

Definición de potencia de un número complejo

Si «z» es un número complejo y «n» es un número entero, se define z^n así:

* Si $n > 0$, $z^n = z \cdot z \cdot z \dots z$ (n factores)

* Si $n = 0$, $z^n = 1$

* Si $n < 0$, $z^n = 1 : z^{-n}$

Observa que es la misma definición que ya usamos para la potencia de base racional y exponente entero.

Potencia en forma polar

Si M_α es un número complejo y «n» es un número entero, entonces:

$$(M_\alpha)^n = (M^n)_{n\alpha}$$

Es decir, el módulo se eleva al exponente y el argumento se multiplica por el exponente. Si el argumento obtenido no es el argumento principal, le podremos sumar un número entero de circunferencias.

Ejemplos

① $(3_{10^\circ})^3 = 27_{30^\circ}$

② $(2_{0,1})^4 = 16_{0,4}$

Demostración

El caso $n = 0$ es trivial, porque tanto $(M_\alpha)^0$ como $(M^0)_{0\alpha}$ valen 1.

El caso $n > 0$ se demuestra usando la fórmula del producto:

$$(M_\alpha)^n = (M_\alpha) \cdot (M_\alpha) \cdot \dots \cdot (M_\alpha) = (M \cdot M \cdot \dots \cdot M)_{\alpha + \alpha + \dots + \alpha} = (M^n)_{n\alpha}$$

El caso $n < 0$ se demuestra usando el caso anterior y la fórmula del cociente:

$$(M_\alpha)^n = 1 : (M_\alpha)^{-n} = 1_0 : (M^{-n})_{-n\alpha} = (1 : M^{-n})_{-(n\alpha)} = (M^n)_{n\alpha}$$

(Recuerda que si $n < 0$, entonces $-n > 0$.)

Enunciados

Realiza las siguientes potencias y da el resultado en forma polar, con el argumento principal.

③ $(2_{125^\circ})^8$

④ $(3_{-2\pi/3})^5$

Resoluciones

③ Aplicamos la fórmula: $(2_{125^\circ})^8 = (2^8)_{8 \cdot 125^\circ} = 256_{1000^\circ}$

Dividimos con resto 1000 entre 360: $1000 = 2 \cdot 360 + 280$, luego $256_{1000^\circ} = 256_{280^\circ}$

Pero como 280° es mayor que 180° , hay que restar 360° : $280^\circ - 360^\circ = -80^\circ$.

Solución: $(2_{125^\circ})^8 = 256_{-80^\circ}$

④ Aplicamos la fórmula: $(3_{-2\pi/3})^5 = (3^5)_{5 \cdot (-2\pi/3)} = 243_{-10\pi/3}$

Dividimos con resto $-10\pi/3$ entre -2π : $-10\pi/3 = -2\pi - 4\pi/3$, luego

$243_{-10\pi/3} = 243_{-4\pi/3}$. Pero como $-4\pi/3$ es menor que $-\pi$, hay que sumar 2π :

$-4\pi/3 + 2\pi = 2\pi/3$. Solución: $(3_{-2\pi/3})^5 = 243_{2\pi/3}$