

Enunciados

- ① Calcula $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{30}$ sin usar la calculadora.
- ② En el siglo XVI, varios matemáticos italianos aplicaron una fórmula que ya era conocida entonces para resolver la ecuación « $x^3 - 15x - 4 = 0$ » y obtuvieron la solución $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, que no supieron interpretar correctamente. Usando los conocimientos sobre números complejos que has aprendido, estudia el problema para entenderlo mejor. Si por ti solo no llegas a ninguna conclusión que te parezca interesante, te sugerimos trabajar en estos pasos intermedios:
- Resuelve la ecuación « $x^3 - 15x - 4 = 0$ » redondeando a las milésimas las soluciones que no sean exactas.
 - Calcula en forma binómica $\sqrt[3]{2 + 11i}$ redondeando a las milésimas las soluciones que no sean exactas.
 - Calcula en forma binómica $\sqrt[3]{2 - 11i}$ redondeando a las milésimas las soluciones que no sean exactas.
 - Suma las parejas de soluciones obtenidas en los dos últimos apartados que sean números complejos conjugados redondeando a las milésimas las soluciones que no sean exactas.
- ③ Resuelve las siguientes ecuaciones dando las soluciones en forma binómica.
- $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$
 - $(z^2 - 4i)^2 = 9$
 - $z^3 - 2iz^2 + z - 2i = 0$
- ④ Resuelve la siguiente ecuación dando las soluciones en forma polar con el argumento principal en grados sexagesimales: $z^6 - \sqrt{128}z^3 + 64 = 0$
- ⑤ Calcula el valor que debe tener «x» para que la expresión $z = \frac{x+6i}{2-i}$ sea:
- Un número real.
 - Un número imaginario puro.
- ⑥ Una propiedad interesante es: «si P es un polinomio con coeficientes reales, para todo número complejo z se verifica que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ ».
- Comprueba la propiedad usando « $P(w) = w^2 + 2w - 3$ » y « $z = 1 + i$ ».
 - Usando la propiedad, demuestra que si un número complejo es raíz de un polinomio con coeficientes reales, también lo es su conjugado.
 - Resuelve la ecuación « $x^4 - 16x^3 + 99x^2 - 286x + 338 = 0$ » sabiendo que el número complejo $3 + 2i$ es una de sus soluciones. Da todos los resultados en forma binómica.

Soluciones

① 1

② (a) $x = \begin{cases} 4 \\ -0,268 \\ -3,732 \end{cases}$

(b) $\sqrt[3]{2+11i} = \{2+i; -1,866+1,232i; -0,134-2,322i\}$

(c) $\sqrt[3]{2-11i} = \{2-i; -0,134+2,322i; -1,866-1,232i\}$

(d) Las sumas son 4; -0,268 y -3,732.

③ (a) $z = \begin{cases} 3 \\ -3 \\ 2i \\ -2i \end{cases}$ (b) $z = \begin{cases} 2+i \\ -2-i \\ 1+2i \\ -1-2i \end{cases}$ (c) $z = \begin{cases} i \\ -i \\ 2i \end{cases}$

④ $z = \begin{cases} 4_{15^\circ} \\ 4_{135^\circ} \\ 4_{-105^\circ} \\ 4_{-15^\circ} \\ 4_{105^\circ} \\ 4_{-135^\circ} \end{cases}$

⑤ (a) $x = -12$ (b) $x = 3$

⑥ (a)

$$z = 1+i \Rightarrow \bar{z} = 1-i \Rightarrow P(\bar{z}) = P(1-i) = (1-i)^2 + 2(1-i) - 3 = 1 - 2i + i^2 + 2 - 2i - 3 = -1 - 4i$$

$$P(z) = P(1+i) = (1+i)^2 + 2(1+i) - 3 = 1 + 2i + i^2 + 2 + 2i - 3 = 1 + 2i - 1 + 2 + 2i - 3 = -1 + 4i$$

$$P(z) = -1 + 4i \Rightarrow \overline{P(z)} = -1 - 4i = P(\bar{z})$$

(b)

Llamamos P al polinomio y z a una de sus raíces; por tanto, $P(z) = 0$. Entonces:

$P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0$, luego $\bar{z}$ es una raíz de P.

(c)

$$x = \begin{cases} 3+2i \\ 3-2i \\ 5+i \\ 5-i \end{cases}$$

Indicaciones para un posible método de resolución:

1. El polinomio $P(x) = x^4 - 16x^3 + 99x^2 - 286x + 338$ es divisible entre $x - (2+3i)$.

2. Como $2-3i$ es raíz de P, el polinomio es divisible entre $x - (2-3i)$

3. El polinomio P es divisible entre $(x - (2+3i)) \cdot (x - (2-3i)) = x^2 - 6x + 13$

4. La división de P entre $x^2 - 6x + 13$ da el cociente $x^2 - 10x + 26$

5. Las raíces de $x^2 - 10x + 26$ son $5+i$ y $5-i$.