

Raíces de un número complejo

Si « z » es un número complejo distinto de 0 y « n » es un número natural, hay « n » números complejos « r » que verifican « $r^n = z$ ». Por tanto, todos los números complejos, salvo el 0, tienen « n » raíces enésimas. El motivo quedará claro cuando veas un ejemplo de cómo calcular esas raíces.

La demostración es muy sencilla, ya que si llamamos $z = M_\alpha$ y $r = N_\beta$, basta escribir $(N_\beta)^n = M_\alpha$ y deducir los valores de N y β , aunque no la mostraremos.

Cálculo de las raíces de un número complejo

Hacemos el cálculo en forma polar. Si $z = M_\alpha$ es un número complejo distinto de 0 y « n » es un número natural, las « n » raíces enésimas forman un conjunto de números (por eso hay que expresar el resultado con la notación de conjunto):

Expresado en radianes	Expresado en grados sexagesimales
$\sqrt[n]{M_\alpha} = \left\{ \sqrt[n]{M_{\alpha + 2k\pi}}, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\sqrt[n]{M_\alpha} = \left\{ \sqrt[n]{M_{\alpha + k \cdot 360^\circ}}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

- * El módulo de todas las raíces es la raíz del módulo.
- * Los argumentos de las raíces se van obteniendo dividiendo los argumentos entre el índice, hasta que se obtengan « n » resultados distintos.
- * En las fórmulas anteriores, se suele dar a « k » los valores de 0 a « $n-1$ ».
- * Si 360° es divisible entre « n », conviene simplificar antes de dar valores a « k ».

Ejemplo

Enunciado: calcula las raíces cúbicas de 8_{60° ; es decir: calcula $\sqrt[3]{8_{60^\circ}}$.

Resolución

Daremos las soluciones en forma polar; hay tres raíces cúbicas, luego la solución es un conjunto de tres números complejos.

El módulo de todas las raíces es $\sqrt[3]{8} = 2$.

La expresión general de los argumentos de las raíces es $\alpha = \frac{60^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}$.

Podemos simplificarla (no siempre se puede): $\alpha = 20^\circ + k \cdot 120^\circ$.

Damos a « k » los valores 0, 1 y 2. Para distinguir los argumentos que vamos obteniendo, usaremos subíndices.

$k = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 20^\circ$; $k = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 20^\circ + 120^\circ = 140^\circ$; $k = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 20^\circ + 2 \cdot 120^\circ = 260^\circ$

Ya hemos obtenido las tres raíces cúbicas: 2_{20° , 2_{140° y 2_{260° .

Si ahora diéramos otro valor cualquiera a « k », volveríamos a obtener una de las tres raíces que ya tenemos; por ejemplo:

$k = 3 \Rightarrow \alpha_3 = 20^\circ + 3 \cdot 120^\circ = 380^\circ$, pero $2_{380^\circ} = 2_{20^\circ}$.

Si nos pidieran dar los argumentos principales de todas las raíces, habría que cambiar 2_{260° por 2_{-100° .

Solución: $\sqrt[3]{8_{60^\circ}} = \{2_{20^\circ}, 2_{140^\circ}, 2_{260^\circ}\}$

Solución con los argumentos principales: $\sqrt[3]{8_{60^\circ}} = \{2_{20^\circ}, 2_{140^\circ}, 2_{-100^\circ}\}$

Comprobación: $(2_{20^\circ})^3 = 8_{60^\circ}$; $(2_{140^\circ})^3 = 8_{420^\circ} = 8_{60^\circ}$; $(2_{260^\circ})^3 = 8_{780^\circ} = 8_{60^\circ}$