

Obtención de otras tres identidades

Usando la expresión de $\cos(\alpha-\beta)$ que acabamos de obtener y algunas relaciones anteriores, se pueden deducir fácilmente otras tres identidades.

Seno de una diferencia

Consideramos dos números reales α y β . Queremos obtener una fórmula que relacione $\sin(\alpha-\beta)$ con $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ y $\cos\beta$.

Para ello, utilizamos que $\sin x = \cos(x-\pi/2)$:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha-\beta-\pi/2) = \cos(\alpha-(\beta+\pi/2)) = \cos\alpha\cos(\beta+\pi/2) + \sin\alpha\sin(\beta+\pi/2) = \\ &= \cos\alpha(-\sin\beta) + \sin\alpha\cos\beta = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Llegamos a esta relación final:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Seno de una suma

Consideramos dos números reales α y β . Queremos obtener una fórmula que relacione $\sin(\alpha+\beta)$ con $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ y $\cos\beta$.

Para ello, utilizamos que $x = -(-x)$:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha-(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha(-\sin\beta) = \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Llegamos a esta relación final:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Coseno de una suma

Consideramos dos números reales α y β . Queremos obtener una fórmula que relacione $\cos(\alpha+\beta)$ con $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ y $\cos\beta$.

Para ello, utilizamos que $x = -(-x)$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha(-\sin\beta) = \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Llegamos a esta relación final:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Resumen

Hemos deducido estas cuatro nuevas identidades:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$