

Relación entre funciones trigonométricas de algunos ángulos

La ampliación de las definiciones de las razones trigonométricas hasta las definiciones de las funciones trigonométricas nos obliga a considerar las relaciones que puede haber entre los valores de las funciones trigonométricas de algunos ángulos. No es difícil observar que hay muchos casos en los que los valores son iguales o de signo contrario.

Estas relaciones se usaron durante muchos años con un sentido eminentemente práctico: cálculos. Cuando se usaban tablas de logaritmos como herramienta principal para realizar cálculos prácticos, las tablas incluían los logaritmos de las funciones trigonométricas, no los valores de las funciones. Pero las tablas solo incluían los valores de los logaritmos de las funciones de ángulos de entre 0° y 45° , porque cualquier otro valor se puede deducir de forma sencilla a partir de estos.

Las fórmulas que permitían hacer esos cálculos entre diferentes ángulos tienen ahora una aplicación teórica, pero muy fértil, ya que se utilizan en gran cantidad de desarrollos.

Ángulos que se diferencian en un número exacto de circunferencias

Si la diferencia entre dos ángulos es un número exacto de circunferencias, todas las funciones trigonométricas toman los mismos valores en los dos ángulos.

Ejemplos

- ① Los ángulos 50° y 410° .

Su diferencia es $410^\circ - 50^\circ = 360^\circ$, una circunferencia.

Por tanto, $\sin(50^\circ) = \sin(410^\circ)$, $\cos(50^\circ) = \cos(410^\circ)$, etcétera.

- ② Los ángulos 100° y 2980° .

Su diferencia es $2980^\circ - 100^\circ = 2880 = 8 \cdot 360^\circ$, ocho circunferencias.

Por tanto, $\sin(100^\circ) = \sin(2980^\circ)$, $\cos(100^\circ) = \cos(2980^\circ)$, etcétera.

- ③ Los ángulos $2\pi/3$ rad y $14\pi/3$ rad.

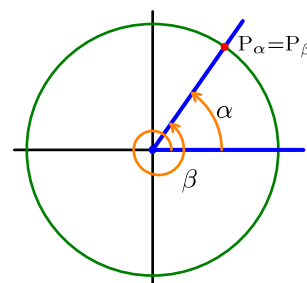
Su diferencia es $14\pi/3 \text{ rad} - 2\pi/3 = 12\pi/3 \text{ rad} = 4\pi \text{ rad}$, dos circunferencias.

Por tanto, $\sin(2\pi/3 \text{ rad}) = \sin(14\pi/3 \text{ rad})$, $\cos(2\pi/3 \text{ rad}) = \cos(14\pi/3 \text{ rad})$, etc.

Demostración

Si dos ángulos se diferencian en un número exacto de circunferencias, el punto de la circunferencia trigonométrica que los representa es el mismo, luego tienen igual el seno y el coseno. Como las demás funciones trigonométricas se definen a partir de esas dos, también son iguales.

A la derecha vemos la representación de un ejemplo: los ángulos α y β se diferencian en una circunferencia.



Notación

Para señalar que dos ángulos se diferencian en un número exacto de circunferencias, se suelen nombrar así: uno de ellos con una letra, por ejemplo α y el otro como $\alpha + k \cdot 360^\circ$ (en grados sexagesimales) o $\alpha + 2k\pi$ (en radianes), cuando $k \in \mathbb{Z}$.

(Es un poco raro escribir la «k» entre el «2» y la « π », pero es la costumbre.)