La composición de funciones

Creemos que ya has comprobado que la composición de funciones es una operación muy diferente de la suma, diferencia, producto y cociente de funciones. Por eso, el cálculo de la expresión analítica de una composición de funciones requiere de una explicación más detallada. Dedícale tiempo y atención, porque es un concepto fundamental para el cálculo de derivadas que verás en este nivel 5.

Ejemplos de calentamiento

Enunciado: dada la función real de variable real $f(x) = x^2+3x+1$, escribe las siguientes expresiones como polinomios lo más sencillos que sea posible escribiendo los monomios en orden descendente de grados: (a) $f(5t)$ (b) $f(2a-1)$ (c) $f(4x-3)$.

Resolución

La idea clave es entender qué significa la expresión analítica de f: nos está diciendo qué operaciones hay que realizar para obtener la imagen; lo dice para la letra equis (u otra), pero hay que aplicárselas a cualquier otra cosa que nos pongan. Puedes visualizar que «$f(x) = x^2+3x+1$» es lo mismo que «$f(\square) = \square^2+3\square+1$», y que en la cajita puede haber cualquier cosa, no solo un número o una letra. Para ayudarte a seguir las explicaciones, usaremos el color azul para indicar cómo hacemos la sustitución. Observa la necesidad de usar paréntesis; si no los escribiéramos, estaríamos calculando algo diferente: no es lo mismo $(5t)^2$ que $5t^2$.

(a) $f(\mathbf{5t}) = (\mathbf{5t})^2+3(\mathbf{5t})+1 = 25t^2+15t+1$

(b) $f(\mathbf{2a-1}) = (\mathbf{2a-1})^2+3(\mathbf{2a-1})+1 = 4a^2-4a+1+6a-3+1 = 4a^2+2a-1$

(c) $f(\mathbf{4x-3}) = (\mathbf{4x-3})^2+3(\mathbf{4x-3})+1 = 16x^2-24x+9+12x-9+1 = 16x^2-12x+1$

Enunciado

Definimos dos funciones reales de variable real: $p(x) = 2x^2-x$, $q(x) = 3x-5$

Calcula las siguientes funciones y da los resultados como polinomios lo más sencillos que sea posible escribiendo los monomios en orden descendente de grados.

① $q\circ p$ ② $p\circ q$ ③ $p\circ p$ ④ $q\circ q$

Resolución

Como nos piden varias funciones, debemos averiguar sus expresiones analíticas; para darlas, elegimos una letra para representar la variable independiente. Elegimos la equis.

① $q\circ p \rightarrow (q\circ p)(x) = q(p(x)) = q(\mathbf{2x^2-x}) = 3(\mathbf{2x^2-x})-5 = 6x^2-3x-5$

Solución: $(q\circ p)(x) = 6x^2-3x-5$

② $p\circ q \rightarrow (p\circ q)(x) = p(q(x) = p(\mathbf{3x-5}) = 2(\mathbf{3x-5})^2-(\mathbf{3x-5}) = \ldots = 18x^2-57x+55$

Solución: $(p\circ q)(x) = 18x^2-57x+55$

③ $p\circ p \rightarrow (p\circ p)(x) = p(p(x)) = p(\mathbf{2x^2-x}) = 2(\mathbf{2x^2-x})^2-(\mathbf{2x^2-x}) = \ldots = 8x^4-8x^3+x$

Solución: $(p\circ p)(x) = 8x^4-8x^3+x$

④ $q\circ q \rightarrow (q\circ q)(x) = q(q(x)) = q(\mathbf{3x-5}) = 3(\mathbf{3x-5})-5 = \ldots = 9x-20$

Solución: $(q\circ q)(x) = 9x-20$