Enunciados

① Desarrolla la expresión $\left(3x^2+\frac{2}{x}\right)^3$ y escribe el desarrollo del modo más sencillo que sea posible.

② Desarrolla la expresión $(1+\sqrt{2})^4$ y escribe el desarrollo del modo más sencillo que sea posible, utilizando radicales cuando sea necesario.

③ Calcula el coeficiente del monomio de grado 10 en el desarrollo de $(2x^2+3x)^7$.

④ Utilizando el binomio de Newton, expresa como una única potencia $\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}$.

Resoluciones

① $\left(3x^2+\frac{2}{x}\right)^3 = \binom{3}{0}(3x^2)^3+\binom{3}{1}(3x^2)^2\cdot\frac{2}{x}+\binom{3}{2}3x^2\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^3 =$

$= 27x^6+3\cdot 9x^4\cdot\frac{2}{x}+3\cdot 3x^2\cdot\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3} = 27x^6+54x^3+36+\frac{8}{x^3}$

Solución: $27x^6+54x^3+36+\frac{8}{x^3}$

② $(1+\sqrt{2})^4 = \binom{4}{0}1^4+\binom{4}{1}1^3\cdot\sqrt{2}+\binom{4}{2}1^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+\binom{4}{3}1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3+\binom{4}{4}\left(\sqrt{2}\right)^4 =$

$= 1+4\sqrt{2}+6\cdot 2+4\cdot 2\sqrt{2}+4 = 1+4\sqrt{2}+12+8\sqrt{2}+4 = 17+12\sqrt{2}$

Solución: $17+12\sqrt{2}$

③ Sabemos que $(2x^2+3x)^7=\sum_{k=0}^{k=7}\binom{7}{k}(2x^2)^{7-k}(3x)^k$

Primero hay que averiguar cuál es el valor de «k» que da como resultado un exponente de «x» igual a 10.

Calculamos el exponente de «x» que corresponde a cada valor de «k»:

$(x^2)^{7-k}\cdot x^k = x^{2(7-k)+k} = x^{14-2k+k} = x^{14-k}$

Para que el exponente sea 10, debe ser $14-k=10 \Rightarrow k=4$

Ahora solo falta calcular el coeficiente que corresponde a $k=4$:

Coeficiente $= \binom{7}{4}\cdot 2^{7-4}\cdot 3^4 = 35\cdot 2^3\cdot 81 = 35\cdot 8\cdot 81 = 22\,680$

Solución: 22 680

④ Observamos que $\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}$ es el desarrollo mediante el binomio de Newton de $(1+1)^n$, por lo que $\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$

Solución: 2^n

