

Justificación de la definición de producto de números complejos

Así como las definiciones de suma de números complejos y de producto de un número real por un número complejo son muy naturales, la de producto de números complejos tiene un aspecto extraño, hasta que se sabe el porqué de la definición; por eso, comenzamos por ese porqué.

¿Cómo multiplicaríamos las expresiones « $a+b\sqrt{-1}$ » y « $c+d\sqrt{-1}$ » respetando todas las propiedades habituales como se espera? Sería así:

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = ac+ad\sqrt{-1}+bc\sqrt{-1}+bd(\sqrt{-1})^2 = \\ = ac+(ad+bc)\sqrt{-1}+bd(-1) = (ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}$$

Definición de producto de números complejos

En forma cartesiana: $(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

En forma binómica: $(a+bi)(c+di) = ac-bd+(ad+bc)i$

(No te preocupes, en seguida veremos que realmente no es necesario saberse la definición de memoria.)

Ejemplos

$$\textcircled{1} \quad (2,3) \cdot (5,7) = (2 \cdot 5 - 3 \cdot 7, 2 \cdot 7 + 3 \cdot 5) = (-11, 29)$$

$$\textcircled{2} \quad (4+5i)(10+20i) = 4 \cdot 10 - 5 \cdot 20 + (4 \cdot 20 + 5 \cdot 10)i = -60 + 130i$$

Propiedad

Basta aplicar la definición que acabamos de ver para demostrar que

$$i^2 = -1$$

Efectivamente: $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$

Comentario

El hecho de que $i^2 = -1$ nos dice que i es una de las raíces cuadradas de -1 , pero no tiene por qué ser la única. Cuando calculemos las raíces de los números complejos lo veremos (pero tú puedes ir pensando cuál es la otra; solo hay dos).

Método práctico para multiplicar números complejos

Lo más sencillo es hacerlo con los números en forma binómica, pero sin usar la definición, solamente aplicando la regla general de multiplicación de dos binomios y aplicando que $i^2 = -1$ cuando sea necesario.

Ejemplos

$$\textcircled{3} \quad (6-3i)(-2+9i) = 6 \cdot (-2) + 6 \cdot 9i - 3i \cdot (-2) - 3i \cdot 9i = -12 + 54i + 6i - 27i^2 = \\ = -12 + 60i - 27(-1) = -12 + 27 + 60i = 15 + 60i$$

Cuando lo consideres oportuno, puedes saltarse pasos, como hacemos en los siguientes ejemplos.

$$\textcircled{4} \quad (-8+3i)(7-2i) = -56 + 16i + 21i - 6i^2 = -50 + 37i$$

$$\textcircled{5} \quad (2-5i)(3+4i) = 6 + 8i - 15i - 20i^2 = 26 - 7i$$

$$\textcircled{6} \quad (10-7i)(11-5i) = 110 - 50i - 77i + 35i^2 = 75 - 127i$$