

Partes de un conjunto

Un concepto muy interesante en la teoría de conjuntos es considerar el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto, llamado partes del conjunto. Suena a trabalenguas, así que lo vemos con detenimiento con un ejemplo.

Ejemplo 1

Enunciado. Dado el conjunto $A=\{b,c,d\}$, averigua todos los subconjuntos de A .

Resolución. Para no olvidar ningún subconjunto, lo mejor es seguir un orden:

- * Subconjuntos de A que no tienen ningún elemento: solo hay uno, el conjunto vacío: \emptyset .
 - * Subconjuntos de A que tienen un elemento: hay tres, uno por cada elemento: $\{b\}$, $\{c\}$ y $\{d\}$. (Observa que son conjuntos con un solo elemento.)
 - * Subconjuntos de A que tienen dos elementos: también hay tres, uno por cada elemento que dejemos fuera del subconjunto: $\{c,d\}$, $\{b,d\}$ y $\{b,c\}$.
 - * Subconjuntos de A que tienen tres elementos: solo hay uno, el propio conjunto A .
- Así que en total hemos encontrado ocho subconjuntos: \emptyset , $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{c,d\}$, $\{b,d\}$, $\{b,c\}$ y A .

Propiedades y definición

Sea A un conjunto cualquiera. Se verifica:

- * $\emptyset \subset A$. Es decir: el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.
- * $A \subset A$. Es decir: cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo.

Debido a estas propiedades, los subconjuntos \emptyset y A de A se llaman subconjuntos **impropios** de A ; todos los demás subconjuntos se llaman subconjuntos **propios**.

Definición

Si A es un conjunto cualquiera, llamamos **partes de A** al conjunto de todos los subconjuntos de A ; se escribe $P(A)$.

Ejemplo 2

$$A=\{b,c,d\} \Rightarrow P(A)=\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}, \{b,d\}, \{b,c\}, A\}$$

Propiedad

Si el cardinal del conjunto A es « n », el cardinal de partes de A es « 2^n ».

Simbólicamente: $\text{card}(A)=n \Rightarrow \text{card}(P(A))=2^n$.

Comentario: más adelante en este nivel podrás demostrar tú mismo esta propiedad usando lo que aprendas de combinatoria.

Ejemplo 3

$$A=\{b,c,d\} \Rightarrow \text{card}(A)=3; \text{ se verifica que } \text{card}(P(A))=2^3=8.$$

Curiosidad importante

Aunque parezca algo inútil y forzado, podemos considerar el conjunto «partes del conjunto vacío». Pero realmente es importante en la teoría matemática avanzada de los números naturales.

Veamos: $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$. Es decir: el conjunto vacío solo tiene un subconjunto, que es el propio conjunto vacío. (Suena raro, lo sabemos, pero es así; piénsalo bien).

Incluso se verifica la propiedad de los cardinales:

$$\text{card}(\emptyset)=0 \text{ y } \text{card}(P(\emptyset))=2^0=1.$$