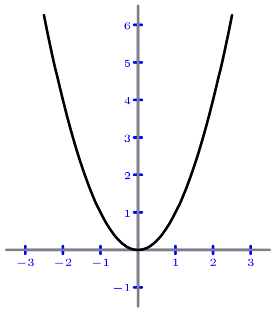
Funciones inversas de funciones no biyectivas

Existen multitud de funciones que no son biyectivas, pero aún así nos interesa mucho utilizar su función inversa. Para poder definir correctamente en estos casos la función inversa, reducimos como sea conveniente los dominios tanto de la función original como el de la inversa, hasta conseguir que con esas modificaciones las dos funciones sean biyectivas.

Ejemplo 1

La función $f(x) = x^2$ no es biyectiva; su representación gráfica está a la derecha.



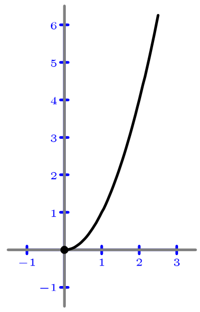
- ✱ No es inyectiva porque hay valores que tienen la misma imagen; por ejemplo, $f(2) = f(-2)$ porque $2^2 = (-2)^2$.
- ✱ No es sobreyectiva porque los números negativos no son imagen de ningún número real; por ejemplo, es imposible que $f(x) = -1$ porque siempre $x^2 \geqslant 0$.

Sin embargo, llevas usando desde el nivel 1 la función inversa de esta función, que es la función raíz cuadrada. La definición de raíz cuadrada sigue exactamente la definición de función inversa:

$\sqrt{a} = b$ cuando $b^2 = a$	$f^{-1}(x) = y$ cuando $f(y) = x$

Por tanto, está claro que si $f(x) = x^2$, debe ser $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

La solución técnica es restringir el dominio de la función $f(x) = x^2$ a la semirrecta $[0,\rightarrow)$ y observar que su imagen también es la misma semirrecta; es decir, convertimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $f\colon [0,\rightarrow) \to [0,\rightarrow)$. Su representación gráfica está a la derecha. Ahora la función sí es biyectiva y tiene perfecto sentido considerar la función $f^{-1}\colon [0,\rightarrow) \to [0,\rightarrow)$, cuya expresión analítica es $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.



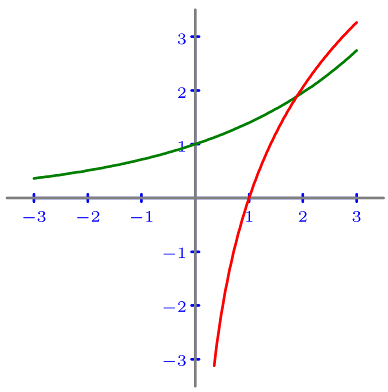
En general no tienen por qué coincidir el dominio de una función y el de su inversa, aunque sí ocurra en este ejemplo.

Ejemplo 2

En el nivel 4 definimos los logaritmos a partir de las potencias; por tanto, estábamos relacionando las funciones exponencial y logarítmica. Ahora podemos ver que son funciones inversas una de la otra; de esta manera:

Si consideramos la función exponencial $g(x) = a^x$, entonces $\log_a x = y$ cuando $a^y = x$, por lo que debe ser $g^{-1}(x) = \log_a x$.

Sin embargo, la función exponencial no es biyectiva: aunque sí es inyectiva, no es sobreyectiva, porque los números negativos no son imagen de ningún número real (recuerda que $a^x > 0$). Lo arreglamos modificando la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de manera que sea $g\colon \mathbb{R} \to (0,\rightarrow)$ y, de esa manera, $g^{-1}\colon (0,\rightarrow) \to \mathbb{R}$.



A la derecha puedes ver la gráfica de la función $g(x) = 1{,}4^x$ (en verde) y la de $g^{-1}(x) = \log_{1{,}4} x$ (en rojo) y comprobar que el dominio de una es la imagen de la otra.

