

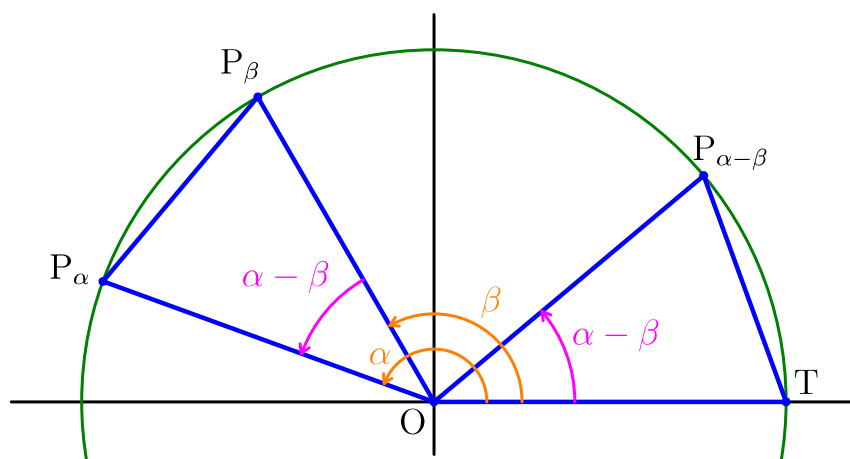
Identidades trigonométricas

Sabemos que existen una gran cantidad de ellas; ya has visto algunas en el nivel 4, otras en este nivel 5 y aún continuaremos estudiando otras más adelante en este nivel 5. Hay dos imprescindibles para demostrar una propiedad de los números complejos, que necesitaremos en seguida; por eso, hay que verlas ya mismo.

Coseno de una diferencia

Consideramos dos números reales α y β . Queremos obtener una fórmula que relacione $\cos(\alpha-\beta)$ con $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\beta$.

Para ello, representamos en la circunferencia trigonométrica los ángulos α , β y $\alpha-\beta$ y los puntos que los representan:



Los triángulos $OTP_{\alpha-\beta}$ y $OP_{\alpha}P_{\beta}$ son iguales porque tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos: $d(O,T) = d(O,P_{\alpha-\beta}) = d(O,P_{\alpha}) = d(O,P_{\beta}) = 1$.

Por tanto, $d(T,P_{\alpha-\beta}) = d(P_{\beta},P_{\alpha})$.

Para calcular esas dos distancias, recordamos las coordenadas de los cuatro puntos: $T = (1,0)$, $P_{\alpha-\beta} = (\cos(\alpha-\beta), \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$, $P_{\alpha} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $P_{\beta} = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$.

Como las distancias son números positivos, sus cuadrados son iguales a las cantidades subradicales. Esto nos permite eliminar las raíces cuadradas que aparecen en las fórmulas de las distancias:

$$d(T,P_{\alpha-\beta}) = d(P_{\beta},P_{\alpha}) \Rightarrow (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\operatorname{sen}(\alpha-\beta))^2 = (\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)^2$$

Desarrollamos los cuadrados:

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) &= \\ = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta \end{aligned}$$

Aplicamos la relación pitagórica ($\operatorname{sen}^2x + \cos^2x = 1$) tres veces:

$$-2\cos(\alpha-\beta) + 1 + 1 = -2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + 1 + 1$$

Restando 2 a cada miembro: $-2\cos(\alpha-\beta) = -2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Dividiendo entre -2 cada miembro: $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Llegamos a esta relación final:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$