial es $s \equiv (x,y) = (p,0)+\lambda(0,1)$.
- ✱ Las ecuaciones paramétricas son $s \equiv \begin{cases} x=p \\ y=\lambda \end{cases}$.
- ✱ La ecuación continua no tiene sentido porque habría que dividir entre 0.
- ✱ La ecuación implícita es $s \equiv x-p = 0$.
- ✱ No tienen ecuación explícita.

Ejemplos

① La ecuación de la recta que pasa por los puntos (–2,3) y (4,3) es «y = 3».

② La ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,–5) y (1,6) es «x = 1».

Enunciados

① Averigua la ecuación vectorial de la recta «r» que pasa por los puntos $A = (-7,4)$ y $B = (2,1)$.

② Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que pasa por los puntos $C = (10,-7)$ y $D = (-2,1)$.

③ Averigua la ecuación explícita de la recta «t» que pasa por los puntos $E = (1,2)$ y $F = (-2,-5)$.

④ Averigua la ecuación de la recta «w» que pasa por los puntos $(7,-1)$ y $(7,13)$.

⑤ Averigua la ecuación de la recta «z» que pasa por los puntos $(-9,-2)$ y $(4,-2)$.

Enunciados

⑥ Averigua las ecuaciones paramétricas de la recta «r» que pasa por los puntos $A = (-9,17)$ y $B = (5,-4)$.

⑦ Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que pasa por los puntos $C = (-6,4)$ y $D = (-1,1)$.

⑧ Averigua la ecuación explícita de la recta «t» que pasa por los puntos $E = (5,-4)$ y $F = (-1,5)$.

⑨ Averigua la ecuación de la recta «w» que pasa por los puntos $(4,-1)$ y $(7,-1)$.

⑩ Averigua la ecuación de la recta «z» que pasa por los puntos $(4,-11)$ y $(4,7)$.

Enunciados

⑪ Averigua la ecuación continua de la recta «r» que pasa por los puntos $A = (8,10)$ y $B = (2,8)$.

⑫ Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que pasa por los puntos $C = (-5,8)$ y $D = (-1,5)$.

⑬ Averigua la ecuación explícita de la recta «t» que pasa por los puntos $E = (11,-9)$ y $F = (2,3)$.

⑭ Averigua la ecuación de la recta «w» que pasa por los puntos $(-2,23)$ y $(-2,1)$.

⑮ Averigua la ecuación de la recta «z» que pasa por los puntos $(-8,8)$ y $(4,8)$.

Estudio de si tres puntos están alineados

Se dice que tres puntos están alineados cuando existe una recta a la que pertenecen los tres.

El problema que se nos presenta es averiguar si tres puntos están alineados dadas las coordenadas de los tres.

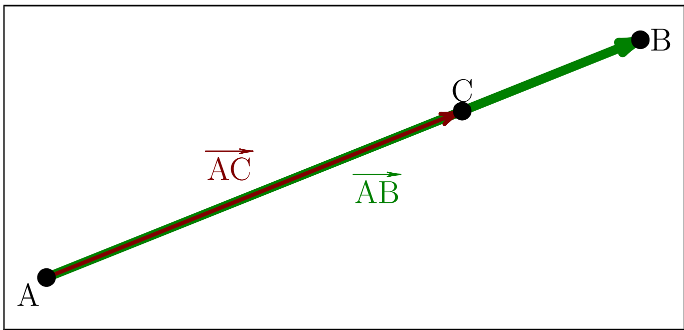
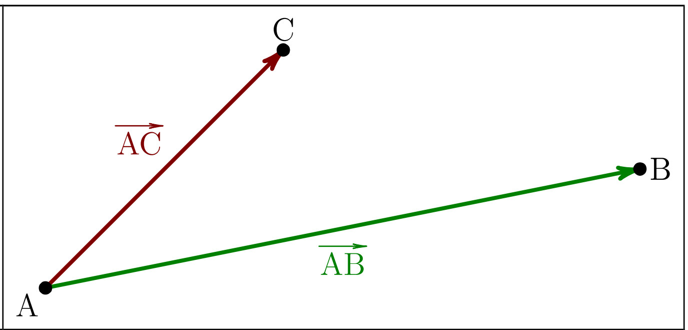
Como ya hemos visto en qué consisten las ecuaciones de las rectas, se nos puede ocurrir que para resolver el problema podemos usar esta técnica: se averigua una ecuación de la recta que pasa por dos de los puntos y se estudia si el tercer punto pertenece a esa recta.

Aún siendo un método correcto, hay una manera más sencilla de resolver el problema, recurriendo a propiedades de los vectores.

Método para determinar si tres puntos están alineados

Dados los puntos A, B y C, se verifica:

- ✱ Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son múltiplos, los tres puntos están alineados.
- ✱ Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no son múltiplos, los tres puntos no están alineados.

	
$\overrightarrow{AB}=\lambda\,\overrightarrow{AC}$ ⇒ puntos alineados	$\overrightarrow{AB}\neq\lambda\,\overrightarrow{AC}$ ⇒ puntos no alineados

Ejemplos

① Determina si los puntos D = (–9,32), E = (1,17) y F = (7,8) están alineados.

Se puede tomar como punto base cualquiera de los tres, así que elegimos el que nos parece más sencillo:

$\overrightarrow{FD}$ = (–9–7,32–8) = (–16,24) y $\overrightarrow{FE}$ = (1–7,17–8) = (–6,9).

Para determinar si estos dos vectores son múltiplos, calculamos los productos cruzados de sus componentes: –16·9 = –144 y 24·(–6) = –144.

Como los dos productos dan el mismo resultado, los dos vectores son múltiplos y por tanto los tres puntos están alineados.

Solución: están alineados.

② Determina si los puntos K = (7,14), L = (–1,3) y M = (43,58) están alineados.

$\overrightarrow{LK}$ = (7–(–1),14–3) = (8,11) y $\overrightarrow{LM}$ = (43–(–1),58–3) = (44,55).

Calculamos los productos cruzados: 8·55 = 440 y 11·44 = 484.

Como los dos productos dan distinto resultado, los dos vectores no son múltiplos y por tanto los tres puntos no están alineados.

Solución: no están alineados.

Enunciados

① Determina si los puntos A = (13,–4), B = (–9,10) y C = (2,3) están alineados.

② Determina si los puntos D = (–5,4), E = (–13,13) y F = (7,–25) están alineados.

③ Determina si los puntos G = (27,26), H = (1,2) y J = (–38,–34) están alineados.

④ Determina si los puntos K = (16,–16), L = (–19,9) y M = (–5,–1) están alineados.

⑤ Determina si los puntos P = (8,–25), Q = (12,–33) y R = (–4,–5) están alineados.

⑥ Determina si los puntos S = (–6,6), T = (8,–1) y Z = (2,2) están alineados.

Enunciados

⑦ Determina si los puntos A = (1,4), B = (5,1) y C = (–9,8) están alineados.

⑧ Determina si los puntos D = (0,1), E = (13,–10) y F = (–26,23) están alineados.

⑨ Determina si los puntos G = (22,19), H = (19,14) y J = (28,29) están alineados.

⑩ Determina si los puntos K = (–5,–3), L = (0,3) y M = (–11,–12) están alineados.

⑪ Determina si los puntos P = (–11,12), Q = (–7,18) y R = (–17,2) están alineados.

⑫ Determina si los puntos S = (6,–19), T = (16,–4) y Z = (12,–10) están alineados.

Enunciados

⑬ Determina si los puntos A = (–9,5), B = (–5,11) y C = (–15,–4) están alineados.

⑭ Determina si los puntos D = (8,0), E = (14,11) y F = (–1,–14) están alineados.

⑮ Determina si los puntos G = (–4,–2), H = (2,8) y J = (–13,–17) están alineados.

⑯ Determina si los puntos K = (–7,–11), L = (–13,3) y M = (2,–32) están alineados.

⑰ Determina si los puntos P = (–9,20), Q = (5,4) y R = (–30,44) están alineados.

⑱ Determina si los puntos S = (–9,20), T = (4,2) y Z = (–23,38) están alineados.

Enunciados

⑲ Determina si los puntos A = (4,5), B = (0,–1) y C = (8,1) están alineados.

⑳ Determina si los puntos D = (8,9), E = (4,4) y F = (12,15) están alineados.

㉑ Determina si los puntos G = (2,3), H = (0,0) y J = (4,7) están alineados.

㉒ Determina si los puntos K = (11,15), L = (5,5) y M = (17,25) están alineados.

㉓ Determina si los puntos P = (9,8), Q = (18,17) y R = (0,–1) están alineados.

㉔ Determina si los puntos S = (–9,–7), T = (0,1) y Z = (–18,–16) están alineados.

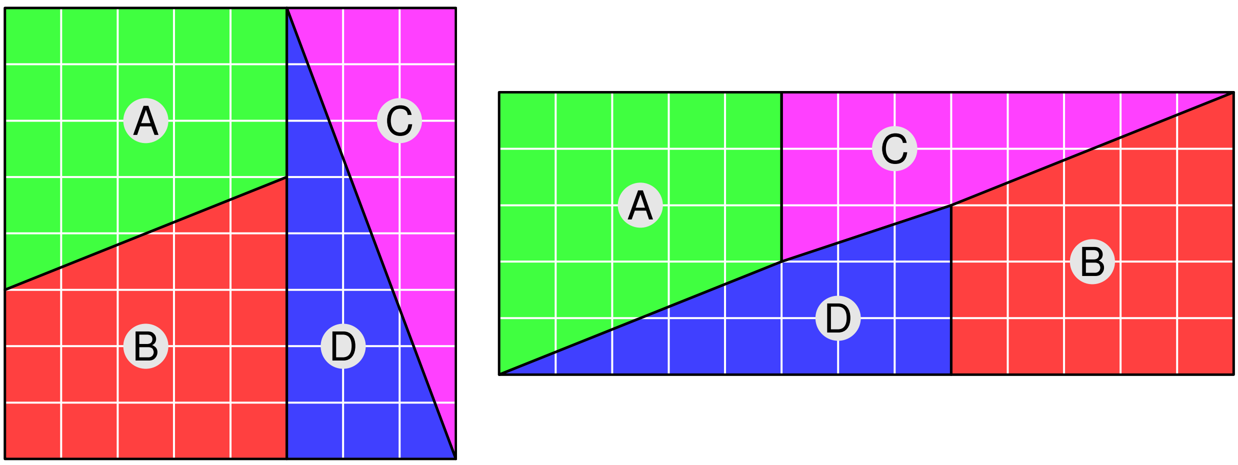
La paradoja del cuadrado perdido

Se conocen con ese nombre varios acertijos en los que se presentan dos figuras que deberían tener la misma área, pero aparentan no tenerla. Naturalmente, todos los acertijos sacan ventaja de algún tipo de sutil aprovechamiento de pequeñas diferencias entre las figuras, que pueden pasar desapercibidas a primera vista, pero no tras un estudio riguroso. Te presentamos dos paradojas para que tú busques alguna explicación.

Enunciados

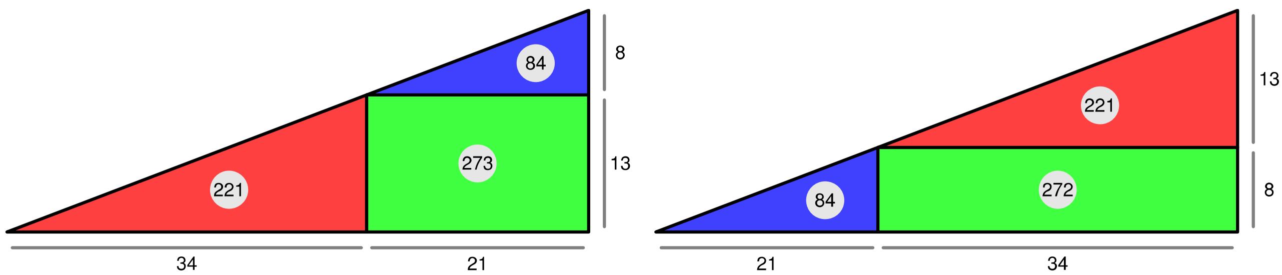
① Esta paradoja se atribuye al matemático británico Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), conocido popularmente por su seudónimo Lewis Carroll.

La figura de la izquierda es un cuadrado de 8 unidades de lado; por tanto tiene un área de 64 unidades cuadradas. La dividimos en cuatro piezas, que recolocamos tal como se muestra en la figura de la derecha. Las piezas ahora forman un rectángulo de 5 unidades de altura y 13 de longitud, por lo que su área es 65 unidades cuadradas.



② Esta paradoja se atribuye al mago Paul Curry. Es interesante destacar que en ella aparecen términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

Las siguientes figuras muestran dos descomposiciones en tres piezas del mismo triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 55 y 21 unidades.



Si calculamos el área del triángulo sumando las áreas de las tres piezas de la figura de la izquierda:

$21{\cdot}8{:}2 + 34{\cdot}13{:}2 + 21{\cdot}13 = 84{+}221{+}273 = 578$

Si calculamos el área del triángulo sumando las áreas de las tres piezas de la figura de la derecha:

$21{\cdot}8{:}2 + 34{\cdot}13{:}2 + 34{\cdot}8 = 84{+}221{+}272 = 577$

Rectas paralelas

En geometría analítica del plano se caracterizan las rectas paralelas como aquellas que tienen los mismos vectores de dirección, es decir: si un vector es un vector de dirección de una de las rectas, también lo es de la otra. Podemos expresarlo simbólicamente de esta manera:

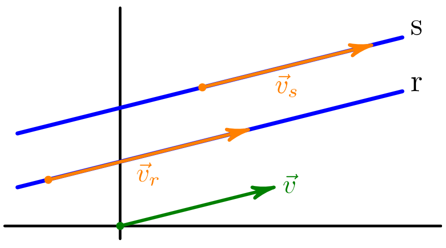
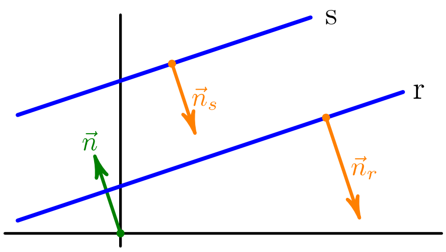
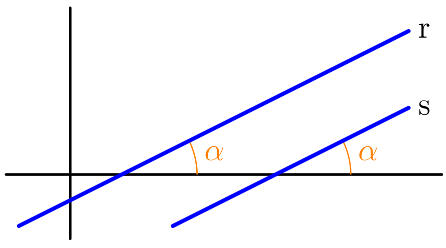
$$\boxed{\vec{v}_r = \lambda \vec{v}_s \Rightarrow r \parallel s}$$

Estudio del paralelismo de dos rectas

Hay varias maneras de estudiar si dos rectas diferentes son paralelas o no:

- ✱ Si los vectores de dirección de las rectas son múltiplos, las rectas son paralelas (y viceversa).
- ✱ Si los vectores normales a las rectas son múltiplos, las rectas son paralelas (y viceversa).
- ✱ En el caso de que ninguna de las dos rectas sea paralela al eje de ordenadas, si tienen la misma pendiente son paralelas (y viceversa).
- ✱ Si las rectas son paralelas al mismo eje de coordenadas, son paralelas.

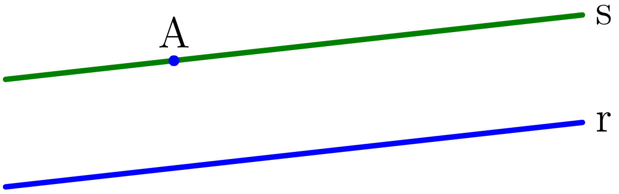
Ejemplos gráficos

		
Dos rectas paralelas tienen los mismos vectores de dirección	Dos rectas paralelas tienen los mismos vectores normales	Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente $\operatorname{tg} \alpha = m_r = m_s$

Recta paralela a otra y que pasa por un punto exterior

Un problema común en geometría es dibujar la recta paralela a otra que pasa por un punto exterior. En geometría analítica este problema se traduce en:

Dada la ecuación de una recta y las coordenadas de un punto que no pertenezca a ella, averiguar la ecuación de la recta paralela a la recta dada y que pasa por el punto. Por ejemplo, nos darán alguna ecuación de la recta «r» y las coordenadas del punto A y nos pedirán alguna ecuación de la recta «s».



Dependiendo de qué ecuación de la recta nos den y qué ecuación de la recta nos pidan, usaremos diferentes métodos. Podremos usar vectores de dirección, vectores normales o pendientes. Las rectas paralelas a los ejes tienen un tratamiento particular, mucho más sencillo.

Recta paralela a otra y que pasa por un punto exterior

Existen varias maneras de hacer el cálculo. Te vamos a dar unos ejemplos de cómo hacerlo, pero cuando sea tu turno podrás utilizar tus propias ideas, no tienes por qué hacerlo exactamente como te presentamos.

Enunciados

① Averigua la ecuación vectorial de la recta «s» que es paralela a la recta «r» y que pasa por el punto A. Datos: $r \equiv (x,y) = (1,3)+\lambda(2,-5)$; $A = (3,-7)$.

② Averigua la ecuación implícita de la recta «w» que es paralela a la recta «t» y que pasa por el punto B. Datos: $t \equiv 8x-6y+1 = 0$; $B = (-2,9)$.

③ Averigua la ecuación explícita de la recta «d» que es paralela a la recta «z» y que pasa por el punto C. Datos: $z \equiv y = -\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$; $C = (8,-3)$.

Resoluciones

① La ecuación vectorial de «r» nos da un vector de dirección: $\vec{v}_r = (2,-5)$.

Como «r» y «s» son paralelas, $\vec{v}_s = (2,-5)$.

Ya conocemos un vector de dirección de «s» y el enunciado nos da un punto.

Solución: $s \equiv (x,y) = (3,-7)+\lambda(2,-5)$.

② La ecuación implícita de «w» nos da un vector normal, el $(8,-6)$.

Es conveniente simplificarlo: $\vec{n}_w = \frac{1}{2}(8,-6) = (4,-3)$.

Con el vector normal podemos escribir parcialmente la ecuación implícita:

$\vec{n}_w = (4,-3) \Rightarrow w \equiv 4x-3y+c = 0$.

Usamos el punto B para calcular «c»:

$B = (-2,9) \in w \Rightarrow 4(-2)-3\cdot 9+c = 0 \Rightarrow c = 35$

Solución: $w \equiv 4x-3y+35 = 0$.

③ La ecuación explícita de «z» nos da la pendiente: $m_z = -\frac{1}{2}$.

Como «z» y «d» son paralelas, $m_d = -\frac{1}{2}$.

Con la pendiente podemos escribir parcialmente la ecuación explícita:

$m_d = -\frac{1}{2} \Rightarrow d \equiv y = -\frac{1}{2}x+q$

Usamos el punto C para calcular «q»:

$C = (8,-3) \in d \Rightarrow -3 = -\frac{1}{2}\cdot 8+q \Rightarrow -3 = -4+q \Rightarrow q = 1$

Solución: $d \equiv y = -\frac{1}{2}x+1$

Enunciados

① Averigua la ecuación vectorial de la recta «s» que es paralela a la recta «r» y que pasa por el punto A. Datos: $r \equiv (x,y) = (7,-9)+\lambda(4,3)$; $A = (5,-1)$.

② Averigua la ecuación implícita de la recta «w» que es paralela a la recta «t» y que pasa por el punto B. Datos: $t \equiv 9x-15y+1 = 0$; $B = (4,2)$.

③ Averigua la ecuación explícita de la recta «d» que es paralela a la recta «z» y que pasa por el punto C. Datos: $z \equiv y = 4x+9$; $C = (-2,4)$.

④ Averigua la ecuación continua de la recta «s» que es paralela a la recta «r» y que pasa por el punto D. Datos: $r \equiv \begin{cases} x=7+9\lambda \\ y=3-2\lambda \end{cases}$; $D = (8,-6)$.

⑤ Averigua la ecuación implícita de la recta «w» que es paralela a la recta «t» y que pasa por el punto E. Datos: $t \equiv 2x+10y-13 = 0$; $E = (2,-3)$.

⑥ Averigua la ecuación explícita de la recta «d» que es paralela a la recta «z» y que pasa por el punto F. Datos: $z \equiv y = \frac{5}{7}x$; $F = (7,-2)$.

⑦ Averigua las ecuaciones paramétricas de la recta «s» que es paralela a la recta «r» y que pasa por el punto G. Datos: $r \equiv \frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{5}$; $G = (7,11)$.

⑧ Averigua la ecuación explícita de la recta «w» que es paralela a la recta «t» y que pasa por el punto H. Datos: $t \equiv 14x+21y+4 = 0$; $H = (2,-5)$.

⑨ Averigua la ecuación implícita de la recta «d» que es paralela a la recta «z» y que pasa por el punto J. Datos: $z \equiv y = \frac{4}{9}x$; $J = (-5,1)$.

⑩ Averigua la ecuación vectorial de la recta «s» que es paralela a la recta «r» y que pasa por el punto K. Datos: $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \end{cases}$; $K = (8,3)$.

⑪ Averigua la ecuación implícita de la recta «w» que es paralela a la recta «t» y que pasa por el punto M. Datos: $t \equiv \frac{x+11}{-7}=\frac{y+22}{9}$; $M = (-2,5)$.

⑫ Averigua la ecuación explícita de la recta «d» que es paralela a la recta «z» y que pasa por el punto P. Datos: $z \equiv (x,y) = (1,7)+\lambda(-3,4)$; $P = (12,0)$.

⑬ Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que es paralela a la recta «r» y que pasa por el punto Q. Datos: $r \equiv (x,y) = (4,4)+\lambda(1,-2)$; $Q = (3,-3)$.

⑭ Averigua la ecuación vectorial de la recta «w» que es paralela a la recta «t» y que pasa por el punto R. Datos: $t \equiv 22x+33y+31 = 0$; $R = (10,20)$.

⑮ Averigua la ecuación continua de la recta «d» que es paralela a la recta «z» y que pasa por el punto S. Datos: $z \equiv y = 2x+13$; $S = (12,-5)$.

Rectas perpendiculares

En geometría analítica del plano se caracterizan las rectas perpendiculares como aquellas que tienen vectores de dirección que son perpendiculares. Podemos expresarlo simbólicamente de esta manera:

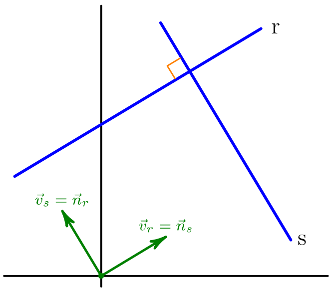
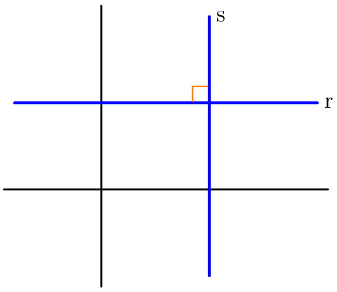
$$\boxed{\vec{v}_r \perp \vec{v}_s \Rightarrow r \perp s}$$

Propiedades de la perpendicularidad de dos rectas

Si dos rectas son perpendiculares, se verifica:

- Los vectores de dirección de una son vectores normales de la otra.
  - Simbólicamente: $\vec{v}_r = \vec{n}_s$.
- En el caso de que ninguna de las dos rectas sea paralela al eje de ordenadas, el producto de sus pendientes es -1.
  - Demostración: si $\vec{v}_r = (v_1, v_2)$, entonces $\vec{v}_s = (v_2, -v_1)$ y $m_r \cdot m_s = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{-v_1}{v_2} = -1$
- Si las rectas son paralelas a distinto eje de coordenadas, son perpendiculares.

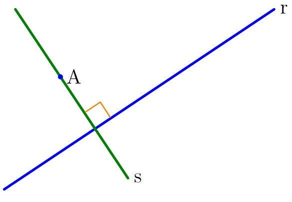
Ejemplos gráficos

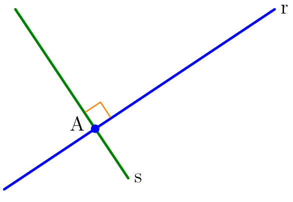
	
Los vectores de dirección de una recta son vectores normales de la otra.	Dos rectas paralelas a distinto eje son perpendiculares

Recta perpendicular a otra y que pasa por un punto

Un problema común en geometría es dibujar la recta perpendicular a otra que pasa por un punto. En geometría analítica este problema se traduce en:

Dada la ecuación de una recta y las coordenadas de un punto cualquiera, averiguar la ecuación de la recta perpendicular a la recta dada y que pasa por el punto. Por ejemplo, nos darán alguna ecuación de la recta «r» y las coordenadas del punto A y nos pedirán alguna ecuación de la recta «s». Observa que el punto A puede pertenecer a la recta «r» o no.





Dependiendo de qué ecuación de la recta nos den y qué ecuación de la recta nos pidan, usaremos diferentes métodos. Podremos usar vectores de dirección, vectores normales o pendientes. Las rectas paralelas a los ejes tienen un tratamiento particular, mucho más sencillo.

Recta perpendicular a otra y que pasa por un punto

Existen varias maneras de hacer el cálculo. Te vamos a dar unos ejemplos de cómo hacerlo, pero cuando sea tu turno podrás utilizar tus propias ideas, no tienes por qué hacerlo exactamente como te presentamos.

Enunciados

① Averigua la ecuación vectorial de la recta «s» que es perpendicular a la recta «r» y que pasa por el punto A. Datos: $r \equiv (x,y) = (8,-3)+\lambda(-4,9)$; $A = (11,-17)$.

② Averigua la ecuación implícita de la recta «w» que es perpendicular a la recta «t» y que pasa por el punto B. Datos: $t \equiv 9x-12y-13 = 0$; $B = (-2,5)$.

③ Averigua la ecuación explícita de la recta «d» que es perpendicular a la recta «z» y que pasa por el punto C. Datos: $z \equiv y = -\frac{5}{3}x+1$; $C = (2,-7)$.

Resoluciones

① La ecuación vectorial de «r» nos da un vector de dirección: $\vec{v}_r = (-4,9)$.

Como «r» y «s» son perpendiculares, $\vec{n}_s = (-4,9)$; luego $\vec{v}_s = (9,4)$.

Ya conocemos un vector de dirección de «s» y el enunciado nos da un punto.

Solución: $s \equiv (x,y) = (11,-17)+\lambda(9,4)$.

② La ecuación implícita de «w» nos da un vector normal, el $(9,-12)$.

Es conveniente simplificarlo: $\vec{n}_w = \frac{1}{3}(9,-12) = (3,-4)$.

Como «r» y «s» son perpendiculares, $\vec{n}_s = (4,3)$;

Con el vector normal podemos escribir parcialmente la ecuación implícita:

$\vec{n}_w = (4,3) \Rightarrow w \equiv 4x+3y+c = 0$.

Usamos el punto B para calcular «c»:

$B = (-2,5) \in w \Rightarrow 4(-2)-3\cdot5+c = 0 \Rightarrow c = 23$

Solución: $w \equiv 4x+3y+23 = 0$.

③ La ecuación explícita de «z» nos da la pendiente: $m_z = -\frac{5}{3}$.

Como «z» y «d» son perpendiculares, $m_z \cdot m_d = -1 \Rightarrow m_d = \frac{3}{5}$

Con la pendiente podemos escribir parcialmente la ecuación explícita:

$m_d = \frac{3}{5} \Rightarrow d \equiv y = \frac{3}{5}x+q$

Usamos el punto C para calcular «q»:

$C = (2,-7) \in d \Rightarrow -7 = \frac{3}{5}\cdot2+q \Rightarrow -7-\frac{6}{5} = q \Rightarrow q = -\frac{41}{5}$

Solución: $d \equiv y = \frac{3}{5}x-\frac{41}{5}$

Enunciados

① Averigua la ecuación vectorial de la recta «s» que es perpendicular a la recta «r» y que pasa por el punto A. Datos: $r \equiv (x,y) = (7,9)+\lambda(5,3)$; $A = (-6,-4)$.

② Averigua la ecuación implícita de la recta «w» que es perpendicular a la recta «t» y que pasa por el punto B. Datos: $t \equiv 10x-25y+1 = 0$; $B = (3,-7)$.

③ Averigua la ecuación explícita de la recta «d» que es perpendicular a la recta «z» y que pasa por el punto C. Datos: $z \equiv y = 3x+1$; $C = (6,5)$.

④ Averigua la ecuación continua de la recta «s» que es perpendicular a la recta «r» y que pasa por el punto D. Datos: $r \equiv \begin{cases} x=7-4\lambda \\ y=3+7\lambda \end{cases}$; $D = (-5,10)$.

⑤ Averigua la ecuación implícita de la recta «w» que es perpendicular a la recta «t» y que pasa por el punto E. Datos: $t \equiv 3x+9y-1 = 0$; $E = (8,-2)$.

⑥ Averigua la ecuación explícita de la recta «d» que es perpendicular a la recta «z» y que pasa por el punto F. Datos: $z \equiv y = \frac{5}{7}x$; $F = (5,-1)$.

⑦ Averigua las ecuaciones paramétricas de la recta «s» que es perpendicular a la recta «r» y que pasa por el punto G. Datos: $r \equiv \frac{x+1}{5}=\frac{y+2}{-6}$; $G = (13,15)$.

⑧ Averigua la ecuación explícita de la recta «w» que es perpendicular a la recta «t» y que pasa por el punto H. Datos: $t \equiv 12x+16y+5 = 0$; $H = (3,9)$.

⑨ Averigua la ecuación implícita de la recta «d» que es perpendicular a la recta «z» y que pasa por el punto J. Datos: $z \equiv y = \frac{5}{8}x$; $J = (-10,2)$.

⑩ Averigua la ecuación vectorial de la recta «s» que es perpendicular a la recta «r» y que pasa por el punto K. Datos: $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \end{cases}$; $K = (12,-9)$.

⑪ Averigua la ecuación implícita de la recta «w» que es perpendicular a la recta «t» y que pasa por el punto M. Datos: $t \equiv \frac{x+11}{12}=\frac{y+22}{7}$; $M = (1,-2)$.

⑫ Averigua la ecuación explícita de la recta «d» que es perpendicular a la recta «z» y que pasa por el punto P. Datos: $z \equiv (x,y) = (1,7)+\lambda(8,-9)$; $P = (2,-2)$.

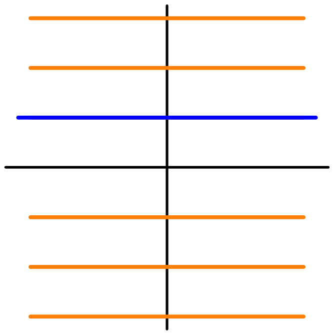
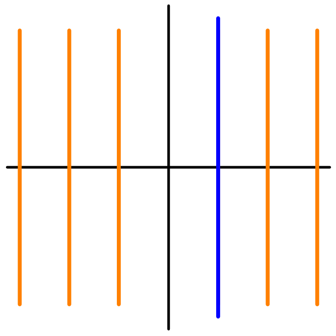
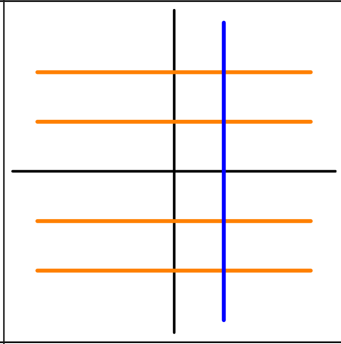
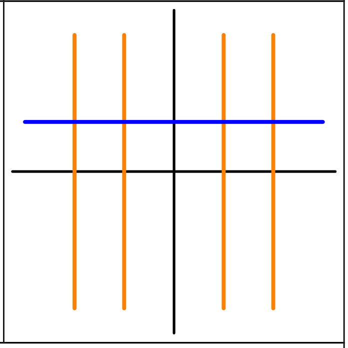
⑬ Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que es perpendicular a la recta «r» y que pasa por el punto Q. Datos: $r \equiv (x,y) = (5,5)+\lambda(-1,3)$; $Q = (-7,7)$.

⑭ Averigua la ecuación vectorial de la recta «w» que es perpendicular a la recta «t» y que pasa por el punto R. Datos: $t \equiv 13x+26y+11 = 0$; $R = (8,5)$.

⑮ Averigua la ecuación continua de la recta «d» que es perpendicular a la recta «z» y que pasa por el punto S. Datos: $z \equiv y = 3x+83$; $S = (12,-9)$.

Rectas paralelas y perpendiculares a rectas paralelas a los ejes

- Las rectas paralelas a una recta paralela al eje de abscisas también son paralelas al eje de ordenadas. Véase la figura 1.
- Las rectas paralelas a una recta paralela al eje de ordenadas también son paralelas al eje de abscisas. Véase la figura 2.
- Las rectas perpendiculares a una recta paralela al eje de ordenadas son paralelas al eje de abscisas. Véase la figura 3.
- Las rectas perpendiculares a una recta paralela al eje de abscisas son paralelas al eje de ordenadas. Véase la figura 4.

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
			
Las rectas de color naranja son paralelas a la recta de color azul		Las rectas de color naranja son perpendiculares a la recta de color azul	

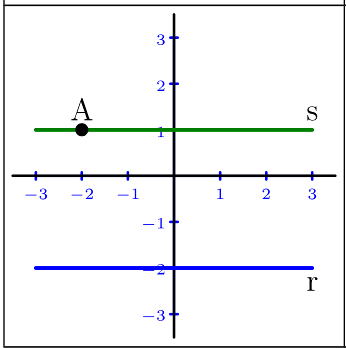
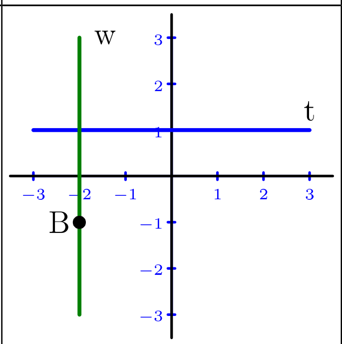
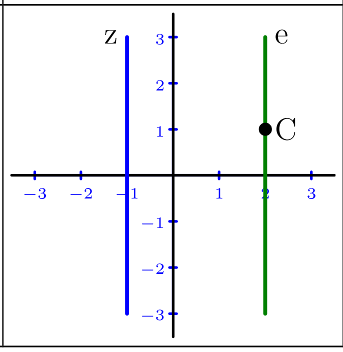
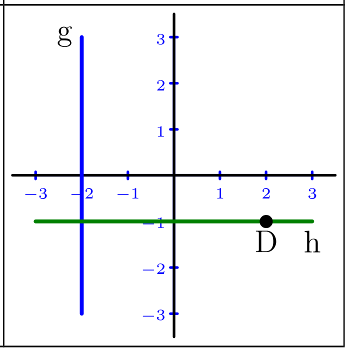
Ejemplos

① Averigua la ecuación de la recta «s» que es paralela a la recta «r» y que pasa por el punto A. Datos: r ≡ y = –2; A = (–2,1). Solución: s ≡ y = 1

② Averigua la ecuación de la recta «w» que es perpendicular a la recta «t» y que pasa por el punto B. Datos: t ≡ y = 1; B = (–2,–1). Solución: w ≡ x = –2

③ Averigua la ecuación de la recta «e» que es paralela a la recta «z» y que pasa por el punto C. Datos: z ≡ x = –1; C = (2,1). Solución: e ≡ x = 2

④ Averigua la ecuación de la recta «h» que es perpendicular a la recta «g» y que pasa por el punto D. Datos: g ≡ x = –2; D = (2,–1). Solución: h ≡ y = –1

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
			

Enunciados

① Averigua la ecuación vectorial de la recta «s» que es paralela a la recta «r» y que pasa por el punto A. Datos: $r \equiv (x,y) = (4,-1)+\lambda(8,1)$; $A = (7,3)$.

② Averigua la ecuación implícita de la recta «w» que es perpendicular a la recta «t» y que pasa por el punto B. Datos: $t \equiv 21x-15y+1 = 0$; $B = (-1,4)$.

③ Averigua la ecuación de la recta «d» que es paralela a la recta «z» y que pasa por el punto C. Datos: $z \equiv y = 3$; $C = (9,5)$.

④ Averigua la ecuación continua de la recta «s» que es perpendicular a la recta «r» y que pasa por el punto D. Datos: $r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=5+3\lambda \end{cases}$; $D = (5,-1)$.

⑤ Averigua la ecuación implícita de la recta «w» que es paralela a la recta «t» y que pasa por el punto E. Datos: $t \equiv 8x+12y-13 = 0$; $E = (-5,-3)$.

⑥ Averigua la ecuación de la recta «d» que es perpendicular a la recta «z» y que pasa por el punto F. Datos: $z \equiv x = -9$; $F = (6,2)$.

⑦ Averigua las ecuaciones paramétricas de la recta «s» que es paralela a la recta «r» y que pasa por el punto G. Datos: $r \equiv \frac{x+11}{-3}=\frac{y+4}{7}$; $G = (0,-1)$.

⑧ Averigua la ecuación explícita de la recta «w» que es perpendicular a la recta «t» y que pasa por el punto H. Datos: $t \equiv 18x+14y+13 = 0$; $H = (-7,0)$.

⑨ Averigua la ecuación de la recta «d» que es paralela a la recta «z» y que pasa por el punto J. Datos: $z \equiv x = 8$; $J = (-3,15)$.

⑩ Averigua la ecuación vectorial de la recta «s» que es perpendicular a la recta «r» y que pasa por el punto K. Datos: $r \equiv \begin{cases} x=8+5\lambda \\ y=4-3\lambda \end{cases}$; $K = (6,-6)$.

⑪ Averigua la ecuación implícita de la recta «w» que es paralela a la recta «t» y que pasa por el punto M. Datos: $t \equiv \frac{x-9}{5}=\frac{y+2}{3}$; $M = (6,-5)$.

⑫ Averigua la ecuación de la recta «d» que es perpendicular a la recta «z» y que pasa por el punto P. Datos: $z \equiv x = 1$; $P = (7,1)$.

⑬ Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que es paralela a la recta «r» y que pasa por el punto Q. Datos: $r \equiv (x,y) = (3,-5)+\lambda(7,-3)$; $Q = (4,-4)$.

⑭ Averigua la ecuación vectorial de la recta «w» que es perpendicular a la recta «t» y que pasa por el punto R. Datos: $t \equiv 9x+6y+1 = 0$; $R = (-7,2)$.

⑮ Averigua la ecuación de la recta «d» que es perpendicular a la recta «z» y que pasa por el punto S. Datos: $z \equiv x = 0$; $S = (12,4)$.

Posición relativa de dos rectas del plano

Con posición **relativa** nos referimos a cómo están situadas las dos rectas respecto a ellas mismas, independientemente de su posición **absoluta** respecto a los ejes de coordenadas.

Dos rectas del plano solo pueden estar situadas entre sí de tres maneras:

- **Secantes**. Tienen solamente un punto en común. También se dice que las rectas **se cortan**. El caso en que las rectas sean perpendiculares es un caso particular de esta situación.
- **Paralelas**. No tienen ningún punto en común.
- **Coincidentes**. Las dos rectas realmente son la misma recta. Por tanto, tienen en común todos sus puntos.

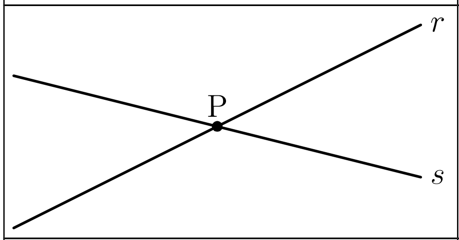
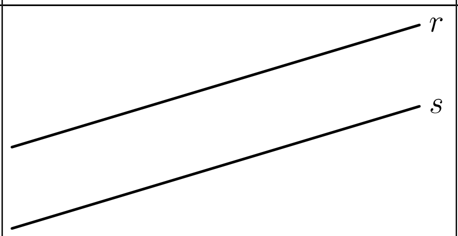
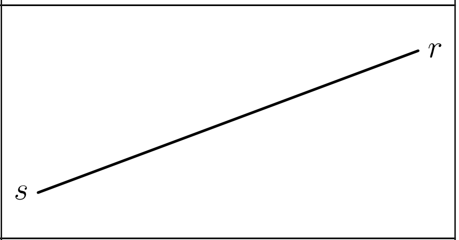
Notación

Si consideramos las rectas «r» y «s», podemos escribir simbólicamente su posición relativa de esta manera:

- Secantes: $r \cap s = \{P\}$. Esta expresión quiere decir que la intersección de las dos rectas es un único punto.
- Paralelas: $r \parallel s$.
- Coincidentes: $r = s$.

Ejemplos

En los siguientes ejemplos no dibujamos los ejes de coordenadas para resaltar que su situación no es determinante.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		
Dos rectas secantes	Dos rectas paralelas	Dos rectas coincidentes

Propiedades

- Si dos rectas son paralelas, no tienen ningún punto en común.
  - Lo podemos escribir simbólicamente de esta manera:

$$\boxed{r \parallel s \Rightarrow r \cap s = \varnothing}$$

- Si dos rectas son coincidentes, su intersección es cualquiera de las dos rectas.
  - Lo podemos escribir simbólicamente de esta manera:

$$\boxed{r = s \Rightarrow r \cap s = r \text{ y } r \cap s = s}$$

Observación

En el caso de las rectas coincidentes puede parecer chocante decir que son dos para acabar diciendo que solo es una. Ten en cuenta que podemos definir las rectas de muchas maneras distintas y puede no resultar claro que dos rectas con diferente definición sean realmente la misma.

Estudio de la posición relativa de dos rectas del plano

El planteamiento del problema es el siguiente: nos dan las ecuaciones de dos rectas y nos piden determinar su posición relativa.

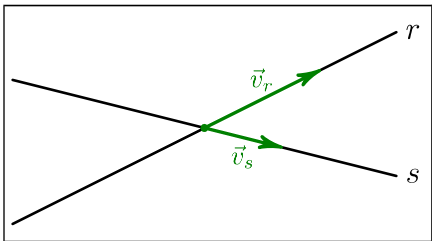
Este problema se puede resolver de dos maneras:

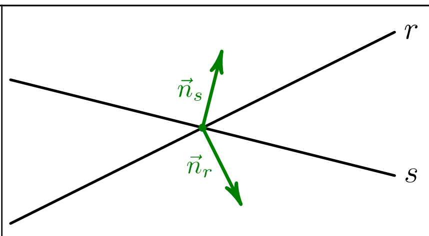
* El método **geométrico** consiste en comparar o bien los vectores de dirección de las rectas, o bien sus vectores normales o bien sus pendientes.
* El método **algebraico** consiste en clasificar el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (continua, implícita o explícita) de las dos rectas.

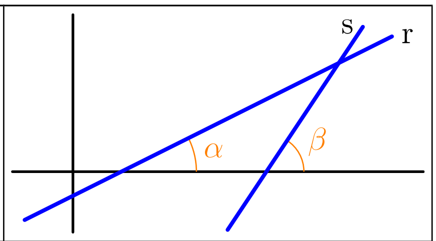
Método geométrico

El primer paso es distinguir entre si las rectas son secantes o no lo son:

* Si los vectores de dirección de las dos rectas no son múltiplos, las rectas son secantes. Si son múltiplos, no son secantes.
* Si los vectores normales de las dos rectas no son múltiplos, las rectas son secantes. Si son múltiplos, no son secantes.
* Si las pendientes de dos rectas no son iguales, las rectas son secantes. Si son iguales, no son secantes.





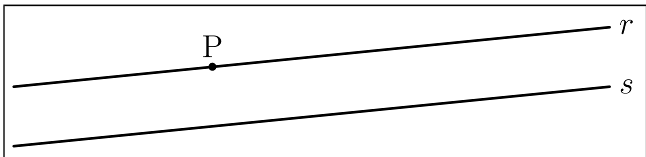


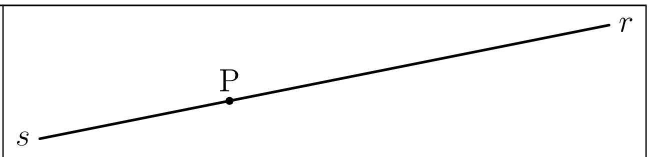
$\vec{v}_r \neq \lambda\, \vec{v}_s$ ⇒ secantes	$\vec{n}_r \neq \lambda\, \vec{n}_s$ ⇒ secantes	$m_r \neq m_s$ ⇒ secantes

El segundo paso solo hay que darlo cuando las rectas no son secantes, porque hay que distinguir entre si son iguales o coincidentes.

Se elige un punto cualquiera de una de las dos rectas y se comprueba si pertenece a la otra:

* Si el punto de una recta no pertenece a la otra, las rectas son paralelas.
* Si el punto de una recta pertenece a la otra, las rectas son coincidentes.





Si dos rectas son paralelas, ningún punto de una de ellas pertenece a la otra	Si dos rectas son coincidentes, cualquier punto de una de ellas pertenece a la otra

Método algebraico

Se clasifica el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones contínua, implícita o explícita de cada recta (de cada una se puede utilizar una ecuación diferente):

* Si el sistema es compatible, las rectas son secantes.
* Si el sistema es incompatible, las rectas son paralelas.
* Si el sistema es indeterminado, las rectas son coincidentes.

Enunciados

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

① $r \equiv (x,y) = (12,1)+\lambda(5,4)$; $s \equiv 5x-6y-53 = 0$

② $t \equiv \begin{cases} x=-7+4\lambda \\ y=5+3\lambda \end{cases}$; $w \equiv 6x-8y+81 = 0$

③ $z \equiv \dfrac{x-13}{31}=\dfrac{y-71}{-17}$; $d \equiv 17x+31y-2422 = 0$

Resoluciones

① Calculamos la pendiente de cada recta y las comparamos.

$\vec{v}_r = (5,4) \Rightarrow m_r = \dfrac{4}{5}$; $s \equiv 5x-6y-53 = 0 \Rightarrow s \equiv y = \dfrac{5}{6}x-\dfrac{53}{6} \Rightarrow m_s = \dfrac{5}{6}$

$\dfrac{4}{5} \neq \dfrac{5}{6} \Rightarrow m_r \neq m_s \Rightarrow$ r y s son secantes.

Solución: secantes

② Averiguamos un vector de dirección de cada recta y los comparamos.

$t \equiv \begin{cases} x=-7+4\lambda \\ y=5+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_t = (4,3)$; $w \equiv 6x-8y+81 = 0 \Rightarrow \vec{n}_w = (6,-8) \Rightarrow \vec{v}_w = (8,6)$

Como (4,3) y (8,6) son múltiplos, t y w no son secantes.

Tomamos un punto de la recta t: $t \equiv \begin{cases} x=-7+4\lambda \\ y=5+3\lambda \end{cases} \Rightarrow A = (-7,5) \in t$.

Comprobamos si el punto pertenece a la recta w:

$6(-7)-8\cdot 5+81 = -42-40+81 = -1 \neq 0 \Rightarrow A = (-7,5) \notin w$.

Solución: paralelas

③ Averiguamos un vector normal a cada recta y los comparamos.

$z \equiv \dfrac{x-13}{31}=\dfrac{y-71}{-17} \Rightarrow \vec{v}_z = (31,-17) \Rightarrow \vec{n}_z = (17,31)$

$d \equiv 17x+31y-2422 = 0 \Rightarrow \vec{n}_d = (17,31)$

Como z y d tienen el mismo vector normal, z y d no son secantes.

Tomamos un punto de la recta z: $z \equiv \dfrac{x-13}{31}=\dfrac{y-71}{-17} \Rightarrow B = (13,71) \in z$.

Comprobamos si el punto pertenece a la recta d:

$17\cdot 13+31\cdot 71-2422 = 0 \Rightarrow B = (-7,5) \in w$.

Solución: coincidentes

Observación

Puedes mezclar a tu manera las ideas de estos métodos para buscar el modo en que te encuentres más cómodo para hacer este estudio.

Enunciados

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

① $r \equiv (x,y) = (2,-1)+\lambda(7,6)$; $s \equiv y = \frac{8}{7}x - \frac{9}{7}$

② $t \equiv \begin{cases} x=5+8\lambda \\ y=4-3\lambda \end{cases}$; $w \equiv 3x+8y-48 = 0$

③ $z \equiv \frac{x+10}{6}=\frac{y+13}{-5}$; $d \equiv y = -\frac{5}{6}x - \frac{64}{3}$

Resoluciones

① Convertimos la ecuación de cada recta en una ecuación con dos incógnitas:

$r \equiv (x,y) = (2,-1)+\lambda(7,6) \Rightarrow r \equiv \frac{x-2}{7}=\frac{y+1}{6} \Rightarrow 6(x-2) = 7(y+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x-12 = 7y+7 \Rightarrow 6x-7y = 19$

$s \equiv y = \frac{8}{7}x - \frac{9}{7} \Rightarrow 7y = 8x-9 \Rightarrow 8x-7y = 9$

El sistema $\begin{cases} 6x-7y=19 \\ 8x-7y=9 \end{cases}$ es compatible

Solución: secantes

② Convertimos la ecuación de cada recta en una ecuación con dos incógnitas:

$t \equiv \begin{cases} x=5+8\lambda \\ y=4-3\lambda \end{cases} \Rightarrow t \equiv \frac{x-5}{8}=\frac{y-4}{-3} \Rightarrow -3(x-5) = 8(y-4) \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x+15 = 8y-32 \Rightarrow 3x+8y = 47$

$w \equiv 3x+8y-48 = 0 \Rightarrow 3x+8y = 48$

El sistema $\begin{cases} 3x+8y=47 \\ 3x+8y=48 \end{cases}$ es incompatible

Solución: paralelas

③ Convertimos la ecuación de cada recta en una ecuación con dos incógnitas:

$z \equiv \frac{x+10}{6}=\frac{y+13}{-5} \Rightarrow -5(x+10) = 6(y+13) \Rightarrow -5x-50 = 6y+78 \Rightarrow 5x+6y = -128$

$d \equiv y = -\frac{5}{6}x - \frac{64}{3} \Rightarrow 6y = -5x-128 \Rightarrow 5x+6y = -128$

El sistema $\begin{cases} 5x+6y=-128 \\ 5x+6y=-128 \end{cases}$ es indeterminado

Solución: coincidentes

Observación

Las simplificaciones siempre ayudan a resolver estos ejercicios, especialmente para clasificar el sistema de ecuaciones obtenido.

Enunciados

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

① $r \equiv (x,y) = (2,-1)+\lambda(1,6)$; $s \equiv y = 6x-11$

② $t \equiv \begin{cases} x=1-7\lambda \\ y=2+3\lambda \end{cases}$; $w \equiv 6x+16y-5 = 0$

③ $z \equiv \dfrac{x-9}{11}=\dfrac{y-6}{7}$; $d \equiv y = \dfrac{7}{11}x+\dfrac{3}{11}$

④ $r \equiv 10x+14y+1 = 0$; $s \equiv 15x+21y+1 = 0$

⑤ $t \equiv \begin{cases} x=7+4\lambda \\ y=12+5\lambda \end{cases}$; $w \equiv \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{5}$

⑥ $z \equiv 14x-12y+11 = 0$; $d \equiv y = \dfrac{7}{6}x$

⑦ $r \equiv \dfrac{x+11}{13}=\dfrac{y+22}{15}$; $s \equiv 15x-14y+3 = 0$

⑧ $t \equiv \begin{cases} x=11+\lambda \\ y=15-\lambda \end{cases}$; $w \equiv x+y-26 = 0$

⑨ $z \equiv \dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y+1}{13}$; $d \equiv 13x-6y-34 = 0$

⑩ $r \equiv (x,y) = (15,28)+\lambda(5,9)$; $s \equiv y = \dfrac{9}{5}x+1$

⑪ $t \equiv \begin{cases} x=57+11\lambda \\ y=31+17\lambda \end{cases}$; $w \equiv \begin{cases} x=-20+11\lambda \\ y=-88+17\lambda \end{cases}$

⑫ $z \equiv 15x+25y+13 = 0$; $d \equiv y = \dfrac{3}{5}x+4$

⑬ $r \equiv \dfrac{x+1}{9}=\dfrac{y-1}{11}$; $s \equiv 11x-9y+2 = 0$

⑭ $t \equiv \begin{cases} x=-7+4\lambda \\ y=-1+7\lambda \end{cases}$; $w \equiv \dfrac{x+11}{4}=\dfrac{y-11}{9}$

⑮ $z \equiv y = 2x+4$; $d \equiv 2x+y+4 = 0$

⑯ $r \equiv (x,y) = (6,-2)+\lambda(-7,3)$; $s \equiv y = -\dfrac{3}{7}x+\dfrac{4}{7}$

⑰ $t \equiv 3x+4y+3 = 0$; $w \equiv 4x+3y+1 = 0$

⑱ $z \equiv 14x-7y+1 = 0$; $d \equiv y = 2x+1$

⑲ $r \equiv (x,y) = (-1,-2)+\lambda(5,-1)$; $s \equiv y = -\dfrac{1}{5}x+\dfrac{9}{5}$

⑳ $t \equiv \begin{cases} x=21+8\lambda \\ y=12+7\lambda \end{cases}$; $w \equiv 7x+8y+15 = 0$

㉑ $z \equiv 2x+y+2 = 0$; $d \equiv \dfrac{x-11}{1}=\dfrac{y+24}{-2}$

Explicación

En algunos ejercicios y problemas no te piden que demuestres la posición relativa de dos rectas, pero a ti te vendría bien saberlo. Es muy probable que lo puedas averiguar mentalmente, por eso te proponemos que lo practiques.

Enunciados

Averigua mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

① $r \equiv x=2;\ s \equiv x=6$

② $t \equiv y=-1;\ w \equiv x=4$

③ $z \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3};\ d \equiv (x,y)=(1,-1)+\lambda(2,3)$

④ $r \equiv y=\frac{7}{6}x;\ s \equiv y=\frac{6}{7}x$

⑤ $t \equiv x+y+1=0;\ w \equiv x+y+2=0$

⑥ $z \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3};\ d \equiv (x,y)=\lambda(2,3)$

⑦ $r \equiv \frac{x}{4}=\frac{y}{5};\ s \equiv 5x-4y=0$

⑧ $t \equiv y=1;\ w \equiv y=x$

⑨ $z \equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{1};\ d \equiv x+y+1=0$

⑩ $r \equiv y=x+2;\ s \equiv y=x-2$

⑪ $t \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \end{cases};\ w \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2-\lambda \end{cases}$

⑫ $z \equiv 2x+3y+5=0;\ d \equiv 4x+6y+11=0$

⑬ $r \equiv 6x+7y+4=0;\ s \equiv 12x+7y+2=0$

⑭ $t \equiv y=\frac{1}{2}x+3;\ w \equiv y=\frac{1}{3}x+3$

⑮ $z \equiv y=x+4;\ d \equiv (x,y)=(0,4)+\lambda(1,1)$

⑯ $r \equiv (x,y)=(7,-8)+\lambda(9,2);\ s \equiv (x,y)=(7,-8)+\lambda(9,3)$

⑰ $t \equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{4};\ w \equiv y=4x+3$

⑱ $z \equiv y=\frac{1}{2};\ d \equiv x=\frac{1}{2}$

⑲ $r \equiv (x,y)=(-3,-2)+\lambda(4,7);\ s \equiv (x,y)=(1,5)+\lambda(4,7)$

⑳ $t \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=3+5\lambda \end{cases};\ w \equiv 5x-2y+1=0$

Punto de corte de dos rectas secantes

Una de las operaciones más importantes en geometría es determinar el punto de corte de dos rectas secantes. En geometría analítica este problema se traduce en averiguar las coordenadas del punto de corte de dos rectas conocidas una ecuación de cada recta.

Métodos para encontrar el punto de corte de dos rectas secantes

Encontrando el valor de un parámetro

1. Averiguar las ecuaciones paramétricas de una recta y la ecuación implícita de la otra recta.
2. Sustituir en la ecuación implícita los valores de las coordenadas de un punto de la otra.
3. Resolver la ecuación resultante para calcular el valor del parámetro.
4. Sustituir el parámetro en las ecuaciones paramétricas para obtener el punto de corte.

Resolviendo un sistema de ecuaciones

1. Convertir cada ecuación de cada recta en una ecuación con dos incógnitas.
2. Resolver el sistema de ecuaciones formado por las dos ecuaciones.
3. La solución del sistema son las coordenadas del punto de corte.

Enunciados

Calcula el punto de corte de los siguientes pares de rectas.

① $r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-6+3\lambda \end{cases}$; $s \equiv 2x-3y+25=0$ ② $t \equiv x+6y-13=0$; $w \equiv x+y+2=0$

Resoluciones

① Ya tenemos las ecuaciones paramétricas de una recta y la implícita de otra.

Sustituimos los valores de «x» e «y» de r en la ecuación de s:

$2(1+2\lambda)-3(-6+3\lambda)+25=0 \Rightarrow 2+4\lambda+18-9\lambda+25=0 \Rightarrow -5\lambda=-45 \Rightarrow \lambda=9$

Sustituimos $\lambda=9$ en la ecuación de r: $\begin{cases} x=1+2\cdot 9 \\ y=-6+3\cdot 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=19 \\ y=26 \end{cases}$

Solución: (19,26)

Observación: este método de determinar un punto de una recta calculando el valor de un parámetro puede ser usado en muchos otros problemas.

② Convertimos la ecuación de cada recta en una ecuación con dos incógnitas:

$t \equiv x+6y-13=0 \Rightarrow x+6y=13$

$w \equiv x+y+2=0 \Rightarrow x+y=-2$

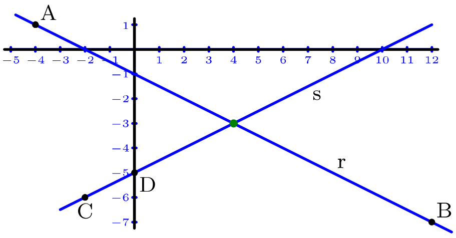
Resolvemos el sistema $\begin{cases} x+6y=13 \\ x+y=-2 \end{cases}$ por el método que queramos y obtenemos su solución: $\begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$

Solución: (–5,3)

Enunciado

Calcula el punto de corte de la recta que pasa por los puntos A y B y la recta que pasa por los puntos C y D. Datos: A = (–4,1), B = (12,–7), C = (–2,–6), D = (0,–5).

Resolución



Como el enunciado no pone nombres a las rectas, los ponemos nosotros para trabajar con más comodidad: llamamos «r» a la recta que pasa por A y B y «s» a la recta que pasa por C y D.

Aunque no es necesario hacer un dibujo de la situación, puede ayudar; por ejemplo, si el punto que calculamos se aleja mucho del dibujado, podremos detectar que hemos cometido algún error y eso nos obliga a repasar los cálculos.

Averiguamos las ecuaciones paramétricas de r:

El vector que une dos puntos de r es un vector de dirección:

$\overrightarrow{AB} = (12-(-4),-7-1) = (16,-8)$.

Es conveniente simplificarlo: $\vec{v}_r = \frac{1}{8}(16,-8) = (2,-1)$

Como punto de r elegimos el punto A = (–4,1), por ser el más sencillo.

Así pues, $r \equiv \begin{cases} x=-4+2\lambda \\ y=1-\lambda \end{cases}$

Averiguamos la ecuación implícita de s:

El vector que une dos puntos de s es un vector de dirección:

$\overrightarrow{CD} = (0-(-2),-5-(-6)) = (2,1)$, luego $\vec{v}_s = (2,1)$.

A partir del vector de dirección, calculamos el vector normal:

$\vec{v}_s = (2,1) \Rightarrow \vec{n}_s = (1,-2)$.

Con el vector normal a s escribimos parcialmente la ecuación implícita:

$\vec{n}_s = (1,-2) \Rightarrow s \equiv x-2y+c = 0$

Para averiguar «c» utilizamos el punto D:

$D = (0,-5) \in s \Rightarrow 0-2(-5)+c = 0 \Rightarrow c = -10$

Así pues, $s \equiv x-2y-10 = 0$

Sustituimos los valores de «x» e «y» de r en la ecuación de s:

$(-4+2\lambda)-2(1-\lambda)-10 = 0 \Rightarrow -4+2\lambda-2+2\lambda-10 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 16 \Rightarrow \lambda = 4$

Sustituimos $\lambda = 4$ en la ecuación de r: $\begin{cases} x=-4+2\cdot 4 \\ y=1-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$

Solución: (4,–3)

Enunciados

Calcula el punto de corte de los siguientes pares de rectas.

① $r \equiv \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=3+\lambda \end{cases}$; $s \equiv 2x-y-10=0$

② $t \equiv x-2y+6=0$; $w \equiv 3x+y-10=0$

③ La recta que pasa por los puntos A y B y la recta que pasa por los puntos C y D. Datos: $A=(-4,4)$, $B=(-2,3)$, $C=(-3,-4)$, $D=(3,-2)$.

④ $z \equiv x=8$; $d \equiv y=-3$

⑤ $r \equiv (x,y)=(7,-8)+\lambda(2,-1)$; $s \equiv y=5x+1$

⑥ $t \equiv \dfrac{x-6}{-5}=\dfrac{y+3}{1}$; $w \equiv \dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y-3}{3}$

⑦ $z \equiv y=\dfrac{7}{9}x-4$; $d \equiv y=-\dfrac{1}{9}x+4$

⑧ La recta que pasa por los puntos P y Q y la recta que pasa por los puntos T y W. Datos: $P=(2,5)$, $Q=(1,3)$, $T=(2,-2)$, $W=(6,-1)$.

⑨ $r \equiv \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+4}{2}$; $s \equiv x+3y-9=0$

⑩ $t \equiv x=-5$; $w \equiv y=\dfrac{1}{5}x+5$

⑪ $z \equiv (x,y)=(-6,7)+\lambda(1,-1)$; $d \equiv 2x-5y-9=0$

⑫ La recta que pasa por los puntos A y B y la recta que pasa por los puntos C y D. Datos: $A=(9,-4)$, $B=(7,-1)$, $C=(-9,-3)$, $D=(6,7)$.

⑬ $r \equiv 2x+5y+24=0$; $s \equiv x-2y+3=0$

⑭ $t \equiv 9x-14y=0$; $w \equiv 7x+19y=0$

⑮ $z \equiv y=-19$; $d \equiv y=-\dfrac{1}{3}x+1$

⑯ La recta que pasa por los puntos P y Q y la recta que pasa por los puntos T y W. Datos: $P=(-7,4)$, $Q=(3,2)$, $T=(-7,-4)$, $W=(-4,-3)$.

⑰ $r \equiv \dfrac{x+6}{1}=\dfrac{y-8}{-3}$; $s \equiv \begin{cases} x=-10+8\lambda \\ y=-4-\lambda \end{cases}$

⑱ $t \equiv 2x-7y+28=0$; $w \equiv (x,y)=(6,-5)+\lambda(-2,3)$

⑲ $z \equiv x+4y+14=0$; $d \equiv y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$

⑳ La recta que pasa por los puntos A y B y la recta que pasa por los puntos C y D. Datos: $A=(-2,4)$, $B=(2,2)$, $C=(3,-6)$, $D=(9,-4)$.

Enunciados

Averigua el valor de la incógnita «k» en cada una de las siguientes situaciones.

① Los puntos $A=(-3,1)$, $B=(1,k)$ y $C=(5,3)$ están alineados.

② Los puntos $D=(-3,k+2)$, $E=(1,0)$ y $F=(k+1,-6)$ están alineados.

③ Las rectas $r \equiv kx+10y+3=0$ y $s \equiv (x,y)=(8,2)+\lambda(5,-7)$ son paralelas.

④ Las rectas $t \equiv \dfrac{x-1}{k-2}=\dfrac{y+2}{k+1}$ y $w \equiv y=-\dfrac{1}{4}x+1$ son perpendiculares.

⑤ Las rectas $z \equiv 2x+ky-23=0$ y $d \equiv kx-7y+11=0$ se cortan en el punto $(4,5)$.

Enunciados

⑥ Averigua la ecuación implícita de la recta «r» que pasa por el punto H y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos M y N.

Datos: $H=(6,2)$, $M=(-3,1)$, $N=(6,-5)$.

⑦ Llamamos «s» a la recta que pasa por los puntos A y B y «t» a la recta que pasa por el punto C y es perpendicular a la recta «s». Calcula el punto de corte de las dos rectas.

Datos: $A=(-5,-3)$, $B=(10,3)$, $C=(3,6)$.

⑧ Calcula el punto simétrico del punto D respecto a la recta «w».

Datos: $D=(-5,-4)$, $w \equiv x-3y+13=0$.

⑨ Averigua la ecuación implícita de la recta «m» que es la mediatriz del segmento de extremos E y F.

Datos: $E=(4,-1)$, $F=(10,9)$.

⑩ Calcula el punto de la recta «z» que equidista de los puntos H y J.

Datos: $z \equiv y=-2x+8$, $H=(-1,8)$, $J=(7,4)$.

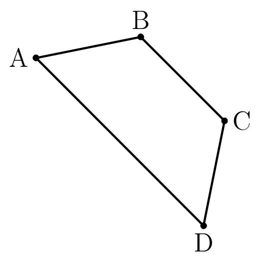
⑪ Calcula el área del triángulo determinado por los ejes de coordenadas y la recta $r \equiv 3x-4y+24=0$.

⑫ Calcula el área del cuadrilátero determinado por los ejes de coordenadas y las rectas $s \equiv x+4y-16=0$ y $t \equiv 3x+2y-18=0$.

⑬ Del paralelogramo ABCD se sabe que el vértice C es el punto $(7,-12)$, el lado AB está contenido en la recta $r \equiv 2x+3y-11=0$ y el lado AD está contenido en la recta $s \equiv 3x-y+11=0$. Calcula los demás vértices.

⑭ Calcula el vértice D del trapecio isósceles de la figura.

Datos: $A=(-7,4)$, $B=(-2,5)$, $C=(2,1)$.



Distancia entre dos puntos

Podemos calcular la distancia entre dos puntos mediante dos caminos distintos que nos llevan a la misma fórmula final:

* Utilizando directamente el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo formado por las diferencias entre las coordenadas de los puntos.
* Como el módulo del vector que une los puntos.

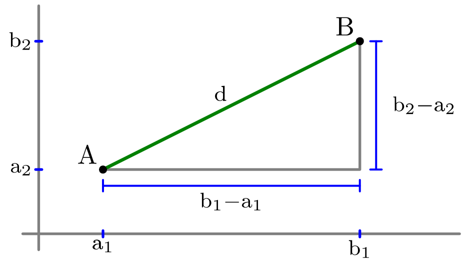
Desarrollos

Supongamos que $A=(a_1,a_2)$ y $B=(b_1,b_2)$ son dos puntos del plano. Llamamos «d» a la distancia entre ellos: $d=d(A,B)$.

Con el teorema de Pitágoras

Utilizamos el dibujo de la derecha; aunque no cubre todas las posibilidades de colocación de los puntos, nos ilustra perfectamente el procedimiento.
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$d^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2 \Rightarrow d=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$



Con el módulo del vector que los une

$|\overrightarrow{AB}|=|(b_1-a_1,b_2-a_2)|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

Fórmula

Con cualquiera de los dos métodos, llegamos a esta fórmula final:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}A=(a_1,a_2)\\B=(b_1,b_2)\end{array}\right\}\Rightarrow d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$$

Ejemplo 1

Enunciado: Calcula con cinco cifras significativas la distancia entre los puntos G y H. Datos: $G=(7,-5)$, $H=(2,-3)$.

Resolución

Con la fórmula: $d(G,H)=\sqrt{(2-7)^2+(-3-(-5))^2}=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}=5{,}3852$

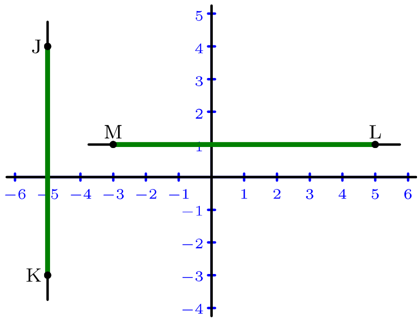
Con el vector: $d(G,H)=|\overrightarrow{GH}|=|(2-7,-3-(-5))|=|(-5,2)|=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}=5{,}3852$

Caso particular

Si los dos puntos pertenecen a una misma recta que sea paralela a alguno de los ejes, la distancia se puede calcular simplemente como el valor absoluto de la diferencia (en cualquier orden) de las coordenadas que sean distintas entre los dos puntos.

Ejemplo 2

Enunciado: Calcula la distancia entre los puntos J y K y entre los puntos L y M. Datos: $J=(-5,4)$, $K=(-5,-3)$, $L=(5,1)$, $M=(-3,1)$.



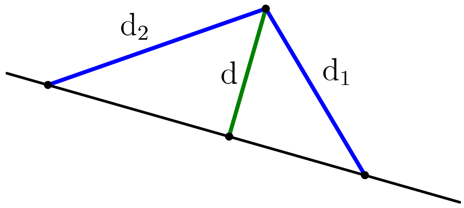
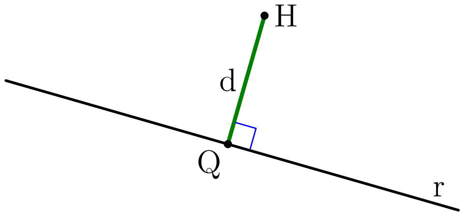
Resolución

$d(J,K)=|4-(-3)|=|7|=7$

$d(L,M)=|-3-5|=|-8|=8$

Distancia de un punto a una recta

- ✱ La distancia de un punto a una recta es la menor de las distancias entre el punto y cada uno de los puntos de la recta. Ver figura 1.
- ✱ La distancia de un punto a una recta es igual a la distancia entre el punto y el punto de corte de la recta con la recta perpendicular que pasa por el punto. Ver figura 2.

Figura 1	Figura 2
	
$d<d_1$, $d<d_2$	$d = d(H,r) = d(H,Q)$

Fórmula de la distancia de un punto a una recta

Consideramos el punto $H = (x_0,y_0)$ y la recta $r \equiv ax+by+c = 0$.

Entonces, la distancia de H a «r» es

$$\boxed{d(H,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Demostración

Llamamos «s» a la recta que pasa por H y es perpendicular a «r» y vamos a calcular el punto de corte de «r» y «s», que llamaremos Q.

Ecuaciones paramétricas de «s»: $\vec{n}_r = (a,b) \Rightarrow \vec{v}_s = (a,b) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=x_0+\lambda a \\ y=y_0+\lambda b \end{cases}$

Sustituimos un punto de «s» en la ecuación de «r» y despejamos λ:

$a(x_0+\lambda a)+b(y_0+\lambda b)+c = 0 \Rightarrow ax_0+\lambda a^2+by_0+\lambda b^2+c = 0 \Rightarrow \lambda(a^2+b^2) = -(ax_0+by_0+c) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{-(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$. Sustituyendo ese λ en la ecuación de «s» obtendremos Q.

$$d(H,r) = d(H,Q) = |\overrightarrow{HQ}| = |(\lambda a,\lambda b)| = \sqrt{(\lambda a)^2+(\lambda b)^2} = \sqrt{\lambda^2 a^2+\lambda^2 b^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2+b^2)} =$$

$$= |\lambda|\sqrt{a^2+b^2} = \left|\frac{-(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right| \cdot \sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ejemplo

Calcula con cinco cifras significativas la distancia entre el punto Z y la recta «t».

Datos: $Z=(7,-9)$; $t \equiv 4x-5y-88 = 0$

$$d(Z,t) = \frac{|4\cdot 7-5(-9)-88|}{\sqrt{4^2+(-5)^2}} = \frac{|28+45-88|}{\sqrt{16+25}} = \frac{|-15|}{\sqrt{41}} = \frac{15}{\sqrt{41}} = 2{,}3426$$

Calculadora: 1 5 ÷ √ 4 1 = ⇨ 2.342606428

Solución: 2,3426

Enunciados

Calcula con cinco cifras significativas las distancias solicitadas.

① Distancia entre el punto A = (14,3) y el punto B = (–2,17).

② Distancia entre el punto C = (–5,8) y la recta r ≡ 9x–2y+4 = 0.

③ Distancia entre el punto D = (–13,75) y el punto E = (82,–23).

④ Distancia entre el punto F = (7,–2) y la recta s ≡ x–9y–31 = 0.

⑤ Distancia entre el punto G = (–9,12) y el punto H = (8,–37).

⑥ Distancia entre el punto J = (–19,41) y la recta t ≡ 8x+y–1 = 0.

⑦ Distancia entre el punto K = (156,93) y el punto M = (101,82).

⑧ Distancia entre el punto N = (15,17) y la recta z ≡ x–y–11 = 0.

⑨ Distancia entre el punto P = (–12,–17) y el punto Q = (–33,–24).

⑩ Distancia entre el punto W = (–3,–4) y la recta v ≡ 2x+3y+5 = 0.

Enunciados

Calcula de modo exacto las distancias solicitadas.

⑪ Distancia entre el punto A = (17,–8) y el punto B = (23,–8).

⑫ Distancia entre el punto C = (9,–4) y el punto D = (9,13).

⑬ Distancia entre el punto E = (8,–13) y la recta r ≡ 3x–4y–1 = 0.

⑭ Distancia entre el punto F = (34,3) y el punto B = (–51,3).

⑮ Distancia entre el punto G = (–12,–8) y el punto H = (–12,41).

⑯ Distancia entre el punto J = (41,–1) y la recta s ≡ 5x+12y–11 = 0.

Enunciados

Calcula con cinco cifras significativas las distancias solicitadas.

⑰ Distancia entre el punto A y la recta que pasa por B y C.

Datos: A=(19,22), B=(–1,–6), C=(2,–9)

⑱ Distancia entre el punto medio del segmento DE y la recta «r».

Datos: D = (8,13), E = (11,18), r ≡ 8x–4y+5 = 0.

⑲ Distancia entre el punto de corte de las rectas «s» y «t» y la recta «w».

Datos: s ≡ (x,y) = (1,5)+λ(4,1), t ≡ y =–2x–2, w ≡ $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-1}$.

⑳ Distancia entre el punto F y la mediatriz del segmento GH.

Datos: F=(–2,15), G=(–9,1), H=(1,–7)

Explicación

Es muy común que la diferencia entre un problema y un ejercicio sea simplemente que te hayan explicado algún método para responder una pregunta o no. Los enunciados que vamos a proponer en esta página corresponden a esa categoría: si se explican antes de proponerlos, son ejercicios; si no se explican antes, son problemas. Te animamos a que pongas en práctica tus conocimientos para intentar contestar estas preguntas (que verás que son de dificultad variable) antes de que te presentemos sus métodos habituales de resolución. Recuerda la importancia de tu desarrollo en la capacidad de resolver problemas.

Enunciados

① Calcula con cinco cifras significativas la longitud del lado opuesto al vértice C del triángulo ABC.

Datos: A = (–6,2), B = (3,4), C = (2,–3).

② Calcula con cinco cifras significativas el perímetro del triángulo ABC.

Datos: A = (–5,–2), B = (–2,4), C = (2,–7).

③ Calcula con cinco cifras significativas la longitud de la mediana que pasa por el vértice A del triángulo ABC.

Datos: A = (4,5), B = (–3,3), C = (7,–5).

④ Calcula con cinco cifras significativas la longitud de la altura que pasa por el vértice A del triángulo ABC.

Datos: A = (6,–2), B = (4,5), C = (–4,1).

⑤ Calcula exactamente el área del triángulo ABC.

Datos: A = (7,2), B = (–1,–1), C = (–3,5).

⑥ Averigua la ecuación implícita de la recta «r», mediatriz del lado opuesto al vértice C del triángulo ABC.

Datos: A = (7,1), B = (3,5), C = (–5,–3).

⑦ Calcula el circuncentro del triángulo ABC.

Datos: A = (3,5), B = (–5,9), C = (–6,2).

⑧ Calcula con cinco cifras significativas la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

Datos: A = (2,4), B = (4,2), C = (0,–2).

⑨ Averigua la ecuación implícita de la recta «s», que contiene a la altura que pasa por el vértice A del triángulo ABC.

Datos: A = (2,6), B = (–3,5), C = (5,1).

⑩ Calcula el ortocentro del triángulo ABC.

Datos: A = (–4,4), B = (5,1), C = (–5,–4).

Enunciados

① Calcula con cuatro cifras significativas la longitud del lado AB del triángulo ABC. Datos: A = (8,–3), B = (2,9), C = (0,0).

② Calcula con cuatro cifras significativas el perímetro del triángulo DEF.
Datos: D = (–2,–7), E = (8,1), F = (4,–3).

③ Calcula con cuatro cifras significativas la longitud de la mediana que pasa por el vértice H del triángulo HJK.
Datos: H = (–7,2), J = (1,–8), K = (4,5).

Resoluciones

① La longitud de un lado de cualquier polígono se puede calcular como la distancia entre los vértices.

$\overline{AB} = d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = |(2-8,9-(-3))| = |(-6,12)| = \sqrt{(-6)^2+12^2} = \sqrt{180} = 13{,}42$

Calculadora: √ 1 8 0 = ⇨ 13.41640787

Solución: 13,42

② El perímetro de cualquier polígono se puede calcular como la suma de sus lados. Para hacer las operaciones con calculadora con precisión es recomendable dejar indicadas las raíces que no sean exactas y sumarlas todas juntas como última operación.

$\overline{DE} = d(D,E) = |\overrightarrow{DE}| = |(8-(-2),1-(-7))| = |(10,8)| = \sqrt{10^2+8^2} = \sqrt{164}$

$\overline{EF} = d(E,F) = |\overrightarrow{EF}| = |(4-8,-3-1)| = |(-4,-4)| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2} = \sqrt{32}$

$\overline{DF} = d(D,F) = |\overrightarrow{DF}| = |(4-(-2),-3-(-7))| = |(6,4)| = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{52}$

Perímetro $= \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{DF} = \sqrt{164} + \sqrt{32} + \sqrt{52} = 25{,}67$

Calculadora: √ 1 6 4 + √ 3 2 + √ 5 2 = ⇨ 25.67420528

Solución: 25,67

③ La mediana es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Su longitud se puede calcular como la distancia entre los dos puntos.

Llamamos M al punto medio del lado JK y lo calculamos:

$$M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{-8+5}{2}\right) = (2{,}5;-1{,}5)$$

Observa que, como alguna coordenada tiene parte decimal y usamos la coma como separador decimal, es necesario usar el punto y coma como separador de las dos coordenadas.

$\overline{HM} = d(H,M) = \sqrt{(2{,}5-(-7))^2+(-1{,}5-2)^2} = \sqrt{9{,}5^2+(-3{,}5)^2} = 10{,}12$

Calculadora: √ (9 . 5 x^2 + 3 . 5 x^2) = ⇨ 10.12422837

Solución: 10,12

Enunciados

① Calcula con cuatro cifras significativas la longitud de la altura que pasa por el vértice A del triángulo ABC.

Datos: A = (3,8), B = (–5,–8), C = (9,–1).

② Calcula de modo exacto el área del triángulo DEF.

Datos: D = (2,6), E = (–7,3), F = (8,–7).

Resoluciones

① La altura de un triángulo es la distancia entre un vértice y su lado opuesto.

Existen varias maneras de hacer el cálculo, pero la que nos parece más sencilla con los datos dados es utilizar la fórmula de la distancia de un punto a una recta. Como punto usaremos A y como recta usaremos la recta que pasa por los vértices B y C. Llamamos «r» a la recta que pasa por los vértices B y C.

El vector que une B y C es un vector de dirección de «r»:

$\overrightarrow{BC} = (9-(-5),-1-(-8)) = (14,7)$. Lo simplificamos: $\vec{v}_r = \frac{1}{7}(14,7) = (2,1)$

$\vec{v}_r = (2,1) \Rightarrow \vec{n}_r = (1,-2) \Rightarrow r \equiv x-2y+k = 0$

$C = (9,-1) \in r \Rightarrow 9-2(-1)+k = 0 \Rightarrow k = -11 \Rightarrow r \equiv x-2y-11 = 0$

Longitud de la altura = $d(A,r) = \dfrac{|3-2\cdot 8-11|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \dfrac{24}{\sqrt{5}} = 10{,}73$

Calculadora: 2 4 ÷ √ 5 = ⇨ 10.73312629

Solución: 10,73

② Existen varias maneras de hacer el cálculo, pero la que nos parece más sencilla con los datos dados es calcular una altura con el método del enunciado anterior y la base correspondiente con la distancia entre dos puntos.

Se puede demostrar que si todas las coordenadas de los vértices de un triángulo son números enteros, entonces el área o bien es un número natural o bien se puede expresar como una fracción irreducible con denominador 2. Por tanto, puedes tener la seguridad de que las dos raíces que pueden aparecer en este cálculo se podrán simplificar usando las propiedades de los radicales.

Base = $d(E,F) = |\overrightarrow{EF}| = |(8-(-7),-7-3)| = |(15,-10)| = \sqrt{15^2+(-10)^2} = \sqrt{325}$

Llamamos «s» a la recta que pasa por los vértices E y F.

$\overrightarrow{EF} = (15,-10) \Rightarrow \vec{v}_s = \frac{1}{5}(15,-10) = (3,-2) \Rightarrow \vec{n}_s = (2,3) \Rightarrow s \equiv 2x+3y+c = 0$

$E = (-7,3) \in s \Rightarrow -2\cdot 7+3\cdot 3+c = 0 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow s \equiv 2x+3y+5 = 0$

Longitud de la altura = $d(D,s) = \dfrac{|2\cdot 2+3\cdot 6+5|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \dfrac{27}{\sqrt{13}}$

Área = $\dfrac{1}{2}\sqrt{325}\,\dfrac{27}{\sqrt{13}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5^2\cdot 13}\,\dfrac{27}{\sqrt{13}} = \dfrac{1}{2}\cdot 5\sqrt{13}\,\dfrac{27}{\sqrt{13}} = \dfrac{5\cdot 27}{2} = 67{,}5$

Solución: 67,5

Enunciados

Dado el triángulo de vértices A = (3,2), B = (–3,0) y C = (3,–6), se pide:

① Averigua la ecuación implícita de «r», la mediatriz del lado AB.

② Calcula el circuncentro.

③ Calcula con cuatro cifras significativas el radio de la circunferencia circunscrita.

Resoluciones

① La mediatriz del lado AB es la mediatriz del segmento AB.
El vector $\overrightarrow{AB}$ es un vector normal a esta recta.

$\overrightarrow{AB} = (-3-3, 0-2) = (-6,-2)$; simplificando: $\vec{n}_r = -\frac{1}{3}(-6,-2) = (3,1)$

$\vec{n}_r = (3,1) \Rightarrow r \equiv 3x+y+k = 0$

La recta «r» pasa por el punto medio del segmento AB, que llamamos M.

$$M = \left(\frac{3-3}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (0,1)$$

$M = (0,1) \in r \Rightarrow 3\cdot 0+1+k = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow r \equiv 3x+y-1 = 0$

Solución: $r \equiv 3x+y-1 = 0$

② El circuncentro de un triángulo dista lo mismo de los tres vértices, luego se puede calcular como el punto de corte de las tres mediatrices de los lados.

Como ya tenemos la ecuación implícita de una mediatriz, solo nos falta averiguar otra. Con los datos que tenemos, es trivial encontrar la mediatriz del lado AC: como A y C tienen la misma abscisa, el lado AC es paralelo al eje de ordenadas, luego su mediatriz es paralela al eje de abscisas.

Llamamos «s» a la mediatriz del lado AC.

El punto medio del segmento AC es $M = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{2-6}{2}\right) = (3,-2)$, luego $s \equiv y = -2$

El circuncentro es el punto de corte de «r» y «s»:

$$\begin{cases} 3x+y=1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Solución: (1,–2)

③ El radio de la circunferencia circunscrita es igual a la distancia entre el circuncentro y un vértice cualquiera del triángulo.
Llamamos T al circuncentro, T = (1,–2) y usamos B = (–3,0).

$$\text{Radio} = d(T,B) = \sqrt{(-3-1)^2+(0-(-2))^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 4{,}472$$

Calculadora: √ 2 0 = ⇨ 4.472135955

Solución: 4,472

Enunciados

Dado el triángulo de vértices A = (–3,6), B = (7,1) y C = (–2,3), se pide:

① Averigua la ecuación implícita de «r», la recta que contiene a la altura que pasa por el vértice C.

② Calcula el ortocentro.

Resoluciones

① La recta que contiene a la altura que pasa por el vértice C es perpendicular al lado AB, luego el vector $\overrightarrow{AB}$ es un vector normal a esta recta.

$\overrightarrow{AB} = (7-(-3),1-6) = (10,-5)$; simplificando: $\vec{n}_r = \frac{1}{5}(10,-5) = (2,-1)$

$\vec{n}_r = (2,-1) \Rightarrow r \equiv 2x-y+k = 0$

La recta «r» pasa por el punto C:

$C = (-2,3) \in r \Rightarrow 2\cdot(-2)-3+k = 0 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow r \equiv 2x-y+7 = 0$

Solución: $r \equiv 2x-y+7 = 0$

② El ortocentro de un triángulo es el punto de corte de las alturas o sus prolongaciones. Por tanto, se puede calcular como el punto de corte de dos rectas que contengan a sendas alturas.

Como ya tenemos la ecuación implícita de una de estas rectas, solo nos falta averiguar otra. Llamamos «s» a la recta que contiene a la altura que pasa por el vértice B.

La recta «s» es perpendicular al lado AC, luego el vector $\overrightarrow{AC}$ es un vector normal a esta recta.

$\overrightarrow{AC} = (-2-(-3),3-6) = (1,-3) \Rightarrow \vec{n}_s = (1,-3) \Rightarrow s \equiv x-3y+k = 0$

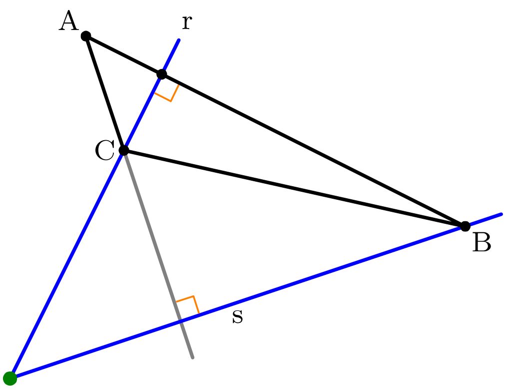
La recta «s» pasa por el punto B:

$B = (7,1) \in s \Rightarrow 7-3\cdot 1+k = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow s \equiv x-3y-4 = 0$

El ortocentro es el punto de corte de «r» y «s»:

$\begin{cases} 2x-y=-7 \\ x-3y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$ (Podemos resolver el sistema por cualquier método).

Solución: (–5,–3)

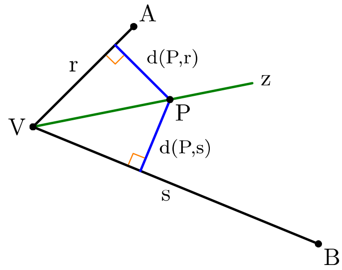


Bisectriz de un ángulo

El problema geométrico de trazar la bisectriz de un ángulo se traduce en geometría analítica como encontrar la ecuación de la recta bisectriz de un ángulo conocidas las coordenadas del vértice y de un punto de cada semirrecta. Para encontrarla, caracterizaremos la bisectriz como el conjunto de puntos del plano que equidistan de las dos semirrectas y utilizaremos una propiedad adicional.

Enunciado

Averigua la ecuación implícita de «z», la recta bisectriz del ángulo AVB. Datos: A = (4,9), V = (–2,3), B = (15,–4).



Resolución

Llamamos «r» a la recta que pasa por V y A.

$$\overrightarrow{VA} = (4-(-2), 9-3) = (6,6) \Rightarrow \vec{v}_r = \frac{1}{6}(6,6) = (1,1) \Rightarrow \vec{n}_r = (1,-1)$$

$$\vec{n}_r = (1,-1) \Rightarrow r \equiv x-y+c = 0;\ V = (-2,3) \in r \Rightarrow -2-3+c = 0 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow r \equiv x-y+5 = 0$$

Llamamos «s» a la recta que pasa por V y B.

$$\overrightarrow{VB} = (15-(-2), -4-3) = (17,-7) \Rightarrow \vec{v}_s = (17,-7) \Rightarrow \vec{n}_s = (7,17) \Rightarrow s \equiv 7x+17y+c = 0$$

$$V = (-2,3) \in s \Rightarrow 7(-2)+17\cdot 3+c = 0 \Rightarrow c = -37 \Rightarrow s \equiv 7x+17y-37 = 0$$

Llamamos P = (x,y) a un punto cualquiera de «z». Se verifica:

$$d(P,r) = d(P,s) \Rightarrow \frac{|x-y+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|7x+17y-37|}{\sqrt{7^2+17^2}} \Rightarrow \frac{|x-y+5|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x+17y-37|}{\sqrt{338}}$$

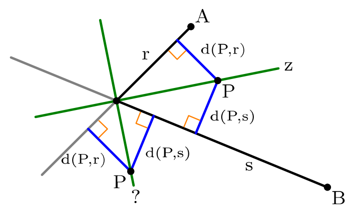
Vamos a usar propiedades de los radicales: $\sqrt{338} = \sqrt{2\cdot 13^2} = 13\sqrt{2}$. Así podremos simplificar la expresión. En los casos en que no se puede simplificar y hay que trabajar con radicales, la operación se complica mucho (no lo verás en secundaria).

$$\frac{|x-y+5|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x+17y-37|}{13\sqrt{2}} \Rightarrow |x-y+5| = \frac{|7x+17y-37|}{13} \Rightarrow 13\,|x-y+5| = |7x+17y-37|$$

Ahora usamos la propiedad de que si dos números tienen el mismo valor absoluto, los números pueden ser iguales u opuestos:

$$\begin{cases} 13(x-y+5) = 7x+17y-37 \\ 13(x-y+5) = -(7x+17y-37) \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} 6x-30y+102=0 \\ 20x+4y+28=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5y+17=0 \\ 5x+y+7=0 \end{cases}$$

Hemos obtenido dos rectas perpendiculares, porque la condición de igualdad de distancias que hemos impuesto realmente la cumple cualquier punto de cualquiera de las dos rectas. Ahora hay que distinguir cuál de las dos es la bisectriz que buscamos. Si el dibujo es bueno, podemos usar las pendientes, los vectores de dirección o los normales.



Sin dibujo, sustituimos las coordenadas de A y B en el primer miembro de una de las ecuaciones: si se obtienen números de distinto signo, esa es la recta; si se obtienen números del mismo signo, es la otra. Esto se debe a que el primer miembro de la ecuación implícita de una recta da valores del mismo signo en todos los puntos del mismo semiplano y A y B están en distintos semiplanos respecto a la bisectriz, pero en el mismo semiplano respecto a la otra recta.

(x–5y+17) en A da –24 y (x–5y+17) en B da 52; son valores de distinto signo.

Solución: z ≡ x–5y+17 = 0

Enunciados

Dado el triángulo de vértices A = (–1,2), B = (11,–7) y C = (23,9), se pide:

① Averigua la ecuación implícita de «z», bisectriz del ángulo en A.

② Calcula el incentro, que llamaremos I.

③ Calcula el radio de la circunferencia inscrita.

Resoluciones

① Llamamos «r» a la recta que pasa por A y B.

$\overrightarrow{AB}=(12,-9) \Rightarrow \vec{n}_r=(3,4) \Rightarrow r \equiv 3x+4y+k=0;\ A\in r \Rightarrow k=-5;\ r \equiv 3x+4y-5=0$

Llamamos «s» a la recta que pasa por A y C.

$\overrightarrow{AC}=(24,7) \Rightarrow \vec{n}_s=(7,-24) \Rightarrow s \equiv 7x-24y+k=0;\ A\in s \Rightarrow k=55;\ s \equiv 7x-24y+55=0$

Llamamos P = (x,y) a un punto cualquiera de «z». Se verifica:

$$d(P,r)=d(P,s) \Rightarrow \frac{|3x+4y-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|7x-24y+55|}{\sqrt{7^2+(-24)^2}} \Rightarrow \frac{|3x+4y-5|}{5}=\frac{|7x-24y+55|}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |3x+4y-5|=\frac{|7x-24y+55|}{5} \Rightarrow 5\,|3x+4y-5|=|7x-24y+55| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(3x+4-5)=7x-25y+55 \\ 5(3x+4-5)=-(7x-25y+55) \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} 2x+11y-20=0 \\ 11x-2y+15=0 \end{cases}$$

(2x+11y–20) en B vale –75; (2x+11y–20) en C vale 125

Solución: z ≡ 2x+11y–20 = 0

② El incentro de un triángulo dista lo mismo de los tres lados, luego se puede calcular como el punto de corte de las tres bisectrices de los ángulos.

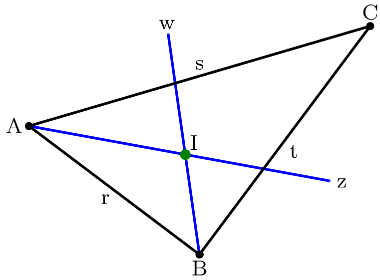
Tenemos la ecuación implícita de una bisectriz, nos falta otra; llamamos «w» a la bisectriz del ángulo en B. Llamamos «t» a la recta que pasa por B y C.

$\overrightarrow{BC}=(12,16) \Rightarrow \vec{n}_t=(4,-3) \Rightarrow t \equiv 4x-3y+k=0;\ B\in t \Rightarrow k=-65;\ t \equiv 4x-3y-65=0$

Llamamos P = (x,y) a un punto cualquiera de «w». Se verifica:

$$d(P,t)=d(P,r) \Rightarrow \frac{|4x-3y-65|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|3x+4y-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Rightarrow \frac{|4x-3y-65|}{5}=\frac{|3x+4y-5|}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |4x-3y-65|=|3x+4y-5| \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x-7y-60=0 \\ 7x+y-70=0 \end{cases}$$



(x–7y–60) en A vale –75; (x–7y–60) en B vale –100;

luego, w ≡ 7x+y–70 = 0

El incentro es el punto de corte de «z» y «w»:

$$\begin{cases} 2x+11y=20 \\ 7x+y=70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=0 \end{cases}$$; Solución: I = (10,0)

③ El radio de la circunferencia inscrita es igual a la distancia entre el incentro y un lado cualquiera del triángulo. Radio = d(I,r) = ... = 5. Solución: 5.

Vector unitario

Se llama vector unitario al vector que tiene módulo 1.

Propiedad

Si se multiplica la fracción inversa del módulo de un vector por ese vector, se obtiene un vector unitario que tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector original. Dicho simbólicamente:

$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ es un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{a}$.

Bisectriz de un ángulo

El problema geométrico de trazar la bisectriz de un ángulo se traduce en geometría analítica como encontrar la ecuación de la recta bisectriz de un ángulo conocidas las coordenadas del vértice y de un punto de cada semirrecta. Para encontrarla, calcularemos su vector de dirección como la suma de los vectores de dirección unitarios de cada semirrecta.

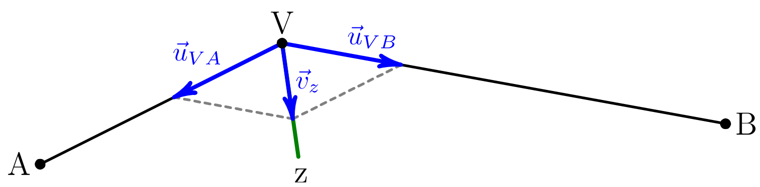
Enunciado

Averigua la ecuación implícita de «z», la recta bisectriz del ángulo AVB.

Datos: A = (–5,1), V = (1,4), B = (12,2).

Resolución

En la figura de la derecha representamos la situación, aunque hemos dibujado los vectores algo mayores de lo que son en realidad para apreciar bien la propiedad.



Llamamos $\vec{u}_{VA}$ al vector unitario en la dirección y sentido de la semirrecta VA.

$$\overrightarrow{VA} = (-5-1,1-4) = (-6,-3);\quad |\overrightarrow{VA}| = \sqrt{(-6)^2+(-3)^2} = \sqrt{45} = \sqrt{3^2\cdot 5} = 3\sqrt{5}$$

$$\vec{u}_{VA} = \frac{1}{|\vec{u}_{VA}|}\overrightarrow{VA} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-6,-3) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1)$$

Llamamos $\vec{u}_{VB}$ al vector unitario en la dirección y sentido de la semirrecta VB.

$$\overrightarrow{VB} = (12-1,2-4) = (11,-2);\quad |\overrightarrow{VB}| = \sqrt{11^2+(-2)^2} = \sqrt{125} = \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$$

$$\vec{u}_{VB} = \frac{1}{|\vec{u}_{VB}|}\overrightarrow{VB} = \frac{1}{5\sqrt{5}}(11,-2)$$

El punto clave de este método es que $\vec{u}_{VA} + \vec{u}_{VB}$ es un vector de dirección de «z». Para obtener el vector de dirección más sencillo posible observamos que si multiplicamos la suma anterior por $5\sqrt{5}$, podremos simplificar todos los radicales. En los casos en que no se puede simplificar y hay que trabajar con radicales, la operación se complica mucho (no lo verás en secundaria).

$$\vec{v}_z = 5\sqrt{5}\,(\vec{u}_{VA} + \vec{u}_{VB}) = 5\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1)+\frac{1}{5\sqrt{5}}(11,-2)\right) = 5(-2,-1)+(11,-2) = (1,-7)$$

$$\vec{v}_z = (1,-7) \Rightarrow \vec{n}_z = (7,1) \Rightarrow z \equiv 7x+y+c = 0$$

$$V = (1,4) \in z \Rightarrow 7+4+c = 0 \Rightarrow c = -11 \Rightarrow z \equiv 7x+y-11 = 0$$

Solución: $z \equiv 7x+y-11 = 0$

Enunciados

① Dado el triángulo de vértices A = (–6,5), B = (1,–9) y C = (11,–2), se pide:

a) La longitud de la mediana que pasa por A, con seis cifras significativas.

b) Ecuación implícita de la recta «r»: contiene a la mediana que pasa por B.

c) El baricentro.

② Dado el triángulo de vértices A = (–7,–1), B = (2,13) y C = (10,1), se pide:

a) La longitud de la altura que pasa por A, con seis cifras significativas.

b) El área, calculada de modo exacto.

③ Dado el triángulo de vértices A = (9,6), B = (5,6) y C = (2,–1), se pide:

a) La ecuación implícita de la recta «r»: mediatriz del lado AC.

b) El circuncentro.

c) El radio de la circunfencia circunscrita, con seis cifras significativas.

④ Dado el triángulo de vértices A = (8,10), B = (–10,8) y C = (3,–5), se pide:

a) La ecuación implícita de la recta «r»: contiene a la altura que pasa por C.

b) El ortocentro.

⑤ Dado el triángulo de vértices A = (0,0), B = (14,0) y C = (5,12), se pide:

a) La ecuación implícita de la recta «z»: bisectriz del ángulo en B.

b) El incentro.

c) El radio de la circunfencia inscrita.

⑥ Con los datos A = (–3,15), B = (17,6), C = (2,–10), D = (–13,–4), se pide:

a) Averigua la ecuación implícita de la recta «r» que pasa por A y C.

b) Calcula de modo exacto el área del cuadrilátero ABCD.

⑦ Dado el triángulo de vértices A = (0,0), B = (168,24) y C = (42,42), se pide:

a) El área.

b) El baricentro, que llamaremos G.

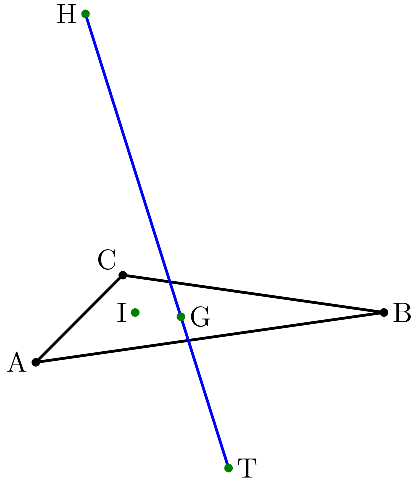
c) El ortocentro, que llamaremos H.

d) El circuncentro, que llamaremos T.

e) El incentro, que llamaremos I.

f) Comprobar que el baricentro, el ortocentro y el circuncentro están alineados. La recta que une esos tres puntos se llama **recta de Euler**, en honor de este matemático, que demostró en 1795 que los tres puntos están alineados.

g) Comprobar que el incentro no pertenece a la recta de Euler.



Enunciados

① Clasifica por sus lados y por sus ángulos el triángulo que tiene sus vértices en los puntos (–2,4), (5,2) y (0,–3).

② Clasifica por sus lados y por sus ángulos el triángulo que tiene sus vértices en los puntos (0,2), (5,0) y (–3,–2).

③ Clasifica por sus lados y por sus ángulos el triángulo que tiene sus vértices en los puntos (–4,2), (6,1) y (–5,–8).

④ Clasifica por sus lados y por sus ángulos el triángulo que tiene sus vértices en los puntos (1,7), (3,–2) y (10,5).

⑤ Clasifica por sus lados y por sus ángulos el triángulo que tiene sus vértices en los puntos (2,1), (–3,4) y (–6,–2).

⑥ Dado el triángulo de vértices A = (–9,–2), B = (–5,5) y C = (3,4), se pide:

a) La longitud del mayor de los lados, con seis cifras significativas.

b) La longitud de la menor de las medianas, con seis cifras significativas.

c) La longitud de la menor de las alturas, con seis cifras significativas.

d) La ecuación implícita de la recta «z»: bisectriz del ángulo en B.

e) La ecuación implícita de la recta «r»: mediatriz del lado AC.

⑦ Dado el triángulo de vértices A = (5,4), B = (3,–5) y C = (–1,–3), se pide:

a) La longitud del menor de los lados, con tres cifras significativas.

b) La longitud de la mayor de las alturas, con tres cifras significativas.

c) El área, calculada de modo exacto.

⑧ Dado el triángulo de vértices A = (12,3), B = (10,–1) y C = (–2,–5), se pide:

a) El circuncentro.

b) El radio de la circunfencia circunscrita, con seis cifras significativas.

⑨ Dado el triángulo de vértices A = (–4,–1), B = (9,5) y C = (1,–5), se pide:

a) La ecuación implícita de la recta «r»: contiene a la altura que pasa por C.

b) El ortocentro.

⑩ Dado el triángulo de vértices A = (4,5), B = (10,–1) y C = (–4,–3), se pide:

a) El perímetro, expresado de manera exacta utilizando radicales lo más sencillos que sea posible.

b) La ecuación implícita de la recta «z»: bisectriz del ángulo en B.

c) La ecuación implícita de la recta «w»: bisectriz del ángulo en C.

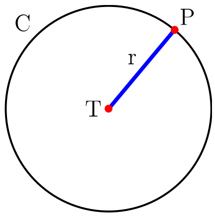
d) El incentro.

e) El radio de la circunfencia inscrita, expresado de manera exacta utilizando radicales lo más sencillos que sea posible.

Circunferencia

La circunferencia es una figura geométrica de gran importancia por su significado; además, permite resolver muchos problemas. En geometría analítica es necesario encontrar una expresión algebraica que caracterice a los puntos de una circunferencia, es decir: su ecuación.

Ecuación de una circunferencia



Supongamos que la circunferencia «C» tiene el centro en el punto $T=(a,b)$ y su radio mide «r». Si $P=(x,y)$ es un punto cualquiera de la circunferencia, se verifica que $d(T,P)=r$. Desarrollamos esta igualdad hasta llegar a otra que sea más cómoda:

$$d(T,P)=r \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Esta igualdad es la que se toma como ecuación de la circunferencia «C»:

$$\boxed{C \equiv (x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

Ejemplos

① La ecuación de la circunferencia «D» que tiene el centro en el punto $E=(-5,4)$ y su radio mide 7 es $D \equiv (x+5)^2+(y-4)^2=49$.

② La ecuación de la circunferencia «F» que tiene el centro en el punto $H=(1,-3)$ y su radio mide $\sqrt{2}$ es $F \equiv (x-1)^2+(y+3)^2=2$.

③ La circunferencia $M \equiv (x+3)^2+(y-3)^2=36$ tiene el centro en $(-3,3)$ y su radio mide 6.

④ La circunferencia $Q \equiv x^2+y^2=7$ tiene el centro en $(0,0)$ y su radio mide $\sqrt{7}$.

Ecuación desarrollada

En muchas ocasiones tenemos la ecuación desarrollada de una circunferencia y necesitamos recuperar la ecuación habitual para saber el centro y la longitud del radio. En esos casos, usamos unas trasformaciones algebraicas para pasar de una expresión a la otra.

Ejemplo

⑤ Averigua el centro y la longitud del radio de la circunferencia U.

$U \equiv x^2+y^2-2x+10y+15=0$

Resolución

Reagrupamos los sumandos para preparar la búsqueda de los desarrollos de los dos cuadrados que deben aparecer en la ecuación simplificada:

$$x^2+y^2-2x+10y+15=0 \Rightarrow x^2-2x+y^2+10y=-15 \Rightarrow (x-1)^2-1+(y+5)^2-25=-15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y+5)^2=-15+1+25 \Rightarrow (x-1)^2+(y+5)^2=11$$

Solución: el centro es el punto $(1,-5)$ y el radio mide $\sqrt{11}$

Explicación

Es muy común que la diferencia entre un problema y un ejercicio sea simplemente que te hayan explicado algún método para responder una pregunta o no. Los enunciados que vamos a proponer en esta página corresponden a esa categoría: si se explican antes de proponerlos, son ejercicios; si no se explican antes, son problemas. Te animamos a que pongas en práctica tus conocimientos para intentar contestar estas preguntas (que verás que son de dificultad variable) antes de que te presentemos sus métodos habituales de resolución. Recuerda la importancia de tu desarrollo en la capacidad de resolver problemas.

Enunciados

① Averigua la ecuación de la circunferencia «C» que tiene el centro en el punto T y pasa por el punto A.

Datos: $T = (-3,0)$, $A = (2,2)$.

② Calcula el valor que debe tener «k» para que el punto A pertenezca a la circunferencia «C».

Datos: $C \equiv (x-8)^2+(y+2)^2 = 53$, $A = (k+4,k-1)$.

③ Averigua la ecuación de la circunferencia «C» que tiene el centro en el punto T y es tangente a la recta «s».

Datos: $T = (8,-2)$, $s \equiv 4x+5y-63 = 0$.

④ Averigua la ecuación de la circunferencia «C» sabiendo que uno de sus diámetros es el segmento de extremos A y B.

Datos: $A = (-7,-1)$, $B = (1,11)$.

⑤ Averigua la ecuación de la circunferencia «C» sabiendo que pasa por los puntos A y B y su centro pertenece a la recta «s».

Datos: $A = (-9,15)$, $B = (-1,17)$, $s \equiv 5x+3y-2 = 0$.

⑥ Averigua la ecuación de la circunferencia «C» sabiendo que pasa por los puntos D, F y H. Datos: $D = (13,5)$, $F = (21,1)$, $H = (-3,-11)$.

⑦ Calcula los puntos que pertenecen a la circunferencia «C» y a la recta que pasa por los puntos A y B.

Datos: $A = (-19,-9)$, $B = (5,23)$, $C \equiv (x+3)^2+(y-4)^2 = 250$.

⑧ Calcula los puntos que pertenecen a la circunferencia «C» y a la circunferencia «F».

Datos: $C \equiv (x-3)^2+y^2 = 50$, $F \equiv (x+3)^2+(y-6)^2 = 26$.

⑨ Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que es tangente a la circunferencia «C» en el punto Q. Datos: $C \equiv (x+4)^2+(y-1)^2 = 116$, $Q = (6,5)$.

⑩ Averigua las ecuaciones implícitas de las rectas que pasan por el punto A y son tangentes a la circunferencia «C».

Datos: $A = (-15,8)$, $C \equiv (x-5)^2+(y-3)^2 = 85$.

Ecuación de una circunferencia conocido el centro y un punto

Resolvemos el problema calculando el radio de la circunferencia como la distancia entre el centro y el punto conocido.

Ejemplo 1

Averigua la ecuación de la circunferencia «C» que tiene el centro en el punto T y pasa por el punto A. Datos: $T=(4,-8)$, $A=(7,5)$.

Resolución

Llamamos «r» al radio de la circunferencia y calculamos su cuadrado:

$r=d(T,A)=\sqrt{(7-4)^2+(5-(-8))^2}=\sqrt{3^2+13^2}=\sqrt{178} \Rightarrow r^2=178$

Solución: $(x-4)^2+(y+8)^2=178$

Valor para que un punto pertenezca a una circunferencia

Para que un punto pertenezca a una circunferencia deben ocurrir estas dos propiedades:

✱ El punto verifica la ecuación de la circunferencia.

✱ La distancia del centro de la circunferencia al punto debe ser igual al radio.

Utilizando una de las propiedades, podremos calcular algún valor que nos soliciten para que un punto pertenezca a una circunferencia.

Ejemplo 2

Calcula el valor que debe tener «k» para que el punto A pertenezca a la circunferencia «C». Datos: $C\equiv(x+2)^2+(y-5)^2=45$, $A=(k-1,k-3)$.

Resolución

Si $A\in C$, debe verificar su ecuación:

$(k-1+2)^2+(k-3-5)^2=45 \Rightarrow (k+1)^2+(k-8)^2=45 \Rightarrow k^2+2k+1+k^2-16k+64=45 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2k^2-14k+20=0 \Rightarrow k^2-7k+10=0 \Rightarrow k=\dfrac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1}=\dfrac{7\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{7\pm3}{2}=\begin{cases}5\\2\end{cases}$

Solución: $k=\begin{cases}2\\5\end{cases}$

Ejemplo 3

Calcula el valor que debe tener «k» para que el punto A pertenezca a la circunferencia de centro T y radio $\sqrt{137}$. Datos: $T=(7,-3)$, $A=(4k-8,11k-10)$.

Resolución

La distancia entre A y T debe ser $\sqrt{137}$:

$d(A,T)=\sqrt{137} \Rightarrow \sqrt{(7-(4k-8))^2+(-3-(11k-10))^2}=\sqrt{137} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(15-4k)^2+(7-11k)^2}=\sqrt{137}$.

Como las dos cantidades subradicales son positivas, deben ser iguales:

$(15-4k)^2+(7-11k)^2=137 \Rightarrow 225-120k+16k^2+49-154k+121k^2=137 \Rightarrow$

$\Rightarrow 137k^2-274k+137=0 \Rightarrow k^2-2k+1=0 \Rightarrow k=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{2\pm\sqrt{0}}{2}=1$

Solución: $k=1$

Ecuación de una circunferencia conocido el centro y una recta tangente

Resolvemos el problema calculando el radio de la circunferencia como la distancia entre el centro y la recta tangente. Estamos haciendo uso de la propiedad de que el radio de una circunferencia que pasa por un punto es perpendicular a la recta tangente a la circunferencia en ese punto.

Ejemplo 1

Enunciado

Averigua la ecuación de la circunferencia «C» que tiene el centro en el punto T y es tangente a la recta «s».

Datos: T = (6,–2), s ≡ 3x–5y+74 = 0.

Resolución

Llamamos «r» al radio de la circunferencia y lo calculamos como la distancia entre el centro y la recta tangente:

$$r = d(T,s) = \frac{|3\cdot 6-5(-2)+74|}{\sqrt{3^2+(-5)^2}} = \frac{|18+10+74|}{\sqrt{9+25}} = \frac{102}{\sqrt{34}}$$

No es necesario racionalizar la expresión, puesto que hay que elevarla al cuadrado para poner el resultado en la ecuación de la circunferencia:

$$r^2 = \left(\frac{102}{\sqrt{34}}\right)^2 = \frac{102^2}{34} = 306$$

Solución: $C \equiv (x-6)^2+(y+2)^2 = 306$

Ecuación de una circunferencia conocido un diámetro

Resolvemos el problema calculando el centro de la circunferencia como el punto medio del diámetro y el radio de la circunferencia como la distancia entre el centro y uno cualquiera de los extremos del diámetro.

Ejemplo 2

Enunciado

Averigua la ecuación de la circunferencia «C» sabiendo que el segmento de extremos A y B es uno de sus diámetros.

Datos: A = (5,–8), B = (9,2).

Resolución

El centro de la circunferencia, que llamamos T, es el punto medio del segmento AB:

$$T = \left(\frac{5+9}{2}, \frac{-8+2}{2}\right) = (7,-3)$$

Llamamos «r» al radio de la circunferencia y lo calculamos como la distancia entre el centro y el punto B:

$$r = d(T,B) = \sqrt{(9-7)^2+(2-(-3))^2} = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$$

No es necesario calcular la raíz, puesto que hay que elevarla al cuadrado para poner el resultado en la ecuación de la circunferencia:

$$r^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2 = 29$$

Solución: $C \equiv (x-7)^2+(y+3)^2 = 29$

Ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos

Resolvemos el problema calculando el centro de la circunferencia como el punto de corte de las mediatrices de dos de los tres segmentos definidos por los puntos y el radio de la circunferencia como la distancia entre el centro y uno cualquiera de los puntos. Observa que la circunferencia que obtenemos es la circunferencia circunscrita al triángulo definido por los tres puntos.

Ejemplo

Enunciado

Averigua la ecuación de la circunferencia «C» que pasa por los puntos D, F y H.

Datos: D = (18,6), F = (–21,9), H = (14,–12).

Resolución

Llamamos «s» a la recta mediatriz del segmento DH.

El vector $\overrightarrow{DH}$ es uno de los vectores normales a «s».

$$\overrightarrow{DH} = (14-18,-12-6) = (-4,-18) \Rightarrow \vec{n}_s = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DH} = -\frac{1}{2}(-4,-18) = (2,9).$$

La recta «s» pasa por el punto medio del segmento DH, que llamamos M:

$$M = \left(\frac{18+14}{2},\frac{6-12}{2}\right) = (16,-3)$$

$\vec{n}_s = (2,9) \Rightarrow s \equiv 2x+9y+k = 0$. $M = (16,-3) \in s \Rightarrow 2\cdot 16+9\cdot(-3)+k = 0 \Rightarrow k = -5$

Así pues, $s \equiv 2x+9y-5 = 0$

Llamamos «t» a la recta mediatriz del segmento FD.

El vector $\overrightarrow{FD}$ es uno de los vectores normales a «t».

$$\overrightarrow{FD} = (18-(-21),6-9) = (39,-3) \Rightarrow \vec{n}_t = \frac{1}{3}\overrightarrow{FD} = \frac{1}{3}(39,-3) = (13,-1).$$

La recta «t» pasa por el punto medio del segmento FD, que llamamos N:

$$N = \left(\frac{-21+18}{2},\frac{9+6}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2},\frac{15}{2}\right)$$

$$\vec{n}_t = (13,-1) \Rightarrow t \equiv 13x-y+k = 0.\ N \in t \Rightarrow 13\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{15}{2}+k = 0 \Rightarrow k = 27$$

Así pues, $t \equiv 13x-y+27 = 0$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de «s» y «t»:

$$\begin{cases} 2x+9y=5 \\ 13x-y=-27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$. Así, el centro de la circunferencia es B = (–2,1).

Llamamos «r» al radio de la circunferencia y lo calculamos como la distancia entre el centro y el punto D:

$$r = d(B,D) = \sqrt{(18-(-2))^2+(6-1)^2} = \sqrt{20^2+5^2} = \sqrt{425}$$

No es necesario calcular la raíz, puesto que hay que elevarla al cuadrado para poner el resultado en la ecuación de la circunferencia:

$$r^2 = \sqrt{425} = 425$$

Solución: $C \equiv (x+2)^2+(y-1)^2 = 425$

Puntos de corte de una circunferencia y una recta

Sabemos que el número de puntos de corte de una recta y una circunferencia puede ser dos, uno o ninguno, según su posición relativa. Dadas la circunferencia y la recta en geometría analítica, deseamos averiguar las coordenadas de sus puntos de corte.

Hay dos métodos interesantes:

* Utilizar las ecuaciones paramétricas de la recta, sustituir su expresión en la ecuación de la circunferencia y despejar el valor del parámetro; sustituyendo el valor obtenido para el parámetro en las ecuaciones paramétricas de la recta, conocemos los puntos.
* Plantear un sistema de ecuaciones no lineales usando la ecuación de la circunferencia y la ecuación implícita de la recta; sus soluciones serán las coordenadas de los puntos de corte.

Ejemplo

Enunciado

Calcula los puntos que pertenecen a la circunferencia «C» y a la recta que pasa por los puntos A y B.

Datos: $A = (22,4)$, $B = (18,28)$, $C \equiv (x-4)^2+(y-1)^2 = 370$.

Resolución con las ecuaciones paramétricas

Llamamos «r» a la recta que pasa por A y B.

El vector $\overrightarrow{AB}$ es uno de los vectores de dirección de «r».

$$\overrightarrow{AB} = (18-22,28-4) = (-4,24) \Rightarrow \vec{v}_r = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}(-4,24) = (1,-6).$$

Así pues, $r \equiv \begin{cases} x=22+\lambda \\ y=4-6\lambda \end{cases}$

Sustituimos en la ecuación de «C»: $(22+\lambda-4)^2+(4-6\lambda-1)^2 = 370 \Rightarrow$

$\Rightarrow (18+\lambda)^2+(3-6\lambda)^2 = 370 \Rightarrow 324+36\lambda+\lambda^2+9-36\lambda+36\lambda^2 = 370 \Rightarrow 37\lambda^2 = 37 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow$

$\lambda=\begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$; $\lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x=21 \\ y=10 \end{cases} \rightarrow$ punto $(21,10)$; $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=23 \\ y=-2 \end{cases} \rightarrow$ punto $(23,-2)$

Resolución con la ecuación implícita

Llamamos «r» a la recta que pasa por A y B. $\vec{v}_r = (1,-6) \Rightarrow \vec{n}_r = (6,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow r \equiv 6x+y+k = 0$; $A = (22,4) \in r \Rightarrow 6\cdot22+4+k = 0 \Rightarrow k = -136 \Rightarrow r \equiv 6x+y-136 = 0$

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de «r» y «C»:

$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-1)^2=370 \\ 6x+y=136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-4)^2+(136-6x-1)^2=370 \\ y=136-6x \end{cases} \Rightarrow (x-4)^2+(135-6x)^2 = 370 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-8x+16+18225-1620x+36x^2 = 370 \Rightarrow 37x^2-1628x+17871 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-44x+483 = 0 \Rightarrow x = \frac{44\pm\sqrt{(-44)^2-4\cdot1\cdot483}}{2\cdot1} = \frac{44\pm2}{2} = 22\pm1 = \begin{cases} 23 \\ 21 \end{cases}$$

$x =23 \Rightarrow y=136-6\cdot23=-2 \rightarrow$ punto $(23,-2)$; $x=21 \Rightarrow y=136-6\cdot21=10 \rightarrow$ punto $(21,10)$

Solución: $(21,10)$ y $(23,-2)$

Puntos de corte de dos circunferencias

Sabemos que el número de puntos de corte de dos circunferencias puede ser dos, uno o ninguno, según su posición relativa. Dadas las circunferencias en geometría analítica, deseamos averiguar las coordenadas de sus puntos de corte.

El método es plantear un sistema de ecuaciones no lineales usando las ecuaciones de las circunferencias; sus soluciones serán las coordenadas de los puntos de corte. La diferencia entre las ecuaciones de las circunferencias nos da la ecuación de la recta que pasa por los puntos de corte de las circunferencias, si existe.

Ejemplo

Enunciado

Calcula los puntos que pertenecen a las circunferencias «C» y «F».

Datos: $C \equiv (x+1)^2+(y-4)^2 = 29$, $F \equiv (x-13)^2+(y-10)^2 = 145$

Resolución

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de «C» y «F»:

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-4)^2=29\\(x-13)^2+(y-10)^2=145\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+2x+1+y^2-8y+16=29\\x^2-26x+169+y^2-20y+100=145\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2+2x-8y=12\\x^2+y^2-26x-20y=-124\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2+2x-8y=12\\28x+12y=136\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2+2x-8y=12\\7x+3y=34\end{cases}$$

Hemos obtenido la ecuación «$7x+3y-34 = 0$», que es precisamente la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos de corte de las dos circunferencias.

Continuamos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x-8y=12\\7x+3y=34\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2+2x-8y=12\\y=\dfrac{34-7x}{3}\end{cases} \Rightarrow x^2+\left(\frac{34-7x}{3}\right)^2+2x-8\cdot\frac{34-7x}{3}=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{49x^2-476x+1156}{9}+2x-\frac{272-56x}{3}=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2+49x^2-476x+1156+18x-816+168x = 108 \Rightarrow 58x^2-290+232 = 0 \Rightarrow$$

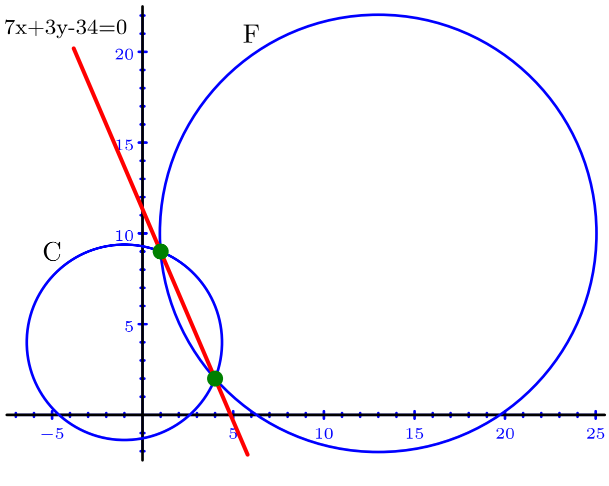
$$\Rightarrow x^2-5x+4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1} = \frac{5\pm3}{2} = \begin{cases}4\\1\end{cases}$$

$x = 4 \Rightarrow y = 2 \rightarrow$ punto (4,2); $x = 1 \Rightarrow y = 9 \rightarrow$ punto (1,9)

Solución: (4,2) y (1,9)

Representación gráfica

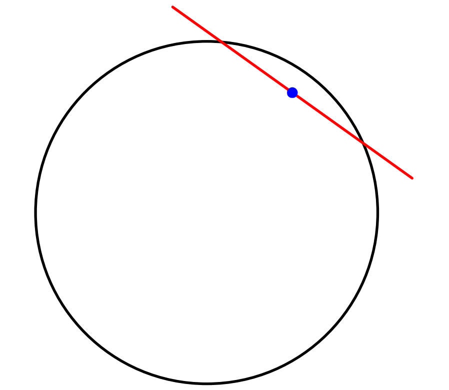
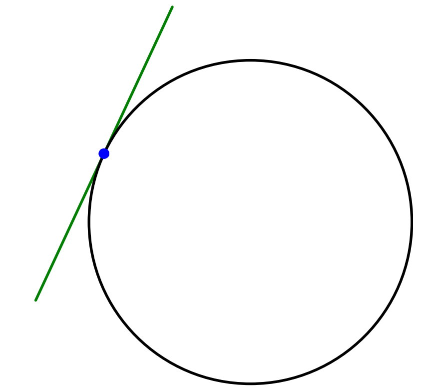
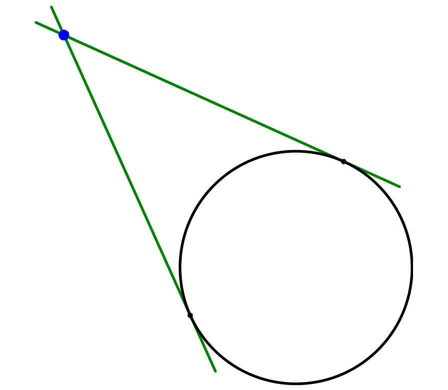
A la derecha la vemos.



Recta tangente a una circunferencia y que pasa por un punto

Este problema consiste en encontrar la ecuación de una recta que pasa por un punto dado y es tangente a una circunferencia dada. El número de soluciones varía según sea la posición relativa del punto y la circunferencia.

* Si el punto es interior a la circunferencia, no hay ninguna solución.
* Si el punto pertenece a la circunferencia, hay exactamente una solución.
* Si el punto es exterior a la circunferencia, hay exactamente dos soluciones.

		
Por un punto interior a la circunferencia no se pueden trazar tangentes	Por un punto que pertenezca a una circunferencia solo se puede trazar una tangente	Por un punto exterior a la circunferencia se pueden trazar dos tangentes

Recta tangente a una circunferencia por un punto de ella

Si el punto pertenece a la circunferencia, la recta tangente se puede calcular fácilmente porque (1) es una recta perpendicular al segmento que une el centro de la circunferencia con el punto dado y (2) pasa por el punto dado.

Ejemplo

Enunciado

Averigua la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto A y es tangente a la circunferencia «C». Datos: $A=(12,1)$, $C \equiv x^2+y^2-4x+6y-103=0$.

Resolución

Averiguamos el centro y la longitud del radio de la circunferencia «C»:

$x^2+y^2-4x+6y-103=0 \Rightarrow x^2-4x+y^2+6y=103 \Rightarrow (x-2)^2-4+(y+3)^2-9=103 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=103+4+9 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=116$

El centro de la circunferencia «C» es el punto $T=(2,-3)$.

El radio de la circunferencia «C» mide $\sqrt{116}$.

Averiguamos la posición relativa de la circunferencia y el punto A:

$d(A,T)=|\overrightarrow{AT}|=|(2-12,-3-1)|=|(-10,-4)|=\sqrt{(-10)^2+(-4)^2}=\sqrt{116} \Rightarrow A \in C.$

Llamamos «r» a la recta pedida. El vector $\overrightarrow{AT}$ es uno de sus vectores normales:

$\overrightarrow{AT}=(-10,-4)$; lo simplificamos: $\vec{n}_r=-\frac{1}{2}(-10,-4)=(5,2) \Rightarrow r \equiv 5x+2y+k=0$

$A \in C \Rightarrow 5 \cdot 12+2 \cdot 1+k=0 \Rightarrow k=-62 \Rightarrow r \equiv 5x+2y-62=0$

Solución: $5x+2y-62=0$

Rectas tangentes a una circunferencia por un punto exterior

Existen varios métodos puramente geométricos para resolver este problema que se pueden adaptar fácilmente para resolverlos mediante geometría analítica. Pero, como estamos estudiando precisamente geometría analítica, vamos a mostrarte un método que utiliza algún concepto nuevo de esta materia.

Ejemplo

Enunciado

Averigua la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto A y es tangente a la circunferencia «C». Datos: $A = (-14,31)$, $C \equiv (x-6)^2+(y-1)^2 = 130$.

Resolución

El centro de la circunferencia «C» es el punto $T = (6,1)$ y su radio mide $\sqrt{130}$.

Averiguamos la posición relativa de la circunferencia y el punto A:

$d(A,T) = \sqrt{(6-(-14))^2+(1-31)^2} = \sqrt{20^2+(-30)^2} = \sqrt{1300} \Rightarrow$ A es exterior a C.

Llamamos $P = (x,y)$ al punto de tangencia de las rectas pedidas y la circunferencia (sabemos que obtendremos dos soluciones).

Por un lado, el punto debe verificar la ecuación de la circunferencia:

$$(x-6)^2+(y-1)^2 = 130 \Rightarrow x^2-12x+36+y^2-2y+1 = 130 \Rightarrow x^2+y^2-12x-2y = 93$$

Por otro lado, el vector $\overrightarrow{AP}$ debe ser perpendicular al $\overrightarrow{TP}$:

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{TP} \Rightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{TP} = 0 \Rightarrow (x+14,y-31)\cdot(x-6,y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+14)(x-6)+(y-31)(y-1) = 0 \Rightarrow x^2-6x+14x-84+y^2-y-31y+31 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2+y^2+8x-32y = 53$. (Por cierto, esta es la ecuación de una circunferencia).

Resolvemos el sistema, comenzando por restar las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2-12x-2y=93 \\ x^2+y^2+8x-32y=53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-12x-2y=93 \\ -20x+30y=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-12x-2y=93 \\ -2x+3y=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-12x-2y=93 \\ x=\dfrac{3y-4}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3y-4}{2}\right)^2+y^2-12\cdot\frac{3y-4}{2}-2y=93 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9y^2-24y+16}{4}+y^2-6\cdot(3y-4)-2y=93 \Rightarrow$$

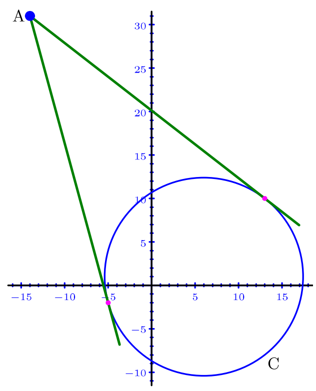
$$\Rightarrow 9y^2-24y+16+4y^2-72y+96-8y = 372 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13y^2-104y-260 = 0 \Rightarrow y^2-8y-20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot(-20)}}{2\cdot 1} = \frac{8\pm 12}{2} = 4\pm 6 = \begin{cases} 10 \\ -2 \end{cases}$$

$y = 10 \Rightarrow x = 13 \rightarrow$ punto $(13,10)$

$y = -2 \Rightarrow x = -5 \rightarrow$ punto $(-5,-2)$



Una de las rectas tangentes es la recta que pasa por A y $(13,10)$; haciendo las operaciones correspondientes, vemos que su ecuación implícita es «$7x+9y-181 = 0$».

La otra recta tangente es la recta que pasa por A y $(-5,-2)$; también con las operaciones correspondientes se obtiene la ecuación implícita «$11x+3y+61 = 0$».

Solución: «$7x+9y-181 = 0$» y «$11x+3y+61 = 0$»

Enunciados

① Averigua la ecuación de la circunferencia «F» que es concéntrica con la circunferencia «C» y pasa por el punto A.

Datos: $C \equiv x^2+y^2+2x-4y=0$, $A=(-2,3)$.

② Averigua la ecuación de la circunferencia «C» que tiene el centro en el punto T y es tangente a la recta «s». Datos: $T=(-3,7)$, $s \equiv x-2y-3=0$.

③ Calcula los puntos de abscisa 3 que pertenecen a la circunferencia de ecuación $(x-8)^2+(y-1)^2=29$.

④ Averigua la ecuación de la circunferencia «C» sabiendo que uno de sus diámetros es el segmento de extremos A y B. Datos: $A=(5,4)$, $B=(-9,12)$.

⑤ Averigua la ecuación de la circunferencia «C» sabiendo que pasa por los puntos D, F y H. Datos: $D=(-5,5)$, $F=(1,3)$, $H=(3,-3)$.

⑥ Calcula los puntos que pertenecen a la circunferencia «C» y a la recta que pasa por los puntos A y B.

Datos: $A=(4,9)$, $B=(-6,-1)$, $C \equiv (x+1)^2+(y-3)^2=13$.

⑦ Calcula los puntos que pertenecen a la circunferencia «C» y a la recta «r».

Datos: $C \equiv (x+9)^2+(y-4)^2=68$, $r \equiv 4x-y+6=0$.

⑧ Calcula los puntos que pertenecen a la circunferencia «C» y a la circunferencia «F». Datos: $C \equiv (x+1)^2+(y+2)^2=25$, $F \equiv (x-7)^2+(y-6)^2=73$.

⑨ Calcula los puntos que pertenecen a la circunferencia «C» y a la circunferencia «F». Datos: $C \equiv x^2+y^2=1$, $F \equiv (x-3)^2+(y-3)^2=1$.

⑩ Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que es tangente a la circunferencia «C» en el punto Q. Datos: $C \equiv (x-2)^2+(y-5)^2=100$, $Q=(10,-1)$.

⑪ Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que es tangente a la circunferencia «C» en el punto Q. Datos: $C \equiv (x+3)^2+(y-2)^2=26$, $Q=(1,-1)$.

⑫ Averigua las ecuaciones implícitas de las rectas que pasan por el punto A y son tangentes a la circunferencia «C».

Datos: $A=(8,13)$, $C \equiv (x-3)^2+(y+2)^2=50$.

⑬ Dados el punto $A=(3,12)$ y la circunferencia $C \equiv x^2+y^2+16x+42y-415=0$:

a) Calcula el radio de la circunferencia y da el resultado como radical expresado del modo más sencillo posible.

b) Calcula la distancia entre el punto y el centro de la circunferencia y da el resultado como radical expresado del modo más sencillo posible.

c) Calcula la amplitud del menor de los ángulos que determinan las rectas tangentes a «C» trazadas desde A. Da el resultado en grados, minutos y segundos, redondeando al segundo.

Enunciados

① Calcula con seis cifras significativas la distancia entre las rectas «r» y «s».

Datos: $r \equiv 7x+11y-37=0$; $s \equiv 14x+22y-311=0$.

② Averigua los puntos de la recta «r» que distan 5 de la recta «s».

Datos: $r \equiv y=7x+1$, $s \equiv 3x-4y+4=0$.

③ Del triángulo ABC se conocen los vértices A y B y el ortocentro H. Calcula C.

Datos: $A=(4,8)$, $B=(-5,5)$, $H=(2,4)$.

④ Del triángulo ABC se conocen el vértice A y el circuncentro T. También se sabe que $B \in r$. Calcula B.

Datos: $A=(-21,22)$, $T=(0,0)$, $r \equiv x-y-185=0$.

⑤ Del cuadrilátero ABCD se conocen todos su vértices.

Datos: $A=(-5,1)$, $B=(7,5)$, $C=(11,3)$, $D=(-7,-3)$.

a) Clasifica el cuadrilátero del modo más preciso que se pueda.

b) Averigua la ecuación de la circunferencia circunscrita.

⑥ Del cuadrilátero ABCD se conocen todos su vértices.

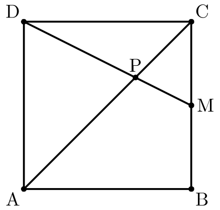
Datos: $A=(-15,21)$, $B=(55,36)$, $C=(25,-29)$, $D=(-45,-44)$.

a) Clasifica el cuadrilátero del modo más preciso que se pueda.

b) Averigua la ecuación de la circunferencia inscrita.

c) Calcula con cuatro cifras significativas el porcentaje de área del cuadrilátero ocupada por el círculo inscrito.

⑦ En el cuadrado ABCD de lado unidad, que se muestra a la derecha, se traza la diagonal AC y se une el vértice D con el punto medio del lado BC, que llamamos M. Calcula el área del cuadrilátero ABMP; da el resultado como fracción irreducible.

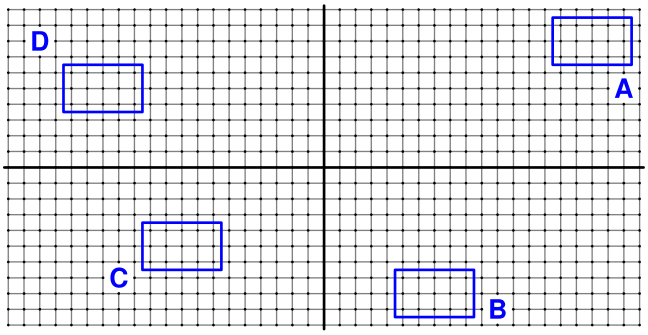


⑧ El teorema de Varignon es fácil de demostrar con lo que sabes hasta el momento, pero proponemos que tú mismo descubras en qué consiste a partir del siguiente enunciado:

Ayudándote del cuadro de la ilustración, elige los puntos A, B, C y D en las zonas señaladas para cada uno, de modo que tengan las dos coordenadas enteras; calcula los puntos medios de los lados del cuadrilátero ABCD y responde:

a) Clasifica el cuadrilátero formado por los puntos medios del modo más preciso que se pueda.

b) Calcula el cociente entre el área del cuadrilátero ABCD y el área del cuadrilátero formado por los puntos medios.



Tipos de relación entre dos magnitudes

Una de las áreas de estudio más importantes de la matemática, de las ciencias, la técnica y las humanidades es averiguar si dos magnitudes están relacionadas entre sí o no y, si lo están, de qué manera y si se puede cuantificar.

Ejemplos

① Dibujamos polígonos regulares cuyos lados midan todos la unidad, pero con distinto número de lados y calculamos su área. ¿Qué relación hay entre el número de lados y el área?

② Dejamos caer un objeto desde cierta altura y cronometramos el tiempo que tarda en llegar al suelo. ¿Qué relación hay entre altura y tiempo?

③ Estudiando una especie animal que tiene una cría en cada parto anotamos la masa al nacer de cada hembra y la masa al nacer de su primera cría hembra. ¿Qué relación hay entre la masa de la madre y la de la cría?

④ Para un estudio sociológico se considera la superficie de la primera vivienda comprada por una pareja y la superficie de la primera vivienda comprada por su primogénito (el primer hijo o la primera hija) y su propia pareja. ¿Qué relación hay entre las superficies de las viviendas de los progenitores y de los primogénitos?

⑤ Un estudio de producción de películas quiere diseñar su próximo éxito y estudia la longitud de sus películas y la recaudación en taquilla en su primer fin de semana. ¿Qué relación hay entre lo que dura la película y su recaudación?

Relación funcional

En el ejemplo (1), usando trigonometría podemos llegar a deducir una fórmula para calcular exactamente el área en función del número de lados. Para el ejemplo (2), usamos las leyes de la gravitación universal de Newton y también llegaremos a una fórmula, aunque su aplicación práctica no será tan exacta como en el caso anterior porque en la realidad pueden influir muchos factores externos (como la densidad del aire o la latitud a la que se realiza el experimento). En ambos casos decimos que las magnitudes tienen una relación **funcional**.

Relación estadística

En el ejemplo (3), tendemos a pensar que animales que fueron grandes al nacer tendrán crías también grandes al nacer, pero desde luego no esperamos que haya una fórmula que relacione ambas masas. En el ejemplo (4), observar la realidad a nuestro alrededor nos sugiere que los primogénitos de parejas ricas también lo son, y tienen viviendas grandes, aunque esta relación depende mucho del país y de los sucesos históricos que ocurran, como crisis económicas y épocas de bonanza. En ambos casos decimos que las magnitudes tienen una relación **estadística** y nuestro siguiente problema es cuantificarla, justo lo que haremos en este tema.

Las técnicas matemáticas de estudio de relaciones estadísticas podrían ayudar al estudio de producción del ejemplo (5) a resolver su duda. A lo mejor no tienen nada que ver las dos magnitudes... o sí. ¿Puede haber películas de muy distintas longitudes que consigan recaudaciones similares?

Distribución estadística bidimensional

Llamamos así a un conjunto de datos consistente en los valores de dos variables estadísticas tomadas del mismo individuo. Nuestros objetivos principales con estas distribuciones son:

* Cuantificar si las dos variables están relacionadas, es decir: calcular un número a partir de los datos que nos permita valorar objetivamente la relación estadística entre ellas. Será el **coeficiente de correlación**.
* Si la relación entre las variables es lo suficientemente significativa, desarrollar un método para calcular el posible valor de una variable conocido el de la otra. En enseñanza secundaria esto se hace mediante la **recta de regresión**.

Organización de los datos

* Si la distribución tiene un número pequeño de datos, se escriben individualmente en una **tabla por parejas**.
* Si la distribución tiene muchos datos, se prepara una **tabla de doble entrada** en la que se escribe la frecuencia absoluta de cada pareja de datos.

Ejemplo 1

En los Juegos Olímpicos de París de 2024 participaron doce selecciones nacionales en el torneo de fútbol femenino. Estos son los goles a favor y en contra de cada uno en la fase de grupos (tres partidos):

País	FRA	CAN	COL	NZ	USA	ALE	AUS	ZAM	ESP	JAP	BRA	NIG
Favor	6	5	4	2	9	8	7	6	5	6	2	1
Contra	5	2	4	6	2	5	10	13	1	4	4	5

Los individuos son cada uno de los doce países. Las variables estadísticas son «número de goles a favor» y «número de goles en contra».

Ejemplo 2

Si se mide la altura y la masa de un gran número de personas de algún colectivo, la información se resumiría en una tabla de doble entrada similar a esta (la masa se mide en kilogramos y la altura en centímetros):

↓Masa ┃ Altura →	[150,160)	[160,170)	[170,180)	[180,190)	[190,200)	[200,210)
[40,55)	45	32	21	4	1	0
[55,70)	21	**57**	47	17	3	1
[70,85)	16	43	82	29	7	4
[85,100)	10	21	65	59	12	7
[100,115)	7	15	12	37	23	8
[115,130)	0	2	3	6	8	16

Los individuos son cada una de las personas. Las variables estadísticas son «masa» y «altura». El número de cada celda indica la frecuencia absoluta de esa combinación. Por ejemplo, el número **57** significa que hay 57 personas que tienen la masa en el intervalo [55,70) y la estatura en el intervalo [160,170).

Visualización de una distribución estadística bidimensional

Las gráficas nos ayudan a entender mejor los datos, por lo que existen numerosos programas de ordenador que permiten visualizar grandes cantidades de datos. Por ejemplo, el CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) desarrolló el programa ROOT para hacerlo, que incluso ayudó a descubrir el bosón de Higgs.

✱ Si la distribución tiene un número pequeño de datos, se visualizan individualmente en la gráfica llamada **nube de puntos** o **diagrama de dispersión**.

✱ Si la distribución tiene muchos datos, hay que usar algún otro tipo de gráfica.

Ejemplo 1

En los Juegos Olímpicos de París de 2024 participaron doce selecciones nacionales en el torneo de fútbol femenino. Con los goles a favor y en contra de cada uno en la fase de grupos (tres partidos) se puede preparar la gráfica 1.

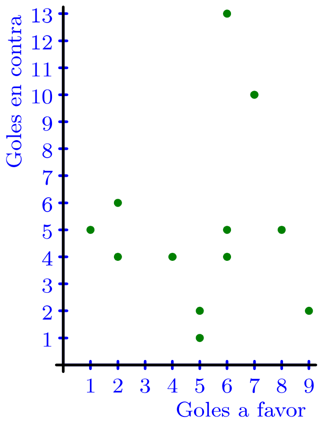
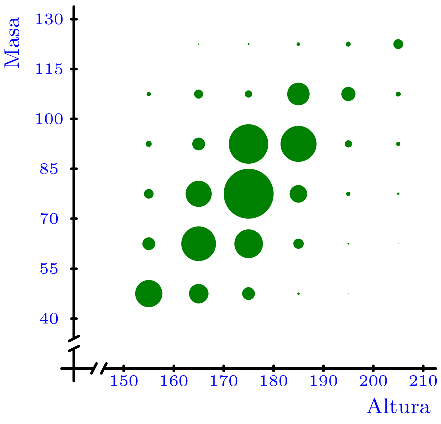
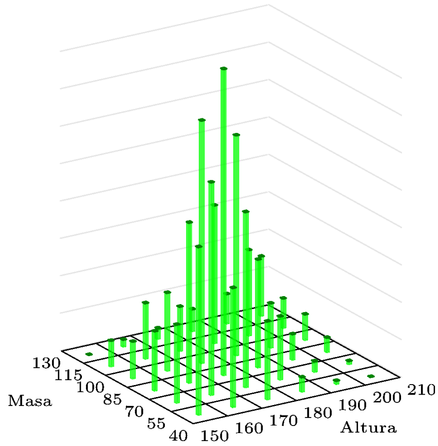
País	FRA	CAN	COL	NZ	USA	ALE	AUS	ZAM	ESP	JAP	BRA	NIG
Favor	6	5	4	2	9	8	7	6	5	6	2	1
Contra	5	2	4	6	2	5	10	13	1	4	4	5

Ejemplo 2

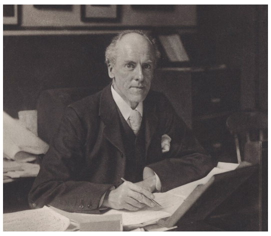
Si se mide la altura y la masa de gran número de personas, la información se resumiría en una tabla de doble entrada similar a esta (masa en kilogramos y altura en centímetros) y se vería en las gráficas 2 y 3, que no se estudian en secundaria:

↓Masa ┃ Altura →	[150,160)	[160,170)	[170,180)	[180,190)	[190,200)	[200,210)
[40,55)	45	32	21	4	1	0
[55,70)	21	57	47	17	3	1
[70,85)	16	43	82	29	7	4
[85,100)	10	21	65	59	12	7
[100,115)	7	15	12	37	23	8
[115,130)	0	2	3	6	8	16

Las gráficas

Gráfica 1	Gráfica 2	Gráfica 3
		

El coeficiente de correlación



Karl Pearson (1857-1936) fue un bioestadístico inglés que introdujo el concepto de coeficiente de correlación como una medida objetiva de la relación entre dos variables estadísticas. El coeficiente de correlación también se denomina coeficiente de correlación de Pearson. Antes de ver su definición y cómo calcularlo, vamos a ver su significado gráficamente.

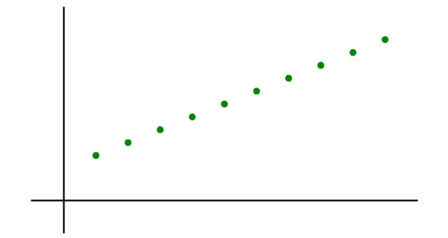
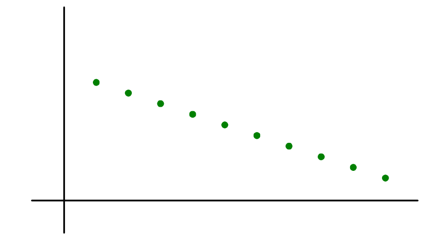
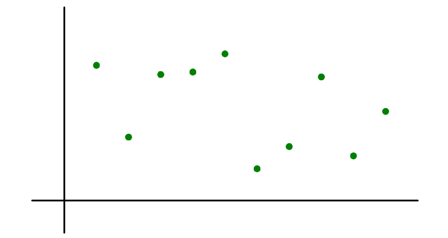
Propiedades del coeficiente de correlación

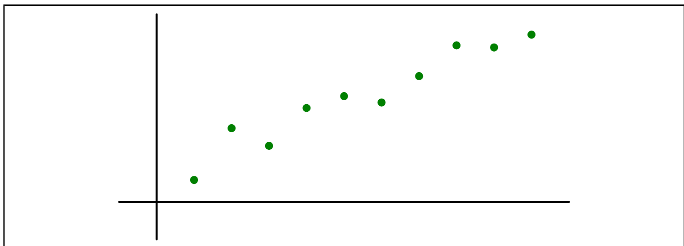
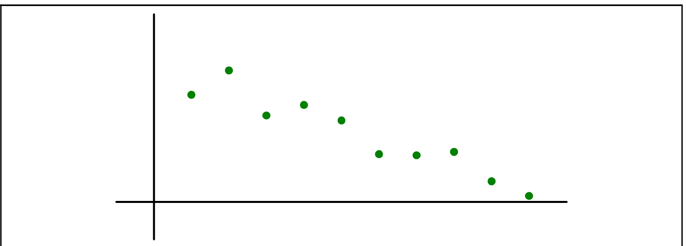
El coeficiente de correlación de dos variables estadísticas cuantitativas es un número real que se suele representar o bien con la letra griega ro minúscula (ρ) o con la letra latina erre minúscula (r). Tiene estas dos propiedades importantes:

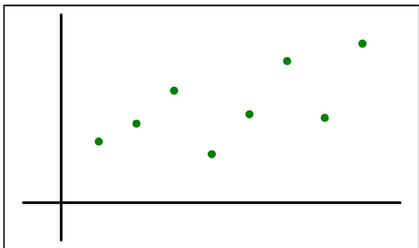
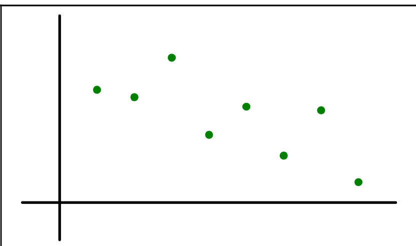
- ✱ Es un número entre -1 y 1, ambos incluidos: $\rho \in [-1,1]$.
- ✱ No tiene unidad.

Ejemplos gráficos

Presentamos varias distribuciones estadísticas bidimensionales a partir de sus nubes de puntos para explicar el significado del coeficiente de correlación.

		
Cuando $\rho = 1$, la relación entre las variables es funcional y la recta que une los puntos tiene pendiente positiva.	Cuando $\rho = -1$, la relación entre las variables es funcional y la recta que une los puntos tiene pendiente negativa.	Cuando ρ es cercano a 0 (positivo o negativo), las variables no están relacionadas.

	
Cuando ρ es muy próximo a 1 las variables están fuertemente relacionadas y cuando crece una, la otra suele crecer también: presentan correlación positiva fuerte.	Cuando ρ es muy próximo a -1 las variables están fuertemente relacionadas y cuando crece una, la otra suele decrecer: presentan correlación negativa fuerte.

		Las variables presentan correlación débil (positiva o negativa) cuando el coeficiente de correlación no está próximo ni a 1, ni a -1 ni a 0. Estos son los casos más dudosos.

Notación habitual en una distribución estadística bidimensional

Para la serie de definiciones y cálculos que debemos llevar a cabo con una distribución bidimensional es costumbre utilizar esta notación:

- ✱ Las variables estadísticas reciben el nombre de X e Y.
- ✱ La media de las variables estadísticas son $\overline{x}$ y $\overline{y}$, respectivamente.
- ✱ Las desviaciones típicas son σ_x y σ_y, respectivamente.

Centro de gravedad de una distribución estadística bidimensional

Es el punto de coordenadas $(\overline{x},\overline{y})$. No tiene por qué coincidir con ninguno de los datos de la distribución.

Covarianza de una distribución bidimensional

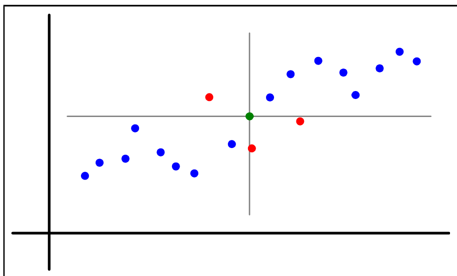
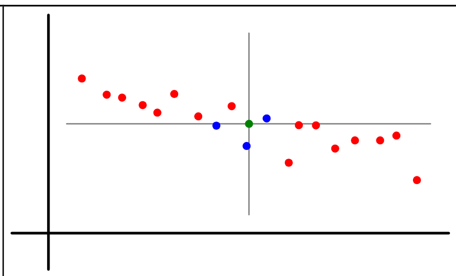
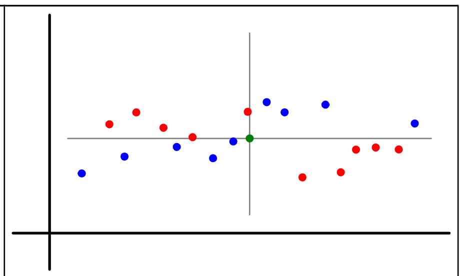
- ✱ Se define como la media de los productos de las desviaciones de cada variable estadística considerando todos los datos.
- ✱ Se designa σ_{xy}.
- ✱ Llamando «n» al número de datos, se define así simbólicamente:

$$\boxed{\sigma_{xy} = \frac{\sum (x_i-\overline{x})\cdot(y_i-\overline{y})}{n}}$$

Observa la gran similitud de esta definición con la de varianza de una sola variable estadística: en la varianza se elevan al cuadrado las desviaciones (solo hay una para cada dato), en la covarianza se multiplican entre sí (hay dos para cada dato).

Visualización del valor de la covarianza

En las siguientes nubes de puntos, mostramos en verde el centro de gravedad de la distribución, en azul los puntos que tienen positivo el producto de las desviaciones y en rojo los que lo tienen negativo.

		
Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3

El centro de gravedad divide los datos de la distribución en cuatro zonas, señaladas con líneas grises en los ejemplos. Los puntos que están en la zona de arriba a la derecha y los que están abajo a la izquierda tienen el producto positivo (porque las dos desviaciones tienen el mismo signo), los de las otras dos zonas lo tienen negativo (porque las dos desviaciones tienen distinto signo).

- ✱ Cuando hay más productos positivos que negativos (ejemplo 1), la covarianza resulta **positiva**, con valor absoluto mayor cuantos más puntos azules haya.
- ✱ Cuando hay más productos negativos que positivos (ejemplo 2), la covarianza resulta **negativa**, con valor absoluto mayor cuantos más puntos rojos haya.
- ✱ Y cuando el número de productos es similar (ejemplo 3), la covarianza puede tener cualquier signo, pero **valor absoluto pequeño**.

Enunciado

Usando la definición, calcula la covarianza de la siguiente distribución:

X	1	1	2	4	4	5	6	7	8	9
Y	3	4	5	7	6	7	8	8	6	7

Resolución

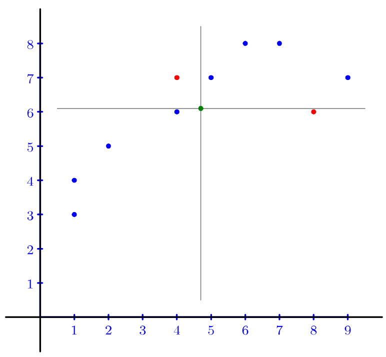
Tenemos diez datos de la forma (x_i,y_i). Los colocamos en una tabla junto con algunas filas y columnas auxiliares.

											⬇ Sumas ⬇
x_i	1	1	2	4	4	5	6	7	8	9	47
y_i	3	4	5	7	6	7	8	8	6	7	61
$x_i-\overline{x}$	−3,7	−3,7	−2,7	−0,7	−0,7	0,3	1,3	2,3	3,3	4,3	
$y_i-\overline{y}$	−3,1	−2,1	−1,1	0,9	−0,1	0,9	1,9	0,9	−0,1	0,9	
$(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	11,47	7,7	2,97	−0,63	0,07	0,07	2,47	4,37	−0,33	3,87	32,3

Operaciones:

- ✱ $\Sigma x_i = 1+1+2+4+4+5+6+7+9+9 = 47$
- ✱ $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i}{10} = \dfrac{47}{10} = 4{,}7$
- ✱ Desviaciones en X: $1-4{,}7 = -3{,}7$, … , $9-4{,}7 = 4{,}3$
- ✱ $\Sigma y_i = 3+4+5+7+6+7+8+8+6+7 = 61$
- ✱ $\overline{y} = \dfrac{\sum y_i}{10} = \dfrac{61}{10} = 6{,}1$
- ✱ Desviaciones en Y: $3-6{,}1 = -3{,}1$, … , $7-6{,}1 = 0{,}9$
- ✱ Productos de las desviaciones: $(-3{,}7)(-3{,}1) = 11{,}47$, … $(4{,}3)(0{,}9) = 3{,}87$
- ✱ $\Sigma(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) = 11{,}47+7{,}7+\ldots+3{,}87 = 32{,}3$
- ✱ $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum (x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{10} = \dfrac{32{,}3}{10} = 3{,}23$

Solución: 3,23



Representación gráfica

En la nube de puntos de la derecha, mostramos en verde el centro de gravedad de la distribución, en azul los puntos que tienen positivo el producto de las desviaciones y en rojo los que lo tienen negativo.

Métodos de cálculo

Podemos hacer las operaciones de varias maneras:

- ✱ A mano o calculadora simple, cuando las operaciones son sencillas.
- ✱ Con el modo estadístico de una calculadora científica.
- ✱ Con un ordenador, mediante un programa de hoja de cálculo.

Cálculo práctico de la covarianza

Para calcular la covarianza de una distribución estadística bidimensional usando la definición es necesario utilizar todas las desviaciones de los datos, que se basan en el cálculo previo de las medias. Esto presenta algunos problemas prácticos:

* Las medias fácilmente pueden ser un número con muchas cifras decimales; en ese caso, las operaciones se complican y, ademas, se van acumulando errores.
* Si cambia alguno de los datos, cambian las medias, y por tanto hay que recalcular todas las desviaciones.

Por estos motivos, se utiliza para calcular la covarianza otro método más sencillo desde el punto de vista práctico, que se basa en una propiedad de la covarianza.

Propiedad de la covarianza

La covarianza de un conjunto de datos bidimensional es igual a la media de los productos de los datos menos el producto de las medias.

Expresión simbólica

Consideramos los valores (x_1,y_1), $(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$; llamamos $\overline{x}$ e $\overline{y}$ a las medias de cada variable y σ_{xy} a la covarianza. Entonces, se verifica:

$$\boxed{\sigma_{xy}=\frac{\sum(x_i-\overline{x})\cdot(y_i-\overline{y})}{n}=\frac{\sum x_i y_i}{n}-\overline{x}\,\overline{y}}$$

Demostración

Para facilitarte la comprensión de la demostración general, comenzamos por la demostración en un caso más sencillo y la usamos de guía para la generalización.

Demostración para dos datos

Consideramos los datos, (x_1,y_1) y (x_2,y_2); las medias: «$\overline{x}=(x_1+x_2):2$» y «$\overline{y}=(y_1+y_2):2$».

Calculamos la covarianza como la media de los productos de las dos desviaciones:

$$\frac{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})}{2}=\frac{x_1y_1-x_1\overline{y}-\overline{x}y_1+\overline{x}\,\overline{y}+x_2y_2-x_2\overline{y}-\overline{x}y_2+\overline{x}\,\overline{y}}{2}=$$

$$=\frac{x_1y_1+x_2y_2-(x_1+x_2)\overline{y}-(y_1+y_2)\overline{x}+2\overline{x}\,\overline{y}}{2}=\frac{x_1y_1+x_2y_2}{2}-\frac{(x_1+x_2)}{2}\overline{y}-\frac{(y_1+y_2)}{2}\overline{x}+\overline{x}\,\overline{y}=$$

$$=\frac{x_1y_1+x_2y_2}{2}-\overline{x}\,\overline{y}-\overline{y}\,\overline{x}+\overline{x}\,\overline{y}=\frac{x_1y_1+x_2y_2}{2}-\overline{x}\,\overline{y}$$

Vemos que hemos obtenido la media de los productos de los datos menos el producto de las medias.

Demostración general

Sabemos que «$\overline{x}=(\Sigma x_i):n$» y «$\overline{y}=(\Sigma y_i):n$»

Calculamos la covarianza como la media de los productos de las desviaciones:

$$\frac{\sum(x_i-\overline{x})\cdot(y_i-\overline{y})}{n}=\frac{\sum\left(x_iy_i-x_i\overline{y}-\overline{x}y_i+\overline{x}\,\overline{y}\right)}{n}=\frac{\sum x_iy_i}{n}-\frac{\sum x_i}{n}\overline{y}-\overline{x}\frac{\sum y_i}{n}+\frac{n\overline{x}\,\overline{y}}{n}=$$

$$=\frac{\sum x_iy_i}{n}-\overline{x}\,\overline{y}-\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}\,\overline{y}=\frac{\sum x_iy_i}{n}-\overline{x}\,\overline{y}$$

Vemos que hemos obtenido la media de los productos de los datos menos el producto de las medias.

Definición del coeficiente de correlación

Dada una distribución estadística bidimensional, se define su coeficiente de correlación como el cociente entre la covarianza y el producto de las desviaciones típicas de cada variable.

Definición simbólica

Si las variables estadísticas se llaman X e Y, el coeficiente de correlación es:

$$\boxed{\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}}$$

Enunciado

Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación de la siguiente distribución:

X	1	2	3	3	4	5	5	6	7	8
Y	9	9	7	6	2	4	2	3	2	2

Resolución

Tenemos diez datos de la forma (x_i, y_i). Los colocamos en una tabla junto con algunas filas y columnas auxiliares.

										⬇ Sumas ⬇
x_i	1	2	3	3	4	5	5	6	7	8	44
y_i	9	9	7	6	2	4	2	3	2	2	46
x_i^2	1	4	9	9	16	25	25	36	49	64	238
y_i^2	81	81	49	36	4	16	4	9	4	4	288
$x_i y_i$	9	18	21	18	8	20	10	18	14	16	152

De la tabla obtenemos: $\Sigma x_i = 44$, $\Sigma y_i = 46$, $\Sigma x_i^2 = 238$, $\Sigma y_i^2 = 288$, $\Sigma x_i y_i = 152$

Operaciones:

✱ Medias: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{10} = \frac{44}{10} = 4{,}4$; $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{10} = \frac{46}{10} = 4{,}6$

✱ Covarianza: $\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{10} - \bar{x}\bar{y} = \frac{152}{10} - 4{,}4 \cdot 4{,}6 = 15{,}2 - 20{,}24 = -5{,}04$

✱ Desv. típica de las «x»: $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{10} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{238}{10} - 4{,}4^2} = \sqrt{23{,}8 - 19{,}36} = \sqrt{4{,}44}$

✱ Desv. típica de las «y»: $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{10} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{288}{10} - 4{,}6^2} = \sqrt{28{,}8 - 21{,}16} = \sqrt{7{,}64}$

✱ Coeficiente de correlación: $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-5{,}04}{\sqrt{4{,}4}\sqrt{7{,}64}} = -0{,}87$

✱ Calculadora:

(-) 5 . 0 4 ÷ (√ 4 . 4 4 × √ 7 . 6 4) = ⇨ -0.865351143

Solución: –0,87

Enunciados

Dadas las siguientes distribuciones bidimensionales, se pide para cada una:

a) Calcula de modo exacto la covarianza

b) Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación.

①	X	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9
	Y	1	2	2	3	4	5	5	4	6	7

②	X	–3	–2	–2	–1	1	2	2	3	4	5
	Y	8	7	8	6	5	6	4	5	2	1

③	X	2	3	5	6	7	9	10	11	11	12
	Y	–5	3	4	1	–1	3	2	4	6	5

④	X	–4	–4	–3	–1	1	1	2	3	5	6
	Y	10	9	4	9	6	3	8	5	9	3

⑤	X	2	3	4	4	5	5	6	7	7	8
	Y	–3	–2	2	3	–1	1	4	–2	6	3

⑥	X	3	5	6	8	11	13	15	17	20	21
	Y	1	1	2	2	3	5	3	4	6	7

⑦	X	2	5	8	10	11	12	15	16	18	20
	Y	21	20	16	15	13	13	13	10	8	4

⑧	X	3	5	6	6	7	8	8	10	11	12
	Y	–4	2	–3	1	0	0	3	–3	4	2

⑨	X	–7	–5	–4	–2	1	4	7	8	10	12
	Y	15	12	14	10	7	11	5	3	8	4

⑩	X	–4	–2	–1	0	0	1	1	3	4	5
	Y	8	–3	7	0	–4	–6	7	9	–3	4

La recta de regresión

Cuando una distribución estadística bidimensional presenta una correlación fuerte o muy fuerte, tiene sentido averiguar cuál es la recta que mejor representa a su conjunto de valores. Esto permite resumir toda la distribución y razonar cuál podría ser el valor de una variable que corresponda a un valor de la otra. Esa recta se denomina recta de regresión.

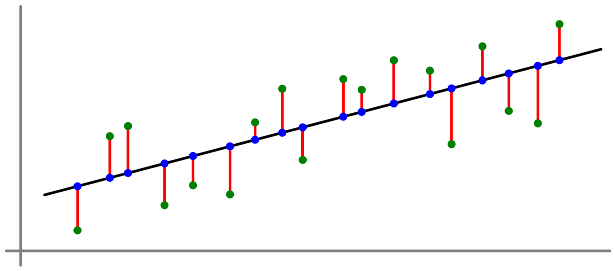
Método de los mínimos cuadrados

En 1795 el matemático alemán Karl Fiedrich Gauss (1777-1855) dio con las primeras ideas generales del método de los mínimos cuadrados, que en 1801 permitió continuar observando el planeta enano Ceres, tras perderse su trayectoria. Resultó que el método es óptimo para resolver muchos problemas. Consiste en averiguar los valores que hacen que cierta suma de cuadrados dé el menor resultado posible.

Definición de la recta de regresión

Consideramos una distribución estadística bidimensional con las variables X e Y, que consista en un número de parejas de valores (x_i,y_i). La recta de regresión tendrá ecuación explícita «$y = mx+q$». Llamamos $y(x_i)$ al valor de la ordenada de la recta para $x = x_i$, es decir: $y(x_i) = mx_i+q$. La recta de regresión es la que hace mínima la suma de los cuadrados de las distancias entre (x_i,y_i) y $(x_i,y(x_i))$.

Ilustración



- Mostramos en verde la nube de puntos de la distribución, los puntos (x_i,y_i).
- Mostramos en azul los puntos $(x_i,y(x_i))$.
- Señalamos en rojo los segmentos que unen (x_i,y_i) con $(x_i,y(x_i))$.
- La recta de regresión, dibujada en negro, es la que hace mínima la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos en rojo.

Obtención de la recta de regresión

Mediante métodos que no se pueden explicar en enseñanza secundaria, se demuestra que la recta de regresión que hemos definido cumple dos propiedades:

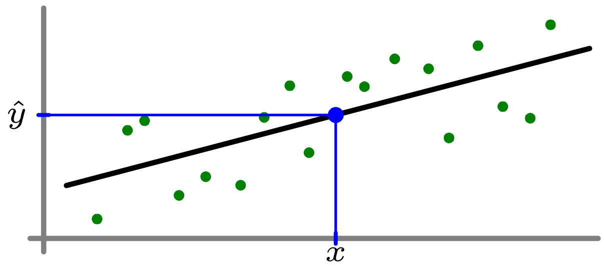
- Pasa por el centro de gravedad de la distribución, el punto $(\overline{x},\overline{y})$.
- Su pendiente es $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$, número llamado coeficiente de regresión.

Por tanto, su ecuación punto-pendiente es

$$\boxed{y-\overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\overline{x})}$$

Uso de la recta de regresión

Esta recta se utiliza para calcular el valor aproximado que puede tener la variable Y para algún valor de la variable X que no sea uno de los datos. El valor de Y obtenido para un valor x se denomina **valor estimado**, y se representa $\hat{y}$ o bien $\hat{y}(x)$.



Enunciado

Dada la siguiente distribución, se pide:

a) Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación.

b) Averigua la ecuación explícita de la recta de regresión.

c) Calcula el valor estimado de «y» para x = 5.

d) ¿Te parece fiable el valor calculado en el apartado anterior?

X	2	3	3	4	4	6	6	7	8	9
Y	1	1	2	5	6	6	7	8	10	11

Resolución

Tenemos diez datos de la forma (x_i,y_i). Los colocamos en una tabla junto con algunas filas y columnas auxiliares.

											⬇ Sumas ⬇
x_i	2	3	3	4	4	6	6	7	8	9	52
y_i	1	1	2	5	6	6	7	8	10	11	57
x_i^2	4	9	9	16	16	36	36	49	64	81	320
y_i^2	1	1	4	25	36	36	49	64	100	121	437
x_iy_i	2	3	6	20	24	36	42	56	80	99	368

De la tabla obtenemos: $\Sigma x_i = 52$, $\Sigma y_i = 57$, $\Sigma x_i^2 = 320$, $\Sigma y_i^2 = 437$, $\Sigma x_iy_i = 368$

✱ Medias: $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{10} = \dfrac{52}{10} = 5{,}2$; $\bar{y} = \dfrac{\sum y_i}{10} = \dfrac{57}{10} = 5{,}7$

✱ Covarianza: $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum x_i y_i}{10} - \bar{x}\bar{y} = \dfrac{368}{10} - 5{,}2\cdot 5{,}7 = 36{,}8-29{,}64 = 7{,}16$

✱ Desv. típica de las «x»: $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{10} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{320}{10} - 5{,}2^2} = \sqrt{32-27{,}04} = \sqrt{4{,}96}$

✱ Desv. típica de las «y»: $\sigma_y = \sqrt{\dfrac{\sum y_i^2}{10} - \bar{y}^2} = \sqrt{\dfrac{437}{10} - 5{,}7^2} = \sqrt{43{,}7-32{,}49} = \sqrt{11{,}21}$

✱ Coeficiente de correlación: $\rho = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{7{,}16}{\sqrt{4{,}96}\sqrt{11{,}21}} = 0{,}96$

■ Calc.: 7 . 1 6 ÷ (√ 4 . 9 6 × √ 1 1 . 2 1) = ⇨ 0.960216971

✱ Coeficiente de regresión: $\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \dfrac{7{,}16}{4{,}96} = 1{,}44$

■ Calculadora: 7 . 1 6 ÷ 4 . 9 6 STO A = ⇨ 1.443548387

✱ Recta de regresión: $y-5{,}7 = 1{,}44(x-5{,}2) \Rightarrow y = 1{,}44x-1{,}81$

■ Calculadora: 5 . 7 – RCL A × 5 . 2 STO B = ⇨ -1.80645161 3

✱ Valor estimado: $x = 5 \Rightarrow \hat{y} = 1{,}44\cdot 5-1{,}81 = 5{,}4$

■ Calculadora: RCL A × 5 + RCL B = ⇨ 5.411290323

Soluciones: (a) 0,96 (b) $y = 1{,}44x-1{,}81$ (c) $\hat{y} = 5{,}4$

(d) Sí, porque el coeficiente de correlación es muy próximo a 1.

Enunciados

① Dada la siguiente distribución bidimensional, se pide:

a) Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación.

b) Averigua la ecuación explícita de la recta de regresión escribiendo la pendiente y la ordenada en el origen con tres cifras significativas.

c) Calcula con dos cifras significativas el valor estimado de «y» para $x = 4$.

d) ¿Te parece fiable el valor calculado en el apartado anterior?

X	2	2	3	3	5	5	6	6	7	8
Y	11	10	5	7	4	2	–1	1	0	–2

② Dada la siguiente distribución bidimensional, se pide:

a) Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación.

b) Averigua la ecuación explícita de la recta de regresión escribiendo la pendiente y la ordenada en el origen con tres cifras significativas.

c) Calcula con dos cifras significativas el valor estimado de «y» para $x = 6$.

d) ¿Te parece fiable el valor calculado en el apartado anterior?

X	1	1	2	3	3	5	7	7	8	8
Y	4	5	6	6	7	9	9	10	11	12

③ Dada la siguiente distribución bidimensional, se pide:

a) Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación.

b) Averigua la ecuación explícita de la recta de regresión escribiendo la pendiente y la ordenada en el origen con tres cifras significativas.

c) Calcula con dos cifras significativas el valor estimado de «y» para $x = 4$.

d) ¿Te parece fiable el valor calculado en el apartado anterior?

X	2	3	3	5	5	6	7	8	9	10
Y	8	1	5	2	8	1	4	5	3	9

④ Dada la siguiente distribución bidimensional, se pide:

a) Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación.

b) Averigua la ecuación explícita de la recta de regresión escribiendo la pendiente y la ordenada en el origen con tres cifras significativas.

c) Calcula con dos cifras significativas el valor estimado de «y» para $x = 1$.

d) ¿Te parece fiable el valor calculado en el apartado anterior?

X	–3	–2	–1	0	2	3	4	5	6	7
Y	9	4	8	6	3	5	2	1	–1	–4

Precisión en los cálculos, flexibilidad en las estimaciones

En estadística es necesario hacer muchos cálculos, que debemos realizar con la precisión que nos permitan las herramientas tecnológicas (mucha), pero las estimaciones se dan con cierta flexibilidad, puesto que no son exactas.

Te presentamos cómo realizar los cálculos de una distribución estadística bidimensional con una calculadora científica de bolsillo que disponga de seis memorias manuales (`A` a `F`) y una automática (`Ans`) de modo que se use su precisión.

Enunciado

Dada la siguiente distribución, se pide:

a) Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación.

b) Averigua la ecuación explícita de la recta de regresión escribiendo la pendiente y la ordenada en el origen con tres cifras significativas.

c) Calcula con dos cifras significativas el valor estimado de «y» para x = 10.

X	3	5	6	9	11	13	16	19	21	22	24
Y	–8	–5	–1	1	3	6	11	15	16	21	23

Resolución

Tenemos once datos de la forma (x_i,y_i). Los colocamos en una tabla.

												⬇ Sumas ⬇
x_i	3	5	6	9	11	13	16	19	21	22	24	149
y_i	–8	–5	–1	1	3	6	11	15	16	21	23	82
x_i^2	9	25	36	81	121	169	256	361	441	484	576	2559
y_i^2	64	25	1	1	9	36	121	225	256	441	529	1708
x_iy_i	–24	–25	–6	9	33	78	176	285	336	462	552	1876

De la tabla obtenemos: $\Sigma x_i = 149$, $\Sigma y_i = 82$, $\Sigma x_i^2 = 2559$, $\Sigma y_i^2 = 1708$, $\Sigma x_iy_i = 1876$

Media de las x_i: $\bar{x}$ → `1` `4` `9` `÷` `1` `1` `STO` `E` `=` ⇨ 13.54545455

Media de las y_i: $\bar{y}$ → `8` `2` `÷` `1` `1` `STO` `F` `=` ⇨ 7.454545455

Covarianza: σ_{xy} → `1` `8` `7` `6` `÷` `1` `1` `–` `RCL` `E` `×` `RCL` `F` `STO` `D` `=` ⇨ 69.57024793

Desv. típ. x_i: σ_x → `√‾` `(` `2` `5` `5` `9` `÷` `1` `1` `–` `RCL` `E` `x²` `)` `STO` `C` `=` ⇨ 7.011207085

Desv. típ. y_i: σ_y → `√‾` `(` `1` `7` `0` `8` `÷` `1` `1` `–` `RCL` `F` `x²` `)` `=` ⇨ 9.985112886

Coeficiente de correlación: ρ → `RCL` `D` `÷` `(` `RCL` `C` `×` `Ans` `)` `=` ⇨ 0.993751454

Coeficiente de regresión: `RCL` `D` `÷` `RCL` `C` `x²` `STO` `A` `=` ⇨ 1.415266536

Ordenada en el origen: `RCL` `F` `–` `RCL` `A` `×` `RCL` `E` `STO` `B` `=` ⇨ -11.71587088

Propiedad: la ordenada en el origen de la recta de regresión es igual a la media de las y_i menos el producto del coeficiente de regresión por la media de las x_i.

Valor estimado: $x = 10 \Rightarrow \hat{y}$ → `RCL` `A` `×` `1` `0` `+` `RCL` `B` `=` ⇨ 2.436785474

Observación: podríamos calcular con facilidad más valores estimados porque tenemos en memoria la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión.

Soluciones: (a) 0,99 (b) $y = 1{,}42x–11{,}7$ (c) $\hat{y} = 2{,}4$

Distribuciones bidimensionales en la calculadora científica

Las calculadoras científicas suelen disponer de varios modos para trabajar con distribuciones estadísticas. Para los cálculos que necesitamos ahora habrá que elegir un modo que puede tener distintos nombres según el modelo. Puede ser **LR**, que significa *Linear Regression* («regresión lineal» en inglés), o **Reg** → **Lin** o **A+Bx**.

Cuando la calculadora entra en este modo, algunas memorias manuales pasan a ser automáticas, por lo que el usuario no las puede usar. La calculadora necesita mantener en ellas los siguientes valores: n, Σx_i, Σy_i, Σx_i^2, Σy_i^2 y $\Sigma x_i y_i$. Conforme se introducen o borran datos, van variando automáticamente los contenidos de las memorias, que se pueden consultar en cualquier momento.

Introducción de datos

Según el modelo, puede ser necesario borrar la memoria estadística antes de introducir los nuevos datos. La orden puede llamarse **Stat clear**.

Para introducir datos se suele usar la tecla **,** como separador entre las dos variables y la tecla **;** como separador entre las variables y la frecuencia absoluta, en el caso de que sea distinta de 1.

- Ejemplo 1: para introducir la pareja de valores (7,8), escribiríamos **7** **,** **8** **DT**.
- Ejemplo 2: para introducir la pareja de valores (2,3) con frecuencia absoluta 4, escribiríamos **2** **,** **3** **;** **4** **DT**.

Puede ser que la calculadora permita ver qué valores se han introducido hasta el momento, editarlos y borrarlos.

Consulta de las sumas acumuladas

La tecla **S-SUM** permite acceder a los valores de n, Σx_i, Σy_i, Σx_i^2, Σy_i^2 y $\Sigma x_i y_i$, aunque siempre se puede seguir añadiendo datos tras la consulta.

Consulta de los parámetros

La tecla **S-VAR** permite acceder a los distintos parámetros estadísticos que nos ocupan, aunque siempre se puede seguir añadiendo datos tras la consulta.

- La media de las x_i: $\bar{x}$.
- La media de las y_i: $\bar{y}$.
- La desviación típica de las x_i: **xσn**.
- La desviación típica de las y_i: **yσn**.
- El coeficiente de correlación: **r**.
- El coeficiente de regresión: **B**.
- La ordenada en el origen de la recta de regresión: **A**.
- Dependiendo del modelo, los valores de **A** y **B** pueden estar intercambiados.
- El valor estimado de «y» para un valor de «x»: $\hat{y}$.
  - Ejemplo 3: para calcular el valor estimado de «y» para x = 5 escribiríamos **5** $\hat{y}$ **=**.

Es imprescindible que practiques

Usa tu calculadora para practicar el uso de estas funciones. Ten en cuenta que cada modelo presenta diferencias, así que lee el manual atentamente. Puedes comprobar que te manejas bien usando un caso pequeño de prueba en el que conozcas de antemano lo que debe salir.

Cálculos sobre distribuciones bidimensionales con una hoja de cálculo

Podemos escribir los valores del conjunto de datos y sus frecuencias absolutas por filas, como haremos ahora, o por columnas, según nos parezca.

Como ejemplo, vamos a usar el conjunto de valores que vemos más abajo en las celdas C1 a F3 y C12. Hemos marcado todos los datos en azul.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Valores de X	x_i	**12**	**15**	**20**	**23**	
2	Valores de Y	y_i	**53**	**33**	**22**	**15**	⬇ Sumas ⬇
3	Frecuencias	f_i	**3**	**4**	**5**	**3**	**15**
4	Productos X	$x_i \cdot f_i$	**36**	**60**	**100**	**69**	**265**
5	Productos Y	$y_i \cdot f_i$	**159**	**132**	**110**	**45**	**446**
6	Productos XY	$x_i \cdot y_i \cdot f_i$	**1908**	**1980**	**2200**	**1035**	**7123**
7	Cuadrados X	$x_i^2 \cdot f_i$	**432**	**900**	**2000**	**1587**	**4919**
8	Cuadrados Y	$y_i^2 \cdot f_i$	**8427**	**4356**	**2420**	**675**	**15878**
9	Medias	$\overline{x}$	**17,67**		$\overline{y}$	**29,73**	
10	Desv. típicas	σ_x	**3,978**		σ_y	**13,21**	
11	Covarianza	σ_{xy}	**–50,42**	Coef. corr.	ρ	**–0,96**	
12	Rta. regresión	C. reg.	**–3,19**	Ord. orig.	**86,0**		
13	Valor de «x»	x	**17**	Estm. «y»	$\hat{y}$	**31,9**	

Para entender mejor lo que hacemos, añadimos algunos textos, que hemos escrito en negro en la tabla de más arriba. A continuación, escribimos las fórmulas:

- ✱ En la celda C4 escribimos la fórmula **=C1*C3** (el signo igual indica que es una fórmula y el asterisco es como se indica el producto). Copiamos la fórmula de la celda C4 a las celdas D4, E4 y F4.
- ✱ En la celda C5 escribimos la fórmula **=C2*C3** y la copiamos a D5, E5 y F5.
- ✱ En la celda C6 escribimos la fórmula **=C1*C2*C3** y la copiamos a D6, E6 y F6.
- ✱ En la celda C7 escribimos la fórmula **=C3*C4** y la copiamos a D7, E7 y F7.
- ✱ En la celda C8 escribimos la fórmula **=C3*C5** y la copiamos a D8, E8 y F8.
- ✱ En la celda G3 escribimos la fórmula **=SUMA(C3:F3)**, que significa sumar todos los números que hay en el rango de celdas desde C3 hasta F3 y la copiamos a las celdas G4, G5, G6, G7 y G8.
- ✱ Celda C9: **=G4/G3**; Celda F9: **=G5/G3**.
- ✱ En la celda C10 escribimos la fórmula **=RAIZ(G7/G3–C9^2)**. La función RAIZ podría llamarse de otra manera según el programa. El símbolo «^» sirve para elevar a una potencia.
- ✱ En la celda F10 escribimos la fórmula **=RAIZ(G8/G3–F9^2)**.
- ✱ Celda C11: **=G6/G3–C9*F9**; Celda F11: **=G11/(C10*F10)**.
- ✱ Celda C12: **=C11/C10^2**; Celda E12: **=F9–C12*C9**.
- ✱ Celda F13: **=C12*C13+E12**.

El programa aplica todas las fórmulas y calcula los resultados (que hemos escrito en verde). Si cambiamos alguno de los datos, el programa recalcula inmediatamente todos los resultados.

Sugerencia

Para realizar estos ejercicios se sugiere usar una calculadora con seis memorias manuales y una automática o las funciones estadísticas de una calculadora científica o una hoja de cálculo.

Enunciados

① Dada la siguiente distribución bidimensional, se pide:

a) Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación.

b) Averigua la ecuación explícita de la recta de regresión escribiendo la pendiente y la ordenada en el origen con tres cifras significativas.

c) Calcula con tres cifras significativas el valor estimado de «y» para $x = 1$.

X	–3	–1	3	5	8	9	11	13	15	16	17
Y	8	10	15	16	21	18	20	23	23	24	27

② Dada la siguiente distribución bidimensional, se pide:

a) Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación.

b) Averigua la ecuación explícita de la recta de regresión escribiendo la pendiente y la ordenada en el origen con tres cifras significativas.

c) Calcula con tres cifras significativas el valor estimado de «y» para $x = -3$.

X	–5	–4	–2	–1	0	2	3	4	6	7	9
Y	19	15	9	8	7	5	1	–3	–8	–11	–15

③ Dada la siguiente distribución bidimensional, se pide:

a) Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación.

b) Averigua la ecuación explícita de la recta de regresión escribiendo la pendiente y la ordenada en el origen con tres cifras significativas.

c) Calcula con dos cifras significativas el valor estimado de «y» para $x = 10$.

X	–7	–4	1	5	7	12	16	21	27	29	32	35	40
Y	–19	–6	–13	1	–1	8	–7	–2	13	15	10	12	21

④ Dada la siguiente distribución bidimensional, se pide:

a) Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación.

b) Averigua la ecuación explícita de la recta de regresión escribiendo la pendiente y la ordenada en el origen con tres cifras significativas.

c) Calcula con tres cifras significativas el valor estimado de «y» para $x = -20$.

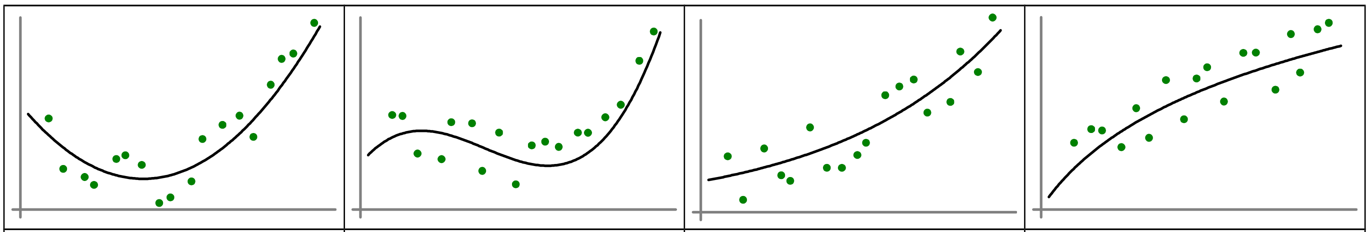
X	–39	–33	–27	–10	–7	–2	4	7	18	25	33	38	41
Y	42	22	15	29	25	19	10	8	2	–6	–10	–19	–21

Significado de la correlación

Cuando estudiamos una distribución estadística bidimensional y nos encontramos con un coeficiente de correlación muy próximo a 1 o a −1, sabemos que los valores de las dos variables están muy relacionados, pero aún no sabemos por qué. Puede ocurrir que no haya ningún motivo en especial, no tiene por qué haber una relación causa-efecto que explique la correlación; en otras palabras: alta correlación no implica causalidad. Pero también podría haber una causa subyacente que explique la correlación, luego será tarea de los investigadores que trabajan con esas variables ahondar más en el estudio. Es decir: alta correlación sugiere más estudio.

Tipos de correlación

En enseñanza secundaria solo se estudia la correlación lineal, pero la correlación entre dos variables estadísticas puede ser de más tipos: cuadrática, polinómica, exponencial, logarítmica, etcétera, según sea la función que mejor se ajuste a los valores observados.

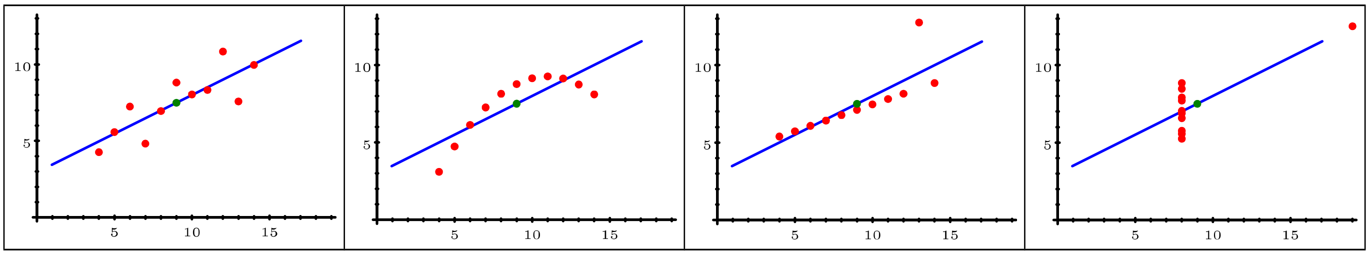


Cuadrática	Polinómica	Exponencial	Logarítmica

En estos casos, hay que pensar que es muy probable que realmente exista una relación funcional, aún desconocida, entre las variables y que hay algo que impide obtener valores exactos. En la naturaleza existen multitud de pequeños factores que, al acumularse, desvían los datos de los que tendría una función matemática.

Importancia de la visualización

Los cálculos del coeficiente de correlación y la recta de regresión no lo son todo para estudiar un conjunto de datos estadísticos bidimensional. Para ilustrarlo, en 1973 el estadístico británico Frank Anscombe (1910-2001) construyó cuatro conjuntos de datos bidimensionales que presentan los mismos valores para los parámetros estadísticos y sin embargo al visualizarlos vemos que son completamente diferentes. Presentamos los puntos en rojo, el centro de gravedad en verde y la recta de regresión en azul.



Importancia de la cantidad de datos disponibles

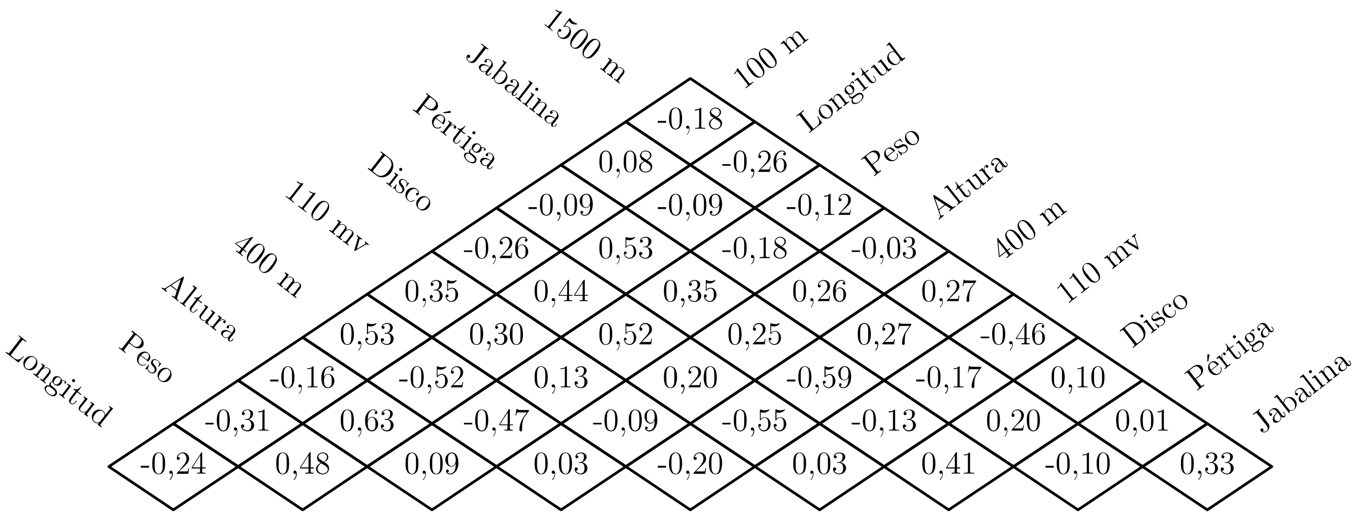
Cuando hay muchos datos disponibles para estudiar un problema, es más sencillo hacerlo. Esto explica los avances que se consiguen usando técnicas estadísticas en el llamado *big data* y también lo corrobora lo difícil que es descifrar un problema cuando es único, como ejemplifica el disco de Festo (a la derecha), de propósito y significado aún desconocidos.

Explicación

En el Campeonato Mundial de Atletismo de 2023, celebrado en Bucarest (Rumanía), terminaron quince atletas la prueba de decatlón, con estos resultados en cada prueba:

Prueba →	100 m	Longit.	Peso	Altura	400 m	110 mv	Disco	Pértiga	Jabal.	1500m
↓ Atleta \ Unidad →	s	m	m	m	s	s	m	m	m	min:s
Pierce LePage	10,45	7,59	15,81	2,08	47,21	13,77	50,98	5,20	60,90	4:39,88
Damian Warner	10,32	7,77	15,03	2,05	47,86	13,67	45,82	4,90	63,09	4:27,73
Lindon Victor	10,60	7,55	15,94	2,02	48,05	14,47	54,97	4,80	68,05	4:39,67
Karel Tilga	10,84	7,58	15,75	2,05	48,58	14,68	50,57	4,80	66,42	4:20,73
Leo Neugebauer	10,69	8,00	17,04	2,02	47,99	14,75	47,63	5,10	57,95	4:43,93
Janek Õiglane	10,94	7,47	15,08	2,02	48,41	14,51	40,85	5,10	70,45	4:23,43
Harrison Williams	10,74	7,49	15,28	1,93	46,52	14,33	43,39	5,30	54,60	4:22,69
Markus Rooth	10,84	7,62	13,22	2,02	48,27	14,47	48,78	5,10	64,84	4:34,11
Johannes Erm	10,69	7,72	15,38	1,93	47,05	14,90	45,09	4,90	60,56	4:22,19
Sander Skotheim	10,89	7,80	13,35	2,11	48,48	14,96	39,07	4,80	59,05	4:19,64
Manuel Eitel	10,44	7,14	14,85	1,99	48,47	14,39	41,30	4,70	60,12	4:33,70
Daniel Golubovic	11,10	7,09	15,14	1,93	49,87	14,18	48,47	4,80	58,95	4:29,51
Rik Taam	10,64	7,11	14,89	1,84	47,12	14,80	43,04	4,70	57,96	4:22,70
José F. Ferreira	10,77	6,92	12,90	1,93	49,31	13,94	42,60	4,80	69,19	5:00,91
Yuma Maruyama	10,90	7,00	13,40	1,96	50,75	14,18	14,56	4,60	60,14	4:32,01

Usando un programa de ordenador, hemos calculado los coeficientes de correlación de cada pareja de pruebas, con este resultado:



Enunciados

① ¿Cuáles son las dos pruebas que están más relacionadas entre sí?

② Tras la pareja de la pregunta anterior, ¿cuál es la siguiente?

③ ¿Cuáles son las dos pruebas que están menos relacionadas entre sí?

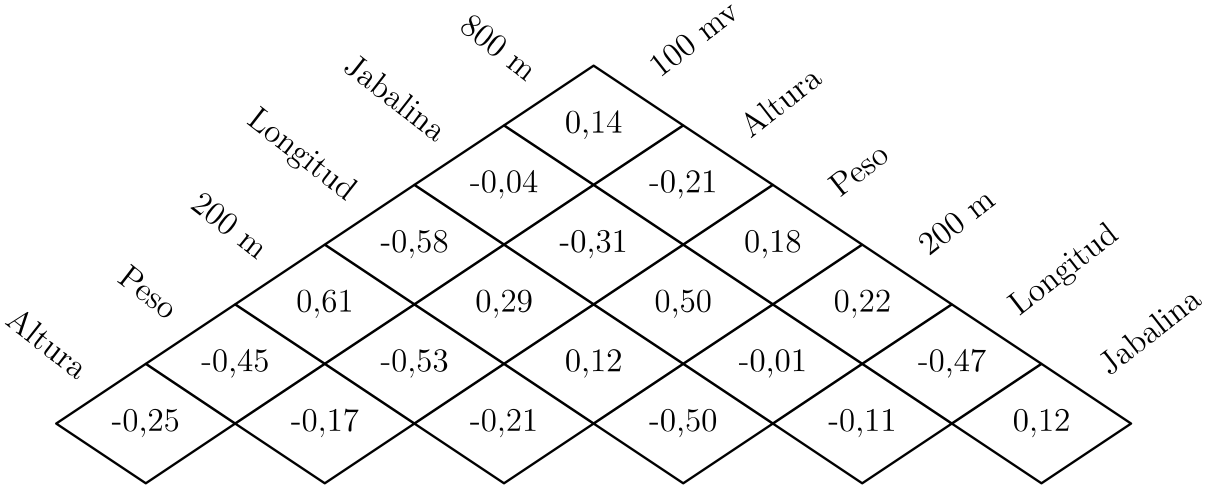
④ Tras la pareja de la pregunta anterior, ¿cuál es la siguiente?

Explicación

En el Campeonato Mundial de Atletismo de 2023, celebrado en Bucarest (Rumanía), terminaron 18 atletas la prueba de heptatlón, aunque solo 17 puntuaron en todas las pruebas, con estos resultados en cada prueba:

Prueba →	100 mv	Altura	Peso	200 m	Longitud	Jabalina	800 m
↓ Atleta ↓ Unidad →	s	m	m	s	m	m	min:s
Katarina Johnson-Thompson	13,50	1,86	13,64	23,48	6,54	46,14	2:05,63
Anna Hall	12,97	1,83	14,54	23,56	6,19	44,88	2:04,09
Anouk Vetter	13,42	1,71	15,72	24,28	5,99	59,57	2:20,49
Xénia Krizsán	13,48	1,77	14,18	25,16	6,30	51,23	2:08,93
Emma Oosterwegel	13,38	1,71	14,16	24,58	6,19	54,88	2:12,06
Noor Vidts	13,33	1,80	14,40	24,23	6,35	41,00	2:09,48
Sophie Weißenberg	13,58	1,86	13,97	23,88	6,10	48,51	2:18,03
Chari Hawkins	13,04	1,83	14,40	24,38	6,16	45,77	2:22,53
Saga Vanninen	13,62	1,80	14,78	24,71	6,06	48,32	2:20,13
Rita Nemes	13,63	1,77	12,97	25,04	6,29	44,68	2:10,65
Sofie Dokter	13,82	1,80	13,16	23,89	6,09	44,46	2:17,98
Auriana Lazraq-Khlass	13,62	1,77	13,48	24,02	6,01	42,29	2:14,25
Kate O'Connor	13,57	1,80	13,47	24,78	5,74	46,07	2:14,06
Vanessa Grimm	14,00	1,74	14,43	24,91	6,10	42,08	2:14,36
Léonie Cambours	13,56	1,74	13,39	25,03	6,09	39,07	2:19,34
Ekaterina Voronina	14,77	1,77	13,15	25,48	5,71	50,02	2:14,03
Sarah Lagger	14,21	1,77	13,78	25,86	5,85	43,79	2:15,32

Usando un programa de ordenador, hemos calculado los coeficientes de correlación de cada pareja de pruebas, con este resultado:



Enunciados

① ¿Cuáles son las dos pruebas que están más relacionadas entre sí?

② Tras la pareja de la pregunta anterior, ¿cuál es la siguiente?

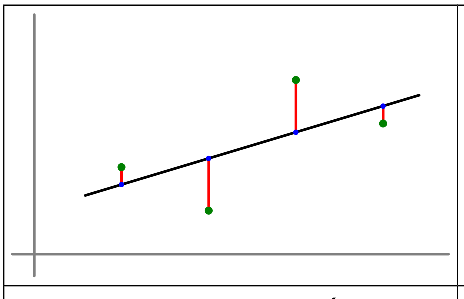
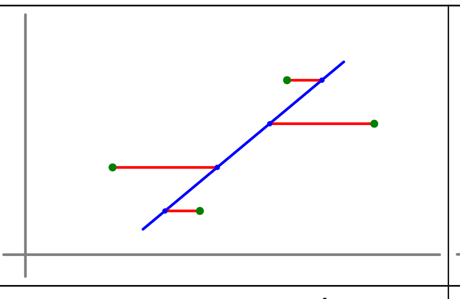
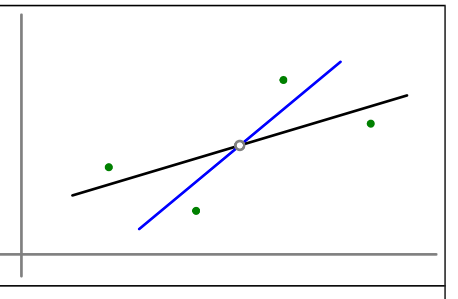
③ ¿Cuáles son las dos pruebas que están menos relacionadas entre sí?

④ Tras la pareja de la pregunta anterior, ¿cuál es la siguiente?

Las dos rectas de regresión

Aunque en la educación secundaria normalmente solo se usa una recta de regresión, realmente hay dos:

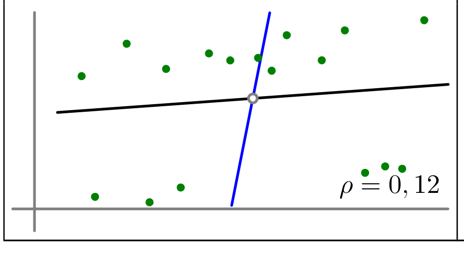
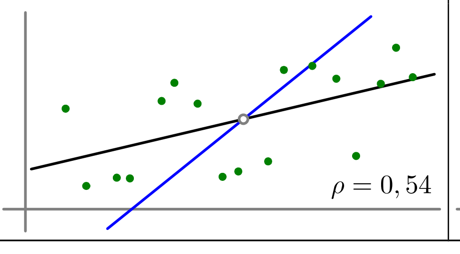
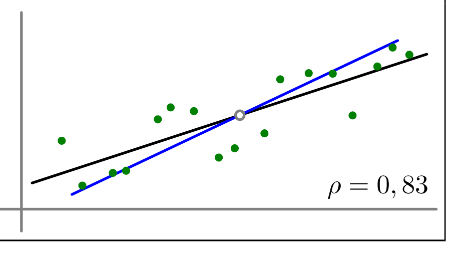
* La recta de regresión de Y sobre X.
    - Es la que hemos explicado hasta ahora.
    - Minimiza la suma de los cuadrados de las distancias en vertical.
    - Pasa por el centro de gravedad de la distribución.
    - Tiene pendiente $\sigma_{xy} : \sigma_x^2$.
    - Se usa para calcular valores estimados de y ($\hat{y}$) a partir de un valor de x.
* La recta de regresión de X sobre Y.
    - Minimiza la suma de los cuadrados de las distancias en horizontal.
    - Pasa por el centro de gravedad de la distribución.
    - Tiene pendiente $\sigma_y^2 : \sigma_{xy}$.
    - Se usa para calcular valores estimados de x a partir de un valor de y.

		
La recta de regresión de Y sobre X se calcula con las distancias en vertical.	La recta de regresión de X sobre Y se calcula con las distancias en horizontal.	Ambas pasan por el centro de gravedad, aunque con distinta pendiente.

Propiedad 1

Cuanto más se acerca el valor absoluto del coeficiente de correlación a 1, más se acercan las pendientes de las dos rectas de regresión.

Ejemplos

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		

Propiedad 2

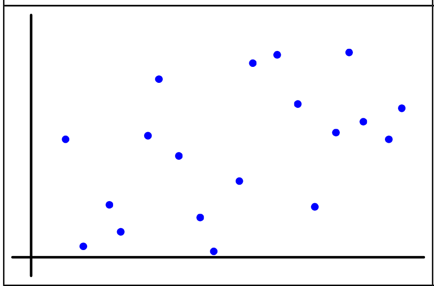
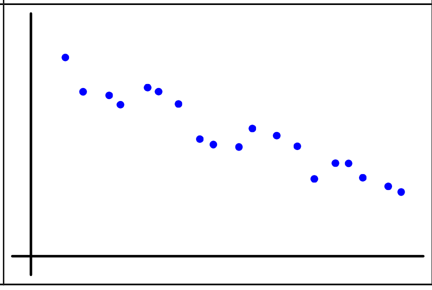
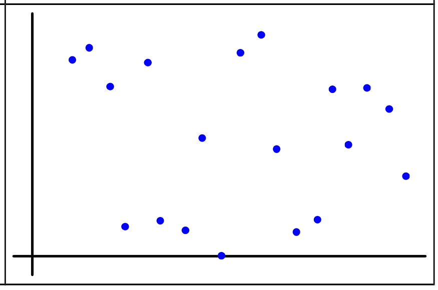
Si el valor absoluto del coeficiente de correlación es 1, las dos rectas de regresión son iguales porque tienen la misma pendiente. En este caso, hay dependencia funcional entre las variables, dada precisamente por la recta de regresión.

Demostración

$$|\rho| = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \cdot \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 1 \Rightarrow \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{xy}}$$

Enunciados

① Los valores absolutos de los coeficientes de correlación de las tres distribuciones estadísticas bidimensionales cuyas nubes de puntos se muestran más abajo son 0,95, 0,46 y 0,13. Identifica sin hacer operaciones qué valor absoluto de coeficiente de correlación corresponde a cada una.

A	B	C
		

② Una de las rectas de regresión de una distribución estadística bidimensional tiene ecuación «$y = 5{,}31x+1{,}48$». Sabiendo que $\overline{x} = 2{,}3$, calcula con tres cifras significativas $\overline{y}$.

③ La recta de regresión de Y sobre X de una distribución estadística bidimensional tiene ecuación «$y = 2{,}44x+0{,}93$» y la recta de regresión de X sobre Y tiene ecuación «$y = 4{,}52x-1{,}13$». Calcula con dos cifras significativas el coeficiente de correlación.

④ Se considera la siguiente distribución estadística bidimensional:

X	7	9	11	12	12	14	15	19	21
Y	34	39	38	43	52	40	55	60	61

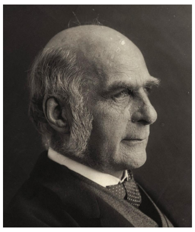
Calcula el valor estimado de «y» para «$x = 8890$».

⑤ El coeficiente de correlación de una distribución estadística bidimensional es exactamente 0 y el centro de gravedad de la distribución es el punto (2,3). Averigua:

a) La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.

b) La ecuación de la recta de regresión de X sobre Y.

⑥ Francis Galton (1822-1911) fue el estadístico británico que concibió la recta de regresión a partir de sus estudios antropométricos. Era primo de Charles Darwin y, quizá influido por él, estaba interesado en comprender cómo funciona la herencia. Uno de sus trabajos consistió en comparar las estaturas de los padres con las estaturas de sus hijos. Piensa sobre estas cuestiones:



a) ¿Qué te parece más probable: que los padres muy altos tengan hijos también muy altos o que sean más bajos que ellos?

b) ¿Qué te parece más probable: que los padres muy bajos tengan hijos también muy bajos o que sean más altos que ellos?

Uso de la combinatoria en el cálculo de probabilidades

Cuando se utiliza la ley de Laplace para resolver un problema de cálculo de probabilidades es necesario calcular el número de casos posibles y el número de casos favorables. En muchas situaciones estos números no son fáciles de calcular por medios elementales y ahí es donde puede ayudar el uso de la combinatoria; puede ser necesario usar distintos razonamientos para calcular cada uno de los dos números de casos.

Enunciado

Una urna contiene catorce bolas verdes, cinco azules y cuatro rojas. Se extraen simultáneamente y al azar tres bolas y se dice cuántas salen de cada color. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que las tres sean del mismo color.

Resolución

En este problema no es necesario describir ni usar el espacio muestral, pero siempre viene bien dedicarle un momento para entender mejor el problema: el resultado del experimento aleatorio es el número de bolas de cada color. Por ejemplo, obtener dos rojas, una azul y ninguna roja podría escribirse «210»; con esa notación, $E = \{300,210,\ldots,003\}$. Está claro que este espacio muestral no es equiprobable.

Pero sí hay que describir el espacio muestral auxiliar asociado al problema, que sí es equiprobable y en el que aplicaremos la ley de Laplace. En este espacio muestral auxiliar se considera que las bolas son distinguibles y cada suceso elemental consiste en decir qué bolas concretas han salido, sin que importe el orden concreto en que aparecen.

Cada suceso elemental consiste en extraer tres bolas al azar de un total de 23 bolas ($14+5+4=23$), sin que importe el orden en que se escogen. Por tanto, el número de casos posibles es $C_{23,3}$.

Los casos favorables son aquellos en los que las tres bolas son verdes, o las tres son azules o las tres son rojas. Luego su número es la suma de $C_{14,4}$, $C_{5,3}$ y $C_{4,3}$.

Calculamos la probabilidad pedida: $p = \dfrac{C_{14,3}+C_{5,3}+C_{4,3}}{C_{23,3}} = 0{,}21$.

Calculadora:

(1 4 nCr 3 + 5 nCr 3 + 4 nCr 3) ÷ 2 3 nCr 3 = ⇨ 0.213438753

Si tu calculadora no dispone de tecla de cálculo de combinaciones, puedes hacer así la operación:

$$C_{14,3} = \frac{V_{14,3}}{P_3} = \frac{14\cdot 13\cdot 12}{3\cdot 2\cdot 1} = 14\cdot 13\cdot 2 = 364$$

$$C_{5,3} = C_{5,2} = \frac{V_{5,2}}{P_2} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 5\cdot 2 = 10$$

$$C_{4,3} = C_{4,1} = 4$$

$$C_{23,3} = \frac{V_{23,3}}{P_3} = \frac{23\cdot 22\cdot 21}{3\cdot 2\cdot 1} = 23\cdot 11\cdot 7 = 1771$$

$$\frac{364+10+4}{1771} = 0{,}213438753$$

Solución: 0,21

Enunciados

① Se lanzan simultáneamente ocho monedas y se dice cuántas caras han salido. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de obtener exactamente cinco caras.

② En una conferencia internacional se sientan al azar cinco personas africanas y dos oceánicas en siete butacas consecutivas de la misma fila. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que las dos personas oceánicas se sienten juntas.

Resoluciones

① El espacio muestral es muy sencillo. Con una notación obvia, se puede escribir así: $E=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Evidentemente, no es equiprobable.

El espacio muestral auxiliar, que sí es equiprobable y en el que aplicaremos la ley de Laplace, consiste en considerar que las monedas se lanzan individualmente, con orden, y se anota si cada una ha salido cara («C») o cruz («X»). Un suceso elemental de ejemplo es «CXXCCXCX».

El número de casos posibles es variaciones con repetición de dos elementos (cara y cruz), tomados de ocho en ocho (las ocho monedas): $VR_{2,8}$.

El número de casos posibles es combinaciones de ocho elementos (cada una de las posiciones de las monedas) tomados de cinco en cinco (las caras que deben salir): $C_{8,5}$.

La probabilidad pedida es $p=\dfrac{C_{8,5}}{VR_{2,8}}=\dfrac{C_{8,5}}{2^8}=0{,}22$

Calculadora: 8 nCr 5 ÷ 2 y^x 8 = ⇰ 0.21875

Solución: 0,22

② El espacio muestral está formado por las diferentes maneras en que se pueden sentar en una fila siete personas. Es equiprobable y su número de elementos es permutaciones de 7: P_7.

Para calcular el número de casos favorables consideramos a las dos personas oceánicas como un bloque. El número de maneras en que se pueden sentar cinco personas y un bloque es P_6; como el bloque es de dos personas, las maneras en que ellas dos se pueden sentar dentro del bloque es P_2. Por cada P_6 maneras de sentarse en conjunto hay P_2 maneras de sentarse la pareja, luego hay que multiplicar esos dos números.

La probabilidad pedida es:

$$p=\frac{P_6\cdot P_2}{P_7}=\frac{6!\cdot 2!}{7!}=\frac{6!\cdot 2\cdot 1}{7\cdot 6!}=\frac{2}{7}=0{,}29$$

Calculadora: 2 ÷ 7 = ⇰ 0.285714285

Solución: 0,29

Juegos con cartas de una baraja

Existen infinidad de juegos que utilizan alguna baraja. En esos juegos, se distingue entre mejores y peores cartas, pero las mejores manos (así se llama el conjunto de cartas que recibe un jugador) son las menos probables.

Enunciados

① El **mus** es un juego de cartas en el que cada jugador tiene cuatro cartas de una baraja española. En la variante más habitual, las cartas treses tienen el valor de reyes. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que las cuatro cartas sean reyes.

② El **póker** es un juego de cartas en el que cada jugador usa cinco cartas de una baraja francesa. Una jugada interesante es la llamada «color», en la que las cinco cartas son del mismo palo. Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de tener color.

Resoluciones

① El espacio muestral consiste en las distintas posibilidades de recibir cuatro cartas de las cuarenta que tiene la baraja española; es equiprobable. No importa el orden que se reciben las cartas, luego el número de casos posibles es combinaciones de cuarenta elementos tomados de cuatro en cuatro: $C_{40,4}$.

El número de casos posibles es combinaciones de ocho elementos (los cuatro reyes verdaderos y los cuatro treses) tomados de cuatro en cuatro (las cartas que recibe un jugador): $C_{8,4}$.

La probabilidad pedida es $p = \dfrac{C_{8,4}}{C_{40,4}} = 0{,}00077$

Calculadora: `8` `nCr` `4` `÷` `4` `0` `nCr` `4` `=` ⇰ 0,000765948

Solución: 0,00077

② El espacio muestral consiste en las distintas posibilidades de recibir cinco cartas de las cincuenta y dos que tiene la baraja francesa; es equiprobable. No importa el orden que se reciben las cartas, luego el número de casos posibles es combinaciones de cincuenta y dos elementos tomados de cinco en cinco: $C_{52,5}$.

El número de casos posibles es cuatro (los cuatro palos) multiplicado por combinaciones de trece elementos (las trece cartas de un palo) tomados de cinco en cinco (las cartas que recibe un jugador): $4 \cdot C_{13,5}$.

La probabilidad pedida es $p = \dfrac{4 \cdot C_{13,5}}{C_{52,5}} = 0{,}0020$

Calculadora: `4` `×` `1` `3` `nCr` `5` `÷` `5` `2` `nCr` `5` `=` ⇰ 0,001980792

Solución: 0,0020

Enunciados

Contesta con dos cifras significativas todas las probabilidades pedidas.

① Una urna contiene doce bolas rojas y trece bolas verdes. Se extraen simultáneamente y al azar dos bolas y se dice los colores que tienen. Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color.

② Se lanzan simultáneamente siete monedas y se dice cuántas caras han salido. Calcula la probabilidad de obtener exactamente tres caras o exactamente cuatro caras.

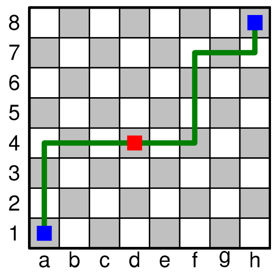
③ Cuatro chicos y cuatro chicas van al cine y se sientan al azar en ocho butacas consecutivas de la misma fila. Calcula la probabilidad de que las cuatro chicas se sienten juntas.

④ En un juego de cartas cada jugador recibe tres cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de que las tres cartas sean figuras.

⑤ En un juego de cartas cada jugador recibe cuatro cartas de una baraja francesa. Calcula la probabilidad de que las cuatro cartas sean de corazones.

⑥ En España existe una lotería, llamada «primitiva», que consiste en elegir seis números naturales del 1 al 49, sin que importe el orden. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los números de un sorteo sean menores de cuarenta?

⑦ A la derecha vemos un tablero de ajedrez con la notación habitual de filas y columnas. Imagina una pieza que solo se pueda mover un escaque hacia arriba o un escaque a la derecha. Se situa en el escaque a1 y debe llegar hasta el escaque h8; en la figura se muestra una de las maneras válidas. Si el camino se elige al azar, calcula la probabilidad de que la pieza pase por el escaque d4, como en el ejemplo.



⑧ Se escriben al azar todas las letras de la palabra AGUACATE. Calcula la probabilidad de que las tres letras A acaben juntas.

⑨ Se colocan al azar los números naturales del 1 al 6 en una tabla de dos filas y tres columnas; se muestran unos ejemplos más abajo. Calcula la probabilidad de que el número 1 y el número 2 acaben en la misma fila o en la misma columna, como ocurre en los ejemplos con números azules.

1	5	3
6	2	4

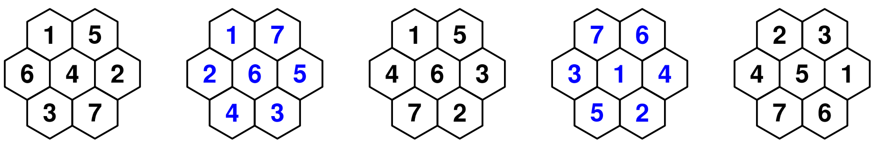
5	2	4
6	3	1

4	3	5
2	6	1

2	4	6
5	3	1

6	2	3
5	1	4

⑩ Se colocan al azar los números naturales del 1 al 7 en una retícula hexagonal; se muestran unos ejemplos más abajo. Calcula la probabilidad de que el número 1 y el número 2 acaben en celdas contiguas, como ocurre en los ejemplos con números azules.



Enunciados

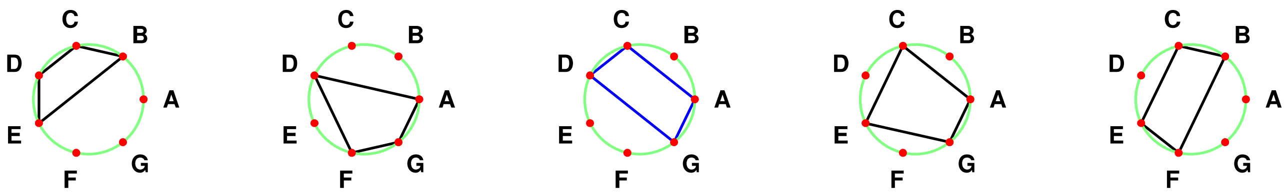
Contesta con dos cifras significativas todas las probabilidades pedidas.

① Usando cinco letras al azar elegidas de entre las letras de la palabra TROMPAS se forman todas las palabras posibles, con significado o sin él. Se elige al azar una de esas palabras. Calcula la probabilidad de que la palabra elegida no tenga ninguna vocal.

② A una convención internacional asisten 23 personas que solo hablan en francés, 28 que solo hablan en inglés, 17 que solo hablan español, 7 bilingües francés-inglés, 6 bilingües francés-español y 10 bilingües inglés-español. Si se elige al azar una pareja de participantes en la convención, ¿cuál es la probabilidad de que puedan entenderse entre ellos sin ayuda de un intérprete?

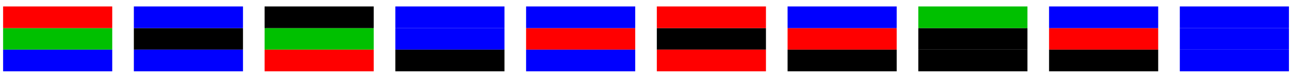
③ Se eligen al azar dos números naturales, distintos entre sí, que sean mayores o iguales que tres y menores o iguales que quince. Calcula la probabilidad de que ninguno de ellos sea múltiplo de tres.

④ Se marcan en la circunferencia circunscrita a un heptágono regular sus siete vértices, llamados A, B, C, D, E, F y G. Se elige al azar un cuadrilátero simple entre los que tienen todos los vértices en alguno de los puntos anteriores, como se muestra en los ejemplos; calcula la probabilidad de que el segmento AD sea una de sus diagonales, como en el ejemplo con lados azules.



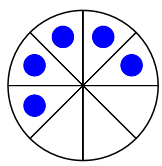
⑤ Se elige al azar uno de los números que se pueden formar usando todas las cifras del número 22 255 789. Calcula la probabilidad de que el número elegido sea mayor que 98 000 000.

⑥ Disponemos de bandas de tela de las mismas dimensiones de colores rojo, verde, azul y negro, tres bandas de cada color. Vamos a formar banderas cosiendo tres bandas elegidas al azar de modo que queden horizontales. Vemos abajo varios ejemplos. Si se elige al azar una de las banderas, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de las bandas sea negra?



⑦ Se multiplican entre sí tres factores eligidos al azar de entre los números 2, 3, 5, 7 y 11, pudiéndose elegir el mismo número más de una vez. Si se toma al azar uno de los números obtenidos, calcula la probabilidad de que sea mayor que 500.

⑧ Sobre un círculo dividido en ocho sectores iguales se colocan cinco canicas, cada una en un sector elegido al azar. Calcula la probabilidad de que las cinco canicas queden en sectores consecutivos, como en el ejemplo de la derecha.



Aparición de la probabilidad condicionada

Cuando se necesita calcular la probabilidad de un suceso, a menudo ocurre que se dispone de alguna información adicional: queremos calcular la probabilidad de un suceso y sabemos que otro suceso se ha verificado. La información adicional puede ser que altere la probabilidad del suceso que nos interesa o puede que no.

Definición de probabilidad condicionada

Consideramos una experiencia aleatoria y dos sucesos, que llamamos A y B. Se llama **probabilidad del suceso A condicionado a B** a la probabilidad de que se verifique el suceso A sabiendo que se ha verificado el suceso B.

Notación

La probabilidad del suceso A condicionado a B se puede escribir de cualquiera de estas dos formas, según el texto que consultes:

- p(A/B)
- p(A|B)

En este curso se usará la segunda.

Sucesos dependientes e independientes

- Se dice que dos sucesos son independientes cuando la verificación de uno no influye en la probabilidad de que se verifique el otro.
  - Simbólicamente: A y B son independientes cuando $p(A) = p(A|B)$.
- Se dice que dos sucesos son dependientes cuando la verificación de uno influye en la probabilidad de que se verifique el otro.
  - Simbólicamente: A y B son dependientes cuando $p(A) \neq p(A|B)$.

Ejemplo 1

Experimento aleatorio: se lanza un dado hexagonal y se dice qué cara ha salido.

Espacio muestral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Suceso A: «Ha salido la cara con cuatro puntos».

Suceso B: «Ha salido una cara con un número par de puntos».

$p(A) = \frac{1}{6}$ porque el dado tiene seis caras y solo hay una cara con cuatro puntos.

$p(A|B) = \frac{1}{3}$ porque el dado tiene tres caras con número par y el cuatro es par.

La probabilidad cambia según sepamos que se ha verificado el suceso B o no lo sepamos. Los sucesos A y B son dependientes.

Ejemplo 2

Experimento aleatorio: se lanza una moneda dos veces consecutivamente y se dice si ha salido cada o cruz en cada uno de los lanzamientos.

Espacio muestral: $E = \{CC, CX, XC, XX\}$.

Suceso A: «El segundo lanzamiento ha salido cara».

Suceso B: «El primer lanzamiento ha salido cara».

$p(A) = \frac{1}{2}$ porque la moneda tiene dos lados y solo uno es cara.

También se puede pensar $p(A) = \frac{2}{4}$ a partir del espacio muestral.

$p(A|B) = \frac{1}{2}$ porque la moneda tiene dos lados y solo uno es cara; también se deduce a partir del espacio muestral. Observa que el resultado del primer lanzamiento no tiene ninguna influencia en el resultado del segundo lanzamiento.

La probabilidad no cambia según sepamos que se ha verificado el suceso B o no lo sepamos. Los sucesos A y B son independientes.

Tablas de contingencia

Para entender mejor el concepto y empezar a resolver problemas de probabilidad condicionada son muy convenientes las tablas de contingencia, en la que se reúne información conjunta de dos propiedades diferentes de cada individuo.

Ejemplo

Una urna contiene bolas del mismo tamaño que pueden ser de color rojo, verde o azul y pueden estar hechas de madera, plástico o cristal. El número de bolas de cada clase se puede ver en esta tabla:

↓Color↓ ┃ Material →	Madera	Plástico	Cristal
Rojo	12	21	29
Verde	15	17	31
Azul	16	29	23

Si el experimento aleatorio consiste en extraer una bola al azar y decir su color y material, el espacio muestral se puede escribir así, usando para describir los sucesos elementales la letra inicial de cada color y material:

E={RM, RP, RC, VM, VP, VC, AM, AP, AC}

El tipo de problemas que se suelen plantear a partir de una tabla de contingencia son de probabilidad condicionada.

Enunciado

Utilizando la tabla de contingencia del ejemplo anterior, calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que:

① Se obtenga una bola de madera, sabiendo que la bola ha sido roja.

② Se obtenga una bola verde, sabiendo que la bola ha sido de plástico.

Resolución

Para resolver estos problemas hay que calcular las llamadas **distribuciones marginales**, que no son más que las sumas parciales de cada característica:

↓Color↓ ┃ Material →	Madera (M)	Plástico (P)	Cristal (C)	**Total**
Rojo (R)	12	21	29	**62**
Verde (V)	15	17	31	**63**
Azul (A)	16	29	23	**68**
Total	**43**	**67**	**83**	**193**

El espacio muestral no es equiprobable, así que consideramos el espacio muestral auxiliar obtenido suponiendo que las bolas son distinguibles, que sí lo es; en él aplicamos la ley de Laplace. Usamos una notación que creemos bastante obvia.

① Hay 62 bolas rojas, de las que 12 son de madera. Ahora resolvemos el problema usando el suceso R como espacio muestral. $p(M|R) = 12:62 = 0{,}19$.

② Hay 67 bolas de plástico, de las que 15 son verdes. Ahora resolvemos el problema usando el suceso P como espacio muestral. $p(V|P) = 15:67 = 0{,}22$.

Enunciado

Un país envía a los Juegos Olímpicos una delegación con 82 hombres que participan en deportes de equipo, 95 mujeres que participan en deportes de equipo, 43 hombres que participan en deportes individuales y 31 mujeres que participan en deportes individuales. Se realiza el experimento aleatorio que consiste en elegir una persona al azar y decir su género y el tipo de deporte en que participa.

① Prepara y rellena una tabla de contingencia con los datos y calcula las distribuciones marginales.

② Escribe el espacio muestral con la notación que consideres conveniente.

③ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de cada suceso elemental.

④ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que la persona sea mujer, sabiendo que participa en un deporte de equipo.

⑤ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que la persona participe en un deporte individual, sabiendo que es un hombre.

Resolución

① Tabla de contingencia con las distribuciones marginales:

↓Deporte↓ ┃ Género →	Hombre (H)	Mujer (M)	**Total**
Equipo (E)	82	95	**177**
Individual (I)	43	31	**74**
Total	**125**	**126**	**251**

② Usando iniciales para designar género y deporte, el espacio muestral es

{HE, ME, HI, MI}

③ El espacio muestral no es equiprobable, así que consideramos el espacio muestral auxiliar en el que se elige al azar una persona y sabemos exactamente quién es, que sí es equiprobable; en él aplicamos la ley de Laplace.

p(HE) = 82:251 = 0,33 p(ME) = 95:251 = 0,38

p(HI) = 43:251 = 0,17 p(MI) = 31:251 = 0,12

Observación 1: en este problema las probabilidades de todos los sucesos elementales suman 1, pero en otro problema podría no dar exactamente 1 debido a la acumulación de errores de redondeo.

Observación 2: las probabilidades pedidas coinciden con los porcentajes de cada categoría respecto al total de personas en la delegación.

④ Hay 177 personas que participan en deportes de equipo, de las que 95 son mujeres. Ahora resolvemos el problema usando el suceso E como espacio muestral. p(M|E) = 95:177 = 0,54.

⑤ Hay 125 hombres, de los que 43 participan en deportes individuales. Ahora usamos el suceso H como espacio muestral. p(I|H) = 43:125 = 0,34.

Enunciados

En el garaje de un edificio hay 25 vehículos utilitarios con motor térmico (es decir, un motor de combustión, sea de gasolina o diésel), 34 vehículos familiares con motor térmico, 17 vehículos utilitarios con motor electrico y 13 vehículos familiares con motor eléctrico. Se elige al azar un vehículo y se dice su tipo y motor.

① Prepara y rellena una tabla de contingencia con los datos y calcula las distribuciones marginales.

② Escribe el espacio muestral con la notación que consideres conveniente.

③ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de cada suceso elemental.

④ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que el vehículo tenga motor térmico, sabiendo que es utilitario.

⑤ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que el vehículo sea familiar, sabiendo que tiene motor eléctrico.

Enunciados

Una familia dedica una de sus mejores estanterías a una parte de su biblioteca, en la que colocan los libros de novela, de teatro y de ensayo. Consideran libros cortos a los de menos de 100 páginas, largos a los de más de 400 y medianos a los demás. Acorde con su clasificación, esta es la cantidad de libros de cada categoría:

↓Tipo↓ ┃ Longitud →	Corto	Mediano	Largo
Novela	13	52	27
Teatro	4	17	2
Ensayo	21	38	15

Para disfrutar de su biblioteca, a veces realizan el siguiente experimento aleatorio: eligen un libro al azar y dicen su longitud y tipo.

⑥ Calcula las distribuciones marginales.

⑦ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que el libro sea largo, sabiendo que es una novela.

⑧ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que el libro sea de ensayo, sabiendo que es mediano.

⑨ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que el libro sea corto, sabiendo que es de teatro.

⑩ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que el libro sea no sea mediano, sabiendo que es de ensayo.

⑪ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que el libro sea una novela, sabiendo que no es corto.

⑫ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que el libro sea no sea largo, sabiendo que no es de teatro.

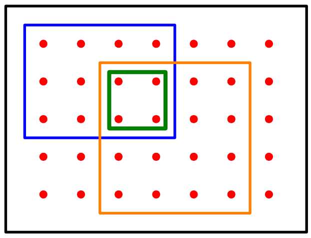
Álgebra de sucesos

Conforme se avanza en el cálculo de probabilidades en problemas más complicados, va siendo necesario desarrollar también la teoría del manejo de sucesos que se basa en que los sucesos son subconjuntos del conjunto de sucesos elementales del espacio muestral. Esta teoría se llama álgebra de sucesos; la desarrollaremos en el nivel 5 del curso, pero ahora es conveniente fijarnos en una de sus operaciones, la intersección de sucesos.

Intersección de sucesos

Dado un experimento aleatorio y su espacio muestral, llamamos suceso intersección de dos sucesos al suceso que se verifica cuando se verifican simultáneamente los dos sucesos. El conjunto asociado es la intersección de los conjuntos de cada suceso y por tanto se usa el signo «∩» para denotarlo.

Representación gráfica



A la derecha representamos el espacio muestral E, con los sucesos elementales como puntos rojos. Con una línea azul rodeamos los elementos del suceso A y con una línea naranja los del suceso B. Los sucesos de A∩B son los que rodeamos de una línea verde.

Ejemplo 1

Se realiza el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado hexaédrico y decir qué cara ha salido hacia arriba. El espacio muestral es E = {1,2,3,4,5,6}.

Consideramos los sucesos A y B:

A: «se ha obtenido un número primo» = {2,3,5}

B: «se ha obtenido un número impar» = {1,3,5}

Entonces, el suceso intersección de A y B es:

A∩B: «se ha obtenido un número primo impar» = {3,5}

Observa que, también como operación con conjuntos, {2,3,5}∩{1,3,5} = {3,5}.

Ejemplo 2

Una urna contiene siete bolas rojas y cuatro verdes. Se realiza el experimento aleatorio consistente en extraer una primera bola, decir su color, dejarla fuera de la urna, extraer una segunda bola y decir su color. Esta manera de extraer bolas se llama **extracciones <u>sin</u> reemplazamiento**.

Para nombrar los sucesos elementales utilizamos esta notación:

Si sale bola roja en la primera extracción: R1; si sale en la segunda, R2.

Si sale bola verde en la primera extracción: V1; si sale en la segunda, V2.

El espacio muestral es E = {R1R2, R1V2, V1R2, V1V2}.

Consideramos los sucesos A y B:

A: «se ha obtenido bola roja en la primera extracción» = {R1R2, R1V2}

B: «se ha obtenido bola roja en la segunda extracción» = {R1R2, V1R2}

Entonces, el suceso intersección de A y B es:

A∩B: «se ha obtenido bola roja en las dos extracciones» = {R1R2}.

Observa que, también como operación con conjuntos,

{R1R2, R1V2}∩{R1R2, V1R2} = {R1R2}.

Fórmula de la probabilidad condicionada

Consideramos un experimento aleatorio, su espacio muestral E, y dos sucesos A y B que verifiquen $p(B)\neq 0$. Buscamos alguna manera general de calcular $p(A|B)$.

Para ello, observamos que cuando se verifica el suceso A sabiendo que se ha verificado el suceso B (situación que es la definición de la probabilidad condicionada), se han verificado simultáneamente los sucesos A y B, luego se ha verificado el suceso $A\cap B$.

A la vista de los ejercicios sobre tablas de contingencia de este curso, te parecerá razonable esta fórmula:

$$\boxed{p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}}$$

Como en los niveles 3 y 4 del curso siempre resolvemos problemas de cálculo de probabilidades usando la ley de Laplace, y por tanto necesitamos espacios equiprobables, la fórmula anterior es bastante sencilla de entender, como explicaremos ahora. Sin embargo, cuando el espacio muestral no es equiprobable, la situación no es tan sencilla.

Demostración en espacios equiprobables

Para calcular $p(A|B)$ usamos la ley de Laplace tomando como espacio muestral el suceso B, luego podemos hacer este desarrollo:

$$p(A|B) = \frac{\text{card}(A\cap B)}{\text{card}(B)} = \frac{\frac{\text{card}(A\cap B)}{\text{card}(E)}}{\frac{\text{card}(B)}{\text{card}(E)}} = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

Ejemplo

En una urna hay bolas de color rojo y verde, que pueden ser de madera o de plástico, según la tabla de la derecha. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que sea roja, sabiendo que es de plástico.

	Madera	Plástico	**Total**
Rojo	1	3	**4**
Verde	2	4	**6**
Total	**3**	**7**	**10**

$p(R|P) = \frac{3}{7}$. Y, por otro lado, $\frac{p(R\cap P)}{p(P)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{3\cdot 10}{10\cdot 7} = \frac{3}{7}$

Probabilidad de la intersección de dos sucesos

La fórmula de la probabilidad condicionada nos lleva a esta otra fórmula:

$$\boxed{p(A\cap B) = p(B)\cdot p(A|B)}$$

Observa que en la fórmula anterior los sucesos A y B son intercambiables, de modo que también podemos escribirla así, si nos interesa: $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B|A)$.

Y, además, cuando los sucesos A y B son independientes:

$$\boxed{p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)}$$

Estas dos fórmulas se aplican en multitud de problemas. Las verás utilizadas sin ninguna explicación en algunos textos de matemáticas para enseñanza secundaria.

Enunciado

Una urna contiene tres bolas verdes y cinco bolas rojas del mismo tamaño y material, totalmente indistinguibles salvo por el color. Se realiza el experimento aleatorio consistente en extraer consecutivamente dos bolas de la urna y decir el color de la primera y de la segunda bola. Responde a cada pregunta en estos casos:

a) Las extracciones se realizan sin reemplazamiento; es decir: la primera bola extraída no se devuelve a la urna.

b) Las extracciones se realizan con reemplazamiento; es decir: la primera bola extraída se devuelve a la urna.

① Describe el espacio muestral explicando tu notación y di si es equiprobable.

② Describe un espacio muestral auxiliar que sea equiprobable.

③ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas.

Resolución

① Indicamos con «V» la extración de una bola verde, con «R» la de una bola roja y con una pareja de esas letras las dos extracciones. Del enunciado se deduce que el orden importa, luego en los dos casos el espacio muestral es E = {VV, VR, RV, RR}, que no es equiprobable porque hay más bolas rojas que verdes.

② Para poder usar un espacio muestral equiprobable consideramos que las bolas sí son distinguibles (podrían estar numeradas) y las vemos así: ❶❷❸❶❷❸❹❺.

Los espacios muestrales auxiliares son:

(a) E_{aux} = {❶❷,❶❸,...,❺❸,❺❹}, (b) E_{aux} = {❶❶,❶❷,...,❺❹,❺❺}

③ Utilizamos la siguiente notación:

Suceso R1: «la primera bola extraída ha sido roja».

Suceso R2: «la segunda bola extraída ha sido roja».

(a) Resuelto con probabilidad condicionada (R1 y R2 son dependientes):

$$p(RR) = p(R1 \cap R2) = p(R1) \cdot p(R2|R1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = 0{,}36$$

Observa que cuando la primera bola extraída es roja, en la urna quedan cuatro bolas rojas de un total de siete bolas.

(a) Resuelto con combinatoria: $p(RR) = \dfrac{V_{5,2}}{V_{8,2}} = \dfrac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} = 0{,}36$

(b) Resuelto con probabilidad condicionada (R1 y R2 son independientes):

$$p(RR) = p(R1 \cap R2) = p(R1) \cdot p(R2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = 0{,}39$$

Observa que cuando las extracciones son con reemplazamiento, lo que se obtenga en la primera no influye en la segunda.

(b) Resuelto con combinatoria: $p(RR) = \dfrac{VR_{5,2}}{VR_{8,2}} = \dfrac{5^2}{8^2} = 0{,}39$

Enunciados

Una urna contiene seis bolas verdes y cinco bolas rojas del mismo tamaño y material, totalmente indistinguibles salvo por el color. Se realiza el experimento aleatorio consistente en extraer consecutivamente dos bolas de la urna y decir el color de la primera y de la segunda bola.

① Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que las dos bolas sean verdes en cada uno de los siguientes casos:

a) Las extracciones se realizan sin reemplazamiento.

b) Las extracciones se realizan con reemplazamiento.

Enunciados

Una urna contiene cuatro bolas verdes y siete bolas rojas del mismo tamaño y material, totalmente indistinguibles salvo por el color. Se realiza el experimento aleatorio consistente en extraer consecutivamente dos bolas de la urna y decir el color de la primera y de la segunda bola.

② Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que la primera bola sea verde y la segunda sea roja en cada uno de los siguientes casos:

a) Las extracciones se realizan sin reemplazamiento.

b) Las extracciones se realizan con reemplazamiento.

Enunciados

Una urna contiene dos bolas negras, cinco bolas verdes y seis bolas rojas del mismo tamaño y material, totalmente indistinguibles salvo por el color. Se realiza el experimento aleatorio consistente en extraer consecutivamente tres bolas de la urna y decir el color de la primera, de la segunda y de la tercera bola.

③ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que las tres bolas sean rojas en cada uno de los siguientes casos:

a) Las extracciones se realizan sin reemplazamiento.

b) Las extracciones se realizan con reemplazamiento.

④ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que las tres bolas sean verdes en cada uno de los siguientes casos:

a) Las extracciones se realizan sin reemplazamiento.

b) Las extracciones se realizan con reemplazamiento.

⑤ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que las tres bolas sean negras en cada uno de los siguientes casos:

a) Las extracciones se realizan sin reemplazamiento.

b) Las extracciones se realizan con reemplazamiento.

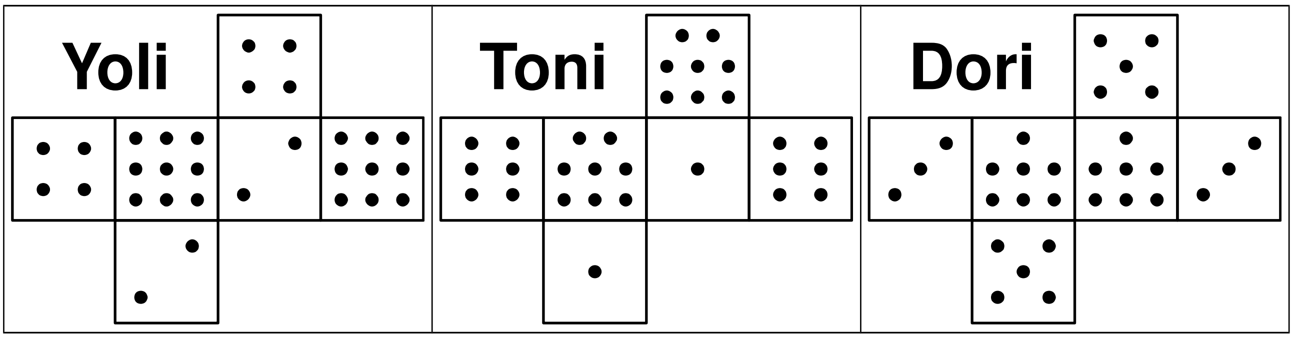
⑥ Calcula con dos cifras significativas la probabilidad de que las la primera bola sea negra y las otras dos no lo sean en cada uno de los siguientes casos:

a) Las extracciones se realizan sin reemplazamiento.

b) Las extracciones se realizan con reemplazamiento.

Enunciados

① A los amigos y amigas Yoli, Toni y Dori les gusta jugar con dados. Cada uno prepara un dado hexaédrico siguendo ciertas reglas, con estos desarrollos:



Una tarde, juegan lanzando sus dados. En cada partida se enfrentan dos amigos y gana quien obtiene más puntos.

a) Si se enfrentan Yoli y Toni, ¿cuál es más probable que gane?

b) Si se enfrentan Dori y Toni, ¿cuál es más probable que gane?

c) Si se enfrentan Yoli y Dori, ¿cuál es más probable que gane?

② Laura elige al azar dos números de una bolsa que contiene los números 1, 2, 3, 4 y 5 y los suma. Daniel elige al azar un número de otra bolsa que contiene los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10. Calcula la probabilidad de que el número elegido por Daniel sea mayor que la suma obtenida por Laura.

③ Una urna contiene dos bolas blancas, otra contiene dos bolas negras y una tercera urna contiene una bola blanca y una bola negra. Tanto las urnas como las bolas son indistinguibles, salvo por el color. Se realiza el experimento aleatorio consistente en elegir al azar una de las urnas, extraer de ella una bola al azar, decir su color y a continuación sacar la bola que quedaba en la urna y decir su color. Si la primera bola extraída es blanca, calcula la probabilidad que la segunda también lo sea. Da el resultado como fracción irreducible.

④ Un padre juega una vez cada semana con su joven hijo a un juego con trasfondo de teoría de la probabilidad, con el fin de fomentar su curiosidad. El juego consiste en que el padre dispone tres cubiletes opacos colocados hacia abajo y en uno de ellos esconde una bolita que representa el regalo acordado para esa semana. El padre le dice al joven que elija uno de los tres cubiletes.

Expresa todas las probabilidades pedidas como fracción irreducible.

a) Calcula la probabilidad de que el hijo elija el cubilete con la bolita.

b) Calcula la probabilidad de que la bolita esté en un cubilete no elegido.

Una vez que el hijo ha expresado su elección, el padre levanta uno de los dos cubiletes que el joven no ha elegido, mostrando que está vacío. Entonces le ofrece al hijo continuar con el cubilete que eligió al principio o bien cambiar su elección al cubilete que el padre no ha levantado.

c) Calcula la probabilidad de que la bolita esté en el cubilete que el padre no ha levantado.