Raíces cuadradas de números negativos

Hasta este momento del curso, cuando llegábamos a una expresión con la raíz cuadrada de un número negativo, teníamos que decir «no existe» y parábamos el razonamiento. El motivo es que no existe ningún número **real** que elevado al cuadrado dé como resultado un número negativo. La clave de la veracidad de esta afirmación es la palabra «real». Pero nos podemos plantear si existe algún otro tipo de número cuyo cuadrado sí pueda dar un resultado negativo. ¿Tendría sentido esto?

En esta hoja vamos a explorar una posibilidad muy sencilla y más adelante te presentaremos el caso histórico que hizo arrancar el estudio en profundidad de un nuevo conjunto de números, más allá de los números reales.

Ejemplo

Vamos a aplicar la fórmula que ya conocemos desde el nivel 2 para resolver la ecuación de segundo grado $\frac{1}{2}x^2-\sqrt{3}x+2=0$:

$$\frac{1}{2}x^2-\sqrt{3}x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2}}{2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-4}}{1}=\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}=\begin{cases}\sqrt{3}+\sqrt{-1}\\ \sqrt{3}-\sqrt{-1}\end{cases}$$

Las soluciones obtenidas son, por lo menos, extrañas y en el nivel 2 diríamos, correctamente, que la ecuación no tiene solución. Ahora vamos a especificar más: decimos que la ecuación no tiene ninguna solución **real** (es decir, ninguna solución que sea un número real). Pero, ¿son soluciones o no? Lo podemos comprobar sustituyéndolas en la ecuación y viendo si verifican la igualdad.

Trataremos la expresión $\sqrt{-1}$ suponiendo que verifica las propiedades que se espera que cumpla cualquier expresión con radicales, como que $(\sqrt{-1})^2=-1$.

- Comprobación de $\sqrt{3}+\sqrt{-1}$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{-1})^2-\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{-1})+2=\frac{1}{2}((\sqrt{3})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}+(\sqrt{-1})^2)-(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}+2=$$
$$=\frac{1}{2}(3+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}-1)-3-\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}+2=\frac{1}{2}(2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1})-1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=$$
$$=1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}-1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=0.\ \text{Sí es solución.}$$

- Comprobación de $\sqrt{3}-\sqrt{-1}$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{-1})^2-\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{-1})+2=\frac{1}{2}((\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}+(\sqrt{-1})^2)-(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}+2=$$
$$=\frac{1}{2}(3-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}-1)-3+\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}+2=\frac{1}{2}(2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1})-1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=$$
$$=1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}-1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=0.\ \text{Sí es solución.}$$

Conclusión

La raíz cuadrada de −1 no es un número real, pero se comporta como los números reales y permite expresar lo que parecen soluciones de una ecuación de segundo grado que no tiene ninguna solución real.

Observación

La raíz de otros números negativos se puede expresar utilizando un número real y la raíz de menos uno. Por ejemplo: $\sqrt{-25}=\sqrt{25(-1)}=\sqrt{25}\sqrt{(-1)}=5\sqrt{-1}$.

 Licencia: CC0 1.0 Universal