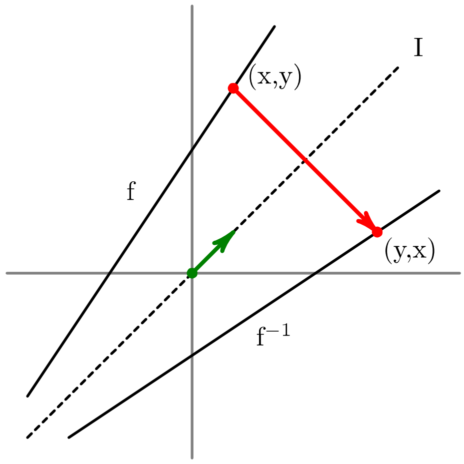
Representación gráfica de funciones inversas

Las gráficas de dos funciones inversas una de la otra son simétricas respecto a la gráfica de la función identidad $I(x) = x$, que es la recta bisectriz de los cuadrantes primero y tercero.

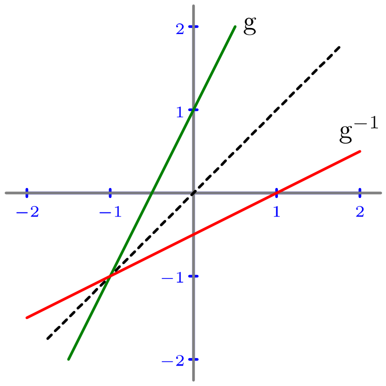
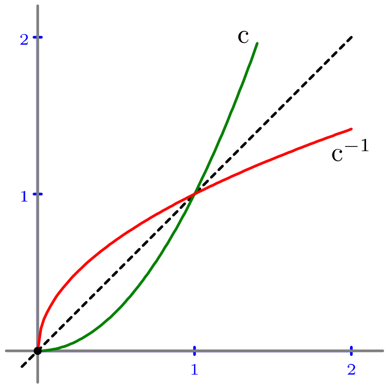
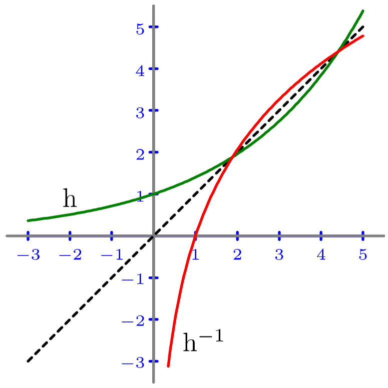
Demostración

Consideramos la función real de variable real f, biyectiva, y su función inversa f^{-1}. Si el punto $A = (x,y)$ pertenece a la gráfica de f, el punto $B = (y,x)$ pertenece a la gráfica de f^{-1}. A la derecha vemos una ilustración de la situación.



Para demostrar que las gráficas de f y de f^{-1} son simétricas respecto a la gráfica de I basta demostrar que el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al vector de dirección de la recta que es la gráfica de la función I, el vector $\vec{v}_I = (1,1)$. Para ello, calculamos su producto escalar: $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_I = (y-x, x-y)\cdot(1,1) = y-x+x-y = 0$

Ejemplos

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
		
$g(x) = 2x+1$ $g^{-1}(x) = 0,5x-0,5$	$c(x) = x^2$ $c^{-1}(x) = \sqrt{x}$	$h(x) = 1,4^x$ $h^{-1}(x) = \log_{1,4} x$

Caso particular

Cuando una función es igual a su inversa, deducimos que la gráfica de la función es simétrica de sí misma respecto a la gráfica de la función identidad; es decir: la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero es un eje de simetría de la gráfica.

Ejemplo 4

Consideramos la función $s(x) = -x+2$ y calculamos su función inversa:

$s(x) = -x+2 \Rightarrow y = -x+2 \Rightarrow x = -y+2 \Rightarrow s^{-1}(y) = -y+2 \Rightarrow s^{-1}(x) = -x+2$

$s(x) = s^{-1}(x) \Rightarrow s = s^{-1}$.

A la derecha vemos que, efectivamente, la gráfica de la función cumple la condición de simetría especificada.