

Resolución de ecuaciones usando números complejos

La aparición de los números complejos revoluciona completamente la resolución de ecuaciones con coeficientes reales, desembocando en el teorema fundamental del álgebra, que enunciaremos más adelante.

Soluciones de la ecuación de segundo grado

Llevas resolviendo estas ecuaciones desde el nivel 2, pero ahora que conoces los números complejos, debemos estudiarlas con más profundidad.

Consideramos la ecuación $ax^2+bx+c=0$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Su discriminante es $\Delta = b^2-4ac$. Hay que resolver tres casos:

- * $\Delta > 0$. La ecuación tiene dos soluciones reales, que llevas calculando desde el nivel 2. Se dice que la ecuación tiene **dos soluciones reales simples**.

■ **Ejemplo 1.** $x^2-2x-15=0 \Rightarrow x = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

- * $\Delta = 0$. La ecuación tiene una sola solución, que también sabes calcular desde el nivel 2. Pero como la solución se obtiene dos veces (sumando 0 y restando 0), se dice que la ecuación tiene **una solución real doble**.

■ **Ejemplo 2.** $x^2-12x+36=0 \Rightarrow x = 6$ (raíz doble)

- * $\Delta < 0$. La ecuación no tiene ninguna solución real, pero tiene dos raíces complejas que resultan ser números complejos conjugados. Se dice que la ecuación tiene **dos soluciones complejas simples**.

■ **Ejemplo 3.** $x^2-6x+10=0 \Rightarrow x = \begin{cases} 3+i \\ 3-i \end{cases}$

$$\text{Cálculo: } x^2-6x+10=0 \Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} =$$

$$= 3 \pm i = \begin{cases} 3+i \\ 3-i \end{cases}. \text{ Sabemos que } \sqrt{-4} = \sqrt{4_{180^\circ}} = \{2_{90^\circ}, 2_{-90^\circ}\} = \{2i, -2i\}$$

Multiplicidad de una solución

Se llama multiplicidad de una solución de una ecuación al número de veces que se obtiene (la definición precisa es un poco más larga que esto). Una raíz simple tiene multiplicidad 1; una raíz doble tiene multiplicidad 2, y así sucesivamente.

Ejemplo 4

La ecuación $(x-1)^3 \cdot (x-2)^4 = 0$ tiene dos soluciones, $x=1$ y $x=2$. La solución $x=1$ tiene multiplicidad 3 (es una solución triple) y la solución $x=2$ tiene multiplicidad 4 (es una solución cuádruple).

Teorema fundamental del álgebra

Este teorema se puede enunciar de muchas formas; elegimos dos:

- * Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes reales, la suma de las multiplicidades de las soluciones (reales o complejas) de la ecuación $P(x)=0$ es exactamente n .
- * Si P es un polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes reales, la suma de las multiplicidades de sus raíces (reales o complejas) es exactamente n .

No es aconsejable afrontar la demostración en la educación secundaria.