

Ecuaciones con coeficientes números complejos

Los números complejos pueden aparecer no solo como solución de una ecuación, sino también en su expresión. Son importantes las ecuaciones de la forma $P(x) = 0$, siendo P un polinomio con coeficientes complejos. En estas ecuaciones, se suele designar a la incógnita con la variable « z », que asociamos a un número complejo. Para resolverlas, puedes aplicar todas las técnicas que ya conoces.

Enunciados

Resuelve las siguientes ecuaciones. Da los resultados en forma binómica.

① $(4+3i)z+5i = 10$

② $z^2-(2+2i)z+3-2i = 0$

Resoluciones

① Despejamos « z » utilizando operaciones con números complejos.

$$\begin{aligned}(4+3i)z+5i &= 10 \Rightarrow (4+3i)z = 10-5i \Rightarrow z = \frac{10-5i}{4+3i} = \frac{(10-5i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \\ &= \frac{40-30i-20i+15i^2}{4^2-(3i)^2} = \frac{40-50i-15}{16+9} = \frac{25-50i}{25} = 1-2i\end{aligned}$$

Solución: $z = 1-2i$

② Utilizamos la fórmula para resolver la ecuación de segundo grado.

$$\begin{aligned}z^2-(2+2i)z+3-2i &= 0 \Rightarrow z = \frac{-(-(2+2i)) \pm \sqrt{(-(2+2i))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3-2i)}}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{2+2i \pm \sqrt{(2+2i)^2 - 4 \cdot (3-2i)}}{2} = \frac{2+2i \pm \sqrt{4+8i+(2i)^2 - 12+8i}}{2} = \\ &= \frac{2+2i \pm \sqrt{8i-12+8i}}{2} = \frac{2+2i \pm \sqrt{-12+16i}}{2} = \frac{2+2i \pm \sqrt{4(-3+4i)}}{2} = \\ &= \frac{2+2i \pm 2\sqrt{-3+4i}}{2} = 1+i \pm \sqrt{-3+4i} = 1+i \pm (1+2i) = \begin{cases} 1+i+1+2i \\ 1+i-(1+2i) \end{cases} = \begin{cases} 2+3i \\ -i \end{cases}\end{aligned}$$

(Hemos omitido el cálculo de la raíz cuadrada, que no es trivial).

Solución: $z = \begin{cases} 2+3i \\ -i \end{cases}$

Teorema fundamental del álgebra

Este teorema, que vimos enunciado con coeficientes reales, también es válido con coeficientes complejos. Se puede expresar de muchas maneras; mostramos dos:

- * Si $P(z)$ es un polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes complejos, la suma de las multiplicidades de las soluciones de la ecuación $P(z) = 0$ es exactamente n .
- * Si P es un polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes complejos, la suma de las multiplicidades de sus raíces (reales o complejas) es exactamente n .

La demostración correcta requirió más de cien años de esfuerzo de los mejores matemáticos de su tiempo. Para seguirla, es necesario manejar conceptos de análisis matemático demasiado prolijos para afrontarlos en la educación secundaria.