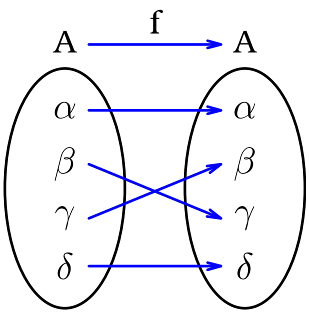
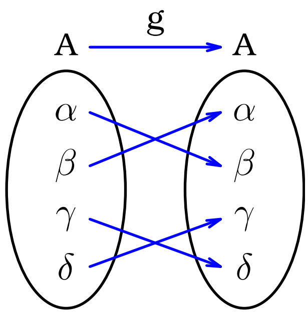
La composición de funciones no es conmutativa

Cuando existen dos funciones que tienen el mismo conjunto de salida y de llegada, existen las dos funciones composición. Es decir, las funciones «f» y «g» se podrán componer de dos modos: g∘f y f∘g. Pero incluso en esos casos, las dos funciones composición suelen ser diferentes, aunque hay casos en los que sí son iguales; por eso, decimos que la composición de funciones no es conmutativa. Con un poco de humor: ¿son la misma persona la madre de tu padre y el padre de tu madre?

Ejemplo 1

Consideramos el conjunto A={α,β,γ,δ} y las funciones f y g definidas con estos diagramas de Euler:

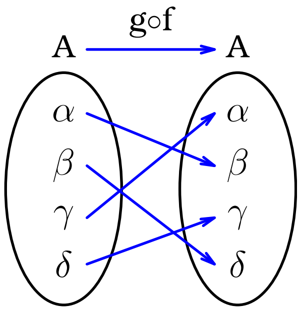


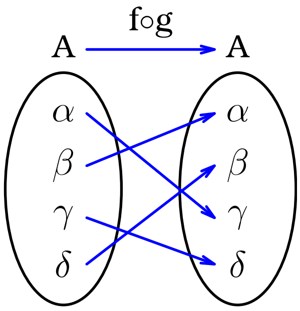


Calculamos la imagen mediante g∘f y f∘g de todos los elementos de A:

$(g\circ f)(\alpha) = g(f(\alpha)) = g(\alpha) = \beta$	$(f\circ g)(\alpha) = f(g(\alpha)) = f(\beta) = \gamma$
$(g\circ f)(\beta) = g(f(\beta)) = g(\gamma) = \delta$	$(f\circ g)(\beta) = f(g(\beta)) = f(\alpha) = \alpha$
$(g\circ f)(\gamma) = g(f(\gamma)) = g(\beta) = \alpha$	$(f\circ g)(\gamma) = f(g(\gamma)) = f(\delta) = \delta$
$(g\circ f)(\delta) = g(f(\delta)) = g(\delta) = \gamma$	$(f\circ g)(\delta) = f(g(\delta)) = f(\gamma) = \beta$

Con los estos valores, podemos representar los diagramas de Euler de g∘f y f∘g:





Vemos que $(g\circ f)(\alpha) \neq (f\circ g)(\alpha)$, $(g\circ f)(\beta) \neq (f\circ g)(\beta)$, $(g\circ f)(\gamma) \neq (f\circ g)(\gamma)$, $(g\circ f)(\delta) \neq (f\circ g)(\delta)$.

Por lo tanto, $g\circ f \neq f\circ g$. Con que hubiera sido diferente el resultado para un solo elemento de A, hubiera sido suficiente para demostrar que $g\circ f \neq f\circ g$.

Ejemplo 2

Consideramos las siguientes funciones reales de variable real:
$f(x) = x^2$, $g(x) = x+1$. Entonces, $g\circ f \neq f\circ g$.

Para demostrarlo, basta encontrar un número real α para el que se verifique que $(g\circ f)(\alpha) \neq (f\circ g)(\alpha)$. No hay que buscar mucho, nos vale el número 1:

$(g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(1) = 2$; $(f\circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 4$

